



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

پایداری سیستم‌های دوبعدی راسر با تاخیر زمانی

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

پژوهشگر

فاطمه انجیلی

۲۵ آذر ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: انجیلی

نام: فاطمه

عنوان: پایداری سیستم‌های دویعدی راسر با تاخیر زمانی

استاد راهنما: دکتر حجت احسنی طهرانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی شاهرود

تعداد صفحات: ۱۰۲

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۲۵ آذر ۱۳۹۲

واژگان کلیدی: سیستم‌های دویعدی با تاخیر، ماتریس پس‌خورد حالت، پایداری مجانبی، تبدیلات تشابهی، تخصیص مقادیر ویژه جزئی، تجزیه شور جزئی.

چکیده

در این پایان‌نامه، روشی جدید جهت کنترل بهینه زمانی و پایداری سیستم‌های خطی دویعدی گسسته زمانی مدل راسر با تاخیر زمانی در متغیر حالت ارائه شده است. این روش در دو مرحله صورت می‌پذیرد. در مرحله اول سیستم تاخیری با تعریف بردار افزوده به سیستم دویعدی راسر بدون تاخیر زمانی تبدیل می‌شود. سپس، با استفاده از تبدیلات تشابهی مقدماتی، سیستم به دست آمده به فرم همدم برداری تبدیل شده، ماتریس پس‌خورد حالت F که همه مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته را به صفر می‌برد محاسبه می‌کنیم. در مرحله دوم، با توجه به اینکه برای پایداری سیستم‌های گسسته لازم است تمام مقادیر ویژه آن داخل دایره واحد قرار گیرد، مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی را برای سیستم‌های خطی دویعدی گسسته زمانی تاخیری به کار می‌بریم و آن دسته از مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز را که در ناحیه پایداری قرار ندارند با مقادیر ویژه دلخواه جایگزین می‌کنیم تا سیستم پایدار شود. برای حل مساله، با استفاده از تجزیه شور جزئی، ماتریس A را که بزرگ بوده به ماتریس‌های کوچک‌تری تجزیه می‌کنیم. سپس با به‌کارگیری روش تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کنترل خطی، طیف موردنظر را به سیستم اختصاص می‌دهیم. بدین ترتیب سیستم پایدار می‌شود. با توجه به اینکه ماتریس حلقه باز A سیستم دویعدی توصیف شده بزرگ بوده و با حل مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی آن را به ماتریس‌های کوچک‌تری تجزیه می‌کنیم و سپس تخصیص تنها برای ماتریس با بعد کوچک صورت می‌پذیرد، مزیت روش ارائه شده نسبت به روش تبدیلات تشابهی به محاسبات کمتری نیاز دارد.

به امید دک رازهای پنهانی قصیده‌ی آسمانی عشق
این پایان نامه را که ذره‌ای از تلاش آدمی
برای ورود به گوشه‌ای از منظومه‌ی پررنگ و راززهی هستی است را
به پیشگاه پاک اسطوره‌های صبر و وفاداری
که در عرصه‌ی زندگی ناملایمات، تلخی‌ها و سختی‌ها را بارها و بارها،
برای پیشرفت‌های بیشتر این حقیر،
به جان خریدند،

پدر و مادر مهربانم

تقدیم می‌کنم.

سپاس‌گزاری...پ

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

فاطمه انجیلی
۱۳۹۲/۲۵

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. انجیلی. ف و احسنی طهرانی. ح، (۱۳۹۲)، ”کنترل بهینه زمانی سیستم‌های دوبعدی راسر با تاخیر در بردار حالت”، چهل و چهارمین کنفرانس ریاضی ایران، ص ۱۳۴-۱۳۱، مشهد.
2. Enjili. F, Ahsani Tehrani. H, (2013), ”Partial eigenvalues assignment problem of discrete-time linear state-delays systems”, The 10th Seminar on Differential Equations and Dynamic Systems, pp 266-269, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.

فهرست مطالب

۱	لیست تصاویر
۲	۱ مقدمه و پیش‌نیازها
۲	۱.۱ مقدمه
۴	۲.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۴	۱.۲.۱ ماتریس
۶	۲.۲.۱ فضای برداری
۷	۳.۲.۱ سیستم کنترل خطی
۹	۴.۲.۱ نامساوی‌های ماتریسی خطی
۱۱	۲ معرفی سیستم‌های دوبعدی
۱۱	۱.۲ مدل‌های فضای حالت سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته
۱۱	۱.۱.۲ مدل راسر
۱۲	۲.۱.۲ مدل کلی
۱۳	۳.۱.۲ مدل فورناسا-مارکسینی
۱۴	۲.۲ سیستم‌های دوبعدی با تاخیر
۱۴	۱.۲.۲ مدل‌های فضای حالت سیستم‌های دوبعدی گسسته با تاخیر زمانی
۱۶	۳.۲ ارتباط بین مدل‌های راسر، کلی و فورناسا-مارکسینی
۱۷	۴.۲ کاربرد مهندسی سیستم‌های دوبعدی
۱۸	۳ پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر
۱۸	۱.۳ شرایط پایداری سیستم‌های دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر

۲۶	۴	پایداری مجانبی سیستم‌های خطی دوبعدی مثبت با تاخیر
۲۶	۱.۴	سیستم‌های یک بعدی مثبت
۲۸	۱.۱.۴	سیستم‌های دوبعدی مثبت
۲۹	۲.۴	پایداری مجانبی سیستم‌های دوبعدی مثبت با تاخیر
۲۹	۱.۲.۴	مدل راسر دوبعدی با تاخیر
۳۳	۲.۲.۴	مدل کلی دوبعدی با تاخیر
۳۷	۳.۴	پایداری پس‌خورد حالت سیستم‌های خطی دوبعدی پیوسته با تاخیر
۳۹	۱.۳.۴	شرایط پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی پیوسته با تاخیر
	۵	روشی جدید در بررسی پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته با تاخیر زمانی توسط
۴۴		مدل راسر
۴۵	۱.۵	طراحی فرم راسر بدون تاخیر زمانی
۴۷	۲.۵	ناوردهای کرونگر
۵۰	۳.۵	تبدیلات تشابهی فضای حالت - فرم استاندارد اشلون
۵۲	۴.۵	به‌دست آوردن فرم استاندارد اشلون با استفاده از تبدیلات تشابهی
۵۵	۵.۵	فرم همدم برداری اولیه
۵۷	۶.۵	به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت
۶۶	۶	حل مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از تبدیلات تشابهی
۶۶	۱.۶	مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی
۶۹	۲.۶	محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت S
۷۱	۳.۶	وجود و یکتایی جواب مساله تخصیص مقدار ویژه جزئی
۷۹	۷	نتیجه‌گیری، نظرات و پیشنهادات
۷۹	۱.۷	نتیجه‌گیری
۸۰	۲.۷	نظرات و پیشنهادات
۸۱	آ	برنامه‌های کامپیوتری
۸۱	۱.۰.آ	برنامه‌نویسی مربوط به روش تبدیلات تشابهی
۸۶	۲.۰.آ	برنامه‌نویسی مربوط به روش مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی
۹۳		مراجع

۹۵

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۹۸

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

لیست تصاویر

۶۳	نمودار مربوط به مولفه اول ورودی	۱.۵
۶۳	نمودار مربوط به مولفه دوم ورودی	۲.۵
۶۴	نمودار مربوط به مولفه اول بردار حالت	۳.۵
۶۴	نمودار مربوط به مولفه دوم بردار حالت	۴.۵
۶۴	نمودار مربوط به مولفه سوم بردار حالت	۵.۵
۶۵	نمودار مربوط به مولفه چهارم بردار حالت	۶.۵
۶۵	نمودار مربوط به مولفه پنجم بردار حالت	۷.۵
۶۵	نمودار مربوط به مولفه ششم بردار حالت	۸.۵
۷۶	نمودار مربوط به مولفه اول ورودی	۱.۶
۷۶	نمودار مربوط به مولفه دوم ورودی	۲.۶
۷۷	نمودار مربوط به مولفه اول بردار حالت	۳.۶
۷۷	نمودار مربوط به مولفه دوم بردار حالت	۴.۶
۷۷	نمودار مربوط به مولفه سوم بردار حالت	۵.۶
۷۸	نمودار مربوط به مولفه چهارم بردار حالت	۶.۶
۷۸	نمودار مربوط به مولفه پنجم بردار حالت	۷.۶
۷۸	نمودار مربوط به مولفه ششم بردار حالت	۸.۶

فصل ۱

مقدمه و پیش‌نیازها

۱.۱ مقدمه

در این بخش، خلاصه‌ای از فعالیت‌های محققین مختلف در زمینه سیستم‌های دوبعدی، مدل راسر و مدل کلی سیستم‌های دوبعدی با تاخیر و همچنین خلاصه‌ای از فصل‌های این پایان‌نامه را به صورت مختصر بیان می‌کنیم.

