دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی ، گرایش جبر

عنوان

توسیع‌هایی از حلقه‌های قویا تمیز و بررسی خواص آنها

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

پژوهشگر

سمیه ممی زاده

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: ممی زاده نام: سمیه

عنوان: توسیع‌هایی از حلقه‌های قویا تمیز و بررسی خواص آنها

استاد راهنما: دکتر ابراهیم هاشمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی گرایش: جبر

دانشگاه: شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۸۵

واژگان کلیدی: عناصر خودتوان، حلقه‌ی موضعی، حلقه‌ی ماتریسی، حلقه‌ی قویا تمیز، حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا نشان می‌دهیم اگر حلقه‌ی R قویا تمیز باشد. آنگاه هر ایده‌آل این حلقه قویا تمیز است. همچنین حلقه‌هایی مانند R را بررسی می‌کنیم که حلقه‌ی $M_n(R)$، قویا تمیز نیست. در ادامه شرایطی را ارائه می‌دهیم که برای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ قویا تمیز است. بعلاوه، این نتایج را به حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی گسترش می‌دهیم.

سپس بررسی می‌کنیم که چه هنگام حلقه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ روی حلقه‌ی موضعی، قویا تمیز است. چندین معیار هم ارز ارائه می‌کنیم که حلقه‌ی ماتریس‌های ۲×۲، قویا تمیز باشد.

مطالب ارائه شده در این پایان نامه، برگرفته از مقالات [۲]، [۳]، و [۷] می باشد.

تقدیم به

همسر مهربانم

و

پدر و مادر عزیزم

سپاس گزاری...

خداوند را شاکرم که به من فرصتی عطا فرمود تا بخشی از زندگی ام را با انسان‌های فرهیخته سپری نمایم و از رهگذر این مصاحبت به بسط بینش مبتنی بر یادگیری ام یاری رسانم.

اکنون که به یاری خداوند متعال، این دوره‌ی پرخاطره از تحصیلم را به پایان رسانده‌ام، بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر هاشمی که در تمامی مراحل، مرا مرهون راهنمایی های عالمانه و لطف صبورانه خود قرار داده‌اند، به گونه‌ای که یک گام به پیش رفتن را از ایشان آموختم، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. بی تردید انجام این پایان نامه بدون همکاری و راهنمایی ایشان امکان پذیر نبود.

در پایان، زحمات خانواده‌ی خود و خانواده ی همسرم را ارج می‌نهم که همواره در پستی و بلندی‌های زندگی، همراهم بوده‌اند و دعای خیرشان بدرقه‌ی راهم بوده است و تشکر می‌کنم از همسر صبورم که همراه و مایه دلگرمی من بوده است. همچنین از دوستان عزیزم خانم بی بی حنیفه اوزونی دوجی، زهرا وزیری، خدیجه پاسبان و رقیه ملک پور که مرا در این مهم یاری نمودند نهایت سپاسگزاری را دارم و برایشان آرزوی موفقیت می کنم.

سمیه ممی زاده

۱۳۹۲

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

نویسنده‌های زیادی حلقه‌های قویا تمیز را مورد بررسی قرار داده‌اند؛ از جمله کامیلو [۱] [۱]، ونگ [۲] و چن [۳] [۱۳]. چن، یانگ [۴] و زو [۵] در [۲]، نشان داده‌اند برای هر عدد اول p، $M_۲(\mathbb{Z}_p)$ قویا تمیز نیست. در [۳]، همان نویسندگان تحقیق کردند چه هنگام حلقه‌ی $M_۲(R)$ روی حلقه‌ی موضعی جابجایی R، قویا تمیز است. و محک ساده‌ای برای قویا تمیز بودن حلقه‌ی ماتریس‌ها بدست آوردند. ونگ و چن در [۱۳]، مثال‌هایی از حلقه‌ی ماتریس‌های مربعی روی حلقه موضعی جابجایی که قویا تمیز نیستند را آورده‌اند.

در این پایان‌نامه، در فصل اول، نمادها، تعاریف و مفاهیم مقدماتی را بیان می‌کنیم. در فصل دوم بررسی می‌کنیم که چه هنگام حلقه‌ی $M_۲(R)$، روی دامنه موضعی جابجایی R، قویا تمیز است. و مثال‌هایی را می‌آوریم که در آنها حلقه‌ی $M_۲(R)$ قویا تمیز نیست. همچنین اثبات می‌کنیم که حلقه ی $M_۲(R)$ قویا تمیز است اگر $R = \widehat{\mathbb{Z}}_p$. در ادامه نشان می‌دهیم، اگر R حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد، آنگاه برای هر $n \geq ۱$، $\mathbb{T}_n(R)$ قویا تمیز است.

در فصل سوم از حل‌پذیری معادله‌ی درجه‌ی دوم ساده در R، به قویا تمیز بودن حلقه‌ی $M_۲(R)$ می‌رسیم. همچنین نشان می‌دهیم حلقه‌ی $M_۲(R)$ قویا تمیز است، اگر و تنها اگر $M_۲(R[[x]])$ قویا تمیز باشد، اگر و تنها اگر $M_۲(R[x]/(x^n))$ قویا تمیز باشد، اگر و تنها اگر $M_۲(RC_۲)$ قویا تمیز باشد.

در فصل چهارم، چندین معیار هم ارز برای حلقه‌ی ماتریس‌های مربعی روی حلقه‌ی موضعی جابجایی ارائه می‌دهیم که ماتریس $A \in M_n(R)$ قویا تمیز است اگر و تنها اگر A یکه باشد، یا $A - I$ یکه باشد، یا A در $M_۲(R)$ قطری‌شدنی باشد. در آخر مشخص می‌کنیم چه هنگام ماتریس A روی $\mathbb{Z}_{(p)}$ قویاتمیز است.

---

[۱] Victor P. Camillo
[۲] Zhou Wang
[۳] Jianlong Chen
[۴] Xiande Yang
[۵] Yiqiang Zhou

۲.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این پایان‌نامه R نمایانگر یک حلقه‌ی شرکت پذیر و یکدار است و از نمادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$U(R)$: مجموعه‌ی یکه‌های حلقه‌ی R،

$M_n(R)$: ماتریس‌های $n \times n$ روی R،

trA: مجموع عناصر قطراصلی ماتریس A،

$detA$: دترمینان ماتریس A،

E_{ij}: ماتریس $n \times n$ ایی که درایه‌ی (i,j) -ام آن یک و بقیه صفر هستند،

$Q_c(R)$: میدان کسرهای دامنه‌ی جابجایی R،

$J(R)$: رادیکال جیکبسون حلقه‌ی R،

$Rad(R)$: رادیکال اول حلقه‌ی R،

$End_R(M)$: حلقه‌ی درونریختی های مدول M،

$R[X]$: حلقه‌ی چند جمله ای‌ها،

$R[[X]]$: حلقه‌ی سری های توانی،

$C_۲$: گروه دوری از مرتبه ی دو،

تعریف ۱.۲.۱. عنصر $e \in R$ را **خودتوان** می‌نامیم، هرگاه $e^۲ = e$.

تعریف ۲.۲.۱. خودتوان‌های $e, f \in R$ را **متعامد** می‌نامیم، هرگاه $ef = fe = ۰$.

تعریف ۳.۲.۱. **حلقه‌ی موضعی** ، حلقه‌ی تعویض‌پذیر یکداری است که ایده‌آل ماکسیمال منحصربه‌فرد دارد.

حلقه‌ی موضعی R اجتماع دو مجموعه $U(R)$ و $J(R)$ است. این حلقه خودتوان غیر بدیهی ندارد و تنها ایده‌آل ماکسیمال آن $J(R)$ است.

تعریف ۴.۲.۱. $۰ \neq a \in R$ را **تحویل‌ناپذیر** نامیم، هرگاه a یکه نباشد و اگر $a = xy$، آنگاه x یا y یکه باشد.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد و $a, b \in R$.

(۱) گوییم عنصر ناصفر a عنصرb را عاد می‌کند هرگاه $x \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $b = ax$، و با علامت $a|b$ نمایش می‌دهیم.

(۲) گوییم دو عنصر a و b **شریک** هستند، هرگاه $a|b$ و $b|a$.

تعریف ۶.۲.۱. دامنه تجزیه یکتا (UFD): دامنه صحیح R، دامنه تجزیه یکتا نامیده می‌شود، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) هر عنصر ناصفر غیریکه a از حلقه‌ی R را بتوانیم به صورت $a = p_1 \cdots p_m$ بنویسیم به‌طوری‌که p_1، $\cdots$ وp_m عناصری تحویل ناپذیر از R هستند.

(۲) اگر $p_1 \cdots p_m = a = q_1 \cdots q_n$، به طوری که p_1، $\cdots$ وp_m و q_1، $\cdots$ وq_n عناصری تحویل‌ناپذیر هستند آنگاه $m = n$ و $\delta \in S_n$ وجود داشته باشد به طوری که q_i و $p_{\delta(i)}$ شریک هستند.

تعریف ۷.۲.۱. دو ماتریس A و B را **متشابه** گوییم، اگر ماتریس وارون‌پذیری مانند P وجود داشته باشد که $PAP^{-1} = B$.

تعریف ۸.۲.۱. یک ماتریس $n \times n$ را **قطری شدنی** گوییم، اگر متشابه یک ماتریس قطری باشد.

تعریف ۹.۲.۱. اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، چند جمله‌ای $P_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$ را **چند جمله‌ای مشخصه‌ی** A گوییم و معادله‌ی $P_A(\lambda) = 0$ را **معادله‌ی مشخصه** مربوط به آن می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی با درایه هایی در میدان F باشد. اگر λ اسکالری در F و X یک بردار nتایی غیر صفر باشد که $AX = \lambda X$، آنگاه X را یک **بردار ویژه** وابسته به مقدار ویژه λ می‌نامیم.

در ادامه چند گزاره و قضیه درباره‌ی وارون‌پذیری عناصر در یک حلقه را مطرح می‌کنیم:

قضیه ۱.۲.۱۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار باشد و $x \in R$. در این صورت $x \in J(R)$، اگر و تنها اگر برای هر $r \in R$، عنصر $1 - rx$ در R وارون‌پذیر باشد.*

برهان. فرض کنیم $x \notin J(R)$، پس ایده‌آل ماکسیمال $\underline{m}$ وجود دارد که $x \notin \underline{m}$. لذا $\underline{m} \subsetneq <\underline{m}, x>$. چون $\underline{m}$ ماکسیمال است، پس $R = <\underline{m}, x>$. بنابراین $1 \in <\underline{m}, x>$. لذا $m \in \underline{m}$ و $r \in R$ وجود دارند که $1 = m + rx$. پس $m = 1 - rx$. چون $\underline{m}$ ماکسیمال است، پس m وارون‌پذیر نیست.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم $x \in J(R)$. اما $r \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $1 - rx$ وارون‌پذیر نباشد (فرض خلف). بنا به فرض، برای هر $\underline{m} \in Max(R)$، داریم $x \in \underline{m}$. چون $1 - rx$ وارون‌پذیر نیست پس $<1 - rx> \subsetneq R$. لذا $\underline{m}_1 \in Max(R)$ وجود دارد به طوری که $<1 - rx> \subseteq \underline{m}_1$. چون $x \in \underline{m}_1$ و $1 - rx \in \underline{m}_1$، پس $1 \in \underline{m}_1$، که با ماکسیمال بودن $\underline{m}_1$ در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و برای هر $r \in R$، عنصر $1 - rx$ وارون‌پذیر است. $\square$

گزاره ۱.۲.۱۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد و $a \in R$. در این صورت $a \in U(R)$، اگر و تنها اگر a داخل هیچ ایده‌آل ماکسیمالی نباشد.*

برهان. فرض کنیم $a \in U(R)$. پس $a^{-1}a = 1$. اگر a داخل ایده‌آل ماکسیمال $\underline{m}$ باشد (فرض خلف)، آنگاه $1 \in \underline{m}$. که تناقض است.

برای اثبات عکس گزاره، فرض کنیم a وارون‌پذیر نباشد (فرض خلف). در نتیجه $<a> \neq R$. می‌دانیم هر ایده‌آل سره در یک ایده‌آل ماکسیمال قرار می‌گیرد. بنابراین ایده‌آل ماکسیمال $\underline{m}$ شامل $<a>$ وجود دارد، یعنی $a \in \underline{m}$. که با فرض در تناقض است. $\square$

گزاره ۱.۲.۱۳. عنصر $x \in R$ *وارون‌پذیر چپ (وارون‌پذیر) است، اگر و تنها اگر $\overline{x} \in \overline{R} = R/J(R)$ وارون‌پذیر چپ (وارون‌پذیر) باشد.*

برهان. به [۸] گزاره‌ی ۸.۴ رجوع کنید. $\square$

قضیه ۱۴.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار باشد و $f(x) = a_\circ + \cdots + a_n x^n$، عنصری از $R[x]$ باشد. در این صورت $f(x)$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $a_\circ$ وارون‌پذیر و $a_۱, \cdots, a_n$ پوچتوان باشند.*

برهان. فرض کنیم $f(x)$ وارون پذیر باشد. پس چندجمله‌ای $g(x) = b_\circ + \cdots + b_m x^m \in R[x]$ وجود دارد به طوری که $f(x)g(x) = ۱$. در نتیجه

$$۱ = f(x)g(x) = a_\circ b_\circ + (a_\circ b_۱ + a_۱ b_\circ)x + \cdots + a_n b_m x^{n+m}$$

پس $a_\circ b_\circ = ۱$. لذا $a_\circ \in U(R)$. فرض کنیم P یک ایده‌آل اول دلخواه از حلقه‌ی R باشد. نشان می‌دهیم $a_۱, \cdots, a_n \in P$. چون P اول است، پس R/P حوزه صحیح است. در نتیجه $(R/P)[x]$ نیز حوزه صحیح است. چون $f(x)$ در حلقه‌ی $R[x]$ وارون‌پذیر است، پس چند جمله‌ای

$$\overline{f}(x) = (a_\circ + P) + (a_۱ + P)x + \cdots + (a_n + P)x^n$$

در حلقه‌ی $(R/P)[x]$ وارون‌پذیر است. بنابراین $\overline{g}(x) \in (R/P)[x]$ وجود دارد به طوری که $\overline{f}(x)\overline{g}(x) = ۱$. پس

$$deg(\overline{f}\overline{g}) = deg۱ = \circ \quad \Rightarrow \quad deg\overline{f} + deg\overline{g} = \circ.$$

در نتیجه $\overline{f}(x) \in R/P$. پس $a_۱ + P = P, \cdots, a_n + P = P$. لذا $a_۱ \in P, \cdots, a_n \in P$. چون P دلخواه است، پس $a_۱, \cdots, a_n \in \bigcap P = Rad(R)$. بنابراین $a_۱, \cdots, a_n$ پوچتوان هستند.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم $a_\circ$ وارون‌پذیر و $a_۱, \cdots, a_n$ پوچتوان باشند. پس

$$a_۱ x + a_۲ x^۲ + \cdots + a_n x^n,$$

نیز پوچتوان است. در نتیجه $a_\circ^{-۱}(a_۱ x + \cdots + a_n x^n)$ نیز پوچتوان است. لذا $۱ + a_\circ^{-۱}(a_۱ x + \cdots + a_n x^n)$ وارون‌پذیر است. پس $a_\circ(۱ + a_\circ^{-۱}(a_۱ x + \cdots + a_n x^n))$ نیز وارون‌پذیر است. در نتیجه $f(x)$ وارون‌پذیر است. □

فصل ۲

حلقه‌ی ماتریس‌های مربعی و حلقه‌ی ماتریس‌های مربعی بالا مثلثی قویا تمیز

۱.۲ مثال‌هایی از حلقه‌های ماتریسی که قویا تمیز نیستند

در این بخش R نمایانگر یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر یکدار است. در این بخش عنصر و حلقه‌ی قویا تمیز را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر ایده‌آل یک طرفه از حلقه‌ی قویا تمیز، قویا تمیز است. و قضایایی را بررسی می‌کنیم که در آن حلقه‌ی $M_2(R)$، روی دامنه موضعی جابجایی R، قویا تمیز است. و مواردی را ثابت می‌کنیم که در آن حلقه ی $M_2(R)$ قویا تمیز نیست.

تعریف ۱.۱.۲. عنصر $a \in R$ را **قویا تمیز** می‌نامیم، هرگاه $e \in R$ و $u \in U(R)$ وجود داشته باشند که $a = e + u$، $e^2 = e$ و $eu = ue$.

تعریف ۲.۱.۲. حلقه‌ی R را **قویا تمیز** می‌نامیم، هرگاه هر عنصر از R، قویا تمیز باشد.

گزاره ۳.۱.۲. *فرض کنیم I یک حلقه‌ی شرکت پذیر نه لزوماً یکدار باشد، و $a, b \in I$. تعریف می‌کنیم: $a \circ b = a + b + ab$، و قرار می‌دهیم*

$$Q(I) = \{x \in I : x \circ y = y \circ x = 0, \exists y \in I\}.$$

در این صورت حلقه‌ی R قویا تمیز است، اگر و تنها اگر هر عنصر R حاصل جمعی از یک عنصر خودتوان و یک عنصر $Q(R)$ باشد که با یکدیگر جابجا هم می‌شوند.

برهان. فرض کنیم R قویا تمیز باشد. لذا برای هر $a \in R$، خودتوان $e \in R$ و $u \in U(R)$ وجود دارند به طوری که $a = e + u$. قرار می‌دهیم $u = 1 + q$، ادعا می‌کنیم $q \in Q(R)$. فرض کنیم $r \in R$ وجود دارد که $q + r + rq = 0$. لذا

$$(u - 1) + r + r(u - 1) = (u - 1) + r(1 + u - 1) = u - 1 + ru = 0.$$

در نتیجه $r = u^{-1}(1 - u)$. پس $-a = (1 - e) - (u + 1)$، که $(1 - e)$ خودتوان است و $(u + 1) \in Q(R)$.

بعکس، فرض کنیم که هر عنصر از R حاصل جمعی از یک خودتوان و عنصری از $Q(R)$ باشد. و فرض کنیم $a \in R$، پس $-a \in R$. قرار می‌دهیم $-a = e + q$ به طوری که e خودتوان، $q \in Q(R)$ و $eq = qe$. لذا $a = (۱ - e) - (۱ + q)$. واضح است که

$$(۱ + q)(۱ - e) = (۱ - e)(۱ + q), \quad (۱ - e)^۲ = ۱ - e.$$

از طرفی $(۱ + p)$، وارون $(۱ + q)$ است به طوری که $p \circ q = q \circ p = ۰$. لذا R قویا تمیز است. $\square$

تعریف ۴.۱.۲. حلقه‌ی I را **قویا تمیز** می‌نامیم، هرگاه برای هر $a \in I$، $e \in I$ و $q \in Q(I)$ وجود داشته باشند که $a = e + q$، $e^۲ = e$ و $eq = qe$.

لم ۵.۱.۲. *فرض کنیم I ایده‌آل یک طرفه ازحلقه R باشد. در این صورت I قویا تمیز است اگر و تنها اگر هر عضو ایده‌آل I در R قویا تمیز باشد.*

برهان. نشان می‌دهیم هر عضو ایده‌آل I در R قویا تمیز است. فرض کنیم $a \in I$. بنا به فرض a در I قویا تمیز است. پس $e^۲ = e \in I$ و $q \in Q(I)$ وجود دارند که $-a = e + q$ و $eq = qe$. پس

$$a = -e - q = ۱ - ۱ - e - q = (۱ - e) - (۱ + q).$$

چون $q \in Q(R)$، پس $۱ + q \in U(R)$ (وارون آن $۱ + p$ است به طوری که $p \circ q = ۰ = q \circ p$). از طرفی واضح است که $(۱ - e)^۲ = (۱ - e)$ و $(۱ - q)(۱ - e) = (۱ - e)(۱ - q)$. بنابراین a در R قویا تمیز است. چون a دلخواه است پس هر عضو a در R قویا تمیز است.

بعکس، فرض کنیم $a \in I$. پس a در R قویا تمیز است. پس $e^۲ = e \in R$ و $u \in U(R)$ وجود دارند که $-a = e - u$ و $eu = ue$. بنابراین

$$۱ - e = u^{-۱}[u(۱ - e)] = u^{-۱}[(a + e)(۱ - e)] = u^{-۱}[a(۱ - e)] = u^{-۱}[(۱ - e)a]$$
$$(= au^{-۱}(۱ - e)) \in I.$$

قرار می‌دهیم $u = ۱ + q$ که $q \in Q(R)$. پس

$$a = -e + u = -e + ۱ + q = (۱ - e) + q \in I.$$

پس $q \in I$. لذا $q \in Q(R) \cap I = Q(I)$. □

قضیه ۶.۱.۲. *فرض کنیم حلقه‌ی I قویا تمیز باشد. در این صورت هر ایده‌آل یک طرفه از حلقه‌ی I قویا تمیز است.*

برهان. فرض کنیم A یک ایده‌آل چپ از حلقه‌ی I باشد (برای ایده‌آل راست نیز مانند ایده‌آل چپ اثبات می‌شود). فرض کنیم R گروه آبلی جمعی $R = \mathbb{Z} \oplus I$ باشد و برای هر $r_i \in I$ و $k_i \in \mathbb{Z}$، ضرب در R به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$(k_۱, r_۱)(k_۲, r_۲) = (k_۱ k_۲, r_۱ r_۲ + k_۱ r_۲ + k_۲ r_۱).$$

در این صورت R یک حلقه‌ی یکدار با واحد $(۱, ۰)$ است و نگاشت $R \longrightarrow I$ با ضابطه ی $r \longmapsto (۰, r)$ یک تکریختی از حلقه‌ها است.

نگاشت $(۰, A) \longrightarrow A$ با ضابطه‌ی $a \longmapsto (۰, a)$ یکریختی است. پس $(۰, A) \cong A$ ایده‌آل چپی از حلقه‌ی R است. برای کامل شدن اثبات قضیه، بنا به لم ۵.۱.۲، کافیست نشان دهیم که برای هر $a \in A$، $(۰, a)$ در حلقه‌ی R قویا تمیز است. چون $a \in I$ و حلقه‌ی I قویا تمیز است. پس $-a = f + q$ که $f^۲ = f \in I$ و $q \in Q(I)$. در نتیجه $(۰, a) = (۱, -f) + (-۱, -q)$ که $(۱, -f)^۲ = (۱, -f)$ و $(-۱, -q) = -(۱, q) \in U(R)$ (وارون آن $-(۱, p)$ به طوری که $p \circ q = q \circ p = ۰$). علاوه بر این $(۱, -f)(-۱, -q) = (-۱, -q)(۱, -f)$. پس $(۰, a)$ در R قویا تمیز است. لذا حلقه‌ی I قویا تمیز است. □

نتیجه ۷.۱.۲. *اگر R یک حلقه‌ی قویا تمیز باشد، آنگاه برای هر خودتوان $e \in R$، eRe قویا تمیز است.*

برهان. چون eR یک ایده‌آل راست از حلقه‌ی R است، پس بنا به قضیه‌ی ۶.۱.۲، eR قویا تمیز است. از طرفی eRe ایده‌آل چپ از eR است و چون eR قویا تمیز است، پس بنا به قضیه‌ی ۶.۱.۲، eRe نیز قویا

تمیز است. $\square$

لم ۸.۱.۲. *فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح باشد و $A \in M_{۲}(R)$. در این‌صورت $A^{۲} = A$ اگر و تنها اگر $A = ۰$ یا $A = I$ یا $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱-a \end{pmatrix}$ به طوری که $bc = a - a^{۲}$.*

برهان. فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. اگر $A = ۰$ آنگاه $A^{۲} = ۰$، پس $A^{۲} = A$. اگر $A = I$، آنگاه $A^{۲} = I^{۲} = I = A$.

اگر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱-a \end{pmatrix}$ به طوری که $bc = a - a^{۲}$، آنگاه

$$\begin{aligned} A^{۲} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{۲}+bc & ab+b-ba \\ ca+c-ca & cb+۱+a^{۲}-۲a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{۲}+a-a^{۲} & b \\ c & a-a^{۲}+۱+a^{۲}-۲a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱-a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

یعنی $A^{۲} = A$.

بعکس، فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ به طوری که $A^{۲} = A$.

$$A^{۲} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{۲}+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

از تساوی فوق داریم

$$bc = a - a^{۲},$$

$$b(a+d-۱) = ۰,$$

$$c(a+d-۱) = ۰,$$

$$bc = d - d^{۲}.$$

بنابراین $a - a^{۲} = d - d^{۲}$، از این رو

$$a^{۲} - a + d - d^{۲} = (a-d)(a+d-۱) = ۰$$

چون R دامنه‌ی جابجایی است، پس $a-d=0$ یا $a+d-1=0$.

حالت اول: فرض کنیم $a-d=0$. پس $a=d$. و با توجه به رابطه‌های بالا داریم $b=c=0$. در نتیجه $a-a^2=a(1-a)=0$. چون R دامنه است، پس $a=0$ یا $1-a=0$. اگر $d=a=0$ آنگاه $A=0$. اگر $d=a=1$ آنگاه $A=I$.

حالت دوم: فرض کنیم $a+d-1=0$. پس $d=1-a$. بنابراین $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$ به طوری که $bc=a-a^2$. □

تعریف ۹.۱.۲. عنصر a در حلقه‌ی R را **مربع** می نامیم، هرگاه $b\in R$ وجود داشته باشد به طوری که $a=b^2$.

لم ۱۰.۱.۲. *فرض کنیم حلقه‌ی R یک دامنه‌ی صحیح باشد و $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\in M_2(R)$، $s=a_{11}-a_{22}$ و $t=(trA)^2-4detA$. اگر A و $I-A$ غیر یکه و A عنصر قویا تمیز در $M_2(R)$ باشد، آنگاه s^2t در R مربع است.*

برهان. چون A و $I-A$ غیر یکه هستند و A عنصر قویا تمیز در $M_2(R)$ است، پس بنا به لم ۸.۱.۲، $a,b,c\in R$ وجود دارند که $bc=a-a^2$ و $E=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$ خودتوان است. بنابراین $A=E+(A-E)$ یک عنصر قویا تمیز در $M_2(R)$ است. پس $E(A-E)=(A-E)E$. در نتیجه

$$sb=a_{12}(2a-1),\qquad sc=a_{21}(2a-1).$$

چون $bc=a-a^2$، پس داریم $a_{12}a_{21}(2a-1)^2=s^2bc=s^2(a-a^2)=s^2a-s^2a^2$. در نتیجه

$$(s^2+4a_{12}a_{21})a^2-(s^2+4a_{12}a_{21})a+a_{12}a_{21}=0.$$

چون $t=(trA)^2-4detA=(s)^2+4a_{12}a_{21}$، پس $ta^2-ta=-a_{12}a_{21}$. در نتیجه

$$[t(2a-1)]^2=t(4ta^2-4ta+t)=t(-4a_{12}a_{21}+t)=ts^2=s^2t.$$

□

نتیجه ۱۱.۱.۲. *فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح، $q \in R$ و $p \in R$ غیر یکه باشد. اگر* $A = \begin{pmatrix} p+۱ & p \\ q & p \end{pmatrix}$ *یک عنصر قویا تمیز در $M_۲(R)$ باشد، آنگاه $۴qp + ۱$ در R مربع است.*

برهان. چون p غیر یکه است، پس A و $A - I$ غیر یکه هستند. از طرفی داریم $s = (p+۱) - p = ۱$ و $t = (trA)^۲ - ۴detA = (۲p+۱)^۲ - ۴(p^۲+p-pq) = ۱ + ۴pq$. در نتیجه بنا به لم ۱.۴، $۴pq + ۱ = s^۲t$ در R مربع است. $\square$

در این فصل، ω نمایانگر عدد مختلطی است که $\omega^۲ \in \mathbb{Z}$ و $\omega \notin Q$. و فرض می‌کنیم

$$\mathbb{Z}(\omega) = \{n + m\omega : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

در این صورت $\mathbb{Z}(\omega)$ دامنه است. و نمایش هر عنصر از این مجموعه به شکل $n + m\omega$، یکتا است. در قضیه‌ی زیر، فرض می‌کنیم هر زیر حلقه از $\mathbb{Z}(\omega)$، شامل عدد طبیعی یک باشد.

قضیه ۱۲.۱.۲. *فرض کنیم $\mathbb{Z}(\omega)$ دامنه‌ی تجزیه یکتا باشد. فرض کنیم R زیر حلقه‌ای از $Q_c(\mathbb{Z}(\omega))$ باشد. و زیر حلقه‌ی S از $\mathbb{Z}(\omega)$ وجود دارد که $S \subseteq R \subseteq Q_c(S)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) $R = Q_c(R) (= Q_c(S))$

(۲) *برای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ قویا تمیز است.*

(۳) *$n > ۱$ وجود دارد که $M_n(R)$ قویا تمیز است.*

(۴) *$M_۲(R)$ قویا تمیز است.*

برهان. :(۱) $\Leftarrow$ (۲) $\Leftarrow$ (۳) واضح است.

(۳) $\Leftarrow$ (۴) : با توجه به نتیجه‌ی ۷.۱.۲، واضح است.

(۴) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $R \neq Q_c(R)$.

حالت اول: عنصر ناصفر غیر یکه p از R وجود دارد به طوری که $p \in S - \mathbb{Z}$. چون $p \in \mathbb{Z}(\omega)$ ($p \in S \subseteq \mathbb{Z}(\omega)$)، پس $u, v \in \mathbb{Z}$ وجود دارند که $p = u + v\omega$. در نتیجه $v \neq ۰$. عدد اول $q \in \mathbb{Z}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$q > \max\{(۲v)^۲|\omega^۲| + ۱, ۴|u|\}.$$

بنا به بند (۴)، $A = \begin{pmatrix} p+۱ & p \\ q & p \end{pmatrix}$ یک عنصر قویا تمیز از $M_۲(R)$ است. پس بنا به نتیجه ۲.۱.۱۱، $۴qp+۱$ در R مربع است. چون $۴qp + ۱ \in \mathbb{Z}(\omega)$ و $\mathbb{Z}(\omega)$ دامنه تجزیه یکتا است، پس معادله‌ی $۴qp + ۱ = x^۲$ در $Q_c(\mathbb{Z}(\omega))$ حل پذیر است، اگر و تنها اگر معادله در $\mathbb{Z}(\omega)$ حل پذیر باشد. بنابراین $w \in \mathbb{Z}(\omega)$ وجود دارد که

$$w^۲ = ۴qp + ۱. \tag{۱.۲}$$

لذا $m, n \in \mathbb{Z}$ وجود دارند به طوری که $w = n + m\omega$. در این صورت از رابطه‌ی ۱.۲، نتیجه می‌گیریم

$$w^۲ = ۴q(u + v\omega) + ۱ = ۴qu + ۴qv\omega + ۱ = n^۲ + m^۲\omega^۲ + ۲nm\omega.$$

لذا

$$۴qu + ۱ = n^۲ + m^۲\omega^۲, \tag{۲.۲}$$

و

$$۲qv = nm. \tag{۳.۲}$$

چون q یک عدد اول است، پس $q|n$ یا $q|m$. اگر $q|n$، قرار می دهیم $n = qn_۱$. پس بنا به رابطه ۳.۲، $۲v = n_۱m$. چون $v \neq ۰$، پس $n_۱ \neq ۰$. بنابراین $m = \frac{۲v}{n_۱}$. از این رو از رابطه‌ی ۲.۲ نتیجه می‌گیریم

$$۴qu + ۱ = n^۲ + m^۲\omega^۲ = q^۲n_۱^۲ + (\frac{۲v}{n_۱})^۲\omega^۲ \tag{۴.۲}$$

پس

$$q|[(\frac{۲v}{n_۱})^۲\omega^۲ - ۱]. \tag{۵.۲}$$

می‌دانیم که

$$|(\frac{2v}{n_1})^2\omega^2 - 1| \leq (\frac{2v}{n_1})^2|\omega^2| + 1 \leq (2v)^2|\omega^2| + 1 < q,$$

بنابراین از رابطه‌ی ۵.۲، نتیجه می‌گیریم $(\frac{2v}{n_1})^2\omega^2 - 1 = 0$. بنابراین رابطه‌ی ۴.۲، ایجاب می‌کند

$$4qu + 1 = q^2n_1^2 + \frac{2v}{n_1})^2\omega^2.$$

لذا

$$4qu = q^2n_1^2 + \frac{2v}{n_1})^2\omega^2 - 1 = q^2n_1^2.$$

درنتیجه $4u = qn_1^2$. بنابراین $q = \frac{4u}{n_1^2}$، که با فرض $q > 4|u|$ در تناقض است.

پس $q|m$. قرار می‌دهیم $m = qm_1$. پس بنا به رابطه‌ی ۳.۲، $2qv = nqm_1$. در نتیجه $2v = nm_1$.

چون $m_1, v \neq 0$، پس $n = \frac{2v}{m_1}$. لذا از رابطه‌ی ۲.۲، داریم

$$4qu + 1 = n^2 + m^2\omega^2 = (\frac{2v}{m_1})^2 + q^2m_1^2\omega^2.$$

در نتیجه $(\frac{2v}{m_1})^2 - 1 = q(4u - qm_1^2\omega^2)$. در نتیجه $q|(\frac{2v}{m_1})^2 - 1$. چون $q > (2v)^2|\omega^2| + 1$، پس $(\frac{2v}{m_1})^2 - 1 < q$ و $(\frac{2v}{m_1})^2 - 1 \geq 0$. پس $(\frac{2v}{m_1})^2 - 1 = 0$. این نشان می‌دهد که $q = \frac{4u}{m_1^2\omega^2} \leq 4|u|$، $\frac{4|u|}{m_1^2|\omega|^2}$، که با $q > 4|u|$ در تناقض است.

حالت دوم: فرض کنیم هر عنصر ناصفر غیر یکه R، هم در S و هم در $\mathbb{Z}$ باشد. ادعا می‌کنیم $S = \mathbb{Z}$.

فرض کنیم $S \neq \mathbb{Z}$ (فرض خلف). در این صورت $m, n \in \mathbb{Z}$ و $m \neq 0$ وجود دارند به طوری که $n + m\omega \in S$. چون $R \neq Q_c(R)$، پس عنصر ناصفر غیر یکه $z \in R$ وجود دارد که $z \in S$. بنا به فرض $z \in \mathbb{Z}$. بنابراین $z(n + m\omega)$، یک عنصر ناصفر غیر یکه در R است اما $zm \neq 0$. پس $z(n + m\omega) \notin \mathbb{Z}$، که با فرض در تناقض است. لذا $S = \mathbb{Z}$.

بنا به فرض داریم $\mathbb{Z} \subseteq R \subset Q$. فرض کنیم عدد اول $p \in R$ وجود داشته باشد که $\frac{1}{p} \notin R$. عدد اول q را انتخاب می‌کنیم به طوری که $q > p + 2$. با توجه به بند (۴)، $A = \begin{pmatrix} p+1 & p \\ q & p \end{pmatrix}$ یک عنصر قویا

تمیز در $M_2(R)$ است. از این رو، بنا به نتیجه‌ی ۲.۱.۱۱، $4qp+1$ در R مربع است. چون $R \subseteq Q$ و $4qp+1 \in \mathbb{Z}$، پس $m \in \mathbb{Z}$ وجود دارد که $m^2 = 4pq+1$ و $m > 1$. بنابراین

$$qp = \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m-1}{2}.$$

اگر $\frac{m+1}{2} = 1$، آنگاه $m = 1$.

اگر $\frac{m+1}{2} = p$، آنگاه $m = 2p-1$. پس $qp = \frac{4p^2-4p}{4} = p^2 - p$. در نتیجه $q = p-1$.

اگر $\frac{m+1}{2} = q$، آنگاه $m = 2q-1$. پس $qp = \frac{2q(2q-2)}{4} = \frac{4q^2-4q}{4} = q^2 - q$. در نتیجه $q = p+1$.

اگر $qp = m+12$، آنگاه $m = 2pq - 1$. پس $qp = \frac{2pq(2qp-2)}{4} = (qp)^2 - qp$. در نتیجه $qp = 2$.

اما موارد بالا بنا به انتخاب q، غیر ممکن هستند. پس فرض خلف باطل است و $R = Q_c(R)$. $\square$

حلقه‌ی حاصل از موضعی سازی حلقه‌ی جابجایی R در ایده‌آل اول P از R را با R_P نمایش می‌دهیم. اگر $P = pR$ که $p \in R$، قرار می‌دهیم $R_{(p)} = R_P$. توجه داریم که اگر $Q_c(R)$ میدان کسرهای R باشد، آنگاه

$$R_P = \{\frac{a}{b} \in Q_c(R) : b \notin P\}.$$

مثال ۲.۱.۱۳. فرض کنیم $R = \{m/n \in \mathbb{Q} : \text{فرد است } n\}$. در این صورت حلقه‌ی $M_2(R)$ قویا تمیز نیست.

حل. با محاسبه مستقیم، خودتوان‌های غیر بدیهی که در شرایط زیر صدق می‌کنند را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix},$$

به طوری که $a, b, c \in R$ و

$$bc = a - a^2. \qquad (۲.۶)$$

دو ماتریس $\begin{pmatrix} ۸ & ۶ \\ ۳ & ۷ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۶ & ۷ \\ ۶ & ۳ \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. این دو ماتریس در $M_۲(R)$ غیر یکه هستند، زیرا

$$\begin{pmatrix} \frac{۷}{۲۴} & -\frac{۶}{۲۴} \\ -\frac{۳}{۲۴} & \frac{۸}{۲۴} \end{pmatrix} \notin M_۲(R), \qquad \begin{pmatrix} \frac{۶}{۳۸} & -\frac{۶}{۳۸} \\ -\frac{۳}{۳۸} & \frac{۷}{۳۸} \end{pmatrix} \notin M_۲(R).$$

پس قرار می‌دهیم

$$\begin{pmatrix} ۸ & ۶ \\ ۳ & ۷ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۸-a & ۶-b \\ ۳-c & ۶+a \end{pmatrix}.$$

فرض کنیم

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۸-a & ۶-b \\ ۳-c & ۶+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۸-a & ۶-b \\ ۳-c & ۶+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱-a \end{pmatrix}.$$

در نتیجه از درایه های $(۱,۱)$-ام و $(۲,۱)$-ام داریم:

$$a(۸-a)+b(۳-c) = (۸-a)a+(۶-b)c, \tag{۷.۲}$$

$$c(۸-a)+(۱-a)(۳-c) = (۳-c)a+(۶+a)c. \tag{۸.۲}$$

لذا از روابط ۶.۳، ۷.۳ و ۸.۳ داریم:

$$۸a-a^۲+۳b-bc = ۸a-a^۲+۶c-bc,$$

$$۸c-ac+۳-c-۳a+ac = ۳a-ac+۶c+ac.$$

در نتیجه

$$b = \frac{۶c}{۳} = ۲c, \quad c = ۶a-۳.$$

لذا $b = ۱۲a-۶$. از اینکه $bc = a-a^۲$ داریم:

$$(۱۲a-۶)(۶a-۳) = ۷۲a^۲-۳۶a-۳۶a+۱۸ = a-a^۲.$$

در نتیجه $۷۳a^۲-۷۳a+۱۸=۰$. چون $a = \frac{۷۳\pm\sqrt{۷۳}}{۱۴۶}$ جواب معادله است که در R قرار ندارد، پس $M_۲(R)$ قویا تمیز نیست.

نتیجه ۱۴.۱.۲. *فرض کنیم $R = \mathbb{Z}(\omega)$ یک دامنهی تجزیه یکتا باشد (برای مثال $\omega = \sqrt{-۲}, \sqrt{-۳}, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}, \cdots$).*

(۱) *برای هر ایده‌آل اول P از حلقه R و برای هر $n \geq ۲$، $M_n(R_P)$ قویا تمیز نیست.*

(۲) *برای هر عنصر اول p و برای هر $n \geq ۲$، $M_n(\mathbb{Z}_{(p)})$ قویا تمیز نیست.*

برهان. بنا به قضیه ۱۲.۱.۲ برقرار است. □

قضیه ۱۵.۱.۲. *فرض کنیم S یک دامنه‌ی صحیح با مشخصه‌ی مخالف ۲ و R زیر حلقه‌ای از $Q_c(R)$ باشد به طوری که $R \subseteq S[x]$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) $R = Q_c(R)(= Q_c(S[x]))$.

(۲) *برای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ قویا تمیز است.*

(۳) $n > ۱$ *وجود دارد که $M_n(R)$ قویا تمیز است.*

(۴) $M_۲(R)$ *قویا تمیز است.*

برهان. (۱) ⇐ (۲) ⇐ (۳): واضح است.

(۳) ⇐ (۴): بنا به نتیجه۷.۱.۲ برقرار است.

(۴) ⇐ (۱): فرض کنیم $R \neq Q_c(R)$. بنابراین چند جمله‌ای ناصفر $f(x) \in S[x]$ وجود دارد به طوری که $\frac{۱}{f(x)} \notin R$. فرض کنیم k عدد صحیح مثبت باشد به طوری که درجه‌ی $x^k f(x)$ یک عدد صحیح مثبت فرد باشد. بنا به بند (۴)، $A = \begin{pmatrix} f(x)+۱ & f(x) \\ x^k & f(x) \end{pmatrix}$ عنصر قویا تمیز در $M_۲(R)$ است. پس بنا به نتیجه ۱۱.۱.۲، $w \in R$ وجود دارد که

$$w^۲ = ۴x^k f(x) + ۱. \tag{۹.۲}$$

فرض کنیم $w = \frac{g(x)}{h(x)}$ که $g(x), h(x) \in S[x]$. از رابطه‌ی ۹.۲، نتیجه می‌گیریم

$$g(x)^۲ = h(x)^۲[۴x^k f(x) + ۱].$$

این رابطه یک تناقض است، زیرا درجه‌ی $g(x)^۲$ عددی زوج است در حالی که درجه‌ی $h(x)^۲[۴x^k f(x)+۱]$، طبق انتخاب k عددی فرد است. بنابراین فرض خلف باطل است و $R = Q_c(R)$. $\square$

نتیجه ۱۶.۱.۲. *فرض کنیم S یک دامنه‌ی صحیح با مشخصه‌ی مخالف ۲ باشد و P ایده‌آل اول از حلقه‌ی $S[x]$ باشد. در این صورت برای هر $n \geq ۲$، $M_n(S[x]_P)$ قویا تمیز نیست.*

برهان. بنا به قضیه ۱۵.۱.۲ برقرار است. $\square$

۲.۲ مثال‌هایی از حلقه‌های ماتریسی قویا تمیز

در این بخش با استفاده از شرایطی خاص نشان می‌دهیم $M_۲(R)$ قویا تمیز است. به طور مثال نشان می‌دهیم اگر $R = \widehat{\mathbb{Z}}_P$، آنگاه $M_۲(R)$ قویا تمیز است.

لم ۱.۲.۲. *فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح موضعی باشد به طوری که $J(R) = ۲R$ و $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_۲$ و فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{pmatrix}$، $s = a_{۱۱} - a_{۲۲}$ و $t = (trA)^۲ - ۴detA$. اگر $s^۲t$ در R مربع باشد، آنگاه A در $M_۲(R)$ قویا تمیز است.*

برهان. بدون اینکه از کلیت لم کاسته شود، می‌توان فرض نمود که R میدان نیست و A و $I - A$ غیر یکه هستند. چون R موضعی است، پس $detA \in J(R)$ و

$$۱ - trA + detA = (۱ - a_{۱۱})(۱ - a_{۲۲}) - a_{۱۲}a_{۲۱} = det(I - A) \in J(R).$$

پس $۱ - trA \in J(R)$. بنابراین $trA \in U(R)$. در نتیجه $t = (trA)^۲ - ۴detA \in U(R)$. چون $s^۲ = t - ۴a_{۱۲}a_{۲۱}$، پس $s \in U(R)$.