آیت رمی^۱ و آلفیدی^۲ [۲] پایداری سیستم‌های دوبعدی مثبت را که یکی از مهم‌ترین زیرمجموعه‌های سیستم‌های دوبعدی می‌باشند، مورد بررسی قرار دادند. آنها با استفاده از قضایایی نتیجه گرفتند پایداری مجانبی سیستم‌های دوبعدی مثبت هم‌ارز پایداری مجانبی سیستم‌های یک بعدی نظیرش می‌باشد.

کاکزورک [۱۹] سیستم‌های خطی دوبعدی مثبت با تاخیر را مورد بررسی قرار داد. او نشان داد بررسی پایداری مدل راسر و مدل کلی سیستم‌های خطی دوبعدی مثبت با تاخیر با استفاده از روش بردارهای حالت افزوده می‌تواند به بررسی پایداری مجانبی سیستم‌های خطی یک بعدی مثبت بدون تاخیر تبدیل شود. **لین^۳**، **گالکوسکی^۴**، **لام^۵** و همکارانش [۲۱] پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته با تاخیر حالت چندگانه را مورد بررسی قرار دادند. آنها با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی شرایطی را برای پایداری این سیستم‌ها بیان کردند و نتایج خود را برای مدل فورناسا-مارکسینی اما با تبدیل مناسب به فرم راسر ارائه دادند. همچنین در مورد ارتباط بین سیستم‌های دوبعدی با تاخیر و سیستم‌های یک بعدی با تاخیر توضیحاتی بیان

^۱ Ait Rami

^۲ Alfidi

^۳ Lin

^۴ Galkowski

^۵ Lam

کردند، سپس پایداری سیستم‌های یک بعدی با تاخیر را با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی مورد بررسی قرار دادند.

بنزوا^۶ و همکارانش [۳] پایداری پس‌خورد حالت سیستم‌های دوبعدی پیوسته با تاخیر زمانی را مورد تحقیق و پژوهش قرار دادند. آنها به این نتیجه رسیدند که بررسی پایداری سیستم توصیف شده با استفاده از شرط چندجمله‌ای مشخصه دشوار می‌باشد لذا شرایطی کافی برای پایداری سیستم‌های دوبعدی پیوسته با تاخیر که به صورت نامساوی ماتریسی خطی بیان کردند ارائه دادند.

در ادامه مباحث این بخش، خلاصه‌ای از فصل‌های این پایان‌نامه به صورت زیر ارائه می‌شود: فصل اول، به بیان تاریخچه مختصری از سیستم‌های دوبعدی با تاخیر و همچنین به بیان تعاریفی که در فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند اختصاص داده می‌شود. در فصل دوم، انواع مدل‌هایی که برای سیستم‌های دوبعدی و همچنین سیستم‌های دوبعدی با تاخیر توسط افراد مختلف ارائه شده‌اند معرفی خواهد شد که بهترین مدل برای توصیف سیستم‌های دوبعدی، مدل راسر می‌باشد. در فصل سوم، ابتدا با استفاده از روش‌های جبرخطی که در قضایا آورده شده شرایطی برای پایداری مجانبی سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته زمانی مدل راسر بیان می‌شود، همچنین نشان داده خواهد شد پایداری مجانبی هر سیستم دوبعدی رفتاری مشابه با پایداری مجانبی سیستم یک بعدی هم‌ارزش را دارا می‌باشد. در نتیجه برای به دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت در یک سیستم دوبعدی می‌توان ماتریس پس‌خورد حالت سیستم یک بعدی هم‌ارزش را محاسبه کرده، سپس با توجه به اندازه ماتریس‌هایی که جزو مفروضات مساله هستند، ماتریس پس‌خورد حالت به دست آمده را به دو مولفه تفکیک کرد.

در فصل چهارم، ابتدا شرایطی لازم و کافی برای پایداری مجانبی سیستم‌های خطی دوبعدی مثبت با تاخیر زمانی توسط مدل‌های راسر، فورناسا - مارکسینی و کلی شرح داده می‌شود. همچنین نشان داده خواهد شد بررسی پایداری مجانبی سیستم‌های خطی دوبعدی مثبت با تاخیر می‌تواند به بررسی پایداری مجانبی سیستم‌های خطی یک بعدی مثبت بدون تاخیر هم‌ارزش، تبدیل شود. سپس پایداری مجانبی سیستم‌های خطی دوبعدی پیوسته زمانی با تاخیر با استفاده از شرایط نامساوی‌های ماتریسی خطی مورد بررسی قرار داده می‌شود.

در فصل پنجم، کنترل‌پذیری و پایداری مجانبی سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته زمانی مدل راسر با تاخیر زمانی در متغیر حالت مورد بررسی و تحقیق قرار داده می‌شود. بدین منظور مدل راسر سیستم دوبعدی با تاخیر زمانی با روش بردارهای حالت افزوده افقی و عمودی به سیستم دوبعدی راسر بدون تاخیر زمانی تبدیل می‌شود و از این ویژگی که پایداری مجانبی هر سیستم دوبعدی در حالت کلی رفتاری مشابه با پایداری مجانبی سیستم یک بعدی هم‌ارزش را دارا می‌باشد استفاده کرده و نتیجه می‌گیریم پایداری مجانبی سیستم‌های دوبعدی گسسته با تاخیر زمانی هم‌ارز پایداری مجانبی سیستم‌های یک بعدی نظیرش می‌باشد. در نهایت با استفاده از تبدیلات تشابهی، ماتریس پس‌خورد حالتی که تمام مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته را به صفر

^۶ Benzaouia

می‌برد محاسبه می‌کنیم.

در فصل ششم، مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی برای سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته زمانی مدل راسر با تاخیر زمانی شرح داده می‌شود. بدین منظور با استفاده از روش تجزیه شور جزئی و تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کنترل خطی به حل مساله می‌پردازیم.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۲.۱ ماتریس

ماتریس مربعی A را یک ماتریس با درایه‌های ثابت در نظر بگیرید تعاریف زیر را برای ماتریس A داریم:
تعریف ۱.۱.۱ معادله مشخصه: چندجمله‌ای مشخصه یا معادله مشخصه ماتریس $A_{n \times n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p(z) = \det[Iz - A] = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

تعریف ۲.۱ مقدار ویژه: ریشه‌های z_n, \dots, z_2, z_1 معادله $\det[Iz - A] = 0$ مقادیر ویژه ماتریس A خوانده می‌شود و مجموعه آنها را طیف A گویند.

تعریف ۳.۱ بردار ویژه: اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد بردار ناصفر x یک بردار ویژه راست (یا فقط یک بردار ویژه) A است هرگاه Ax مضربی از x باشد. و یا

$$\forall z, \quad Ax = zx$$

زوج (z, x) یک جفت ویژه نامیده می‌شود. بردار y ارایه شده توسط $zy^T A = zy^T$ را بردار ویژه چپ ماتریس A می‌گویند.

تعریف ۴.۱ ماتریس متقارن: ماتریس $A_{n \times n}$ را متقارن گویند هرگاه $A = A^t$.

مثال ۱.۱.۱. ماتریس زیر یک ماتریس متقارن از مرتبه ۳ می‌باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 & -24 \\ 12 & -54 & 68 \\ -24 & 68 & 38 \end{bmatrix}$$

تعریف ۵.۱.۱ ماتریس معین مثبت: ماتریس متقارن A را معین مثبت گویند هرگاه برای هر بردار ناصفر X داشته باشیم:

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad X^T A X > 0$$

در صورتی که $X^tAX \geq 0$ ، A را معین نامنفی گویند.

مثال ۲.۱. ماتریس زیر یک ماتریس معین مثبت است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

زیرا

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \quad (X \neq 0). \end{aligned} \quad (1.1)$$

تعریف ۶.۱. ماتریس متقارن A را **معین منفی** گویند هر گاه برای بردار ناصفر X داشته باشیم:

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad X^TAX < 0$$

تعریف ۷.۱. **ماتریس پایین مثلثی:** ماتریس مربع A را پایین مثلثی گویند هر گاه عناصر بالای قطر آن صفر باشد. به بیان دیگر

$$a_{ij} = 0, \quad i < j.$$

تعریف ۸.۱. **رتبه یک ماتریس:** حداکثر تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل خطی ماتریس A را رتبه آن ماتریس نامیده و با $\text{rank}(A)$ نشان می‌دهند. اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد آنگاه

$$\text{rank}(A) \leq \min(m, n)$$

تعریف ۹.۱. **ماتریس‌های متشابه:** ماتریس‌های A و B را متشابه نامند هر گاه ماتریس وارون‌پذیری چون P موجود باشد به طوری که $B = P^{-1}AP$.

تعریف ۱۰.۱. **شعاع طیفی ماتریس:** بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس A از نظر قدرمطلق شعاع طیفی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱. **رد ماتریس:** اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های a_{ij} باشد رد یا اثر ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

۲.۲.۱ فضای برداری

تعریف ۱۲.۱. فضای برداری: یک فضای برداری V روی میدان F عبارت است از یک مجموعه V از اشیا که بردار نامیده می‌شوند همراه با دو عمل جمع و ضرب اسکالر که به ترتیب به هر دو عضو x و y از V عضو منحصر به فرد $x + y$ از V و به ازای هر عضو $a \in F$ و $x \in V$ عضو منحصر به فرد $ax \in V$ را نسبت می‌دهند، یا به عبارتی نسبت به عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد.

تعریف ۱۳.۱. زیرفضای برداری: زیرمجموعه W از فضای برداری V روی میدان F یک زیرفضای V نامیده می‌شود هرگاه W با اعمال جمع و ضرب اسکالر تعریف شده روی V ، یک فضای برداری روی میدان F باشد.

تعریف ۱۴.۱. یکا متعامد: مجموعه بردارهای $\{\nu_1, \dots, \nu_m\}$ در \mathbb{R}^n متعامد است اگر $\nu_i^T \nu_j = 0$ به علاوه اگر $\nu_i^T \nu_i = 1$ به ازای هر i ، آن‌گاه آن‌ها یکا متعامد هستند. یک پایه برای یک زیرفضا که یکا متعامد نیز باشد یک پایه یکا متعامد برای زیرفضا نامیده می‌شود.

تعریف ۱۵.۱. متمم متعامد: فرض کنید S یک زیرفضای \mathbb{R}^m باشد، آنگاه زیرفضای S^\perp که به صورت

$$S^\perp = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y^T x = 0, x \in S \text{ همه بردارهای } S\},$$

تعریف می‌شود متمم متعامد S نامیده می‌شود.

تعریف ۱۶.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری و S یک زیرمجموعه نامتناهی از V باشد. بردار $\nu \in V$ را یک ترکیب خطی از اعضای S گوئیم اگر تعداد متناهی از بردارهای S مانند u_1, \dots, u_n و اسکالرهایی a_1, \dots, a_n وجود داشته باشند به طوری که

$$\nu = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

قضیه ۱۰.۱. فرض کنید S یک زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری V روی میدان F باشد، آنگاه مجموعه تمام ترکیبات خطی از اعضای S یک زیرفضای V است.

تعریف ۱۷.۱. زیرفضای تولید شده توسط S : فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری V باشد، زیرفضای شامل تمام ترکیبات خطی از اعضای S زیرفضای تولید شده توسط S نامیده می‌شود.

تعریف ۱۸.۱. وابسته خطی: زیرمجموعه S از فضای V را وابسته خطی گوئیم هرگاه تعداد متناهی از بردارهای u_1, \dots, u_n در S و اسکالرهایی a_1, \dots, a_n در F که همگی صفر نیستند وجود داشته باشند به طوری که

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = 0.$$

همچنین در این صورت می‌گوئیم که اعضای S وابسته خطی اند.

یک مجموعه S را که وابسته خطی نباشد **مستقل خطی** گویند.

تعریف ۱۹۰.۱. پایه: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. مجموعه S را یک پایه برای V گوئیم هر گاه S یک زیرمجموعه مستقل خطی V باشد که V را تولید می‌کند.

تعریف ۲۰۰.۱. بعد: فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد تعداد بردارهای یک پایه V را بعد فضای V نامیده و با $\dim V$ نشان می‌دهند.

تعاریف زیربخش‌های (۱.۲.۱) و (۲.۲.۱) از مراجع [۱] و [۵] گردآوری شده است.

۳.۲.۱ سیستم کنترل خطی

تعریف ۲۱.۱. سیستم یک بعدی [۱۳]: هر سیستم را می‌توان با مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل به فرم زیر نمایش داد:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (۲.۱)$$

که t متغیر زمان، $x(t)$ یک بردار ستونی n بعدی حقیقی موسوم به بردار حالت و $u(t)$ یک بردار ستونی m بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغیر کنترل و f تابعی حقیقی است. معادله دیفرانسیل فوق را معادله حالت سیستم می‌نامند. فرض کنید $y(t)$ یک بردار r بعدی که با زمان تغییر می‌کند و به صورت زیر به $x(t)$ ، $u(t)$ و t وابسته است:

$$y(t) = g[x(t), u(t), t] \quad (۳.۱)$$

که $y(t)$ بردار خروجی سیستم نامیده می‌شود و این معادله جبری را معادله خروجی سیستم می‌گویند. به معادلات (۲.۱) و (۳.۱) معادلات سیستم می‌گویند. در این پایان‌نامه توابع f و g را خطی در نظر گرفته و معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۴.۱)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (۵.۱)$$

سیستم را نوردای زمانی می‌نامند [۱۳]. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ و $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ماتریس‌های حقیقی ثابت هستند که در این حالت

تعریف ۲۲.۱. سیستم‌های خطی گسسته زمانی [۱۴]: در مواردی برای بعضی از سیستم‌ها بردار حالت یعنی x و یا بردار ورودی و یا هر دو در هر لحظه از زمان قابل محاسبه و اندازه‌گیری نیستند بلکه تغییر حالت

سیستم فقط در نقاط زمانی خاصی مانند t_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) صورت می‌گیرد. در این صورت معادلات سیستم به‌فرد گسسته زمانی زیر تعریف می‌شوند:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i), \quad (6.1)$$

$$y(i) = Cx(i) + Du(i). \quad (7.1)$$

تعریف ۲۳.۱. کنترل‌پذیری [۱۴]: سیستم توصیف شده با معادلات (۸.۴) و (۱۳.۴) را کاملاً کنترل‌پذیر گویند اگر بتوان حالت سیستم را از بردار دلخواه $x(t_0)$ به نام بردار حالت اولیه در لحظه t_0 به بردار دلخواه دیگری مانند $x(t_1)$ به نام حالت تعادل در لحظه t_1 رساند. در صورتی که حالت تعادل را مبدا مختصات در نظر بگیریم می‌توان تعریف کنترل‌پذیری سیستم را به‌صورت زیر بیان نمود: اگر هر حالت اولیه $x(0)$ را بتوان در تعداد متناهی از گام‌ها به حالت تعادل صفر انتقال داد.

تعریف ۲۴.۱. برای سیستم توصیف شده با معادله حالت (۱.۴) ماتریس کنترل‌پذیری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

قضیه ۲۰.۱ [۱۴] سیستم خطی توصیف شده با معادلات (۸.۴) و (۱۳.۴) کنترل‌پذیر است اگر و تنها اگر ستون‌های ماتریس کنترل‌پذیری فضای R^n را تولید کند. به عبارت دیگر $\text{rank}(Q) = n$.

تعریف ۲۵.۱. قانون کنترل: برای کنترل بهینه زمانی با پس‌خورد حالت ورودی، $u(i)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u(i) = Fx(i), \quad i = 0, 1, \dots \quad (9.1)$$

که در آن $F_{m \times n}$ ماتریس حقیقی با درایه‌های ثابت زمانی است و ماتریس پس‌خورد حالت نامیده می‌شود. با جایگذاری قانون کنترل در معادله حالت سیستم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i) \\ x(i+1) &= Ax(i) + BFx(i) = (A + BF)x(i) \\ x(i+1) &= \Gamma x(i) \end{aligned} \quad (10.1)$$

ماتریس A را ماتریس حلقه باز y سیستم و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه حلقه باز سیستم می‌نامند. ماتریس $\Gamma = A + BF$ را ماتریس حلقه بسته x سیستم و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه حلقه بسته سیستم می‌نامند.

^yOpen-loop

^xClosed-loop

تعریف ۲۶.۱. پایداری لیپانوف [۱۴]: حالت تعادل x_e سیستم $\dot{x}(t) = f[x(t), \circ, t]$ را پایداری لیپانوف می‌گوییم هر گاه به ازای هر $s(\varepsilon)$ ، یک $\delta(s)$ موجود باشد به‌قسمی که مسیرهای آغاز شده از $\delta(s)$ با میل کردن t به سمت ∞ از $s(\varepsilon)$ خارج نشود.