حالت اول: فرض کنیم $a_{۱۱} \in J(R)$. چون $s^۲t$ در R مربع است، پس $u \in R$ وجود دارد که $s^۲t = u^۲$. چون s, t یکه هستند، پس $t^{-۱}u \in U(R)$. از اینکه $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_۲$، لذا $۱ - t^{-۱}u \in J(R)$. بنا به فرض $J(R) = ۲R$. فرض کنیم $۱ - t^{-۱}u = ۲r_۰$ که $r_۰ \in R$. قرار می‌دهیم

$$a = \begin{cases} r_0 & r_0 \notin J(R); \\ 1 - r_0 & r_0 \in J(R), \end{cases}$$

و

$$b = s^{-1}a_{12}(2a-1), \qquad c = s^{-1}a_{21}(2a-1).$$

پس $a \in U(R)$. چون $[t(2a-1)]^2 = t^2(2a-1)^2 = s^2t$، پس $(2a-1)^2 = s^2t^{-1}$. با توجه به اینکه $s^2t = u^2$، لذا $(2a-1)^2 = t^{-2}u^2$ و

$$4bc = 4s^{-2}a_{12}a_{21}(2a-1)^2 = 4s^{-2}t^{-2}u^2a_{12}a_{21} = 4u^{-2}t^{-1}u^2a_{12}a_{21} = 4t^{-1}a_{12}a_{21}$$
$$= t^{-1}(t-s^2) = t^{-1}(t-t^{-1}u^2) = 1 - t^{-2}u^2 = 1-(2a-1)^2 = 4(a-a^2).$$

چون حلقه R میدان نیست، پس $J(R) = 2R \neq 0$. بنابراین $2 \neq 0$. چون R دامنه است، از این رو $4 \neq 0$. پس $bc = a - a^2$. حال فرض کنیم

$$E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad U = \begin{pmatrix} a_{11}-a & a_{12}-b \\ a_{21}-c & a_{22}+a-1 \end{pmatrix}.$$

پس $E^2 = E$، $EU = UE$ و $A = E + U$. علاوه بر این،

$$detU = (a_{11}-a)(a_{22}+a-1) - (a_{12}-b)(a_{21}-c)$$
$$= detA - a_{11} + aa_{11} - aa_{22} - a^2 + a + ca_{12} + ba_{21} - a + a^2$$
$$= detA - a_{11} + sa + 2a_{12}c.$$

چون $sa \in U(R)$ و $detA - a_{11} + 2a_{12}c \in J(R)$، پس $detU \in U(R)$. بنابراین U معکوس پذیر است. از این رو A در $M_2(R)$ قویا تمیز است.

حالت دوم: فرض کنیم $a_{11} \in U(R)$. چون $s = a_{11} - a_{22} \in U(R)$ و $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$، پس داریم $a_{22} \in J(R)$. قرار می دهیم $B := \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ به طوری که $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. بنا به حالت اول، B در حلقه‌ی $M_2(R)$ قویا تمیز است. از این رو A قویا تمیز است. $\square$

نتیجه ۲.۲.۲. *فرض کنیم* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(R)$، $t = (trA)^2 - 4detA$ و $s = a_{11} - a_{22}$. *در این صورت* A *در حلقه‌ی* $M_2(\mathbb{Z}_{(2)})$ *قویا تمیز است اگر و تنها اگر* A *یا* $I - A$ *معکوس پذیر باشد یا* s^2t *در* $\mathbb{Z}_{(2)}$ *مربع باشد.*

برهان. بنا به لم‌های ۱.۴ و ۱.۲.۲ برقرار است. $\square$

لم ۳.۲.۲. *فرض کنیم* R *یک دامنه‌ی صحیح موضعی باشد و* $2 \in U(R)$. *فرض کنیم* $A \in M_2(R)$ *و* $t = (trA)^2 - 4detA$. *اگر* $k \in J(R)$ *وجود داشته باشد به طوری که* $t = (1+k)^2$، *آنگاه* A *در* $M_2(R)$ *قویا تمیز است.*

برهان. قرار می‌دهیم $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ و فرض می‌کنیم A و $I - A$ غیر یکه باشند و $s = a_{11} - a_{22}$. همان طور که در برهان لم ۱.۲.۲ نشان دادیم $trA - 1 \in J(R)$. قرار می‌دهیم $trA = 1 + k_1$ که $k_1 \in J(R)$. چون $t = (1+k)^2$ که $k \in J(R)$، پس داریم $u := 1 + k \in U(R)$. بنابراین

$$trA + u = 1 + k_1 + 1 + k = 2 + (k_1 + k) \in U(R).$$

فرض کنیم

$$a = \frac{1}{2}(1 - su^{-1}), \qquad b = -a_{12}u^{-1}, \qquad c = -a_{21}u^{-1},$$

$$E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad U = \begin{pmatrix} a_{11} - a & a_{12} - b \\ a_{21} - c & a_{22} + a - 1 \end{pmatrix}.$$

در نتیجه

$$a_{12}(2a - 1) = \frac{2}{2}a_{12}(1 - su^{-1}) - a_{12} = a_{12}(-su^{-1}) = sb = (a_{11} - a_{22})b,$$

$$a_{21}(2a - 1) = \frac{2}{2}a_{21}(1 - su^{-1}) - a_{21} = a_{21}(-su^{-1}) = sc = (a_{11} - a_{22})c,$$

$$a_{21}b = a_{12}c.$$

بنابراین $A = E + U$ و $EU = UE$. می‌دانیم $s^{۲} = t - ۴a_{۱۲}a_{۲۱}$. پس داریم

$$bc = (-a_{۱۲}u^{-۱})(-a_{۲۱}u^{-۱}) = a_{۱۲}a_{۲۱}u^{-۲} = \frac{۱}{۴}(t - s^{۲})u^{-۲}$$
$$= \frac{۱}{۴}[tu^{-۲} - s^{۲}u^{-۲}] = \frac{۱}{۴}[۱ - (۲a - ۱)^{۲}] = a - a^{۲}.$$

در نتیجه $E^{۲} = E$. حال نشان می‌دهیم U وارون پذیر است

$$\begin{aligned} detU &= detA + as - a_{۱۱} + ۲a_{۱۲}c \\ &= detA + (\frac{۱}{۲}(۱ - su^{-۱}))s - a_{۱۱} + ۲a_{۱۲}(-a_{۲۱}u^{-۱}) \\ &= detA + \frac{۱}{۲}(s - s^{۲}u^{-۱}) - a_{۱۱} - ۲a_{۱۲}a_{۲۱}u^{-۱} \\ &= detA + \frac{۱}{۲}u^{-۱}[(s - ۲a_{۱۱})u - (s^{۲} + ۴a_{۱۲}a_{۲۱})] \\ &= detA + \frac{۱}{۲}u^{-۱}[-(trA)u - t] \\ &= detA - \frac{۱}{۲}(trA + u) \in U(R). \end{aligned}$$

در نتیجه A در $M_{۲}(R)$ قویا تمیز است. $\square$

فرض کنیم m عدد صحیح مثبت و $p \in \mathbb{Z}$ اول باشد، در این‌صورت عدد m را می‌توانیم در پایه‌ای از p، به شکل زیر نمایش دهیم:

$$m = \sum_{i=۰}^{n} a_i p^i,$$

که $a_i \in \mathbb{Z}$ و $۰ \le a_i \le p - ۱$.

تعریف ۴.۲.۲. هر عدد گویا مانند $x = \frac{a}{b}$ را می‌توانیم به صورت سری لوران (از چپ متناهی) در توان‌هایی از p، به صورت زیر بنویسیم:

$$x = a_{n_۰}p^{n_۰} + a_{n_۰+۱}p^{n_۰+۱} + \cdots ,$$

که $n_\circ \geq \circ$ اگر و تنها اگر $p \nmid b$، و $n_\circ > \circ$ اگر و تنها اگر $p \nmid b$ و $p \mid a$. به بسط فوق، **بسط p-ادیک** روی x می‌گوییم.

تعریف ۵.۲.۲. مجموعه‌ی همه‌ی بسط‌های p-ادیک اعداد گویا تشکیل یک میدان می‌دهد که به آن **میدان اعداد p-ادیک** می‌نامیم و آن را با $\mathbb{Q}_p$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۲.۲. فرض کنیم $p \in \mathbb{Z}$ یک عدد اول باشد. **ارزه‌ی p-ادیک** روی $\mathbb{Z}$ تابع

$$v_p : \mathbb{Z} - \{\circ\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

است به طوری که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ و $n \neq \circ$، فرض کنیم $v_p(n)$ عدد صحیح مثبت یکتایی باشد که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند.

$$n = p^{v_p(n)} n' \quad \text{و} \quad p \nmid n'.$$

لم ۷.۲.۲. *برای هر $x \in \mathbb{Q}_p$ که $x \neq \circ$، عدد صحیح $v_p(x)$ وجود دارد به طوری که $|x|_p = p^{-v_p(x)}$.*

برهان. به [۵] لم ۱.۳.۳ مراجعه کنید. □

تعریف ۸.۲.۲. حلقه‌ی **اعداد صحیح p-ادیک**، حلقه‌ی مقداری $\widehat{\mathbb{Z}}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p < ۱\}$ است که p یک عدد اول است.

گزاره ۹.۲.۲. *هر $x \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$ را می‌توان به فرم زیر نوشت*

$$x = b_\circ + b_۱ p + b_۲ p^۲ + \cdots + b_n p^n + \cdots$$

که $\circ \leq b_i \leq p - ۱$، و این نمایش منحصر به فرد است.

برهان. به [۵] لم ۱۰.۳.۳ مراجعه کنید. □

قضیه ۱۰.۲.۲. *فرض کنیم $R = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ به طوری که p یک عدد اول است. در این صورت $M_۲(R)$ قویا تمیز است.*

برهان. فرض کنیم $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(R)$. نشان می‌دهیم A یک عنصر قویا تمیز است. فرض کنیم A و $I-A$ غیر یکه باشند، $s=a_{11}-a_{22}$ و $t=(trA)^2-4detA$. در برهان لم ۱.۲.۲، نشان دادیم که $trA-1 \in J(R)$، $detA \in J(R)$.

حالت اول: فرض کنیم $p=2$. در این‌صورت $J(R)=2R$ و $R/J(R)\cong \mathbb{Z}_2$. بنا به برهان لم ۱.۲.۲، $s\in U(R)$. اگر $a_{12}a_{21}\in U(R)$. آنگاه از $detA=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\in J(R)$ نتیجه می‌گیریم که $a_{11}a_{22}\in U(R)$. چون $R/J(R)\cong \mathbb{Z}_2$، پس $a_{11}+a_{22}\in J(R)$. که با $s\in U(R)$ در تناقض است. در نتیجه $a_{12}a_{21}\in J(R)=2R$.

فرض کنیم $trA=1+2k_1$ و $a_{12}a_{21}=2k_2$ که $k_1,k_2\in R$. در این‌صورت

$$t=(trA)^2-4detA=(1+2k_1)^2-4detA=1+4k_3$$

که $k_3\in R$. بنابراین

$$\begin{aligned}
s^2t&=t(t-4a_{12}a_{21}) \quad (t=s^2+4a_{12}a_{21}\text{چون})\\
&=t(t-8k_2)\\
&=t^2-8tk_2\\
&=(1+4k_3)^2-8(1+4k_3)k_2\\
&=1+8(k_3+2k_3^2-k_2-4k_3k_2)\\
&\equiv 1 \quad (8R\text{به پیمانه ی}).
\end{aligned}$$

بنا به گزاره‌ی ۳.۴.۳ مرجع [۵]، s^2t در R مربع است، و لذا با توجه به لم ۱.۲.۲، A در $M_2(R)$ قویا تمیز است.

حالت دوم: فرض کنیم $p\geq 3$. چون $trA-1\in J(R)$، قرار می‌دهیم $trA=1+k_0$ که $k_0\in J(R)$.
پس $t=(trA)^2-4detA=91+k_0)^2-4detA=1+a$ که $a=k_0^2+2k_0-4detA\in J(R)=pR$.

فرض کنیم $1+a = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \cdots$ به طوری که $a_0 = 1$ و برای هر $i \geq 1$، $0 \leqslant a_i \leqslant p-1$. نشان می‌دهیم $x = x_1p + x_2p^2 + \cdots$ وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq 1$، $0 \leq x_i \leq p-1$، و در معادله $(1+x)^2 = 1+a$ صدق می‌کند. آنگاه ادعای فوق از لم ۳.۲.۲، ثابت می‌شود. فرض کنیم $x_0 = 1$. در این صورت معادله‌ی $(1+x)^2 = 1+a$برقرار است با این شرط که برای هر $i = 0, 1, 2, \cdots$، $k_i \in \mathbb{Z}$ وجود دارد به طوری که

$$x_0^2 = a_0 + k_0 p \qquad \text{و} \qquad (P_0)$$

$$k_n + 2x_0x_{n+1} + x_1x_n + \cdots + x_nx_1 = a_{n+1} + k_{n+1}p, \qquad (P_{n+1})$$

برای $n = 0, 1, 2, \cdots$. چون $x_0 = 1 = a_0$، قرار می دهیم $k_0 = 0$. در این صورت (P_0) برقرار است. فرض کنیم x_i, k_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ طوری انتخاب شده باشند که (P_i) $(i = 0, \cdots, n)$ برقرار باشد. چون $x_0 = 1$، $gcd(2x_0, p) = 1$، بنابراین $m \in \mathbb{Z}$ وجود دارد که $0 \leq m \leq p-1$ و

$$2m_0x_0 \equiv a_{n+1} - k_n - x_1x_n - \cdots - x_nx_1 \qquad (\text{به پیمانه‌ی } p).$$

از این رو برای هر $l \in \mathbb{Z}$، داریم $2mx_0 + k_n + x_1x_n + \cdots + x_nx_1 = a_{n+1} + l_p$. قرار می‌دهیم $x_{n+1} = m$ و $k_{n+1} = l$ پس (P_{n+1}) برقرار است. در نتیجه بنا بر اصل استقرا، برهان کامل است. □

۳.۲ حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی

در این بخش نشان می دهیم، اگر R حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد، آنگاه برای هر $n \geq 1$، $\mathbb{T}_n(R)$ قویا تمیز است. برای حلقه‌ی R، مجموعه همه‌ی ماتریس های $n \times 1$ ($1 \times n$) روی حلقه‌ی R، را با R^n (R_n) نمایش می‌دهیم. $\beta^T \in R^n$، $\beta^T \in R_n$ بیانگر ترانهاده‌ی β است.

قضیه ۱.۳.۲. *اگر R حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد، آنگاه برای هر $n \geq 1$، حلقه‌ی $\mathbb{T}_n(R)$ قویا تمیز است.*

برهان. به استقرا روی n حکم را ثابت می‌کنیم. برای $n = 1$، واضح است.

فرض کنیم $n > ۱$ و هر $(a_{ij}) \in \mathbb{T}_{n-۱}(R)$ یک عبارت قویا تمیز چون $(a_{ij}) = (e_{ij}) + (u_{ij})$ داشته باشد که برای هر $۱ \leqslant i \leqslant n-۱$، اگر $a_{ii} \in U(R)$، آنگاه $e_{ii} = ۰$. حال فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱,n} \\ ۰ & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

ادعا می کنیم $(e_{ij})^۲ = (e_{ij})$ و $(u_{ij}) \in U(\mathbb{T}_n(R))$ وجود دارند که

$$(a_{ij}) = (e_{ij}) + (u_{ij}), \qquad (e_{ij})(u_{ij}) = (u_{ij})(e_{ij})$$

و برای هر $۱ \leq i \leq n$، اگر $a_{ii} \in U(R)$، آنگاه$e_{ii} = ۰$.

قرار می‌دهیم

$$A = \begin{pmatrix} A_۱ & \alpha \\ ۰ & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{که} \quad A_۱ = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱,n-۱} \\ ۰ & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲,n-۱} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{n-۱,n-۱} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \alpha = (a_{۱n}, \cdots, a_{n-۱,n})^T.$$

بنا به فرض استقرا، $A_۱$ قویا تمیز است. پس $U = (u_{ij}) \in U(\mathbb{T}_{n-۱}(R))$ و $E^۲ = E = (e_{ij}) \in \mathbb{T}_{n-۱}(R)$ وجود دارد که

$$A_۱ = E + U. \tag{۱۰.۲}$$

به طوری که برای هر $۱ \leq i \leq n-۱$، اگر $a_{ii} \in U(R)$. آنگاه

$$e_{ii} = ۰. \tag{۱۱.۲}$$

با بررسی دو حالت زیر برهان قضیه را کامل می‌کنیم.

حالت اول: فرض کنیم $a_{nn} \in J(R)$. قرار می‌دهیم $e_{nn} = ۱$ و $u_{nn} = a_{nn} - ۱$. چون u_{ii} یکه است پس $u_{ii} - (u_{nn} + ۱)$ نیز یکه است. بنابراین $U - (u_{nn} + ۱)I$ در $\mathbb{T}_{n-۱}(R)$ یکه است. فرض کنیم $\delta_۱ = [U - (u_{nn} + ۱)I]^{-۱}(E - I)\alpha$ و فرض کنیم

$$F = \begin{pmatrix} E & \delta_۱ \\ ۰ & e_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad V = \begin{pmatrix} U & \alpha - \delta_۱ \\ ۰ & u_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{T}_n(R).$$

چون E و $U-(u_{nn}+1)I$ جابجا می‌شوند، پس E و $[U-(u_{nn}+1)I]^{-1}$ نیز جابجا می‌شوند. بنابراین $E\delta_1 = 0$. از این رو نتیجه می‌گیریم $F^2 = F$. بنا به تعریف δ_1، داریم:

$$(E-I)\alpha = [U-(u_{nn}+1)I]\delta_1 = U\delta_1 - u_{nn}\delta_1 - \delta_1.$$

بنابراین

$$U\delta_1 + (\alpha - \delta_1) = E\alpha + u_{nn}\delta_1 = E(\alpha-\delta_1) + \delta_1 u_{nn}.$$

از این رو $FV = VF$. بعلاوه، به آسانی می‌توان نشان داد که $A = F + V$ و $V \in U(\mathbb{T}_n(R))$. بنابراین ادعا ثابت می‌شود.

حالت اول: فرض کنیم $a_{nn} \in U(R)$. قرار می‌دهیم $e_{nn} = 0$ و $u_{nn} = a_{nn}$. برای اثبات ادعا در این مورد، کافیست نشان دهیم $\gamma_1 \in R_{n-1}$ وجود دارد به طوری که $F^2 = F = \begin{pmatrix} E & \gamma_1 \\ 0 & e_{nn} \end{pmatrix}$ و $FV = VF$ که $V = \begin{pmatrix} U & \alpha - \gamma_1 \\ 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$.

از اینکه $F^2 = F$ داریم:

$$E\gamma_1 + e_{nn}\gamma_1 = \gamma_1 \quad \Leftrightarrow \quad E\gamma_1 = \gamma_1,$$

از اینکه $FV = VF$ داریم:

$$(\alpha-\gamma_1)e_{nn} + U\gamma_1 = E(\alpha-\gamma_1) + \gamma_1 u_{nn},$$

در نتیجه

$$(U + E - a_{nn}I)\gamma_1 = E\alpha \quad \Leftrightarrow \quad (A_1 - a_{nn}I)\gamma_1 = E\alpha.$$

از این رو کافیست نشان دهیم که دستگاه

$$\begin{cases} EX = X & (\Lambda) \\ (A_1 - a_{nn}I)\gamma_1 = E\alpha & (\Gamma) \end{cases}$$

یک جواب $X = (x_۱, \cdots, x_{n-۱})^T$ در $R_{n-۱}$ دارد.

بنابراین فرض می‌کنیم

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{i,i+۱} & \cdots & a_{i,n-۱} \\ ۰ & a_{i+۱,i+۱} & \cdots & a_{i+۱,n-۱} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{n-۱,n-۱} \end{bmatrix}, \quad E_i = \begin{bmatrix} e_{ii} & e_{i,i+۱} & \cdots & e_{i,n-۱} \\ ۰ & e_{i+۱,i+۱} & \cdots & e_{i+۱,n-۱} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & e_{n-۱,n-۱} \end{bmatrix},$$

$$U_i = \begin{bmatrix} u_{ii} & u_{i,i+۱} & \cdots & u_{i,n-۱} \\ ۰ & u_{i+۱,i+۱} & \cdots & u_{i+۱,n-۱} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & u_{n-۱,n-۱} \end{bmatrix},$$

و قرار می‌دهیم

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{ii} & \beta_i \\ ۰ & A_{i+۱} \end{pmatrix}, \qquad E_i = \begin{pmatrix} e_{ii} & e_i \\ ۰ & E_{i+۱} \end{pmatrix} \tag{۱۲.۲}$$

به طوری که

$$\beta_i = (a_{i,i+۱}, \cdots, a_{i,n-۱}), \qquad e_i = (e_{i,i+۱}, \cdots, e_{i,n-۱});$$

و قرار می‌دهیم

$$X_i = (x_i, \cdots, x_{n-۱})^T \qquad \alpha_i = (a_{in}, \cdots, a_{n-۱,n})^T.$$

از این رو، دستگاهی از iامین، $(i+۱)$امین، $\cdots$، $(n-۱)$امین معادله های رابطه‌ی (Λ)، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$E_i X_i = X_i \qquad (\Lambda(i)).$$

که

$$\begin{cases} e_{ii}x_i + e_i X_{i+۱} = x_i & (\Lambda_i) \\ E_{i+۱}X_{i+۱} = X_{i+۱} & (\Lambda(i+۱)). \end{cases}$$

و دستگاهی از iامین، $(i+۱)$امین، $\cdots$، $(n-۱)$امین معادله های رابطه‌ی (Γ)، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(A_i - a_{nn}I)X_i = E_i \alpha_i \qquad (\Gamma(i)).$$

که

$$\begin{cases}(a_{ii}-a_{nn})x_i+\beta_i X_{i+1}=e_{ii}a_{in}+e_i\alpha_{i+1} & (\Gamma_i)\\ (A_{i+1}-a_{nn}I)X_{i+1}=E_{i+1}\alpha_{i+1} & (\Gamma(i+1)).\end{cases}$$

ابتدا دو معادله زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases}e_{n-1,n-1}x_{n-1}=x_{n-1} & (\Lambda_{n-1})\\ (a_{n-1,n-1}-a_{nn})x_{n-1}=e_{n-1,n-1}a_{n-1,n} & (\Gamma_{n-1}).\end{cases}$$

اگر $a_{n-1,n-1}\in U(R)$، آنگاه بنا به فرض استقرا $e_{n-1,n-1}=0$. بنابراین $x_{n-1}=0$ در هر دو معادله (Λ_{n-1}) و (Γ_{n-1}) صدق می‌کند.