تعریف ۲۷.۱. پایداری مجانبی [۱۴]: نقطه تعادل معادله دیفرانسیل حالت $\dot{x}(t) = f[x(t), \circ, t]$ پایدار مجانبی^۹ است اگر:

الف) پایدار به مفهوم لیپانوف باشد.

ب) برای کلیه مقادیر t_0 یک $\rho(t_0)$ موجود باشد که به ازای $\|x(t_0) - x_e\| < \rho(t_0)$ برای $t \rightarrow \infty$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\|x(t_0) - x_e\| \rightarrow 0$$

تعریف ۲۸.۱. پایداری سراسری [۱۴]: نقطه تعادل معادله دیفرانسیل حالت $\dot{x}(t) = f[x(t), \circ, t]$ پایداری سراسری^{۱۰} گویند اگر:

الف) پایدار به مفهوم لیپانوف باشد.

ب) برای هر $x(t_0)$ و هر t_0 داشته باشیم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

قضیه ۳.۱. [۱۴] سیستم خطی نوردای زمان $\dot{x}(t) = Ax(t)$ پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر کلیه مقادیر ویژه A قسمت‌های حقیقی اکیدا منفی داشته باشد.

۴.۲.۱ نامساوی‌های ماتریسی خطی

تاریخ نامساوی‌های ماتریسی خطی^{۱۱} در تجزیه و تحلیل سیستم‌های دینامیکی به‌بیش از ۱۰۰ سال پیش برمی‌گردد. داستان در حدود سال ۱۸۹۰ آغاز می‌شود زمانی که لیپانوف کار اصلی خود را معرفی آنچه در حال حاضر نظریه لیپانوف می‌نامیم منتشر کرد. او نشان داد معادله دیفرانسیل $\dot{x} = Ax(t)$ پایدار است اگر و تنها اگر یک ماتریس معین مثبت P وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$A^T P + P A < 0 \quad (11.1)$$

^۹Asymptotically stable

^{۱۰}Global stable

^{۱۱}Linear matrix inequalities

لازم است $P > \circ$ و $A^T P + P A < \circ$ باشد همان چیزی که اکنون یک نامساوی لیاپانوف روی P نامیده می‌شود که یک شکل خاصی از نامساوی‌های ماتریسی خطی است [۱۶].

تعریف ۲۹.۱. نامساوی‌های ماتریسی خطی [۱۶]: یک نامساوی ماتریسی خطی عبارتی به‌فرم زیر است:

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_n F_n < \circ \quad (۱۲.۱)$$

که

• $x = (x_1, \dots, x_n)$ یک بردار از n عدد حقیقی به نام متغیرهای تصمیم است.

• F_0, \dots, F_n ماتریس‌های متقارن حقیقی هستند.

• نامساوی $< \circ$ در عبارت (۱۲.۱) به معنی معین منفی است.

از آنجا که تمام مقادیر ویژه یک ماتریس متقارن حقیقی، حقیقی هستند تمام مقادیر ویژه عبارت (۱۲.۱) منفی هستند یا به‌طور هم‌ارز $\lambda_{\max}(F(x)) < \circ$.

برخی از خواص نامساوی‌های ماتریسی عبارتند از [۱۶]:

۱. نامساوی‌های ماتریسی خطی یکتا نیستند یعنی نامساوی‌های ماتریسی خطی مختلفی می‌توانند منجر به

یک مجموعه جواب شوند. به‌عنوان مثال مجموعه جواب نامساوی‌های ماتریسی خطی تحت همانی ثابت است.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} > \circ \iff \begin{bmatrix} I & \circ \\ \circ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \circ \\ \circ & I \end{bmatrix} > \circ \iff \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} > \circ.$$

۲. چند نامساوی ماتریسی خطی می‌تواند به‌صورت یک نامساوی ماتریسی خطی نمایش داده شوند.

$$F_1 < \circ, F_2 < \circ, \dots, F_k < \circ$$

اگر و فقط اگر

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) & \circ & \dots & \circ \\ \circ & F_2(x) & \circ & \circ \\ \vdots & \circ & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & F_k(x) \end{bmatrix} < \circ.$$

۳. مجموعه $\delta := \{x \mid F(x) < \circ\}$ از حل نامساوی ماتریسی خطی $F(x) < \circ$ محدب است. یعنی اگر

$x_1, x_2 \in \delta$ و $\alpha \in (0, 1)$ آنگاه

$$F(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha F(x_1) + (1 - \alpha)F(x_2) < \circ.$$

فصل ۲

معرفی سیستم‌های دوبعدی

سیستم‌های دوبعدی^۱ به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱. سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته (شامل دو متغیر مستقل گسسته)،
۲. سیستم‌های خطی دوبعدی پیوسته (شامل دو متغیر مستقل پیوسته)،
۳. سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته-پیوسته (شامل یک متغیر مستقل گسسته و یک متغیر مستقل پیوسته).

سیستم‌های خطی دوبعدی به دلایل زیادی مورد توجه قرار گرفته‌اند از جمله راندمان بالا، پردازش و تحلیل بهتر داده‌ها، قابلیت اجرای عملگرهای غیرخطی، قابلیت بالای انعطاف‌پذیری. همچنین به وضوح بسیاری از فرایندهای فیزیکی دارای ساختار دوبعدی می‌باشند.

۱.۲ مدل‌های فضای حالت سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته

بعضی از مدل‌های استفاده شده برای سیستم‌های دوبعدی به صورت‌های زیر توصیف می‌شوند.

۱.۱.۲ مدل راسر

مدل راسر^۲ دوبعدی برای سیستم‌های گسسته به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۵]:

^۱Two- dimensional (2D)

^۲Roesser model

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j), \quad (1.2)$$

$$y(i, j) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j). \quad (2.2)$$

که در آن $i, j \geq 0$ مقادیر صحیحی هستند که به ترتیب مولفه‌های افقی و عمودی بردار حالت را توصیف می‌کنند و $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_1}$ بردار حالت افقی، $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_2}$ بردار حالت عمودی و $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی، $y(i, j) \in \mathbb{R}^l$ بردار خروجی و $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, C_1, C_2, D$ ماتریس‌های حقیقی با ابعاد مناسب هستند. شرایط مرزی برای سیستم توصیف شده (۱.۲) و (۲.۲) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x^h(i, 0), x^v(0, j) \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

مثال ۱.۲. نمونه‌ای از سیستم دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & \vdots & 8 \\ 0 & 4 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ -4 & 6 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j).$$

در این مثال ماتریس A_{11} یک ماتریس 2×2 ، A_{12} یک ماتریس 2×1 ، A_{21} یک ماتریس 1×2 و A_{22} یک ماتریس 2×2 می‌باشد. همچنین B_1 و B_2 به ترتیب ماتریس‌هایی با ابعاد 2×1 و یک ماتریس 1×1 می‌باشند.

۲.۱.۲ مدل کلی

مدل کلی^۳ دوبعدی برای سیستم‌های گسسته به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$x(i+1, j+1) = A_0 x(i, j) + A_1 x(i+1, j) + A_2 x(i, j+1) \quad (4.2)$$

$$+ B_0 u(i, j) + B_1 u(i+1, j) + B_2 u(i, j+1),$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j). \quad (5.2)$$

^۳General model

که در آن $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$ ، $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ و بردارهای حالت، ورودی و خروجی در نقطه (i, j) هستند و $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$ برای $k = 0, 1, 2, \dots$ و $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ، $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. شرایط مرزی برای معادلات (۴.۲) و (۵.۲) به فرم زیر می‌باشد:

$$x(i, 0) \in \mathbb{R}^n, x(0, j) \in \mathbb{R}^n \quad i, j \in \mathbb{Z}^+ \quad (6.2)$$

۳.۱.۲ مدل فورناسا-مارکسینی

مدل فورناسا-مارکسینی^۴ نوع اول $(FF - MM)$ توسط معادلات زیر تعریف می‌شود [۸]:

$$x(i+1, j+1) = A_0 x(i, j) + A_1 x(i+1, j) + A_2 x(i, j+1) + Bu(i, j), \quad (7.2)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j). \quad (8.2)$$

که در آن i, j مقادیر صحیح هستند که به ترتیب مولفه‌های افقی و عمودی بردار حالت را توصیف می‌کنند. $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت مکان، $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی، $y(i, j) \in \mathbb{R}^l$ بردار خروجی و A_0, A_1, A_2, B, C, D ماتریسهای حقیقی با ابعاد مناسب هستند. شرایط مرزی برای معادلات (۷.۲) و (۸.۲) به صورت زیر داده می‌شود:

$$x(i, 0) \in \mathbb{R}^n, x(0, j) \in \mathbb{R}^n \quad i, j \in \mathbb{Z}^+ \quad (9.2)$$

مدل فورناسا-مارکسینی نوع دوم $(FM - MM)$ توسط معادلات زیر بیان می‌شود:

$$x(i+1, j+1) = A_1 x(i+1, j) + A_2 x(i, j+1) + B_1 u(i+1, j) + B_2 u(i, j+1), \quad (10.2)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j). \quad (11.2)$$

که در آن i, j مقادیر صحیح هستند که به ترتیب مولفه‌های افقی و عمودی بردار حالت را توصیف می‌کنند. $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت مکان، $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی، $y(i, j) \in \mathbb{R}^l$ بردار خروجی و A_0, A_1, A_2, B, C, D ماتریسهای حقیقی با ابعاد مناسب هستند. شرایط مرزی برای معادلات (۱۰.۲) و (۱۱.۲) به صورت زیر داده می‌شود:

$$x(i, 0) \in \mathbb{R}^n, x(0, j) \in \mathbb{R}^n \quad i, j \in \mathbb{Z}^+ \quad (12.2)$$

^۴Fornasini-Marchesini

۲.۲ سیستم‌های دوبعدی با تاخیر

تأخیر زمانی معمولاً در بسیاری از سیستم‌های دینامیکی در مسیر بین سیستم ورودی‌ها و سیستم خروجی‌ها رخ می‌دهد. به عنوان مثال، کاربردهای مهندسی که در آن تأخیر زمانی می‌تواند در نظر گرفته شود شامل: اندازه‌گیری تأخیر، انتقال تأخیر و محاسبه تأخیر می‌باشد. این ضروری است که مدل‌های سیستم به منظور پیش‌بینی درست پویایی سیستم شرح داده شود. سیستم‌های خطی دوبعدی با تأخیر در سه دسته قرار می‌گیرند:

دسته اول: شامل سیستم‌هایی است که در آنها حالت‌ها با مقدارهای یکسان یا متفاوت به تأخیر افتاده که این نوع، سیستم‌های تأخیر حالت نامیده می‌شود.

دسته دوم: شامل سیستم‌هایی است که در آنها ورودی‌ها با مقدارهای یکسان یا متفاوت به تأخیر افتاده که این نوع، سیستم‌های تأخیر ورودی نامیده می‌شود.

دسته سوم: شامل سیستم‌هایی است که در آنها ورودی‌ها و حالت‌ها با مقدارهای یکسان به تأخیر افتاده است.

در این پایان‌نامه سیستم‌های خطی گسسته زمانی با تأخیر زمانی در بردار حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۲.۲ مدل‌های فضای حالت سیستم‌های دوبعدی گسسته با تأخیر زمانی

مدل راسر

مدل راسر سیستم‌های دوبعدی گسسته با q تأخیر در حالت به فرم زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^q A_k \begin{bmatrix} x^h(i-k, j) \\ x^v(i, j-k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (13.2)$$

که $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_1}$ و $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_2}$ به ترتیب بردارهای حالت افقی و عمودی، $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی در نقطه (i, j) می‌باشد. $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ ، $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ و

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, q$$

شرایط مرزی برای معادله (۱۳.۲) به صورت زیر می‌باشد:

$$x^h(i, 0), x^v(0, j) \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (14.2)$$

تعریف ۱.۰.۲. مدل راسر سیستم‌های دوبعدی پیوسته با تاخیر حالت به صورت زیر تعریف می‌شود [۳]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11d} & A_{12d} \\ A_{21d} & A_{22d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1 - \tau_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - \tau_2) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (۱۵.۲)$$

که در آن $x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_1}$ بردار حالت افقی، $x^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_2}$ بردار حالت عمودی و $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^m$ بردار کنترل یا ورودی می‌باشد. τ_1 و τ_2 به ترتیب تاخیرهای افقی و عمودی هستند. A_{ii} ، A_{iid} و B_i ماتریس‌های ثابت حقیقی با ابعاد مناسب هستند. شرایط مرزی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} x^h(\circ, t_2) = f(t_2), & t_2 \in [-\tau_2, \circ], \\ x^v(t_1, \circ) = g(t_1), & t_1 \in [-\tau_1, \circ]. \end{cases} \quad (۱۶.۲)$$

که f و g توابع پیوسته هستند. با تعریف

$$x(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) = \begin{bmatrix} x^h(t_1 - \tau_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - \tau_2) \end{bmatrix}, \quad \dot{x}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} A_{11d} & A_{12d} \\ A_{21d} & A_{22d} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \quad (۱۷.۲)$$

معادله (۱۵.۲) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\dot{x}(t_1, t_2) = Ax(t_1, t_2) + A_d x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) + Bu(t_1, t_2). \quad (۱۸.۲)$$

مدل کلی

مدل کلی سیستم‌های دوبعدی گسسته با q تاخیر در حالت به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$x(i+1, j+1) = \sum_{k=0}^q \left(A_k^0 x(i-k, j-k) + A_k^1 x(i+1-k, j-k) + A_k^2 x(i-k, j+1-k) \right) + B_0 u(i, j) + B_1 u(i+1, j) + B_2 u(i, j+1), \quad (19.2)$$

که $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$ و $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ بردارهای حالت و ورودی در نقطه (i, j) هستند.

$$A_k^t \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad k = 0, 1, \dots, q$$

$$B_k \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad k = 0, 1, 2$$

و شرایط مرزی به صورت زیر می‌باشد:

$$x(i, 0) \in \mathbb{R}^n, x(0, j) \in \mathbb{R}^n \quad i, j \in \mathbb{Z}^+. \quad (20.2)$$

۳.۲ ارتباط بین مدل‌های راسر، کلی و فورناسا-مارکسینی

مدل کلی دوبعدی (۴.۲) را در نظر بگیرید با جایگذاری $B_0 = B$ و $B_1 = B_2 = 0$ در این معادله مدل فورناسا-مارکسینی ($FF-MM$) نوع اول به دست می‌آید و با جایگذاری $A_0 = 0$ و $B_0 = 0$ در این معادله مدل فورناسا-مارکسینی نوع دوم ($SF-MM$) به دست می‌آید. پس می‌توان گفت مدل فورناسا-مارکسینی حالت خاصی از مدل کلی می‌باشد.

حال مدل فورناسا-مارکسینی را در نظر بگیرید با تعریف بردار حالت $x(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$ می‌توان معادلات (۱.۲) و (۲.۲) را به صورت زیر نوشت:

$$x(i+1, j+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(i+1, j) + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(i, j+1) \quad (21.2)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i+1, j) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j+1),$$

$$y(i, j) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x(i, j) + Du(i, j). \quad (22.2)$$

بنابراین مدل راسر حالت خاصی از مدل فورناسا-مارکسینی است. مدل راسر به‌عنوان بهترین و کلی‌ترین مدل معرفی شده به همین دلیل مدل راسر را به‌عنوان مبنای کار خود در این پایان‌نامه انتخاب می‌کنیم.

۴.۲ کاربرد مهندسی سیستم‌های دوبعدی

یکی از کاربردهای سیستم‌های دوبعدی در مهندسی برق می‌باشد مثلاً در موج الکتریکی مانند صاعقه که ولتاژ تابعی از زمان و مکان است. همچنین حرکت ربات در یک صفحه نسبت به موقعیت‌های سرعت نقطه انتهایی و شتاب نقطه انتهایی می‌تواند مصداق مثال فوق باشد. یکی دیگر از کاربردهای سیستم‌های دوبعدی در مهندسی مکانیک، می‌توان انتقال حرارت را نام برد که دما تابعی از زمان و مکان می‌باشد.

فصل ۳

پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر

در این فصل، طبق مطالعات آیت رمی و همکارانش [۲]، شرایطی برای پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته زمانی مدل راسر شرح داده خواهد شد. آنها با استفاده از روش‌های جبرخطی که در قضایا آورده شده نشان دادند پایداری مجانبی هر سیستم دوبعدی در حالت کلی رفتاری مشابه با پایداری مجانبی سیستم یک بعدی هم‌ارزش را دارا می‌باشد. در نتیجه برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت در یک سیستم دوبعدی، می‌توان ماتریس پس‌خورد حالت سیستم یک بعدی هم‌ارزش را محاسبه کرده و سپس با توجه به اندازه ماتریس‌هایی که جزو مفروضات مساله هستند، ماتریس پس‌خورد حالت به‌دست آمده را به دو مولفه تفکیک کرد.