اگر $a_{n-1,n-1}\notin U(R)$، آنگاه $e_{n-1,n-1}=1$ (چون $a_{n-1,n-1}=e_{n-1,n-1}+u_{n-1,n-1}$). بنا به فرض $a_{nn}\in U(R)$، پس $a_{n-1,n-1}-a_{nn}\in U(R)$. در نتیجه $x_{n-1}=(a_{n-1,n-1}-a_{nn})^{-1}a_{n-1,n}$ در هر دو معادله (Λ_{n-1}) و (Γ_{n-1}) صدق می‌کند. از این رو، $x_{n-1}\in R$ وجود دارد که در هر دو معادله (Λ_{n-1}) و (Γ_{n-1}) صدق می‌کند.

حال فرض کنیم $i\le n-2$، و $X_{i+1}\in R_{n-i-1}$ وجود داشته باشد که در معادلات $(\Lambda(i+1))$ و $(\Gamma(i+1))$ صدق کند. نشان می‌دهیم $x_i\in R$ وجود دارد که X_i در هر دو معادله $(\Lambda(i))$ و $(\Gamma(i))$ صدق می‌کند، به عبارتی دیگر x_i در معادله‌های (Λ_i) و (Γ_i) صدق می‌کند. با بررسی دو حالت زیر نتیجه حاصل می‌شود.

حالت اول: فرض کنیم $a_{ii}\in U(R)$. آنگاه بنا به فرض استقرا $e_{ii}=0$. قرار می‌دهیم $x_i=e_iX_{i+1}$. بنابراین x_i در معادله‌ی (Λ_i) صدق می‌کند. از رابطه ی ۱۰.۲ نتیجه می‌گیریم $A_i=E_i+U_i$، یک عبارت قویا تمیز از A_i است. چون $e_{ii}=0$ و $E_i^2=E_i$، پس

$$e_i=e_iE_{i+1}. \tag{۱۳.۲}$$

از اینکه $e_{ii}=0$، داریم $u_{ii}=a_{ii}$. بنابراین از $E_iU_i=U_iE_i$ (با توجه به رابطه‌ی ۱۲.۲) نتیجه می‌گیریم

$$e_{ii}(\beta_i-e_i)+e_iU_{i+1}=u_{ii}e_i+(\beta_i-e_i)E_{i+1}.$$

پس

$$e_i(A_{i+1} - E_{i+1}) = e_iU_{i+1} = a_{ii}e_i + \beta_iE_{i+1} - e_iE_{i+1}.$$

در نتیجه

$$e_iA_{i+1} = a_{ii}e_i + \beta_iE_{i+1} \tag{۱۴.۲}$$

از سمت چپ معادله (Γ_i) داریم

$$\begin{aligned}
(a_{ii} - a_{nn})x_i + \beta_iX_{i+1} &= (a_{ii} - a_{nn})e_iX_{i+1} + \beta_i(E_{i+1}X_{i+1}) && (\text{بنا به } \Lambda(i+1))\\
&= [(a_{ii}e_i + \beta_iE_{i+1}) - a_{nn}e_i]X_{i+1}\\
&= (e_iA_{i+1} - a_{nn}e_i)X_{i+1} && (\text{بنا به } (15.2))\\
&= e_i(A_{i+1} - a_{nn}I)X_{i+1}\\
&= e_iE_{i+1}\alpha_{i+1} && (\text{بنا به } \Gamma(i+1))\\
&= e_i\alpha_{i+1} && (\text{بنا به } (14.2))\\
&= e_{ii}a_{in} + e_i\alpha_{i+1} && (\text{چون } e_{ii} = 0).
\end{aligned}$$

از این رو $x_i = e_iX_{i+1}$ در Λ_i و Γ_i صدق می‌کند.

حالت دوم: فرض کنیم $a_{ii} \notin U(R)$. چون $a_{ii} = e_{ii} + u_{ii}$ یک عبارت قویا تمیز از a_{ii} است. بنابراین $e_{ii} = 1$. لذا $a_{ii} - a_{nn} \in U(R)$. x_i را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$x_i = (a_{ii} - a_{nn})^{-1}(e^{ii}a^{in} + e^i\alpha^{i+1} - \beta^iX^{i+1}).$$

به این ترتیب x_i در (Γ_i) صدق می‌کند. نشان می‌دهیم x_i در معادله‌ی (Λ_i)صدق می‌کند، یعنی $e_iX_{i+1} = 0$. چون $E_i^2 = E_i$ و $e_{ii} = 1$، پس $e_iE_{i+1} = 0$. لذا بنا به رابطه‌ی $(\Lambda(i+1))$، داریم:

$$e_iX_{i+1} = e_i(E_{i+1}X_{i+1}) = 0.$$

بنابراین x_i در معادله‌ی (Λ_i)صدق می‌کند. از این رو، بنا به اصل استقرا، $X \in R_{n-1}$ وجود دارد که در (Λ) و (Γ) صدق می‌کند. ادعا در این مورد ثابت شد. لذا برهان کامل است. □

ملاحظه ۲.۳.۲. *اگر $a = e_1 + u_1$ و $b = e_2 + u_2$ به ترتیب عبارت‌های قویا تمیز از a و b در R باشند و $\nu \in R$. آنگاه همواره $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ وجود ندارند به طوری که*

$$\begin{pmatrix} a & \nu \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \alpha_1 \\ 0 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 & \alpha_2 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$$

یک عبارت قویا تمیز در $\mathbb{T}_2(R)$ باشد. برای مثال $a = 1 + 4$ و $b = 0 + 2$ عبارت قویا تمیز در $\mathbb{Z}_{(3)}$ هستند، اما برای هر $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_{(3)}$، عبارت $\begin{pmatrix} 4 & \alpha_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ قویا تمیز نمی‌تواند باشد.

قرار می‌دهیم

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & \alpha_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

واضح است که $E^2 = E$ و U در $\mathbb{Z}_{(3)}$ یکه است. از طرفی $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. لذا $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$. ادعا می‌کنیم $EU \neq UE$. فرض کنیم $EU = UE$ (فرض خلف). در این صورت داریم:

$$EU = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \alpha_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \alpha_2 + 2\alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$UE = \begin{pmatrix} 4 & \alpha_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4\alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

در نتیجه $\alpha_2 + 2\alpha_1 = 4\alpha_1$. بنابراین $1 - \alpha_1 + 2\alpha_1 = 4\alpha_1$. پس $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ و $\alpha_2 = \frac{2}{3}$. چون $\alpha_1, \alpha_2 \notin \mathbb{Z}_{(3)}$، پس فرض خلف باطل و $EU \neq UE$.

نتیجه ۳.۳.۲. *اگر $R = \prod R_i$ حاصلضرب مستقیم از حلقه‌ی موضعی جابجایی R_i باشد، آنگاه برای هر $n \geq 1$، $\mathbb{T}_n(R)$ قویا تمیز است.*

برهان. بنا به قضیه ی ۱.۳.۲، هر $\mathbb{T}_n(R_i)$ قویا تمیز است. بنابراین برای هر $n \geq 1$، $\mathbb{T}_n(R) \cong \prod \mathbb{T}_n(R_i)$ قویا تمیز است. □

تعریف ۴.۳.۲. حلقه ی R را **نیم کامل** می‌نامیم، هرگاه هر عضو از حلقه‌ی R حاصلجمعی از یک عنصر خودتوان و یک عنصر یکه باشد، و R هیچ زیر مجموعه‌ی نامتناهی از خودتوان‌های متعامد را نداشته باشد.

تعریف ۵.۳.۲. فرض کنیم L یک ایده‌آل چپ (راست) از حلقه‌ی R باشد. گوییم خودتوان‌ها به پیمانه‌ی L بالا برده می‌شوند [1] هرگاه برای هر $x \in R$، اگر $x - x^{2} \in L$، آنگاه خودتوان $e \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $e - x \in L$.

تعریف‌های گوناگونی از حلقه‌ی تبادلی وجود دارد که در زیر دو مورد را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۶.۳.۲. حلقه‌ی ناصفر، جابجایی و نوتری R را یک حلقه‌ی **نیم موضعی** گوییم، هرگاه تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد.

تعریف ۷.۳.۲. خودتوان e در حلقه‌ی R را **خودتوان موضعی** گوییم، هرگاه eRe یک حلقه‌ی موضعی باشد.

نتیجه ۸.۳.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم موضعی جابجایی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *R نیم کامل است.*

(۲) *برای هر $n \geq 1$، $\mathbb{T}_n(R)$ قویا تمیز است.*

(۳) *$n \geq 1$ وجود دارد که $\mathbb{T}_n(R)$ قویا تمیز است.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): چون R نیم کامل است، خودتوان‌های موضعی متعامد e_i، $i = 1, \cdots, m$ وجود دارند که $1 = e_1 + \cdots + e_n$. بنابراین $R = e_1Re_1 \times \cdots \times e_mRe_m$ حاصلضربی از حلقه‌های موضعی جابجایی است. از این رو، بنا به نتیجه‌ی ۸.۳.۲، نتیجه حاصل است.

(۲) $\Leftarrow$ (۳): واضح است.

(۳) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $e \in \mathbb{T}_n(R)$ به طوری که درایه‌ی $(1,1)$-ام آن یک و بقیه‌ی درایه‌ها صفر باشد. نگاشت $R \longrightarrow e\mathbb{T}_n(R)e$ با ضابطه‌ی $a_{11} \longmapsto \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ یک یکریختی از حلقه‌ها است. لذا

[1] Idempotent can be lefted modulo L

بنا به نتیجه ۷.۱.۲، $R \cong e\mathbb{T}_n(R)e$ قویا تمیز است. بنابراین خودتوان‌ها به پیمانه‌ی چپی از $J(R)$ بالا برده می‌شوند. از این رو R نیم کامل است. $\square$

فصل ۳

چه هنگام حلقه‌ی ماتریس‌های ۲ × ۲ روی حلقه‌ی موضعی جابجایی قویا تمیز است؟

۱.۳ شرایطی که تحت آن حلقه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ قویا تمیز است

در این بخش شرایطی که در آن حلقه‌ی $M_۲(R)$ قویا تمیز است را مورد بررسی قرار داده و از حل پذیری معادله‌ی درجه دوم ساده در R به قویا تمیز بودن $M_۲(R)$ می‌رسیم.

لم ۱.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی باشد. و فرض کنیم $u \in U(R)$ مرکزی باشد و $w \in J(R)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) $x^۲ - ux = w$ *در R حل پذیر است.*

(۲) $x^۲ - ux = w$ *در $U(R)$ حل پذیر است.*

(۳) $x^۲ - ux = w$ *در $J(R)$ حل پذیر است.*

برهان. اگر $x_\circ$ در معادله $x^۲ - ux = w$ صدق کند. آنگاه نشان می‌دهیم $u - x_\circ$ نیز در معادله صدق می کند:

$$(u - x_\circ)^۲ - u(u - x_\circ) = u^۲ - ۲ux_\circ + x_\circ^۲ - u^۲ + ux_\circ = x_\circ^۲ - ux_\circ = w.$$

از طرفی داریم $x_\circ(u - x_\circ) = -w \in J(R)$. چون R موضعی است، پس $x_\circ$ یا $u - x_\circ$ در $J(R)$ است. اگر $x_\circ$ در $J(R)$ باشد. آنگاه $u - x_\circ$ در $U(R)$ است و اگر $u - x_\circ \in J(R)$، آنگاه $x_\circ \in U(R)$. $\square$

لم ۲.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی باشد. در این‌صورت $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_۲$، اگر و تنها اگر برای هر $u, v \in U(R)$، $u + v \neq ۱$.*

برهان. فرض کنیم $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_۲ = \left\{\bar{\circ}, \bar{۱}\right\}$ و $u \in U(R)$. لذا $u + J(R) = \circ$ یا ۱. اگر $u + J(R) = \circ$ آنگاه $u \in J(R)$، که با فرض در تناقض است. لذا $u + J(R) = ۱ + J(R)$. در نتیجه برای هر $v \in U(R)$، $u + v \neq ۱$.

بعکس، فرض کنیم $u \in U(R)$. چون $u + (1 - u) = 1$، پس بنا به فرض $(1 - u) \notin U(R)$. بنابراین $1 - u \in J(R)$. پس $u + J(R) = 1 - (1 - u) + J(R) = 1 + J(R)$. فرض کنیم $u \in J(R)$. در این‌صورت

$$u + J(R) = J(R).$$

در نتیجه $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2 = \left\{\overline{0}, \overline{1}\right\}$. $\square$

لم ۳.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی باشد و $2 \in U(R)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند :*

(۱) *برای هر $w \in J(R)$، معادله‌ی $x^2 - x = w$ در R حل پذیر است.*

(۲) *برای هر $w \in J(R)$، معادله‌ی $x^2 + 2x = w$ در R حل پذیر است.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): برای هر $w \in J(R)$، بنا به بند (۱)، فرض کنیم x_0 در معادله‌ی $x^2 - x = w/4$ صدق کند. داریم:

$$(-2x_0)^2 + 2(-2x_0) = 4x_0^2 - 4x_0 = 4(x_0^2 - x_0) = 4(w/4) = w.$$

لذا $-2x_0$ در معادله‌ی $x^2 + 2x = w$ صدق می‌کند.

(۲) $\Leftarrow$ (۱): برای هر $w \in J(R)$، با توجه به بند (۲)، فرض کنیم x_0 در معادله‌ی $x^2 + 2x = 4w$ صدق کند. داریم:

$$(-\frac{x_0}{2})^2 - (-\frac{x_0}{2}) = \frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0^2}{2} = \frac{x_0^2 + 2x_0^2}{4} = \frac{4w}{4} = w.$$

در نتیجه $\frac{-x_0}{2}$ در معادله‌ی $x^2 + 2x = w$ صدق می‌کند. $\square$

لم ۴.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد. فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$، $E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{pmatrix}$ و $U = A - E$. در این‌صورت $A = E + U$ یک عبارت قویا تمیز در $M_2(R)$ است اگر و تنها اگر شرایط*

زیر برقرار باشند.

$$bc = a - a^{۲}, \tag{۱.۳}$$

$$a_{۲۱}b = a_{۱۲}c, \tag{۲.۳}$$

$$sb = a_{۱۲}(۲a - ۱), \tag{۳.۳}$$

$$sc = a_{۲۱}(۲a - ۱), \tag{۴.۳}$$

$$detU \in U(R). \tag{۵.۳}$$

برهان. فرض کنیم $A = E + U$ یک عنصر قویا تمیز در $M_{۲}(R)$ باشد. در این صورت $E^{۲} = E$، $EU = UE$ و $detU \in U(R)$. از اینکه $E^{۲} = E$، داریم:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱ - a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱ - a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^{۲} + bc & ab + b(۱ - a) \\ ca + c(۱ - a) & cb + (۱ - a)^{۲} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱ - a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

اگر و تنها اگر

$$bc = a - a^{۲}.$$

چون $EU = UE$، پس

$$\begin{aligned} EU &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱ - a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{۱۱} - a & a_{۱۲} - b \\ a_{۲۱} - c & a_{۲۲} - (۱ - a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa_{۱۱} - a^{۲} + ba_{۲۱} - bc & aa_{۱۲} - ab + ba_{۲۲} - b + ba \\ ca_{۱۱} - ca + (۱ - a)(a_{۲۱} - c) & ca_{۱۲} - cb + (۱ - a)(a_{۲۲} - ۱ + a) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} UE &= \begin{pmatrix} a_{۱۱} - a & a_{۱۲} - b \\ a_{۲۱} - c & a_{۲۲} - (۱ - a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱ - a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{۱۱}a - a^{۲} + a_{۱۲}c - bc & a_{۱۱}b - ab + (a_{۱۲} - b)(۱ - a) \\ a_{۲۱}a - ca + a_{۲۲}c - c + ac & a_{۲۱}b - cb + (a_{۲۲} - ۱ + a)(۱ - a) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

از تساوی درایه های نظیر به نظیر داریم $a_{۲۱}b = a_{۱۲}c$، $sb = a_{۱۲}(۲a - ۱)$ و $sc = a_{۲۱}(۲a - ۱)$.

حال اگر روابط فوق برقرار باشند، واضح است که $EU = UE$.

واضح است که $U \in U(R)$، اگر و تنها اگر $detU \in U(R)$. □

قضیه ۵.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد. اگر $M_۲(R)$ قویا تمیز باشد، آنگاه برای هر $w \in J(R)$، $x^۲ - x = w$ در R حل پذیر است.*

برهان. برای هر $w \in J(R)$، فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} ۱ & -k \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ به طوری که $k = w(۱ + ۴w)^{-۱}$. فرض کنیم $A = E + U$ یک عنصر قویا تمیز از $A \in M_۲(R)$ باشد به طوری که $E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ و

$$U = \begin{pmatrix} ۱ - a & -k - b \\ ۱ - c & -d \end{pmatrix}.$$

از معکوس پذیری U داریم:

$$detU = -d(۱ - a) - (۱ - c)(-k - b) = d(a - ۱) + (k + b)(۱ - c) \in U(R). \qquad (۶.۳)$$

چون $EU = UE$، و

$$EU = \begin{pmatrix} a - a^۲ + b - bc & -ak - ab - bd \\ c - ca + d - dc & -ck - cb - d^۲ \end{pmatrix}$$

$$UE = \begin{pmatrix} a - a^۲ - kc - bc & b - ba - kd - bd \\ a - ca - dc & b - cb - d^۲ \end{pmatrix}.$$

پس از درایه‌های $(۱, ۱)$-ام و $(۲, ۱)$-ام نتیجه می‌گیریم

$$b = -kc, \qquad c = a - d. \qquad (۷.۳)$$

چون $k \in J(R)$، داریم $b = -kc \in J(R)$. بنابراین $(k + b)(۱ - c) \in J(R)$. لذا از رابطه‌ی ۶.۳، نتیجه می‌گیریم

$$d \in U(R), \qquad a - ۱ \in U(R). \qquad (۸.۳)$$

از تساوی $E^۲ = E$ داریم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^۲ + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

از درایه‌های $(1,1)$-ام و $(2,2)$-ام نتایج زیر حاصل می‌شود.

$$bc = a - a^2, \qquad bc = d - d^2. \tag{9.3}$$

چون $b \in J(R)$. از روابط ۸.۳ و ۹.۳، نتیجه می‌گیریم $a, 1-d \in J(R)$. لذا $1 + a - d \in J(R)$. از این رو $a - d \in U(R)$. اما از رابطه‌ی ۹.۳، داریم $a - a^2 = d - d^2$. بنابراین

$$(a+d-1)(a-d) = a^2 - ad + ad - d^2 - a + d = d - d^2 + a^2 - a = 0.$$

چون $a - d \in U(R)$، پس $a + d - 1 = 0$. در نتیجه $a + d = 1$. از این رو بنا به رابطه‌ی ۷.۳، داریم

$$c = a - d = a - (1 - a) = 2a - 1.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} a - a^2 = bc &= (-kc)c \\ &= -kc^2 \\ &= -k(2a-1)^2 = -k(4a^2 - 4a + 1) = -4k(a^2 - a) - k. \end{aligned}$$

بنابراین $(1-4k)(a^2-a) = k$. از این رو $a^2 - a = (1-4k)^{-1}k$. از طرفی $k = w(1+4w)^{-1}$. در نتیجه $k = -4kw + w = w(1-4k)$. لذا $w = k(1-4k)^{-1}$. در نتیجه $a^2 - a = (1-4k)^{-1}k = w$. بنابراین a، یک جواب معادله‌ی $x^2 - x = w$ است. $\square$

مثال ۶.۱.۳. فرض کنیم S یک دامنه‌ی جابجایی باشد، P یک ایده‌آل اول از $S[x]$ و $S[x]_P$ موضعی سازی از $S[x]$ در P باشد. در این‌صورت $M_2(S[x]_P)$ قویا تمیز است.

برهان. فرض کنیم $h(x) \in J(S[x]_P)$ به طوری که $h(x) \in S[x]$ و درجه‌ی $h(x)$ یک عدد فرد باشد. ادعا می‌کنیم $h(x) = y^2 - y$ در $S[x]_P$ حل پذیر نیست؛ لذا از قضیه‌ی ۵.۱.۳، $M_2(S[x]_P)$ قویا تمیز نیست. در غیر این صورت، $\frac{f(x)}{g(x)} \in S[x]_P$ وجود دارد به طوری که

$$(\frac{f(x)}{g(x)})^۲ - \frac{f(x)}{g(x)} = h(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)^۲ - f(x)g(x)}{g(x)^۲} = h(x).$$

پس

$$f(x)[f(x) - g(x)] = h(x)g(x)^۲.$$

اگر $degf > degg$ یا $degf = degg$ آنگاه درجه $f(x)[f(x) - g(x)]$ زوج، ولی درجه $h(x)g(x)^۲$ عددی فرد است که یک تناقض است. حال اگر $degf < degg$، آنگاه

$$degf + deg(f - g) = degh + degg^۲.$$

چون $deg(f - g) \leqslant max\{degf, degg\} \leqslant degg$، پس

$$degf + degg \geqslant degh + degg^۲ = degh + ۲degg.$$

$$degf \geqslant degh + degg.$$

که با فرض $degf < degg$ در تناقض است. □

لم ۳.۱.۷. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد و $A \in M_۲(R)$. در این‌صورت $A^۲ = A$، اگر و تنها اگر $A = ۰$ یا $A = I$ یا $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱ - a \end{pmatrix}$ به طوری که $bc = a - a^۲$.*

برهان. فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. اگر $A = ۰$ آنگاه $A^۲ = ۰$، پس $A^۲ = A$. اگر $A = I$، در این‌صورت $A^۲ = I^۲ = I = A$. اگر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱ - a \end{pmatrix}$ به طوری که $bc = a - a^۲$، آنگاه

$$\begin{aligned} A^۲ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱ - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱ - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^۲ + bc & ab + b - ba \\ ca + c - ca & cb + ۱ + a^۲ - ۲a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^۲ + a - a^۲ & b \\ c & a - a^۲ + ۱ + a^۲ - ۲a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱ - a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

یعنی $A^۲ = A$.

بعکس، فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ به طوری که $A^۲ = A$.

$$A^{۲} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{۲}+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

از تساوی درایه‌های نظیر به نظیر داریم

$$bc = a - a^{۲},$$

$$b(a+d-۱) = ۰,$$

$$c(a+d-۱) = ۰,$$

$$bc = d - d^{۲}. \tag{۱۰.۳}$$

بنابراین $a - a^{۲} = d - d^{۲}$. از این رو

$$a^{۲} - a + d - d^{۲} = (a-d)(a+d-۱) = ۰ \tag{۱۱.۳}$$

حالت اول: فرض کنیم $a + d - ۱ \in U(R)$. از روابط ۱۰.۳ و ۱۱.۳، نتیجه می‌گیریم که $b = c = ۰$ و $a = d$. از این رو $a = a^{۲}$. چون R موضعی است، پس $a = ۰$ یا $a = ۱$. بنابراین $A = ۰$ یا $A = I$.

حالت دوم: فرض کنیم $a + d - ۱ \in J(R)$. اگر $a - d \in J(R)$، آنگاه

$$-۴bc + ۱ = ۴(a^{۲} - a) + ۱ = [(a-d) + (a+d-۱)]^{۲} \in J(R).$$

بنابراین $bc \in U(R)$. بنا به رابطه‌ی ۱۰.۳، $a + d - ۱ = ۰$. لذا $d = ۱ - a$. بنابراین $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱-a \end{pmatrix}$ به طوری که $bc = a - a^{۲}$. اگر $a - d \in U(R)$. آنگاه بنا به روابط ۱۱.۳، $a + d - ۱ = ۰$. بنابراین $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱-a \end{pmatrix}$ به طوری که $bc = a - a^{۲}$. □

قضیه ۸.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی باشد.*

(۱) *اگر $۲ \in U(R)$، آنگاه $M_۲(R)$ قویا تمیز است اگر و تنها اگر برای هر $w \in J(R)$، $x^{۲} - x = w$ در R حل پذیر باشد.*

(۲) *اگر* $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$*، آنگاه* $M_2(R)$ *قویا تمیز است اگر و تنها اگر برای هر* $w \in J(R)$*، معادله‌ی* $x^2 - x = w$ *در* R *حل پذیر باشد.*

(۳) *اگر* $2 \in J(R)$ *و* $R/J(R) \ncong \mathbb{Z}_2$*، آنگاه* $M_2(R)$ *قویا تمیز است اگر و تنها اگر برای هر* w_1, w_2 *در* $J(R)$*، معادله‌ی* $x^2 + (1 + w_1)x = w_2$ *در* R *حل پذیر باشد.*

برهان. اثبات ضرورت بندهای (۱) و (۲)، بنا به قضیه‌ی ۵.۱.۳، واضح است. برای اثبات ضرورت بند (۳)، فرض کنیم $1 = u_1 + u_2$ که $u_1, u_2 \in U(R)$ (بنا بر لم ۲.۱.۳). برای $w_1, w_2 \in J(R)$، فرض کنیم

$$a_{11} = u_1, \qquad a_{22} = u_2 + w_1.$$

پس

$$a_{11} + a_{22} = u_1 + u_2 + w_1 = 1 + w_1,$$

$$s := a_{11} - a_{22} = u_1 - u_2 - w_1 = 1 + w_1 - 2a_{22} \in U(R).$$

از این رو $[s^2 + 4(w_2 + a_{11}a_{22})]$ در R یکه است. فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ به طوری که

$$a_{21} = -1, \qquad a_{12} = [s^2 + 4(w_2 + a_{11}a_{22})]^{-1} s^2 (w_2 + a_{11}a_{22}).$$

درنتیجه $trA = a_{11} + a_{22} = 1 + w_1 \in U(R)$. نشان می‌دهیم $detA \in J(R)$.

$$\begin{aligned}
detA &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
&= a_{11}a_{22} + [s^2 + 4(w_2 + a_{11}a_{22})]^{-1} s^2 (w_2 + a_{11}a_{22}) \\
&= \frac{a_{11}a_{22}[s^2 + 4(w_2 + a_{11}a_{22})] + s^2(w_2 + a_{11}a_{22})}{s^2 + 4(w_2 + a_{11}a_{22})} \\
&= [s^2 + (w_2 + a_{11}a_{22})]^{-1}[a_{11}a_{22}s^2 + 4a_{11}a_{22}(w_2 + a_{11}a_{22}) + s^2 w_2 + s^2 a_{11}a_{22} \\
&= [s^2 + 4(w_2 + a_{11}a_{22})]^{-1}[w_2 s^2 + 2s^2 a_{11}a_{22} + 4a_{11}a_{22}(w_2 + a_{11}a_{22})] \in J(R).
\end{aligned}$$

بنابراین

$$det(A-I)=(a_{۱۱}-۱)(a_{۲۲}-۱)-a_{۱۲}a_{۲۱}=a_{۱۱}a_{۲۲}-a_{۱۱}-a_{۲۲}+۱-a_{۱۲}a_{۲۱}$$
$$=a_{۱۱}a_{۲۲}-a_{۱۲}a_{۲۱}-۱-w_{۱}+۱$$
$$=detA-w_{۱}\in J(R).$$

بنا به فرض، $A=E+U$ یک عبارت قویا تمیز از $A\in M_{۲}(R)$ است. چون A و $A-I$ وارون پذیر نیستند، پس بنا به لم ۷.۱.۳، قرار می‌دهیم $E=\begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱-c \end{pmatrix}$، به طوری که $bc=a^{۲}-a$. بنا به لم ۴.۱.۳ داریم $a-a^{۲}=bc=s^{-۲}a_{۱۲}a_{۲۱}(۲a-۱)^{۲}$. لذا

$$s^{۲}bc=s^{۲}a-s^{۲}a^{۲}=a_{۱۲}a_{۲۱}(۲a-۱)^{۲}=a_{۱۲}a_{۲۱}(۴a^{۲}-۴a+۱).$$

در نتیجه

$$-a_{۱۲}a_{۲۱}=-s^{۲}a+s^{۲}a^{۲}+۴a_{۱۲}a_{۲۱}a^{۲}-۴a_{۱۲}a_{۲۱}a$$
$$=(s^{۲}+۴a_{۱۲}a_{۲۱})a^{۲}-(s^{۲}+۴a_{۱۲}a_{۲۱})a$$
$$=(s^{۲}+۴a_{۱۲}a_{۲۱})(a^{۲}-a)$$
$$=[(trA)^{۲}-۴detA](a^{۲}-a)=t(a^{۲}-a).$$

یعنی

$$-a_{۱۲}a_{۲۱}=t(a^{۲}-a). \qquad (۱۲.۳)$$

فرض کنیم $x_{\circ}=sa-a_{۱۱}$. پس $a=s^{-۱}(x_{\circ}+a_{۱۱})$. با توجه به رابطه‌ی ۱۲.۳، داریم:

$$t(a^{۲}-a)=t[s^{-۲}(x_{\circ}+a_{۱۱})^{۲}-s^{-۱}(x_{\circ}+a_{۱۱})]=-a_{۱۲}a_{۲۱}.$$

طرفین تساوی را در $s^۲$، ضرب می‌کنیم. در نتیجه

$$\begin{aligned}-s^{۲}a_{۱۲}a_{۲۱} &= t[(x_{\circ}+a_{۱۱})^{۲}-s(x_{\circ}+a_{۱۱})]\\ &= t[(x_{\circ}+a_{۱۱})^{۲}-(a_{۱۱}-a_{۲۲})(x_{\circ}+a_{۱۱})]\\ &= t[x_{\circ}^{۲}+(a_{۱۱}+a_{۲۲})x_{\circ}+a_{۱۱}a_{۲۲}]\\ &= t[x_{\circ}^{۲}+(trA)x_{\circ}+a_{۱۱}a_{۲۲}].\end{aligned}$$

پس $x_{\circ}^{۲}+(trA)x_{\circ}=-s^{۲}t^{-۱}a_{۱۲}a_{۲۱}-a_{۱۱}a_{۲۲}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}x_{\circ}^{۲}+(۱+w_{۱})x_{\circ} &= x_{\circ}^{۲}+(trA)x_{\circ}\\ &= -s^{۲}t^{-۱}a_{۱۲}a_{۲۱}-a_{۱۱}a_{۲۲}\\ &= s^{۲}t^{-۱}a_{۱۲}-a_{۱۱}a_{۲۲} \qquad (\text{برای} \quad a_{۲۱}=-۱)\end{aligned}$$

چون $t=s^{۲}+۴a_{۱۲}a_{۲۱}=s^{۲}-۴a_{۱۲}$ (برای $a_{۲۱}=-۱$)، پس داریم:

$$\begin{aligned}t^{-۱}a_{۱۲} &= (s^{۲}+۴a_{۱۲}a_{۲۱})^{-۱}[s^{۲}+۴(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲})]^{-۱}s^{۲}(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲})\\ &= [(s^{۲}-۴a_{۱۲})(s^{۲}+۴(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲}))]^{-۱}s^{۲}(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲})\\ &= [s^{۲}(s^{۲}+۴(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲}))-۴a_{۱۲}(s^{۲}+۴(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲}))]^{-۱}s^{۲}(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲})\\ &= [s^{۲}(s^{۲}+۴(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲}))-۴(s^{۲}+۴(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲}))^{-۱}s^{۲}(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲})\\ &\quad (s^{۲}+(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲}))]^{-۱}s^{۲}(w_{۲}+a_{۱۲}a_{۲۱})\\ &= [s^{۲}(s^{۲}+۴(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲}))-۴s^{۲}(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲})]^{-۱}s^{۲}(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲})\\ &= [s^{۴}+۴s^{۲}(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲})-۴s^{۲}(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲})]^{-۱}s^{۲}(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲})\\ &= (s^{۴})^{-۱}s^{۲}(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲})\\ &= s^{-۲}(w_{۲}+a_{۱۱}a_{۲۲}).\end{aligned}$$

از این رو

$$\begin{aligned} x_۰^۲ + (۱ + w_۱)x_۰ &= s^۲t^{-۱}a_{۱۲} - a_{۱۱}a_{۲۲} \\ &= s^۲s^{-۲}(w_۲ + a_{۱۱}a_{۲۲}) - a_{۱۱}a_{۲۲} \\ &= w_۲. \end{aligned}$$

بنابراین $x_۰$ در معادله‌ی $x^۲ + (۱ + w_۱)x = w_۲$ صدق می‌کند.

حال عکس هر یک از بندهای (۱)، (۲) و (۳) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{pmatrix}$. اگر A یا $I - A$ وارون پذیر باشد، آنگاه A قویا تمیز است. فرض کنیم A و $I - A$ یکه نباشند. بنابراین $detA, det(I - A) \in J(R)$. چون $det(I - A) = ۱ - trA + detA$، پس $trA - ۱ \in J(R)$. در نتیجه $trA \in U(R)$، و $t = (trA)^۲ - ۴detA \in U(R)$.

(۱): فرض کنیم $۲ \in U(R)$. چون $trA - ۱ \in J(R)$، پس قرار می‌دهیم $trA = ۱ + k_۰$ که $k_۰ \in J(R)$. درنتیجه $t = (trA)^۲ - ۴detA = (۱ + k_۰)^۲ - ۴detA = ۱ + w$ به طوری که $w = k_۰^۲ + ۲k_۰ - ۴detA \in J(R)$. از طرفی بنا به فرض، معادله‌ی $x^۲ + ۲x = w$ در R حل پذیر است، از این رو بنا به لم ۱.۱.۳، در $J(R)$ نیز حل پذیر است. بنابراین فرض کنیم $k^۲ + ۲k = w$ که $k \in J(R)$. چون $t = ۱ + w$، پس $(k + ۱)^۲ = t$. فرض کنیم $u = k + ۱$،

$$E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱ - a \end{pmatrix}, \qquad \text{و} \quad U = A - E,$$

به طوری که

$$a = \frac{۱}{۲}(۱ - su^{-۱}), \qquad b = -a_{۱۲}u^{-۱}, \qquad c = -a_{۲۱}u^{-۱}.$$

در این صورت $۲a - ۱ = -su^{-۱}$. و نتایج زیر حاصل می‌شوند

$$a_{۲۱}b = a_{۲۱}(-a_{۱۲}u^{-۱}) = a_{۱۲}c,$$

$$sb = s(-a_{۱۲}u^{-۱}) = a_{۱۲}(۲a - ۱),$$

$$sc = s(-a_{21}u^{-1}) = a_{12}(2a-1),$$

$$\begin{aligned} bc &= (-a_{12}u^{-1})(-a_{21}u^{-1}) = a_{12}a_{21}u^{-2} \\ &= \frac{1}{4}(t-s^2)u^{-2} = \frac{1}{4}[tu^{-2}-(su^{-1})^2] \\ &= \frac{1}{4}[1-(2a-1)^2] = \frac{1}{4}[1-4a^2+4a-1] \\ &= a-a^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} detU &= (a_{11}-a)(a_{22}-1+a)-(a_{12}-b)(a_{21}-c) \\ &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}+a(a_{11}-a_{22})+a-a^2-bc+ca^{12}+ba^{21}-a^{11} \\ &= detA+as+2a_{12}c-a_{11} \\ &= detA+\frac{1}{2}(1-su^{-1})s-a_{11}-2a_{12}a_{21}u^{-1} \\ &= detA+\frac{1}{2}u^{-1}[(s-2a_{11})u-(s^2+4a_{12}a_{21})] \\ &= detA+\frac{1}{2}u^{-1}[(a_{11}-a_{22}-2a_{11})u-u^2] \\ &= detA-\frac{1}{2}(trA+u) \\ &= detA-\frac{1}{2}(1+k_0+1+k) \\ &= detA-1-\frac{1}{2}(k_0+k). \end{aligned}$$

لذا $detU$ در R یکه است. پس بنا به لم ۴.۱.۳، A یک عبارت قویا تمیز از A در $M_2(R)$ است.

(۲): فرض کنیم $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$. در نتیجه $2 \in J(R)$ و $s = a_{11} - a_{22} = trA - 2a_{22} \in U(R)$. از اینکه $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ و $trA = a_{11} + a_{22} \in U(R)$، نتیجه می‌گیریم که یکی از a_{11}، a_{22} در $J(R)$ است. بنابراین $a_{11}a_{22} \in J(R)$. چون $detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in J(R)$، پس $a_{12}a_{21} \in J(R)$. فرض

کنیم $w = -t^{-1}a_{12}a_{21} \in J(R)$. بنا به فرض، معادله‌ی $x^2 - x = w$ در R حل پذیر است. از این رو بنا به لم ۱.۱.۳، $x_0 \in J(R)$ و $x_1 \in U(R)$ وجود دارند که برای $i = 0, 1$، داریم $x_i^2 + x_i = w$. فرض کنیم $a \in \{x_0, x_1\}$ و

$$b = s^{-1}a_{12}(2a - 1), \qquad c = s^{-1}a_{21}(2a - 1).$$

در نتیجه $a_{21}b = a_{21}s^{-1}a_{12}(2a - 1) = a_{12}c$. چون $a^2 - a = w = -t^{-1}a_{12}a_{21}$، پس داریم:

$$t(a^2 - a) = -tt^{-1}a_{12}a_{21}.$$

بعلاوه، از اینکه $t = s^2 + 4a_{12}a_{21}$، داریم:

$$\begin{aligned} s^2bc &= s^2s^{-1}a_{12}a_{21}(2a - 1) \\ &= a_{12}a_{21}(2a - 1)^2 \\ &= a_{12}a_{21}[4(a^2 - a) + 1] \\ &= 4a_{12}a_{21}(a^2 - a) + a_{12}a_{21} \\ &= (t - s^2)(a^2 - a) + a_{12}a_{21} \\ &= t(a^2 - a) - s^2(a^2 - a) + a_{12}a_{21} \\ &= -a_{12}a_{21} - s^2(a^2 - a) + a_{12}a_{21} \\ &= -s^2(a^2 - a). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$a - a^2 = bc.$$

اگر $a_{11} \in J(R)$، با انتخاب $a = x_1$ داریم $detU = sa + (detA - a_{11} + 2a_{12}c) \in U(R)$. اگر $a_{11} \in U(R)$، با انتخاب $a = x_0$ داریم $detU = -a_{11} + (detA + as + 2a_{12}c) \in U(R)$. بنابراین

شرایط ۱.۳ تا ۵.۳ از لم ۴.۱.۳، برقرار هستند. پس بنا به لم ۴.۱.۳، $A = E + (A - E)$ یک عبارت قویا تمیز از $A \in M_2(R)$ است.

(۳):فرض کنیم $2 \in J(R)$ و $R/J(R) \ncong \mathbb{Z}_2$. قرار می‌دهیم $trA = 1 + w_1$ که $w_1 \in J(R)$. از طرفی داریم $s = trA - 2a_{22} \in U(R)$.

حالت اول: فرض کنیم $a_{12}a_{21} \in U(R)$. چون $detA \in J(R)$، پس $a_{11}a_{22} \in U(R)$، و

$$a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} = detA + 2a_{12}a_{21} \in J(R).$$

فرض کنیم

$$w_2 = -t^{-1}[s^2(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) + 4a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}].$$

در نتیجه $w_2 \in J(R)$. پس بنا به فرض، $x^2 + (1 + w_1)x = w_2$ در R حل پذیر است. و از این رو بنا بر لم ۱.۱.۳، در $U(R)$ نیز حل پذیر است. فرض کنیم $x_0^2 + (1 + w_1)x = w_2$ که $x_0 \in U(R)$. قرار می‌دهیم $a = s^{-1}(a_{11} + x_0)$. بنابراین $as - a_{11} = x_0$. فرض کنیم

$$E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad U = A - E.$$

به طوری که

$$b = s^{-1}a_{12}(2a - 1), \qquad c = s^{-1}a_{21}(2a - 1).$$

بنابراین داریم

$$a_{12}c = a_{12}s^{-1}a_{21}(2a - 1) = a_{21}s^{-1}a_{12}(2a - 1) = a_{21}b,$$

$$a^2 - a = s^{-2}(a_{11} + x_0)^2 - s^{-1}(a_{11} + x_0)$$
$$= s^{-2}[x_0^2 + 2a_{11}x_0 + a_{11}^2 - (a_{11} - a_{22})(x_0 + a_{11})]$$
$$= s^{-2}[x_0^2 + 2a_{11}x_0 + a_{11}^2 - a_{11}x_0 + a_{22}x_0 - a_{11}^2 + a_{22}a_{11}]$$
$$= s^{-2}[x_0^2 + (a_{11} + a_{22})x_0 + a_{22}a_{11}]$$
$$= s^{-2}[x_0^2 + (trA)x_0 + a_{11}a_{22}] = s^{-2}[x_0^2 + (1 + w_1)x_0 + a_{11}a_{22}]$$
$$= s^{-2}(w_2 + a_{11}a_{22}) = s^{-2}t^{-1}[-s^2(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) - 4a_{11}a_{12}a_{22}a_{21} + a_{11}a_{22}(s^2 + 4a_{12}a_{21})]$$
$$= t^{-1}[-a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22}s^{-2}(-4a_{12}a_{21} + s^2 + 4a_{12}a_{21})]$$
$$= t^{-1}[-a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22}]$$
$$= -t^{-1}a_{12}a_{21}.$$

در نتیجه $t(a^2 - a) = -a_{12}a_{21}$. بنابراین $bc = a - a^2$ (مشابه (۲)). بعلاوه، داریم

$$detU = detA + as - a_{11} + 2a_{12}c$$
$$= detA + x_0 + 2a_{12}c$$
$$= x_0 + (detA + 2a_{12}c) \in U(R).$$

از این رو، بنا به لم ۴.۱.۳، A در $M_2(R)$ قویا تمیز است.

حالت دوم: فرض کنیم $a_{12}a_{21} \in J(R)$ و $w = -t^{-1}a_{12}a_{21}$. در نتیجه $w \in J(R)$. چون $2 \in J(R)$، پس بنا به فرض، معادله ی $x^2 - x = w$ در R حل پذیر است. حال برهان (۲) نشان می‌دهد A در $M_2(R)$ قویا تمیز است. □

ملاحظه ۹.۱.۳. *فرض کنیم $\varphi : R \to S$ یک همریختی پوشا باشد، اگر R قویا تمیز باشد، آنگاه S نیز قویا تمیز است.*

برهان. چون φ همریختی پوشا است، پس بنا به قضیه اول یکریختی داریم $R/ker\varphi \cong S$. فرض کنیم $a \in R$. از طرفی بنا به فرض، R قویا تمیز است. بنابراین خودتوان $e \in R$ و یکه‌ی $u \in U(R)$ وجود دارند به طوری که $a = e + u$ و $eu = ue$. قرار می‌دهیم $\overline{a} = a + ker\varphi \in R/ker\varphi$. پس $\overline{a} = e + u + ker\varphi$. از طرفی داریم

$$(u + ker\varphi)(u^{-۱} + ker\varphi) = uu^{-۱} + ker\varphi = ۱ + ker\varphi.$$

در نتیجه $(u^{-۱} + ker\varphi)$، وارون $(u + ker\varphi)$ است. چون $e(u + ker\varphi) = (u + ker\varphi)e$، پس $R/ker\varphi$ قویا تمیز است. از این رو S قویا تمیز است. $\square$

قضیه ۱۰.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) $M_۲(R)$ *قویا تمیز است.*

(۲) $M_۲(R[[x]])$ *قویا تمیز است.*

(۳) *برای هر* $n \geq ۱$، $M_۲(R[x]/(x^n))$ *قویا تمیز است.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم $S = R[[x]]$. ادعا می‌کنیم S حلقه‌ی موضعی جابجایی است و

$$J(S) = J(R) + xS.$$

فرض کنیم S موضعی نباشد، لذا $J(S)$ تنها ایده‌آل ماکسیمال S نیست. بنابراین ایده‌آل ماکسیمالی چون N وجود دارد به طوری که $J(S) \subset N$. در نتیجه $f(x) = c_۰ + c_۱x + \cdots \in N$ وجود دارد که $f(x) \notin J(S)$ و $c_i \in R$. در نتیجه $c_۱x + c_۲x^۲ + \cdots \in xS$. لذا $c_۰ \notin J(R)$. چون R حلقه‌ی موضعی است، پس $c_۰ \in U(R)$. در نتیجه $f(x) \in U(S)$. پس S حلقه‌ی موضعی است. برای نشان دادن $J(S) = J(R)+xS$، فرض کنیم $f(x) = a_۰ + a_۱x + \cdots \in J(S)$ که $a_i \in R$. چون S حلقه‌ی موضعی است، پس برای هر $g(x) = b_۰ + b_۱x + \cdots \in S$ که $b_i \in R$، داریم:

$$1 - g(x)f(x) = 1 - b_0 a_0 + (b_1 a_1 + b_2 a_2 x + \cdots)x \in U(S).$$

لذا $1 - b_0 a_0 \in U(R)$. پس $a_0 \in J(R)$. از این رو $f(x) = a_0 + (S)x \in J(R) + Sx$. چون $f(x)$ دلخواه است، پس $J(S) = J(R) + Sx$.