۱.۳ شرایط پایداری سیستم‌های دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر

مدل راسر دوبعدی برای سیستم‌های گسسته به‌صورت زیر را در نظر بگیرید [۱۵]:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j), \quad (1.3)$$

که در آن $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ، $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ، $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ ، $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ و $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ ، $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ ماتریس‌های حقیقی ثابت داده شده با ابعاد مناسب هستند. شرایط مرزی برای سیستم (۱.۳) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} x^h(\circ, j) = x_\circ^h(j), & \forall j \in \mathbb{N}, \\ x^v(i, \circ) = x_\circ^v(i), & \forall i \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (۲.۳)$$

تعریف ۱.۳.۱ [۲]. سیستم (۱.۳) با ورودی صفر $u(i, j) = \circ$ مثبت نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر برای هر شرط مرزی نامنفی داده شده $x^h(i, j) \geq \circ$ و $x^v(i, j) \geq \circ$ ، نتیجه بگیریم حالت‌ها نامنفی هستند یعنی داشته باشیم $x(i, j) \geq \circ, \forall i, j \in \mathbb{N}$.

همچنین تعریف دیگری برای سیستم‌های مثبت داریم که به صورت زیر بیان می‌شود:

گزاره ۱.۳.۱ [۱۸]. سیستم (۱.۳) با ورودی $u(i, j) = \circ$ یک سیستم مثبت است، اگر و تنها اگر همه

$$A = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix} \text{ نامنفی باشد } (A \geq \circ).$$

یک شرط مهم برای پایداری مجانبی مدل راسر در حالت کلی می‌تواند به صورت زیر مطرح شود:

لم ۱.۳.۱ [۲]. فرض کنید $A_{۱۱} \in \mathbb{R}^{n_۱ \times n_۱}, A_{۱۲} \in \mathbb{R}^{n_۱ \times n_۲}, A_{۲۱} \in \mathbb{R}^{n_۲ \times n_۱}, A_{۲۲} \in \mathbb{R}^{n_۲ \times n_۲}$ ماتریس‌های حقیقی ثابت داده شده باشند، سیستم دوبعدی توصیف شده (۱.۳) با $u(i, j) = \circ$ پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \det \left(\begin{bmatrix} I_{n_۱} - z_۱ A_{۱۱} & -z_۱ A_{۱۲} \\ -z_۲ A_{۲۱} & I_{n_۲} - z_۲ A_{۲۲} \end{bmatrix} \right) \neq \circ, \\ \forall (z_۱, z_۲) \in \{(z_۱, z_۲) : |z_۱| \leq ۱, |z_۲| \leq ۱\}. \end{cases} \quad (۳.۳)$$

هدف بررسی قانون پس‌خورد حالت $\begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$ است به قسمی که سیستم حلقه

بسته

$$\begin{bmatrix} x^h(i+۱, j) \\ x^v(i, j+۱) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{۱۱} + B_۱ F_۱ & A_{۱۲} + B_۱ F_۲ \\ A_{۲۱} + B_۲ F_۱ & A_{۲۲} + B_۲ F_۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}, \quad (۴.۳)$$

مثبت و پایدار مجانبی باشد. در این قسمت نتایج پایداری اولیه برای سیستم دوبعدی خطی توصیف شده توسط مدل راسر

$$\begin{bmatrix} x^h(i+۱, j) \\ x^v(i, j+۱) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}, \quad (۵.۳)$$

فراهم می‌کنیم. در حقیقت نشان می‌دهیم پایداری مجانبی سیستم (۵.۳) (تحت محدودیت‌های مثبت) هم‌ارز پایداری مجانبی سیستم یک بعدی گسسته زمانی زیر است:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(k). \quad (6.3)$$

تعریف زیر را برای سیستم‌های یک بعدی داریم:

تعریف ۲.۳.۲. [۲]. سیستم (۶.۳) مثبت نامیده می‌شود اگر برای هر شرط اولیه نامنفی داده شده $x(0) \geq 0$ نتیجه شود: $x(i) \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}$.

بدیهی است که مثبتی سیستم (۶.۳) را به صورت زیر می‌توان بیان کرد.

گزاره ۲.۳.۲. [۲]. سیستم (۶.۳) یک سیستم مثبت است اگر و تنها اگر همه مولفه‌های ماتریس $A := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ نامنفی باشند ($A \geq 0$).

حال یادآوری می‌کنیم شعاع طیفی $\rho(M)$ از ماتریس $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(M) = \max \left\{ |\lambda_1|, \dots, |\lambda_n| \right\} \quad (7.3)$$

که در آن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس M هستند. همچنین برای یک ماتریس مختلط $N = [n_{ij}]$ ماتریس حقیقی $|N|$ را به صورت مولفه‌ای $|n_{ij}|$ نمایش می‌دهیم.

لم ۲.۳.۲. [۱۲]. فرض کنید M یک ماتریس حقیقی و N یک ماتریس مختلط باشد به قسمی که $|N| \leq M$ در این صورت خواهیم داشت $\rho(N) \leq \rho(M)$.

لم ۲.۳.۳. [۱۰]. فرض کنید ماتریس‌های $A_{22}, A_{21}, A_{12}, A_{11}$ ماتریس‌های حقیقی ثابت باشند (یا به طور معادل سیستم (۶.۳) مثبت باشد) در این صورت عبارات زیر هم‌ارزند:

۱. سیستم یک بعدی توصیف شده توسط (۶.۳) پایدار مجانبی است.

$$2. \rho \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right) < 1$$

۳. بردار $d \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ وجود دارد به قسمی که

$$\begin{bmatrix} A_{11} - I_{n_1} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} d < \circ, \quad d > \circ. \quad (۸.۳)$$

برهان. اثبات شرط (۱) و (۲) با استفاده از لم (۱.۳) نتیجه می‌شود. برای اثبات شرط (۳) فرض می‌کنیم شرط (۱) برای هر شرط اولیه نامنفی ($x_0 \geq \circ$) برقرار باشد آنگاه با جمع و قرار دادن شرایطی از سیستم (۶.۳) به دست می‌آوریم:

$$x(k) - x(\circ) = (A - I) \sum_{i=\circ}^{k-1} x(i) < \circ, \quad (۹.۳)$$

چون $x(k)$ وقتی k به سمت بی‌نهایت میل می‌کند به سمت صفر می‌رود آنگاه با گرفتن حد از عبارت (۹.۳) داریم:

$$-x(\circ) = (A - I) \sum_{i=\circ}^{\infty} x(i) < \circ, \quad (۱۰.۳)$$

در واقع $x(\circ)$ نامنفی است همچنین داریم:

$$d = \sum_{i=\circ}^{\infty} x(i) > \circ. \quad (۱۱.۳)$$

□

در نتیجه شرط (۳) به دست می‌آید.

حال به بیان قضیه‌ای در خصوص شرط لازم و کافی برای پایداری مجانبی سیستم دوبعدی با استفاده از مدل راسر (۵.۳) می‌پردازیم.

قضیه ۵.۳.۱ [۲]. با فرض اینکه سیستم (۵.۳) مثبت است یا به‌طور هم‌ارز ماتریس‌های $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ نامنفی هستند عبارات زیر هم‌ارزند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \det \left(\begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1 A_{11} & -z_1 A_{12} \\ -z_2 A_{21} & I_{n_2} - z_2 A_{22} \end{bmatrix} \right) \neq \circ, \\ \forall (z_1, z_2) \in \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}. \end{array} \right. \quad .۱$$

.۲

$$\rho \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right) < 1$$

برهان. با قرار دادن $z_1 = z_2 = z$ در شرط (۱)، بدیهی است

$$|z| \leq 1, \quad \det\left(I - z \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right) \neq 0, \quad (12.3)$$

که در واقع هم‌ارز شرط (۲) است. حال فرض کنید z_1 و z_2 هر عدد مختلط اختیاری باشند به‌قسمی که $|z_1| \leq 1$ و $|z_2| \leq 1$ ، در این صورت به‌وضوح خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} |z_1 A_{11}| & |z_2 A_{12}| \\ |z_1 A_{21}| & |z_2 A_{22}| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (13.3)$$

با استفاده از خواص طیفی داده شده در لم (۲.۳) رابطه زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\rho\left(\begin{bmatrix} z_1 A_{11} & z_2 A_{12} \\ z_1 A_{21} & z_2 A_{22} \end{bmatrix}\right) \leq \rho\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right) < 1. \quad (14.3)$$

چون z_1 و z_2 اعداد مختلط اختیاری با قدرمطلق کمتر یا مساوی یک هستند نامساوی بالا بر درستی رابطه (۱) دلالت دارد و اثبات کامل است. \square

نتیجه ۱.۰۳. [۲]. عبارات زیر هم‌ارزند:

۱. سیستم دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر (۵.۳) مثبت و پایدار مجانبی است.