واضح است که نگاشت $\varphi : R/J(R) \longrightarrow S/J(S)$ با ضابطه‌ی $r + J(R) \longmapsto r + J(S)$، یک یکریختی حلقه‌ای است. لذا $S/J(S) \cong R/J(R)$.

حالت اول: فرض کنیم $2 \in U(R)$، بنابراین $2 \in U(S)$. برای هر $w \in J(S)$، قرار می‌دهیم

$$w = j + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

که $j \in J(R)$ و برای هر $i \geqslant 1$، $c_i \in R$. نشان می دهیم $a_i \in R$ $(i = 0, 1, \cdots)$ وجود دارد به طوری که $y^2 + 2y = w$ که $y = -1 + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. فرض کنیم $c_0 = 1 + j \in U(R)$، در نتیجه

$$y^2 + 2y = w \quad \Leftrightarrow \quad (y+1)^2 = 1 + w \quad \Leftrightarrow \quad (\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

اگرو تنها اگر

$$a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0)x^1 + (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0)x^2 + (a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0)x^3 + \cdots +$$
$$(a_0 a_{k+1} + a_1 a_k + \cdots + a_k a_1 + a_{k+1} a_0)x^{k+1} + \cdots = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \cdots .$$

یعنی برای $k = 0, 1, 2, \cdots$ داریم:

$$a_0^2 = c_0, \qquad a_0 a_{k+1} + a_1 a_k + \cdots + a_k a_1 + a_{k+1} a_0 = c_{k+1}.$$

در نتیجه برای $k = 0, 1, 2, \cdots$ داریم:

$$2a_0 a_{k+1} = c_{k+1} - (a_1 a_k + \cdots + a_k a_1).$$

چون $M_2(R)$ قویا تمیز است و $j \in J(R)$، پس بنا به قضیه‌ی قبل بند (۱)، $b_0 \in R$ وجود دارد که $J = b_0^2 + 2b_0$. فرض کنیم $a_0 = 1 + b_0$. در این صورت

$$a_0^2 = (1 + b_0)^2 = b_0^2 + 2b_0 + 1 = j + 1 = c_0.$$

چون $c_0 \in U(R)$ و $2 \in U(R)$، پس داریم $2a_0 \in U(R)$. لذا هر a_i را از رابطه ی

$$a_{k+1} = (2a_0)^{-1}[c_{k+1} - (a_1a_k + \cdots + a_ka_1)],$$

می‌توان ساخت. در نتیجه $y^2 + 2y = w$ در S حل پذیر است.

حالت دوم: فرض کنیم $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$. بنابراین $R/J(R) \cong S/J(S) \cong \mathbb{Z}_2$. برای هر $w \in J(R)$، قرار می‌دهیم $w = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ به طوری که $c_0 \in J(R)$ و برای هر $i \geq 1$، $c_i \in R$. نشان می‌دهیم $a_i \in R(i = 0, 1, \cdots)$ وجود دارد به طوری که $y^2 - y = w$ که $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$. داریم:

$$y^2 - y = w,$$

اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned} c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2 - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ &= a_0^2 - a_0 + (a_0a_1 + a_1a_0 - a_1)x + (a_0a_2 + a_1^2 + a_2a_0 - a_2)x^2 + \cdots \end{aligned}$$

اگر و تنها اگر

$$a_0^2 - a_0 = c_0, \qquad a_0a_{k+1} + a_1a_k + \cdots + a_ka_1 + a_{k+1}a_0 - a_{k+1} = c_{k+1}, \quad (\text{برای}\ k = 0, 1, \cdots).$$

در نتیجه

$$a_0^2 - a_0 = c_0, \qquad (2a - 1)a_{k+1} = c_{k+1} - (a_1a_k + \cdots + a_ka_1).$$

چون $M_2(R)$ قویا تمیز است و $c_0 \in J(R)$، پس بنا به قضیه‌ی قبل، $a_0 \in R$ وجود دارد که $a_0^2 - a_0 = c_0$. چون $2 \in J(R)$، پس $2a_0 - 1 \in U(R)$. بنابراین برای $k = 0, 1, \cdots$ به طور استقرایی می‌توان نتیجه گرفت که

$$a_{k+1} = (2a-1)^{-1}[c_{k+1} - (a_1 a_k + \cdots + a_k a_1)].$$

در نتیجه $y^2 - y = w$ در S حل پذیر است. از این رو بنا به قضیه‌ی قبل بند (۲)، اثبات قضیه کامل می‌شود.

حالت سوم: $2 \in J(R)$ و $R/J(R) \ncong \mathbb{Z}_2$. بنابراین $2 \in J(S)$ و $S/J(S) \ncong \mathbb{Z}_2$. برای هر w_1, w_2 در $J(R)$ قرار می‌دهیم $w_1 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$ و $w_2 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ به طوری که $b_0, c_0 \in J(R)$ و برای هر $i \geq 1$، $b_i, c_i \in R$. نشان می‌دهیم $a_i \in R$ $(i = 0, 1, \cdots)$ وجود دارد که $y^2 + (1+w_1)y = w_2$ که $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$،

داریم $y^2 + (1+w_1)y = w_2$، اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned}
c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^2 + (1 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \\
&= a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0)x + \cdots + (a_0 a_{k+1} + a_1 a_k + \cdots + a_k a_1 + a_{k+1} a_0)x^{k+1} + \cdots \\
&\quad + (1+b_0)a_0 + (a_1 + b_0 a_1)x + (a_2 + b_0 a_2 + b_1 a_1)x + (a_3 + b_0 a_3 + b_1 a_1 + b_2 a_0)x^2 \\
&\quad + \cdots + (a_{k+1} + b_0 a_{k+1} + b_1 a_k + \cdots + b_k b_1 + b_{k+1} a_0)x^{k+1}
\end{aligned}$$

اگر و تنها اگر $a_0^2 - (1+b_0)a_0 = c_0$ و برای $k = 0, 1, \cdots$

$$a_0 a_{k+1} + a_1 a_k + \cdots + a_k a_1 + a_{k+1} a_0 + (1+b_0)a_{k+1} + b_1 a_k + \cdots + b_k a_1 + b_{k+1} a_0 = c_{k+1}.$$

در نتیجه

$$a_0^2 + (1+b_0)a_0 = c_0. \text{ و برای } k = 0, 1, \cdots$$

$$(1 + 2a_0 + b_0)a_{k+1} = c_{k+1} - (a_1 a_k + \cdots + a_k a_1) - (b_1 a_k + \cdots + b_k a_1 + b_{k+1} a_0).$$

چون $M_2(R)$ قویا تمیز است و $b_0, c_0 \in J(R)$، پس بنا به قضیه‌ی قبل بند (۳)، $a_0 \in R$ وجود دارد که $a_0^2 + (1+b_0)a_0 = c_0$. چون $2 \in J(R)$، پس داریم:

$$1 + 2a_0 + b_0 \in U(R).$$

بنابراین برای $k = 0, 1, \cdots$ داریم

$$a_{k+1} = (1 + 2a_0 + b_0)^{-1}[c_{k+1} - (a_1a_k + \cdots + a_ka_1) - (b_1a_k + \cdots + b_ka_1 + b_{k+1}a_0)].$$

بنابراین $y^2 + (1 + w_1)y = w_2$ در S حل پذیر است. در نتیجه اثبات (۲) از قضیه‌ی ۸.۱.۳ بند (۳)، کامل می‌شود.

(۱) ⇐ (۳). فرض کنیم $S = R[x]/(x^n)$. می‌دانیم $(x)/(x^n)$ یک ایده‌آل پوچتوان از S است. نشان می‌دهیم $[J(R)+(x^n)]/(x) \subseteq J(S)$. فرض کنیم $\alpha \in J(R)$. در این صورت $\alpha+(x^n) \in J(R)+(x^n)$. چون $\alpha \in J(R)$، پس برای هر $r \in R$ ، $1 - r\alpha \in U(R)$. حال برای هر $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + (x^n) \in S$، نشان می‌دهیم $1 - \alpha f(x) + (x^n) \in U(S)$. داریم:

$$1 - \alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + (x^n) =$$

$$(1 - a_0\alpha) + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \cdots + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + (x^n) = (1 - a_0\alpha) + (x^n).$$

بنابراین $1 - a_0\alpha \in U(R)$. لذا $1 - \alpha f(x) + (x^n) \in U(S)$. پس $\alpha \in J(S)$. در نتیجه

$$[J(R) + (x^n)]/(x^n) \subseteq J(S).$$

بنابراین $[J(R) + (x)]/(x^n) \subseteq J(S)$. پس

$$\frac{R[x]/(x^n)}{[J(R) + (x)]/(x^n)} \cong \frac{R[x]}{J(R) + (x)}.$$

نشان می‌دهیم $\frac{R}{J(R)} \cong \frac{R[x]}{J(R) + (x)}$.

نگاشت $\varphi : R[x] \longrightarrow R/J(R)$ با ضابطه‌ی $\varphi(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_0 + J(R)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ که $a_i, b_i \in R$. پس

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n = 0.$$

در نتیجه $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$. بنابراین $a_0 + J(R) = b_0 + J(R)$. لذا φ خوشتعریف است.

چون

$$ker\varphi = (x) + J(R),$$

پس φ یک به یک است. بنابراین $R[x] \cong \frac{R}{J(R)}$. در نتیجه بنا به قضیه اول یکریختی داریم:

$$\frac{R[x]}{J(R) + (x)} \cong \frac{R}{J(R)}.$$

در نتیجه

$$\frac{R[x]/(x^n)}{[J(R) + (x)/(x^n)} \cong \frac{R[x]}{J(R) + (x)} \cong \frac{R}{J(R)}.$$

چون $R/J(R)$ میدان است، پس $\frac{S}{[J(R) + (x)]/(x^n)}$، نیز میدان است. از طرفی

$$\circ \subsetneq [J(R) + (x)]/(x^n) \subseteq J(S),$$

در نتیجه $[J(R) + (x)]/(x^n) = J(S)$. لذا S موضعی است. حال مشابه برهان (۱) $\Leftarrow$ (۲)، حکم ثابت می شود.

(۳)یا(۲) $\Leftarrow$ (۱). به وضوح نگاشت $\varphi : M_۲(R[[x]]) \longrightarrow M_۲(R)$ با ضابطه‌ی $\begin{pmatrix} f_۱ & f_۲ \\ f_۳ & f_۴ \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_۱(\circ) & f_۲(\circ) \\ f_۳(\circ) & f_۴(\circ) \end{pmatrix}$، یک یکریختی از حلقه‌ها است. پس $M_۲(R[[x]]) \cong M_۲(R)$.
نگاشت $\psi : M_۲(R[x]/(x^n)) \longrightarrow M_۲(R)$ با ضابطه‌ی $\begin{pmatrix} f_۱ + (x^n) & f_۲ + (x^n) \\ f_۳ + (x^n) & f_۴ + (x^n) \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_۱(\circ) & f_۲(\circ) \\ f_۳(\circ) & f_۴(\circ) \end{pmatrix}$، را در نظر می گیریم. بوضوح ψ، یک یکریختی از حلقه‌ها است. پس $M_۲(R)$ تصویر همریخت از $M_۲(R[[x]])$ و $M_۲(R[x]/(x^n))$ است، بنابراین قویا تمیز است. □

نتیجه ۱۱.۱.۳. *برای هر عدد اول* p، $M_۲(\widehat{\mathbb{Z}}_p[[x]])$ *و* $M_۲(\widehat{\mathbb{Z}}_p[x]/(x^n))$ *قویا تمیز هستند.*

برهان. چون $M_۲(\widehat{\mathbb{Z}}_p)$ قویا تمیز است، پس بنا به قضیه‌ی قبل، نتیجه برقرار است. □

تعریف ۱۲.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه و G یک گروه باشد. در این صورت RG را چنین تعریف می‌کنیم:

$$RG = \left\{ \sum_{i=۱}^{n} r_i g_i \mid r_i \in R\ ,\ g_i \in G \right\}.$$

همچنین برای هر $r_i, s_j \in R$ و $g_i, h_j \in G$، جمع و ضرب روی RG را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i g_i + \sum_{j=1}^{m} s_j h_j = r_1 g_1 + \cdots + r_n g_n + s_1 h_1 + \cdots + s_m h_m,$$
$$(\sum_{i=1}^{n} r_i g_i)(\sum_{j=1}^{m} s_j h_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(r_i s_j)(g_i h_j).$$

به سادگی می توان نشان داد RG با دو عمل فوق یک حلقه است. این حلقه را حلقه‌ی گروهی G روی R می‌نامیم.

لم ۱۳.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد.*

(۱) *اگر $2 \in J(R)$، آنگاه $J(RC_2) = \{r_0 + r_1 g : r_0 + r_1 \in J(R)\}$ و $R/J(R) \cong RC_2/J(RC_2)$.*

در حالت خاص، RC_2 موضعی است.

(۲) *اگر $2 \in U(R)$، آنگاه $RC_2 \cong R \oplus R$.*

برهان. قرار می‌دهیم $RC_2 = \{a + bg \colon a, b \in R\}$. می‌دانیم که اگر $a^2 - b^2 \in U(R)$، آنگاه

$$(a^2 - b^2) = (a - bg)(a + bg) = a^2 - b^2 g^2 = a^2 - b^2,$$

از ضرب $(a + bg)^{-1}$ و $(a^2 - b^2)^{-1}$، در طرفین تساوی بالا داریم:

$$(a^2 - b^2)^{-1}(a^2 - b^2)(a + bg)^{-1} = (a^2 - b^2)^{-1}(a - bg)(a + bg)(a + bg)^{-1}$$
$$(a + bg)^{-1} = (a^2 - b^2)^{-1}(a - bg).$$

فرض کنیم $\Delta = \{a + bg \colon a + b \in J(R)\}$. نشان می‌دهیم Δ ایده‌آلی از RC_2 است. فرض کنیم $a + bg, c + dg \in \Delta$. در این صورت $a + b, c + d \in J(R)$. پس

$$(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) \in J(R).$$

لذا $(a+c)+(b+d)g = a+bg+c+dg \in \Delta$. فرض کنیم $r_۰ + r_۱ g \in RC_۲$ و $a+bg \in \Delta$. پس

$$(r_۰ + r_۱ g)(a+bg) = r_۰ a + r_۰ bg + r_۱ ag + r_۱ bg^۲$$
$$= r_۰ a + r_۰ bg + r_۱ ag + r_۱ b$$
$$= (r_۰ a + r_۱ b) + (r_۰ b + r_۱ a)g.$$

بنابراین $(r_۰ + r_۱ g)(a+bg) \in \Delta$. لذا $\Delta \trianglelefteq RC_۲$.

برای هر $a+bg \in \Delta$، داریم:

$$(۱+a)^۲ - b^۲ = ۱ + ۲a + a^۲ - b^۲ = ۱ + [۲a + (a^۲ - b^۲)] \in U(R).$$

بنابراین $۱ + (a+bg) = (۱+a) + bg \in U(RC_۲)$. در نتیجه $a+bg \in J(RC_۲)$. لذا $\Delta \subseteq J(RC_۲)$. از طرفی واضح است که $J(RC_۲) \subseteq \Delta$. بنابراین $\Delta = J(RC_۲)$.

واضح است که نگاشت $R/J(R) \longrightarrow RC_۲/J(RC_۲)$ با ضابطه‌ی $r + J(R) \mapsto r + J(RC_۲)$، یک یکریختی از حلقه‌ها است . لذا $R/J(R) \cong RC_۲/J(RC_۲)$. چون $R/J(R)$ میدان است، پس $RC_۲/J(RC_۲)$ میدان است. از طرفی برای هر $r \in J(R)$ واضح است که $J(RC_۲) = r + J(RC_۲)$. لذا $RC_۲$ موضعی است.

(۲) فرض کنیم $۲ \in U(R)$. لذا $\frac{۱}{۲} \in R$. نگاشت

$$\varphi : RC_۲ \longrightarrow R \oplus R$$

با ضابطه‌ی $a+bg \mapsto (a+b, a-b)$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $a_۱ + b_۱ g, a_۲ + b_۲ g \in RC_۲$، فرض کنیم $a_۱ + b_۱ g = a_۲ + b_۲ g$. پس $a_۱ - a_۲ + b_۱ g - b_۲ g = ۰$. لذا $a_۱ = a_۲, b_۱ = b_۲$. در نتیجه $(a_۱ + b_۱, a_۱ - b_۱) = (a_۲ + b_۲, a_۲ - b_۲)$. لذا φ خوشتعریف است. حال نشان می‌دهیم φ همریختی

است.

$$\varphi(a_1 + b_1 g + a_2 + b_2 g) = \varphi(a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)g) = (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, a_1 + a_2 - b_1 - b_2)$$

$$= (a_1 + b_1 + a_2 + b_2, a_1 - b_1 + a_2 - b_2) = (a_1 + b_1, a_1 - b_1) + (a_2 + b_2, a_2 - b_2)$$

$$\varphi((a_1 + b_1 g)(a_2 + b_2 g)) = \varphi(a_1 a_2 + a_1 b_2 g + a_2 b_1 g + b_1 b_2 g^2)$$

$$= (a_1 a_2 + b_1 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1, a_1 a_2 + b_1 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= ((a_1 + b_1)(a_2 + b_2), (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)) = (a_1 + b_1, a_1 - b_1)(a_2 + b_2, a_2 - b_2).$$

بوضوح φ، یک به یک و پوشا است. لذا $RC_2 \cong R \oplus R$. □

قضیه ۱۴.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *$M_2(R)$ قویا تمیز است.*

(۲) *$M_2(RC_2)$ قویا تمیز است.*

برهان. با بررسی سه مورد زیر، (۱) ⇐ (۲) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $S = RC_2$.

حالت اول: فرض کنیم $2 \in U(R)$. در این صورت بنا به لم قبل داریم $RC_2 = R \oplus R$. چون $M_2(S)$ تصویر همریخت $M_2(R) \oplus M_2(R)$ است، پس $M_2(S) \cong M_2(R) \oplus M_2(R)$ قویا تمیز است.

حالت دوم: فرض کنیم $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$. در این صورت $S/J(S) \cong R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$. برای $w \in J(S)$، نشان می‌دهیم $x_0, x_1 \in R$ وجود دارند به طوری که $x^2 - x = w$ که $x = x_0 + x_1 g$. از لم قبل داریم $w = r_0 + r_1 g$ که $r_0 + r_1 \in J(R)$. لذا بنا به قضیه ۸.۱.۳، $a_0 \in R$ وجود دارد که $a_0^2 - a_0 = r_0 + r_1$. فرض کنیم $x_0 = a_0 - x_1$. پس

$$x^2 - x = w \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1^2 + (1 - 2a_0)x_1 = -r_1.$$

بنابراین کافیست نشان دهیم که $-r_1 = 2y^2 + (1-2a_0)y$ در R حل پذیر است. چون $2a_0 - 1 \in U(R)$، پس با جایگذاری $y = (2a_0 - 1)z$ در معادله‌ی بالا داریم:

$$\begin{aligned}
-r_1 &= 2y^2 + (1-2a_0)y \\
&= 2(2a_0-1)^2z^2 + (1-2a_0)(2a_0-1)z \\
&= 2(2a_0-1)^2z^2 - (2a_0-1)^2z \\
&= (2a_0-1)^2(2z^2-z).
\end{aligned}$$

اگر و تنها اگر $2z^2 - z = b$ که $b = -r_1(2a_0-1)^{-2}$. بنابراین کافیست نشان دهیم معادله‌ی $2z^2 - z = b$ در R حل پذیر است. چون $2b \in J(R)$، پس بنا به قضیه‌ی ۸.۱.۳، $z_0 \in R$ وجود دارد که $2z_0^2 - z_0 = b$. و بنا به لم ۱.۱.۳، می‌توانیم فرض کنیم $z_0 \in J(R)$. چون R موضعی است، پس $z_0 - 1 \in U(R)$. نشان می‌دهیم $z = b(z_0 - 1)^2$ در معادله‌ی $2z^2 - z = b$ صدق می کند:

$$\begin{aligned}
2z^2 - z &= 2b^2(z_0-1)^{-2} - b(z_0-1)^{-1} = 2b^2(z_0-1)^{-2} - b(z_0-1)^{-1} \\
&= bz_0(z_0-1)(z_0-1)^{-2} - b(z_0-1)^{-1} = bz_0(z_0-1)^{-1} - b(z_0-1)^{-1} \\
&= (bz_0 - b)(z_0-1)^{-1} = (b(z_0-1))(z_0-1)^{-1} = b.
\end{aligned}$$

حالت سوم: فرض کنیم $2 \in J(R)$ و $R/J(R) \ncong \mathbb{Z}_2$. آنگاه $2 \in J(S)$ و $S/J(S) \ncong \mathbb{Z}_2$. برای $w_1, w_2 \in J(S)$، نشان می‌دهیم $x_0, x_1 \in R$ وجود دارند به طوری که $x^2 + (1+w_1)x = w_2$ که $x = x_0 + x_1g$. بنا به لم قبل، $w_1 = r_0 + r_1g$ و $w_2 = s_0 + s_1g$ وجود دارند که $r_0 + r_1, s_0 + s_1 \in J(R)$. پس با توجه به بند (۳) قضیه‌ی ۸.۱.۳، $a \in R$ وجود دارد که $a^2 + (1 + r_0 + r_1)a = s_0 + s_1$. فرض کنیم $x_0 = a - x_1$. در نتیجه

$$x^2 + (1+w_1)x = w_2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1^2 - (1 + 2a + r_0 - r_1)x_1 = r_1a - s_1.$$

کافیست نشان دهیم معادله‌ی $2y^2 - (1 + 2a + r_0 - r_1)y = r_1a - s_1$ در R حل پذیر است. چون

$$1+2a+r_0-r_1=1+2a+(r_0+r_1)-2r_1\in U(R).$$

با جایگذاری $y=(1+2a+r_0-r_1)z$ در معادله‌ی بالا داریم:

$$\begin{aligned}r_1a-s_1&=2y^2-(1+2a+r_0-r_1)y\\&=2((1+2a+r_0-r_1)z)^2-(1+2a+r_0-r_1)(1+2a+r_0-r_1)z\\&=(1+2a+r_0-r_1)^2(2z^2-z).\end{aligned}$$

اگر و تنها اگر $2z^2-z=b$ که $(1+2a+r_0-r_1)^{-2}(r_1a-s_1)$. بنابراین کافیست نشان دهیم معادله‌ی $b=2z^2-z$ در R حل پذیر است. چون $2,2b\in J(R)$، پس با توجه به بند (۳) قضیه‌ی ۸.۱.۳، $z_0\in R$ وجود دارد که $2=z_0^2-z_0$. پس بنا به لم ۱.۱.۳، می‌توانیم فرض کنیم $z_0\in J(R)$. بنابراین $1-z_0\in U(R)$. لذا نشان می‌دهیم $z=b(z_0-1)^{-1}$ در معادله‌ی $2z^2-z=b$ صدق می‌کند:

$$\begin{aligned}2b^2(z_0-1)^{-2}-b(z_0-1)&=2b\cdot b(z_0-1)^{-2}-b(z_0-1)^{-1}\\&=b(z_0(z_0-1))(z_0-1)^{-2}-b(z_0-1)^{-1}\\&=bz_0(z_0-1)^{-1}-b(z_0-1)^{-1}\\&=(bz_0-b)(z_0-1)^{-1}=b(z_0-1)(z_0-1)^{-1}\\&=b.\end{aligned}$$

لذا $x^2+(1+w_1)x=w_2$ در S حل پذیر است.لذا $M_2(S)$ قویا تمیز است.

(۲) $\Leftarrow$ (۱): چون $M_2(R)$ تصویر همریختی از $M_2(RC_2)$ است، پس قویا تمیز است. □

نتیجه ۱۵.۱.۳. *برای هر عدد اول p، $M_2(\widehat{\mathbb{Z}}_pC_2)$ قویا تمیز است.*

برهان. چون $M_2(\widehat{\mathbb{Z}}_p)$ قویا تمیز است، پس بنا به قضیه‌ی ۱۴.۱.۳، $M_2(\widehat{\mathbb{Z}}_pC_2)$ نیز قویا تمیز است. □

فصل ۴

حلقه‌های ماتریسی قویا تمیز روی حلقه موضعی

۱.۴ حلقه‌های ماتریسی قویا تمیز

در این فصل، نشان می‌دهیم ماتریس ۲×۲، A قویا تمیز است اگر و تنها اگر A یکه باشد یا $A - I$ یکه باشد، یا A قطری شدنی باشد.

لم ۱.۱.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی باشد به طوری که $J(R)$ یک ایده‌آل اول باشد و $w \in J(R)$ و $u \in U(R)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *معادله‌ی $x^۲ - ux = w$ در R حل پذیر است.*

(۲) *معادله‌ي $x^۲ - ux = w$ در $U(R)$ حل پذیر است.*

(۳) *معادله‌ی $x^۲ - ux = w$ در $J(R)$ حل پذیر است.*

برهان. مشابه برهان لم ۱.۱.۳، اثبات می شود. $\square$

تعریف ۲.۱.۴. یک ویژگی را **متشابه پایا** گوییم، اگر تمام ماتریس‌های متشابه ماتریس A آن ویژگی را داشته باشند.

برای مثال، $detA$، trA و قویا تمیزها متشابه پایا هستند.

گزاره ۳.۱.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد به طوری که $J(R)$ اول باشد. و فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ w & ۰ \end{pmatrix} \in M_۲(R)$ که $a_{۱۱}, a_{۱۲} \in U(R)$، $w \in J(R)$ و $det(A - I) \notin U(R)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *A قویا تمیز است.*

(۲) *معادله‌ی $x^۲ - x = \frac{detA}{(trA)^۲ - ۴detA}$ در R حل پذیر است.*

(۳) *$x^۲ - (trA)x + detA = ۰$، معادله‌ی مشخصه‌ی A در R حل پذیر است.*

برهان. نشان خواهیم داد: (۳) $\Leftarrow$ (۱) $\Leftarrow$ (۲) $\Leftarrow$ (۳).

(۳) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم معادله‌ی مشخصه‌ی A، یعنی

$$x^{2} - (trA)x + detA = 0 \qquad (*)$$

در R حل پذیر باشد. چون $trA = a_{11} + 0 = a_{11} \in U(R)$ و $detA = 0 - wa_{12} = -wa_{12} \in J(R)$، بنا به لم ۱.۱.۴، $\lambda_1 \in J(R)$ و $\lambda_2 = trA - \lambda_1 = a_{11} - \lambda_1 \in U(R)$ وجود دارند که در معادله‌ی $(*)$ صدق می‌کنند. نشان می‌دهیم، دو بردار ویژه X_1 و X_2 از A وجود دارند که $P = (X_1, X_2) \in M_2(R)$ وارون پذیر است. پس

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & 0 \\ 0 & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix}$$

قویا تمیز است. در این صورت اثبات گزاره کامل می‌شود.

فرض کنیم $X_1 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ -(a_{11} - \lambda_1) \end{pmatrix}$ و $X_2 = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 \\ w \end{pmatrix}$. در این صورت

$$AX_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ -(a_{11} - \lambda_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} + a_{12}\lambda_1 \\ wa_{12} \end{pmatrix}.$$

چون λ_1 در معادله‌ی $x^{2} - trAx = -detA$ صدق می‌کند و $trA = \lambda_2 + \lambda_1$، پس داریم

$$\lambda_1^{2} - (\lambda_2 + \lambda_1)\lambda_1 = a_{12}w.$$

در نتیجه $a_{12}w = -\lambda_2\lambda_1$. از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} AX_1 &= \begin{pmatrix} a_{12}\lambda_1 \\ -\lambda_2\lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{12} \\ -(a_{11} - \lambda_0) \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 X_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AX_2 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_2 + a_{12}w \\ w\lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_2 - \lambda_2\lambda_1 \\ w\lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 \\ w \end{pmatrix} \\ &= \lambda_2 X_2 = (a_{11} - \lambda_1)X_2. \end{aligned}$$

پس X_1 و X_2 بردار های ویژه هستند. ماتریس

$$P=(X_1,X_2)=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11}-\lambda_1 \\ -(a_{11}-\lambda_1) & w \end{pmatrix}$$

معکوس پذیر است زیرا $detP=a_{12}w+(a_{11}-\lambda_1)^2\in U(R)$. از طرفی

$$detP=-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2=\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP&=\frac{1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\begin{pmatrix} w & -(a_{11}-\lambda_1) \\ (a_{11}-\lambda_1) & a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ w & 0 \end{pmatrix}P\\
&=\frac{1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\begin{pmatrix} a_{11}w-(a_{11}-\lambda_1)w & a_{12}w \\ (a_{11}-\lambda_1)a_{11}+a_{12}w & (a_{11}-\lambda_1)a_{12} \end{pmatrix}P\\
&=\frac{1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\begin{pmatrix} \lambda_1 w & a_{12}w \\ (a_{11}-\lambda_1)a_{11}+a_{12}w & (a_{11}-\lambda_1)a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11}-\lambda_1 \\ -(a_{11}-\lambda_1) & w \end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\\
&\begin{pmatrix} a_{12}\lambda_1 w-(a_{11}-\lambda_1)a_{12}w & (a_{11}-\lambda_1)\lambda_1 w+a_{12}w^2 \\ (a_{11}-\lambda_1)a_{11}a_{12}+a_{12}^2w-(a_{11}-\lambda_1)^2a_{12} & (a_{11}-\lambda_1)^2a_{11}+(a_{11}-\lambda_1)a_{12}w+(a_{11}-\lambda_1)a_{12}w \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

عبارت $a_{12}w=-\lambda_2\lambda_1$ را در ماتریس بالا جایگذاری می‌کنیم.

در نتیجه ازدرایه‌ی $(1,1)$-ام داریم:

$$\lambda_1(-\lambda_1\lambda_2)-\lambda_2(-\lambda_1\lambda_2)=-\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2=\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1).$$

از درایه $(1,2)$ -ام داریم:

$$\lambda_2\lambda_1 w-\lambda_2\lambda_1 w=0.$$

از درایه‌ی $(2,1)$-ام داریم:

$$a_{11}^2a_{12}-\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)a_{12}-(\lambda_2\lambda_1)a_{12}-a_{11}^2a_{12}-\lambda_1^2a_{12}+2\lambda_1^2a_{12}+2\lambda_1\lambda_2a_{12}=$$

$$a_{11}^2a_{12}-\lambda_1^2a_{12}-\lambda_1\lambda_2a_{12}-\lambda_1\lambda_2a_{12}-a_{11}^2a_{12}-\lambda_1^2a_{12}+2\lambda_1^2a_{12}+2\lambda_1\lambda_2a_{12}=0.$$

از درایه‌ی $(2,2)$-ام داریم:

$$\begin{aligned}\lambda_2^2(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_2(-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2(-\lambda_1\lambda_2) &= \lambda_2^2\lambda_1+\lambda_2^3-\lambda_2^2\lambda_1-\lambda_2^2\lambda_1\\ &= \lambda_2^3-\lambda_2^2\lambda_1\\ &= \lambda_2^2(\lambda_2-\lambda_1).\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}P^{-1}AP &= \begin{pmatrix}\frac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)} & 0\\ 0 & \frac{\lambda_2^2(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_1-1 & 0\\ 0 & a_{11}-\lambda_1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$detB=(\lambda_1-1)(a_{11}-\lambda_1)=(a_{11}-\lambda_1+1)\lambda_1-a_{11}\in U(R).$$

واضح است که $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2$ و

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1-1 & 0\\ 0 & a_{11}-\lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1-1 & 0\\ 0 & a_{11}-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

لذا $P^{-1}AP$ یک عبارت قویا تمیز است. پس A قویا تمیز است.

$(1)\Leftarrow(2)$: فرض کنیم $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11}-a & a_{12}-b\\ w-c & -d\end{pmatrix}=E+U$ که $E^2=E$، $EU=UE$ و $detU\in U(R)$. از اینکه $EU=UE$، داریم

$$\begin{aligned}EU&=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}-a & a_{12}-b\\ w-c & -d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}a-a^2+bw-bc & a_{12}a-ba-bd\\ a_{11}c-ca+dw-dc & a_{12}c-bc-d^2\end{pmatrix},\\ UE&=\begin{pmatrix}a_{11}-a & a_{12}-b\\ w-c & -d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}a-a^2+a_{12}c-bc & a_{11}b-ab+a_{12}d-bd\\ wa-ca-dc & wb-cb-d^2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

از تساوی درایه‌های $(1,1)$-ام نتیجه می‌گیریم که $a_{12}c=bw$، پس

$$c=\frac{bw}{a_{12}}\in J(R). \qquad (1.4)$$

از تساوی درایه‌های $(۱,۲)$-ام نتیجه می‌گیریم که $a_{۱۱}b = (a-d)a_{۱۲}$. پس

$$b = \frac{(a-d)a_{۱۲}}{a_{۱۱}}. \tag{۲.۴}$$

چون $detU = (a_{۱۱}-a)(-d) - (a_{۱۲}-b)(w-c) \in U(R)$ و $(a_{۱۲}-b)(w-c) \in J(R)$، پس بنا به رابطه‌ی ۱.۴، نتیجه می‌گیریم

$$a_{۱۱} - a \in U(R), \qquad d \in U(R). \tag{۳.۴}$$

از اینکه $E^{۲} = E$، داریم:

$$E^{۲} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{۲}+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = E.$$

از تساوی نظیر به نظیر درایه‌ها داریم:

$$a - a^{۲} = bc,$$

$$b(a+d-۱) = ۰,$$

$$c(a+d-۱) = ۰,$$

$$d - d^{۲} = bc.$$

در نتیجه $a - a^{۲} = d - d^{۲}$. لذا

$$(a-d)(۱-a-d) = ۰. \tag{۴.۴}$$

چون $a(۱-a) = bc$ و $J(R)$ اول است، پس $a \in J(R)$ یا $(۱-a) \in J(R)$. فرض کنیم $۱-a \in J(R)$. چون $d \in U(R)$، پس $۱-a-d \in U(R)$. لذا بنا به رابطه‌ی ۴.۴، داریم $a-d = ۰$. در نتیجه $a = d$. از روابط ۱.۴ و ۲.۴، نتیجه می گیریم که $b = c = ۰$. بنابراین $a - a^{۲} = bc = ۰$. لذا $a = a^{۲}$. پس $E = aI$. چون $J(R)$ اول است، پس $a = ۰$ یا $a = ۱$. در نتیجه $U = A$ یا $U = A - I$. چون U معکوس پذیر است، پس $A - I$ نیز معکوس پذیر است. که با فرض گزاره در تناقض است. بنابراین $a \in J(R)$. لذا

$a-d$ یکه است. لذا بنا به رابطه‌ی ۴.۴، داریم $1-a-d=0$. پس $d=1-a$. حال از لم ۴.۱.۳، نتیجه می گیریم که $bc=a-a^2$، $sb=a_{12}(2a-1)$ و $sc=a_{21}(2a-1)$. بنابراین

$$a-a^2=bc=s^{-2}a_{12}a_{21}(2a-1)^2.$$

لذا

$$\begin{aligned}-a_{12}a_{21}&=-s^2a+s^2a^2+4a_{12}a_{21}a^2-4a_{12}a_{21}a\\&=(s^2+4a^{12}a^{21})a^2-(s^2+4a_{12}a_{21})a\\&=(s^2+4a_{12}a_{21})(a^2-a)\\&=[(trA)^2-4detA](a^2-a).\end{aligned}$$

اما $detA=-a_{12}a_{21}$، پس

$$a^2-a=\frac{detA}{(trA)^2-4detA}.$$

بنابراین $x^2-x=\dfrac{detA}{(trA)^2-4detA}$ حل پذیر است و a یک جواب این معادله در R است.

(۳) $\Leftarrow$ (۲): فرض کنیم معادله‌ی $x^2-x=\dfrac{detA}{(trA)^2-4detA}$ در R حل پذیر باشد. ابتدا ماتریس B را تشکیل می‌دهیم به طوری که معادله‌ی مشخصه‌ی آن معادله‌ی بالا باشد. نشان می‌دهیم، اگر $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \dfrac{detA}{(trA)^2-4detA} & 0\end{pmatrix}$، آنگاه B، ماتریس مورد نظر است. از طرفی داریم:

$$detB=-\frac{detA}{(trA)^2-4detA},\quad trB=1.$$

با جایگذاری روابط بالا در معادله‌ی $x^2-(trB)x+detB=0$، داریم:

$$x^2-x=\frac{detA}{(trA)^2-4detA}.$$

بنا به فرض، معادله‌ی $x^2-x=\dfrac{detA}{(trA)^2-4detA}$ در R حل پذیر است. لذا معادله‌ی مشخصه‌ی B نیز در R حل پذیر است. بعلاوه داریم $det(B-I)=detB=\dfrac{detA}{(trA)^2-4detA}\in J(R)$. بنابراین ماتریس

B در همه‌ی شرایط فرض گزاره و در شرایط بند (۳)، صدق می‌کند. پس بنا به (۳) $\Leftarrow$ (۱)، ماتریس B قویا تمیز است. پس بنا به (۱) $\Leftarrow$ (۲)، معادله‌ی $y^۲ - y = \frac{detB}{(trB)^۲ - ۴detB}$ در R حل پذیر است. چون

$$\frac{detB}{(trB)^۲ - ۴detB} = \frac{-\frac{detA}{(trA)^۲ - ۴detA}}{۱ - ۴(-\frac{detA}{(trA)^۲ - ۴detA}} = \frac{-\frac{detA}{(trA)^۲ - ۴detA}}{\frac{(trA)^۲ - ۴detA + ۴detA}{(trA)^۲ - ۴detA}} = \frac{-detA}{(trA)^۲},$$

پس $y^۲ - y = \frac{-detA}{(trA)^۲}$. با جایگذاری $(trA)y$ به x داریم:

$$y^۲(trA)^۲ - y(trA)^۲ = -detA.$$

در نتیجه $x^۲ - (trA)x + detA = ۰$. معادله‌ی اخیر در R حل پذیر است. لذا اثبات گزاره کامل می‌شود. □

ملاحظه ۴.۱.۴. (۱): *اگر بند (۲) در گزاره‌ی ۳.۱.۴ برقرار باشد، آنگاه معادله‌ی* $x^۲ - x = \frac{detA}{(trA)^۲ - ۴detA}$، *یک جواب چون* $x_۰ \in J(R)$ *دارد. فرض کنیم* $a = x_۰$، $b = \frac{a_{۱۲}}{a_{۱۱}}(۲a - ۱)$، $c = \frac{a_{۲۱}}{a_{۱۱}}(۲a - ۱)$ *و* $d = ۱ - a$. *و فرض کنیم* $E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & ۱ - a \end{pmatrix} \in M_۲(R)$ *و* $U = A - E$. *چون* $s = a_{۱۱} - ۰ = a_{۱۱}$، *پس* $ca_{۱۱} = sc = w(۲a - ۱)$ *و* $ba_{۱۱} = sb = a_{۱۲}(۲a - ۱)$. *چون* a *در معادله‌ی* $x^۲ - x = \frac{detA}{(trA)^۲ - ۴detA}$ *صدق می‌کند. پس*

$$a^۲ - a = \frac{-wa_{۱۲}}{a_{۱۲}^۲ + ۴wa_{۱۲}} = \frac{-wa_{۱۲}}{s^۲ + ۴wa_{۱۲}}.$$

بنابراین

$$(a^۲ - a)s^۲ = -wa_{۱۲}(۱ + ۴a^۲ - ۴a)$$

$$= -wa_{۱۲}(۲a - ۱)^۲.$$

در نتیجه $\frac{(a^۲ - a)s^۲}{(۲a - ۱)^۲} = -wa_{۱۲}$. *چون* $s^۲bc = wa_{۱۲}(۲a - ۱)^۲$، *پس*

$$bc = \frac{wa_{12}(2a-1)^2}{s^2} = \frac{-(a^2-a)s^2}{s^2} = a - a^2.$$

چون $a_{21}b = a_{21}\frac{a_{12}}{a_{12}}(2a-1)$ و $a_{12}c = a_{12}\frac{a_{12}}{a_{21}}(2a-1)$، پس $a_{21}b = a_{12}c$. از طرفی $detU \in U(R)$، بنابراین $A = E + U$ یک عبارت قویا تمیز است.

(۲): با توجه به برهان گزاره‌ی ۳.۱.۴، نتیجه می‌گیریم که ماتریس $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ w & 0 \end{pmatrix}$ قویا تمیز است، اگر و تنها اگر قابل قطری شدن در $M_2(R)$ باشد. فرض کنیم ماتریس A قویا تمیز باشد. در این صورت معادله‌ی مشخصه‌ی آن در R حل پذیر است. پس بنا به برهان (۳) $\Leftarrow$ (۱)، گزاره‌ی ۳.۱.۴، بردارهای ویژه $X_1 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix}$ و $X_2 = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 \\ w \end{pmatrix}$ وجود دارند که $\lambda_1 \in J(R)$ و $\lambda_2 = trA - \lambda_1 \in U(R)$. لذا $P = (X_1, X_2) \in M_2(R)$ معکوس پذیر است. ماتریس $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix}$ متشابه با ماتریس A است. چون B قطری است، پس ماتریس A قطری شدنی است. بنابراین A متشابه با ماتریس قطری $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$ است که λ_1 و λ_2 ریشه‌ی چند جمله‌ای مشخصه‌ی A است. لذا معادله‌ی مشخصه A دارای جواب است. پس بنا به گزاره‌ی ۳.۱.۴، A قویا تمیز است.