۲. سیستم یک بعدی توصیف شده توسط (۶.۳) مثبت و پایدار مجانبی است.

۳. ماتریس‌های $A_{22}, A_{21}, A_{12}, A_{11}$ نامنفی هستند و بردار $d \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ وجود دارد به‌قسمی که:

$$\begin{bmatrix} A_{11} - I_{n_1} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} d < 0, \quad d > 0. \quad (15.3)$$

برهان. هم‌ارزی (۳) \iff (۲) با استفاده از لم (۳.۳) نتیجه می‌شود و اثبات در صورتی کامل می‌شود که نشان دهیم (۳) \iff (۱).

(۳) \iff (۱) ابتدا با استفاده از گزاره (۲.۳) واضح است که $A_{22}, A_{21}, A_{12}, A_{11}$ نامنفی هستند.

حال با توجه به لم (۱.۳) واضح است که پایداری مجانبی سیستم دوبعدی (۵.۳) هم‌ارز

$$\left\{ \det \left(\begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1 A_{11} & -z_1 A_{12} \\ -z_2 A_{21} & I_{n_2} - z_2 A_{22} \end{bmatrix} \right) \neq 0, \right. \\ \left. \forall (z_1, z_2) \in \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}. \right. \quad (۱۶.۳)$$

است. که با استفاده از قضیه (۱.۳) هم‌ارز $\rho \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right) < 1$ می‌باشد. سرانجام با استفاده از لم (۳.۳) می‌توان شرط (۱۵.۳) را نتیجه گرفت. برعکس برای نشان دادن (۳) \iff (۱) با استفاده از گزاره (۲.۳) سپس لم (۳.۳) و قضیه (۱.۳) و سرانجام لم (۱.۳) می‌توان نتیجه دلخواه را به دست آورد. \square

حال به بررسی قانون کنترل $\begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} = F u(i, j)$ می‌پردازیم. این قانون کنترل باید به گونه‌ای طراحی شود که مثبتی و پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته را فراهم کند. سیستم حلقه بسته مدل راسر زیر را مشاهده کنید:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = (A + BF) \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}, \quad (۱۷.۳)$$

$$\begin{cases} x^h(0, j) = x_0^h(j), & \forall j \in \mathbb{N}, \\ x^v(i, 0) = x_0^v(i), & \forall i \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (۱۸.۳)$$

که در آن $A := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ و $B := \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ شامل هر ماتریس حقیقی دلخواه داده شده می‌باشد. حال به بررسی نتیجه اصلی این بخش می‌پردازیم:

قضیه ۲.۳.۲ [۲]. سیستم راسر حلقه بسته (۱۷.۳) برای هر شرط اولیه مرزی نامنفی، مثبت و پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر $n+1$ بردار $d = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]^T \in \mathbb{R}^n$ و $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^m$ موجود باشند به‌قسمی که

$$\begin{cases} (A - I_n)d + B(\sum_{i=1}^n y_i) < 0, \\ d > 0, \\ a_{ij}d_j + b_i y_j \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{cases} \quad (۱۹.۳)$$

که در آن $B^T = [b_1^T \ \dots \ b_n^T]$ ، $A = [a_{ij}]$ و $n = n_1 + n_2$ و سرانجام ماتریس پس‌خورد حالت F به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F = [d_1^{-1}y_1 \ \dots \ d_n^{-1}y_n]. \quad (20.3)$$

برهان. فرض می‌کنیم شرط (۱۹.۳) برقرار باشد و ماتریس $F = [f_1, \dots, f_n]$ را با ستون‌های ساخته شده به صورت $f_i = d_i^{-1}y_i$ برای $i = 1, \dots, n$ ، تعریف می‌کنیم. حال با این ساختار به راحتی می‌بینیم که $A + BF$ یک ماتریس نامنفی است. از نامساوی‌های اخیر در شرط (۱۹.۳) برای $i, j = 1, \dots, n$ خواهیم داشت:

$$0 \leq (a_{ij}d_j + b_i y_j) d_j^{-1} = a_{ij} + b_i f_j = (A + BF)_{ij}, \quad (21.3)$$

حال به بحث پایداری مجانبی تحت قانون کنترل $\begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$ ، $u(i, j) = F$ می‌پردازیم. با استفاده از روابط بالا نتیجه می‌گیریم:

$$BFd = B \left(\sum_{i=1}^n y_i \right), \quad (22.3)$$

و با تلفیق این رابطه با رابطه (۱۹.۳) نتیجه می‌گیریم:

$$(A + BF - I_n)d < 0. \quad (23.3)$$

حال از آنجا که $d > 0$ و ماتریس $(A + BF)$ یک ماتریس نامنفی است بنابراین با استفاده از نتیجه (۱.۳) نتیجه می‌گیریم سیستم دوبعدی حلقه بسته توصیف شده توسط مدل راسر (۱۷.۳) مثبت و پایدار مجانبی است. بنابراین اثبات کامل است. \square

قضیه ۳.۳.۳. [۲]. عبارات زیر معادلند:

۱. یک قانون پس‌خورد حالت مثبت $0 \leq u(i, j) = F \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$ موجود است به قسمی که سیستم حلقه بسته راسر (۱۷.۳) برای هر شرط اولیه مرزی مثبت و پایدار مجانبی است.

۲. یک ماتریس $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ موجود است به قسمی که $F > 0$ و $A + BF$ یک ماتریس شور نامنفی است ($\rho(A + BF) < 1$).

۳. مساله LP زیر با متغیرهای $d = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]^T \in \mathbb{R}^n$ و $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^m$ شدنی است.

$$\begin{cases} (A - I_n)d + B(\sum_{i=1}^n y_i) < 0, \\ d > 0, \\ y_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n \\ a_{ij}d_j + b_i y_j \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{cases} \quad (24.3)$$

که در آن $A = [a_{ij}]$ ، $B^T = [b_1^T \dots b_n^T]$ و $n = n_1 + n_2$. سرانجام ماتریس پس‌خورد حالت F به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F = [d_1^{-1} y_1 \quad \dots \quad d_n^{-1} y_n]. \quad (25.3)$$

که در آن d و y_1, \dots, y_n هر جواب شدنی دلخواه از مساله LP بالا می‌باشند.

فصل ۴

پایداری مجانبی سیستم‌های خطی دوبعدی مثبت با تاخیر

در این فصل، طبق مطالعات کاکزورک [۱۹] شرایطی لازم و کافی برای پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی مثبت با تاخیر توسط مدل راسر، مدل‌های فورناسا - مارکسینی و مدل کلی شرح داده خواهد شد. او نشان داد بررسی پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی مثبت با تاخیر زمانی می‌تواند به بررسی پایداری سیستم‌های خطی یک بعدی مثبت بدون تاخیر هم‌ارزش تبدیل شود. همچنین طبق تحقیقات بنزوا و همکارانش [۳] پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی پیوسته با تاخیر با استفاده از شرایط نامساوی‌های ماتریسی خطی مورد بررسی قرار داده شده است. این شرایط که مستقل از مقدار تاخیر هستند با استفاده از تابع لیاپونوف کیاسوشی^۱ اثبات شده‌اند. در پایان نتیجه این بررسی‌ها را با استفاده از مثال‌هایی دنبال می‌کنیم.

۱.۴ سیستم‌های یک بعدی مثبت

سیستم‌های خطی گسسته-زمانی را در نظر بگیرید [۱۹]:

$$\begin{aligned}x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i), \quad i \in \mathbb{Z}_+ \\ y(i) &= Cx(i) + Du(i)\end{aligned}\tag{۱.۴}$$

که $x(i) \in \mathbb{R}^n$ ، $u(i) \in \mathbb{R}^m$ و $y(i) \in \mathbb{R}^p$ بردارهای حالت، ورودی و خروجی هستند و $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ، $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ماتریس‌های حقیقی داده شده می‌باشند. سیستم (۱.۴) مثبت

^۱Lyapunov-kyasovshii

نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ و هر $i \in \mathbb{Z}^+$ ، $y(i) \in \mathbb{R}_+^p$ داشته باشیم: $x(i) \in \mathbb{R}_+^n$ ، $y(i) \in \mathbb{R}_+^p$.