قضیه ۵.۱.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد. و فرض کنیم $A \in M_2(R)$ به طوری که $detA \in J(R)$ و $det(A - I) \in J(R)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *ماتریس A قویا تمیز است.*

(۲) *معادله‌ی $x^2 - x - \frac{detA}{(trA)^2 - 4detA} = 0$ در R حل پذیر است.*

(۳) *معادله‌ی $x^2 - (trA)x + detA = 0$ در R حل پذیر است.*

(۴) *ماتریس A، ماتریس قطری شدنی در $M_2(R)$ است.*

(۵) *ماتریس $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{detA}{(trA)^2 - 4detA} & 0 \end{pmatrix}$ قویا تمیز است.*

برهان. فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(R)$ که $det(A-I), detA \in J(R)$. در این صورت $trA = 1 + detA - det(A-I) \in U(R)$. ابتدا نشان می‌دهیم برای برخی $b_{12} \in U(R)$، ماتریس

A متشابه با ماتریس $\begin{pmatrix} trA & b_{12} \\ -\dfrac{detA}{b_{12}} & 0 \end{pmatrix}$ است. چون R یک حلقه‌ی موضعی است، پس $a_{12} \in U(R)$ یا $a_{12} \in J(R)$. در زیر هر یک را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: فرض کنیم $a_{12} \in U(R)$. و فرض کنیم $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{a_{22}}{a_{12}} & 1 \end{pmatrix}$. در این‌صورت

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{a_{22}}{a_{12}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} P \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -\dfrac{a_{22}a_{11}}{a_{12}} + a_{21} & -\dfrac{a_{22}a_{12}}{a_{12}} + a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{a_{22}}{a_{12}} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} + \dfrac{a_{22}a_{12}}{a_{12}} & a_{12} \\ -\dfrac{a_{22}a_{11}}{a_{12}} + a_{21} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} trA & a_{12} \\ -\dfrac{detA}{a_{12}} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

لذا بنا به گزاره‌ی ۳.۱.۴، ماتریس A قویا تمیز است.

حالت دوم: فرض کنیم $a_{12} \in J(R)$. و فرض کنیم $a_{21} \in U(R)$. چون ماتریس A متشابه ماتریس $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$ است، بنابراین بنا به حالت اول، ماتریس A قویا تمیز است.

حال فرض کنیم a_{12} و a_{21} هر دو در $J(R)$ باشند. چون $detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in J(R)$، پس $a_{11}a_{22} \in J(R)$. و چون $trA = a_{11} + a_{22} \in U(R)$، پس $a_{11} \in U(R)$ و $a_{22} \in J(R)$ یا $a_{11} \in J(R)$ و $a_{22} \in U(R)$. چون ماتریس $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ متشابه ماتریس $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$ است، بدون اینکه از کلیت قضیه کاسته شود، فرض کنیم $a_{11} \in U(R)$ و $a_{12}, a_{21}, a_{22} \in J(R)$. و فرض کنیم $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

در این‌صورت

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} P \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}-a_{21} & a_{12}-a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}-a_{21} & a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22} \\ a_{21} & a_{21}+a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}-a_{21} & b_{12} \\ a_{21} & a_{21}+a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

به طوری که $b_{12} = a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22} \in U(R)$. لذا بنا به حالت اول، برای برخی $b_{12} \in U(R)$، ماتریس A متشابه ماتریس $\begin{pmatrix} trA & b_{12} \\ -\dfrac{detA}{b_{12}} & 0 \end{pmatrix}$ است. لذا A قویا تمیز است.

چون $detA, det(A-I), trA$ و قویا تمیزها ویژگی متشابه پایا را دارند، پس فرض می‌کنیم

$$A = \begin{pmatrix} trA & b_{12} \\ -\dfrac{detA}{b_{12}} & 0 \end{pmatrix}.$$

از گزاره‌های ۳.۱.۴ و ۴.۱.۴، نتیجه می‌گیریم (۴) $\Leftrightarrow$ (۳) $\Leftrightarrow$ (۲) $\Leftrightarrow$ (۱).

(۵) $\Leftrightarrow$ (۲): بنا به بند (۵)، داریم: $detB = det(B-I) = -\dfrac{detA}{(trA)^2 - 4detA} \in J(R)$ و معادله‌ی مشخصه‌ی B، $x^2 - x - \dfrac{detA}{(trA)^2-4detA} = 0$ است. لذا برهان کامل است. □

تعریف ۶.۱.۴. عنصر $r \in R$ (ماتریس $A \in M_n(R)$)، را عنصر (ماتریس) **قویا تمیز بدیهی** می‌نامیم، اگر $r \in U(R)$ یا $1 - r \in U(R)$ ($detA \in U(R)$ یا $det(A-I) \in U(R)$).

قضیه ۷.۱.۴. *ماتریس $n \times n$ با مقادیر ویژه متمایز از هم $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ قطری شدنی است، اگر و تنها اگر*

$$dimS_{\lambda_1} + \cdots + dimS_{\lambda_k} = n.$$

که برای هر j، S_{λ_j} یک پایه برای فضای ویژه‌ی λ_j است.

برهان. واضح است. □

ملاحظه ۸.۱.۴. (۱): *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد و فرض کنیم $A \in M_۲(R)$ ، قویا تمیز بدیهی نباشد. در این‌صورت بنا به قضیه‌ی ۵.۱.۴، A قویا تمیز است، اگر و تنها اگر A در $M_۲(R)$ قطری شدنی باشد.*

(۲): *لزوما همه‌ی ماتریس‌های قویا تمیز، قطری شدنی نیستند. برای مثال ماتریس‌های $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ قویا تمیز بدیهی هستند. اما نشان می‌دهیم هیچ یک از این ماتریس‌ها در $M_۲(F)$ که F میدان است، قطری شدنی نیستند.*

با محاسبه‌ی چندجمله‌ای مشخصه‌ی A داریم:

$$P_A(x) = det(xI - A) = x^۲$$

لذا $x_۱ = x_۲ = ۰$ مقادیر ویژه‌ی A هستند. حال پایه‌های فضای ویژه $x_۱, x_۲$ را بدست می‌آوریم.

$$(۰ I_۲ - A)X = ۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -x_۲ = ۰.$$

بنابراین $\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ پایه‌ای برای فضاهای ویژه $x_۱, x_۲$ است. بنابراین $dimS_{x_۱} = ۱ \neq ۲$، در نتیجه A قطری شدنی نیست.

با محاسبه‌ی چندجمله‌ای مشخصه‌ی B داریم:

$$P_B(x) = det(xI - B) = (x - ۱)^۲$$

لذا $x_۱ = x_۲ = ۱$ مقادیر ویژه‌ی B هستند. پایه‌های فضای ویژه $x_۱, x_۲$ را بدست می‌آوریم

$$(۱ \times I_۲ - B)X = ۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -x_۲ = ۰.$$

بنابراین $\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ پایه‌ای برای فضاهای ویژه $x_۱, x_۲$ است. بنابراین $dimS_{x_۱} = ۱ \neq ۲$. در نتیجه B قطری شدنی نیست.

قضیه ۹.۱.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) $M_2(R)$ *قویا تمیز است.*

(۲) *برای هر* $A \in M_2(R)$ *که* $detA \in J(R)$ *و* $det(A-I) \in J(R)$*، معادله مشخصه‌ی* A *یعنی* $x^2 - (trA)x + detA = 0$ *در* R *حل پذیر است.*

(۳) *برای هر* $A \in M_2(R)$ *که* $detA \in J(R)$ *و* $det(A-I) \in J(R)$*، معادله‌ی*

$$x^2 - x - \frac{detA}{(trA)^2 - 4detA} = 0$$

در R *حل پذیر است.*

(۴) *هر* $A \in M_2(R)$ *که* $detA \in J(R)$ *و* $det(A-I) \in J(R)$*، در* $M_2(R)$ *قطری شدنی است.*

(۵) *برای هر* $w \in J(R)$*، ماتریس* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -w & 0 \end{pmatrix}$ *قویا تمیز است.*

(۶) *برای هر* $w \in J(R)$*، معادله‌ی* $x^2 - x + w = 0$ *در* R *حل پذیر است.*

(۷) *برای هر* $w \in J(R)$ *و* $u \in U(R)$*، معادله‌ی* $x^2 - ux + w = 0$ *در* R *حل پذیر است.*

برهان. برای هر $A \in M_2(R)$، اگر $detA \in U(R)$ و $det(A-I) \in U(R)$، آنگاه A قویا تمیز است. بنابراین فرض کنیم که $detA$ و $det(A-I)$ یکه نباشند. چون R یک حلقه‌ی موضعی است، پس داریم $detA, det(A-I) \in J(R)$. بنابراین $trA \in U(R)$. از قضیه ۵.۱.۴، نتیجه می‌گیریم:

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$$

نشان می دهیم: (۵) $\Leftarrow$ (۶) $\Leftarrow$ (۷) $\Leftarrow$ (۲).

(۵) $\Leftarrow$ (۶): برای هر $w \in J(R)$، داریم $detB = det(B-I) = w \in J(R)$. چون B قویا تمیز است، پس از قضیه‌ی ۵.۱.۴، نتیجه می‌گیریم که معادله‌ی مشخصه‌ی B، $x^2 - x + w = 0$ در R حل پذیر است.

(۶) $\Leftarrow$ (۷): برای هر $w \in J(R)$ و $u \in U(R)$، معادله‌ی $y^{۲} - y + \frac{w}{u^{۲}} = ۰$ را در نظر می‌گیریم. چون $\frac{w}{u^{۲}} \in J(R)$، پس با توجه به فرض، معادله‌ی بالا جوابی مانند $y_{۰}$ در R دارد. نشان می‌دهیم که $x_{۰} = uy_{۰}$، یک جواب برای معادله $x^{۲} - ux + w = ۰$ است. چون

$$x_{۰}^{۲} - ux_{۰} + w = (uy_{۰})^{۲} - u^{۲}y_{۰} + w = u^{۲}(y_{۰}^{۲} - y_{۰} + \frac{w}{u^{۲}}) = ۰,$$

لذا $x_{۰}$ یک جواب برای معادله‌ی $x_{۰}^{۲} - ux_{۰} + w = ۰$ است.

(۷) $\Leftarrow$ (۲): واضح است (با جایگذاری $w = detA$، $u = trA$). $\square$

نتیجه ۱۰.۱.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد. در این صورت حلقه‌ی $M_{۲}(R)$ روی R قویا تمیز است، اگر و تنها اگر برای هر $w \in (R)$، معادله $x^{۲} - x + w = ۰$ در R حل پذیر است.*

۲.۴ حلقه‌ی $M_{۲}(\mathbb{Z}_{(p)})$

در این بخش قضایایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن‌ها حلقه‌ی $M_{۲}(\mathbb{Z}_{(p)})$ قویا تمیز است.

گزاره ۱.۲.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد. اگر $A \in M_{۲}(R)$ قویا تمیز باشد، آنگاه دقیقا یکی از موارد زیر برقرار است:*

(۱) *A یا $A - I$ معکوس پذیر است.*

(۲) $detA \in J(R)$، $det(A - I) \in J(R)$ *و برای برخی* $u \in U(R)$، $(trA)^{۲} - ۴detA = u^{۲}$.

برهان. فرض کنیم ماتریس A قویا تمیز باشد، و $detA, det(A-I) \in J(R)$. در این‌صورت $trA \in U(R)$. پس $(trA)^{۲} - ۴detA \in U(R)$. بنا به قضیه ۵.۱.۴، $x_{۰} \in R$ وجود دارد که $x_{۰}^{۲} - (trA)x_{۰} + detA = ۰$ یا $(۲x_{۰})^{۲} - ۲(trA)(۲x_{۰}) + ۴detA = ۰$. پس

$$(trA)^{۲} - ۴detA = (۲x_{۰} - trA)^{۲} = u^{۲}.$$

چون $(trA)^2-4detA$ یکه است، پس u نیز یکه است.

اگر $detA\notin J(R)$ و $det(A-I)\notin J(R)$. آنگاه $detU\in U(R)$و $det(A-I)\in U(R)$. □

قضیه ۲.۲.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد. به طوری که یا $J(R)=2R$ و R دامنه باشد، یا $2\in U(R)$. در این‌صورت $A\in M_2(R)$ قویا تمیز است، اگر و تنها اگر فقط یکی از موارد زیر برقرار باشد:*

(۱) *A یا $A-I$ معکوس پذیر است.*

(۲) *$detA\in J(R)$، $det(A-I)\in J(R)$ و برای برخی $u\in U(R)$، $(trA)^2-4detA=u^2$.*

برهان. "$\Leftarrow$": با توجه به گزاره‌ی ۱.۲.۴، برقرار است.

"$\Rightarrow$": فرض کنیم $A\in M_2(R)$. مشابه برهان گزاره‌ی قبل، فرض می‌کنیم $detA, det(A-I)\in J(R)$ و برای برخی $u\in U(R)$، $(trA)^2-4detA=u^2$.

حالت اول: فرض کنیم $2\in U(R)$. و فرض کنیم $x_0=\dfrac{trA+u}{2}$. در این صورت x_0 یک جواب معادله‌ی مشخصه‌ی A، $x^2-(trA)x+detA=0$ است، یعنی

$$\begin{aligned}(x_0)^2-(trA)x_0+detA&=\frac{(trA+u)^2}{4}-trA(\frac{trA+u}{2})+detA\\&=\frac{(trA)^2+u^2+2trAu-2(trA)^2-2trAu+4detA}{4}\\&=\frac{-(trA)^2+(trA)^2-4detA+4detA}{4}=0\end{aligned}$$

لذا بنا به قضیه‌ی ۵.۱.۴، ماتریس A قویا تمیز است.

حالت دوم: فرض کنیم $J(R)=2R$ و R دامنه باشد. چون

$$\begin{aligned}(trA+u)^2&=(trA)^2+2(trA)u+u^2\\&=(trA)^2+2(trA)u+(trA)^2-4detA\\&=2(trA)^2+2(trA)u-4detA\in J(R),\end{aligned}$$

و چون R یک حلقه‌ی موضعی است، پس $trA+u\in J(R)$. فرض کنیم $trA+u=2r$. نشان می‌دهیم r جواب معادله‌ی $x^2-(trA)x+detA=0$ است. می‌دانیم

$$4(r^2-(trA)r+detA)=(2r-trA)^2+4detA-(trA)^2=u^2-u^2=0.$$

چون R دامنه است، پس $r^2-(trA)r+detA$. لذا با توجه به قضیه‌ی ۵.۱.۴، ماتریس A قویا تمیز است. □

نتیجه ۳.۲.۴. *فرض کنیم $R=\mathbb{Z}_{(p)}$. در این‌صورت ماتریس $A\in M_2(R)$ قویا تمیز است، اگر و تنها اگر یکی از موارد زیر برقرار باشد:*

(۱) *A یا $A-I$ معکوس پذیر است.*

(۲) *$detA\in J(R)$، $det(A-I)\in J(R)$ و برای برخی $u\in U(R)$، $(trA)^2-4detA=u^2$.*

برهان. چون R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی است پس از قضیه‌ی قبل، برهان نتیجه کامل می‌شود. □

گزاره ۴.۲.۴. *فرض کنیم $R=\mathbb{Z}_{(2)}$. در این‌صورت ماتریس $A\in M_2(R)$ قویا تمیز است، اگر و تنها اگر یکی از موارد زیر برقرار باشد:*

(۱) *A یا $A-I$ معکوس پذیر است.*

(۲) *$detA\in J(R)$، $det(A-I)\in J(R)$ و $w=\dfrac{detA}{(trA)^2-4detA}=\dfrac{2n}{m}$ به طوری که $(n,m)=1$، $m=(2l+1)^2$ و برای برخی اعداد صحیح s,l، $2n=s(s+1)-l(l+1)$.*

برهان. مانند برهان قضایای قبل، فرض می‌کنیم $A\in M_2(\mathbb{Z}_{(2)})$ که $detA, det(A-I)\in J(\mathbb{Z}_{(2)})$. بنا به قضیه‌ی ۵.۱.۴، A قویا تمیز است، اگر و تنها اگر ماتریس $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{detA}{(trA)^2-4deta} & 1 \end{pmatrix}$ قویا تمیز باشد. بدون اینکه از کلیت گزاره کاسته شود، فرض کنیم $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ w & 1 \end{pmatrix}$ که $w=\dfrac{2n}{m}\in J(R)$، m فرد و $(n,m)=1$.

ثابت می‌کنیم A قویا تمیز است. چون

$$(trA)^2 - 4detA = 1 + 4w = 1 + \frac{8n}{m} = \frac{(2l+1)^2 + 4s(s+1) - l(l+1)}{(2l+1)^2}$$
$$= \frac{4l^2 + 4l + 1 + 4s^2 + 4s - 4l^2 - 4l}{(2l+1)^2} = \frac{(2s+1)^2}{(2l+1)^2} = (\frac{2s+1}{2l+1})^2 = u^2$$

که $u \in U(\mathbb{Z}_{(2)})$. پس با توجه به نتیجه‌ی ۳.۲.۴، A قویا تمیز است.

بعکس، اگر A قویا تمیز باشد، آنگاه بنا به نتیجه‌ی ۳.۲.۴، $(trA)^2 - 4detA = u^2 = (\frac{2s+1}{2l+1})^2$ که $(2s+1, 2l+1) = 1$. به عبارت دیگر

$$(trA)^2 - 4detA = 1 + 4w = 1 + \frac{8n}{m} = \frac{m+8n}{m} = \frac{(2s+1)^2}{(2l+1)^2}.$$

در نتیجه $m = (2l+1)^2$ و $8n = (2s+1)^2 - (2l+1)^2$. بنابراین

$$2n = 4s^2 + 4s + 1 - 4l^2 - 4l - 1 = s(s+1) - l(l+1).$$

لذا برهان گزاره کامل می شود. $\square$

مراجع

[1] V. P. Camillo, *Exchange rings, units and idempotent*, Comm. Algebra 22 (1994), 4737–4749.

[2] J. Chen and X. Yang and Y. Zhou, *On strongly chean matrix and triangular matrix rings*, Comm. Algebra 34 (2006), 3659–3674.

[3] J. Chen and X. Yang and Y. Zhou, *When is the 2 × 2matrix ring over a commutative local ring strongly clean?* , J. Algebra 301 (2006), 280 – 293.

[4] F. Q. Gouvêa, *p-Adic Numbers*, An Introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[5] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag New York, 1974.

[6] N. Jacobson, *Structure of Rings*, Amer. Math. Soc. Colloquium Vol. 37, Providence, R. I., 1964.

[7] Y. Li, *Strongly clean matrix rings over local rings*, J. Algebra 312 (2007), 397-404.

[8] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Second ed., Springer, New York, 2001.

[9] W. K. Nicholson, *Strongly clean rings and Fitting's lemma*, Comm. Algebra 27 (1999), 3583–3592.

[10] W. K. Nicholson, *Lifting idempotentes and exchange rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 229 (1997), 269-278.

[11] R. Y. Sharp, *Steps in commutative algebra*, Cambridge university press, 1990.

[12] A. Tuganbaev, *Rings close to regular*, Mathematics and its applications, 545. Kluwer academic publishers, Dordrecht, 2002.

[13] Z. Wang and J. Chen, *On two open problems about strongly clean rings*, Bull. Austral. Math. Soc. 70 (2004), 279-282.

[14] H. P. Yu, *On the structure of exchange rings*, Comm. Algebra 25 (1997), no. 2, 661-670.

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ارزه‌ی p-ادیک	P-adic valuation
ایده‌آل اول	Prime ideal
ایده‌آل یکطرفه	One-sided ideal
بسط p-ادیک	P-adic expansion
حاصلضرب مستقیم	Direct product
حلقه‌ی تبادلی	Exchange ring
حلقه‌ی تمیز	Clean ring
حلقه‌ی قویا تمیز	Strongly clean ring
حلقه‌ی نیم کامل	Semiperfect ring
حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی	Triangular matrix ring
حلقه‌ی موضعی	Local ring
حلقه‌ی نیم موضعی	Semilocal ring
خودتوان‌های متعامد	Orthogonal idempotents
دامنه	Domain
دامنه تجزیه‌ی یکتا	Unique factorization domain
رادیکال جیکبسون	Jacobson radical
عبارت قویا تمیز	Strongly clean expression

عدد صحیح p -ادیک .... P-adic integer

قطری شدنی .... Diagonalizable

قویا تمیز بدیهی .... Trivial strongly clean

گروه دوری .... Cyclic group

متشابه پایا .... Similarity invarian

معادله‌ی درجه دوم .... Quadratic equation

معادله‌ی مشخصه .... Characteristic equation

موضعی سازی .... Localization

میدان کسرها .... Quotient field

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Characteristic equation .... معادله‌ی مشخصه

Clean ring .... حلقه‌ی تمیز

Cyclic group .... گروه دوری

Diagonalizable .... قطری شدنی

Direct product .... حاصلضرب مستقیم

Domain .... دامنه

Exchange ring .... حلقه‌ی تبادلی

Jacobson radical .... رادیکال جیکبسون

Localization .... موضعی سازی

Local ring .... حلقه‌ی موضعی

One-sided ideal .... ایده‌آل یکطرفه

Orthogonal idempotents .... خودتوان‌های متعامد

Prime ideal .... ایده‌آل اول

P-adic expansion .... بسط p-ادیک

P-adic integer .... عدد صحیح p-ادیک

P-adic valuation .... ارزه‌ی p-ادیک

Quadratic equation .... معادله‌ی درجه دوم

میدان کسرها .... Quotient field

متشابه پایا .... Similarity invarrian

حلقه‌ی نیم موضعی .... Semilocal ring

حلقه‌ی نیم کامل .... Semiperfect ring

عبارت قویا تمیز .... Strongly clean experssion

حلقه‌ی تمیز .... Strongly clean ring

حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی .... Triangular matrix ring

قویا تمیز بدیهی .... Trivial strongly clean

دامنه تجزیه یکتا .... Unique factorization domain

Surname: Mamizadeh Name: Somaieh

Title: Some extensions of Strongly clean rings

Supervisor: Dr. Ebrahim Hashemi

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics

Field: Algebra

Shahrood University of Technologi Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2013 Number of pages: 85

Keywords: Idempotent, Local ring, Matrix ring, strongly clean ring, Triangular matrix ring.

Abstract

In this thesis, we show that if a ring R is a strongly clean ring, then so is every one-sided ideal of R. Also we study rings that $M_2(R)$ is not strongly clean. We will give necessary and sufficient conditions under which $M_n(R)$ is strongly clean for every $n \geq 1$. Furthermore, we extend these results to triangular matrix ring. We determine when a $2{\times}2$ matrix ring over a commutative local ring is strongly clean. Several equivalent criteria are given for such a matrix to be strongly clean.

Shahrood University of Technologi
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in

Pure Mathematics

Some extensions of Strongly clean rings

Supervisor

Dr. Ebrahim Hashemi

by

Somaieh Mamizadeh

2013