قضیه ۱.۴.۱ [۱۸] و [۲۰]. سیستم (۱.۴) مثبت است اگر و فقط اگر

$$A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}.$$

سیستم مثبت (۱.۴) پایدار مجانبی نامیده می‌شود اگر حل $x(i) = A^i x_0$ از معادله

$$x(i+1) = Ax(i), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, i \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.4)$$

در شرط زیر صدق کند:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x(i) = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}_+^n. \quad (3.4)$$

قضیه ۲.۴.۱ [۱۸]. سیستم مثبت (۲.۴) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر هر یک از شرایط زیر برقرار باشد:

۱. همه ضرایب چندجمله‌ای مشخصه ماتریس

$$\hat{A} = A - I_n, \quad (4.4)$$

$$p_{\hat{A}}(z) = \det[I_n z - \hat{A}] = z^n + \hat{a}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \hat{a}_1 z + \hat{a}_0.$$

مثبت باشند.

۲. همه مینورهای اصلی ماتریس

$$\bar{A} = I_n - A = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

مثبت باشند یعنی:

$$\left| \bar{a}_{11} \right| > 0, \quad \left| \begin{array}{cc} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{array} \right| > 0, \dots, \det \bar{A} > 0. \quad (6.4)$$

قضیه ۳.۴.۱ [۱۸]. سیستم مثبت (۲.۴) ناپایدار است اگر و فقط اگر حداقل یک درایه قطری ماتریس A

از یک بزرگتر باشد. یعنی: برای برخی از $k \in \{1, \dots, n\}$ ، $a_{kk} > 1$.

برهان. اگر k امین ستون ماتریس A را با $a_{\circ k}$ و k امین سطر را با $a_{k\circ}$ نشان دهیم آنگاه با فرض $x_0 = e_k$

از معادله (۲.۴) برای k امین مولفه بردار x_i داریم:

$$x_1^k = a_{kk}, x_2^k = a_{kk}^2, \dots, x_i^k = a_{kk}^i. \quad (7.4)$$

بنابراین اگر $a_{kk} > 1$ آنگاه $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i^k = \infty$ و سیستم (۲.۴) ناپایدار است. \square

۱.۱.۴ سیستم‌های دوبعدی مثبت

مدل کلی سیستم‌های خطی دوبعدی را در نظر بگیرید:

$$x(i+1, j+1) = A_0 x(i, j) + A_1 x(i+1, j) + A_2 x(i, j+1) \quad (8.4)$$

$$+ B_0 u(i, j) + B_1 u(i+1, j) + B_2 u(i, j+1),$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j), \quad (9.4)$$

که $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$, $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$, $y(i, j) \in \mathbb{R}^p$ بردارهای حالت، ورودی و خروجی در نقطه (i, j) هستند و

$$C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}, B_k \in \mathbb{R}^{n \times m}, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad k = 0, 1, 2.$$

ماتریس‌های حقیقی داده شده می‌باشند. شرایط مرزی برای (۸.۴) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} x(i, 0) \in \mathbb{R}^n, & i \in \mathbb{Z}^+, \\ x(0, j) \in \mathbb{R}^n, & j \in \mathbb{Z}^+. \end{cases} \quad (10.4)$$

مدل (۸.۴) مثبت نامیده می‌شود اگر برای همه شرایط مرزی $x(i, 0) \in \mathbb{R}_+^n$ و $x(0, j) \in \mathbb{R}_+^n$ و هر دنباله ورودی $u(i, j) \in \mathbb{R}_+^m$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$ داشته باشیم:

$$x(i, j) \in \mathbb{R}_+^n, y(i, j) \in \mathbb{R}_+^p, i, j \in \mathbb{Z}_+. \quad (11.4)$$

قضیه ۴.۴. [۱۸]. مدل کلی (۸.۴) مثبت است اگر و فقط اگر

$$\begin{aligned} A_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, B_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad k = 0, 1, 2, \\ C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

با جایگذاری $B_0 = B$ و $B_1 = B_2 = 0$ در (۸.۴) مدل فورناسا-مارکسینی نوع اول $(FF - MM)$ و با جایگذاری $A_0 = 0$ و $A_1 = 0$ در (۸.۴) مدل فورناسا-مارکسینی نوع دوم $(SF - MM)$ به‌دست می‌آید. مدل راسر سیستم‌های خطی دوبعدی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \end{bmatrix} u(i, j), \quad (13.4)$$

$$y(i, j) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j), \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \quad (14.4)$$

که $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_1}$ و $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_2}$ بردارهای حالت افقی و عمودی در نقطه (i, j) هستند. $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ و $y(i, j) \in \mathbb{R}^p$ بردارهای ورودی و خروجی هستند. و

$$B_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}, \quad B_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}, \quad A_{kl} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_l}, \quad k, l = 1, 2,$$

$$C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_1}, \quad C_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_2}, \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}.$$

شرایط مرزی برای (۱۳.۴) به فرم زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} x^h(\circ, j) \in \mathbb{R}^{n_1}, & j \in \mathbb{Z}^+, \\ x^v(i, \circ) \in \mathbb{R}^{n_2}, & i \in \mathbb{Z}^+. \end{cases} \quad (15.4)$$

قضیه ۵.۴. مدل راسر مثبت است اگر و فقط اگر

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad (16.4)$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}, \quad n = n_1 + n_2.$$

۲.۴ پایداری مجانبی سیستم‌های دوبعدی مثبت با تاخیر

۱.۲.۴ مدل راسر دوبعدی با تاخیر

مدل راسر دوبعدی مثبت خودکار ($u(i, j) = \circ$) با تاخیر q در حالت را در نظر بگیرید [۱۹]:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \sum_{k=\circ}^q A_k \begin{bmatrix} x^h(i-k, j) \\ x^v(i, j-k) \end{bmatrix}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad (17.4)$$

که $x^h(i, j) \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ و $x^v(i, j) \in \mathbb{R}_+^{n_2}$ بردارهای حالت افقی و عمودی در نقطه (i, j) هستند و

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, q. \quad (18.4)$$

با تعریف بردارهای

$$\bar{x}^h(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^h(i-1, j) \\ \vdots \\ x^h(i-q, j) \end{bmatrix}, \quad \bar{x}^v(i, j) = \begin{bmatrix} x^v(i, j) \\ x^v(i, j-1) \\ \vdots \\ x^v(i, j-q) \end{bmatrix}, \quad (19.4)$$

مدل راسر دوبعدی مثبت با q تاخیر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^h(i+1, j) \\ \bar{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix}, \quad i, j \in \mathbb{R}_+, \quad (20.4)$$

که در آن ماتریس A به فرم زیر می‌باشد:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{11}^1 & \dots & A_{11}^{q-1} & A_{11}^q & A_{12}^0 & A_{12}^1 & \dots & A_{12}^{q-1} & A_{12}^q \\ I_{n_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_{21}^0 & A_{21}^1 & \dots & A_{21}^{q-1} & A_{21}^q & A_{22}^0 & A_{22}^1 & \dots & A_{22}^{q-1} & A_{22}^q \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I_{n_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I_{n_2} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (21.4)$$

و

$$N = (q+1)(n_1 + n_2). \quad (22.4)$$

بنابراین مدل راسر دوبعدی با q تاخیر (۱۷.۴) به مدل راسر دوبعدی بدون تاخیر تبدیل می‌شود اما با بعد بزرگ‌تر.

قضیه ۶.۴ [۱۹]. مدل راسر با q تاخیر (۱۷.۴) مثبت است اگر و فقط اگر

$$A_k \in \mathbb{R}_+^{(n_1+n_2)+(n_1+n_2)}, \quad k = 0, 1, \dots, q \quad (23.4)$$

یا به‌طور هم‌ارز

$$A \in \mathbb{R}_+^{N \times N}, \quad N = (q+1)(n_1 + n_2). \quad (24.4)$$

قضیه ۷.۴. [۱۹]. مدل راسر سیستم دوبعدی با q تاخیر (۱۷.۴) پایداری مجانبی است اگر و فقط اگر سیستم یک بعدی

$$x(i+1) = Ax(i), i \in \mathbb{Z}^+ \quad (25.4)$$

با ماتریس تعریف شده (۲۱.۴) پایدار مجانبی باشد.

مثال ۱۰.۴. مدل راسر سیستم دوبعدی مثبت خودکار برای $q = 1$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} x^h(i-1, j) \\ x^v(i, j-1) \end{bmatrix}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+ \quad (26.4)$$

که در آن ماتریس‌های A_0 و A_1 به‌فرم زیر می‌باشند:

$$A_0 = \begin{bmatrix} \circ/1 & \circ/2 & \vdots & \circ \\ \circ & \circ/1 & \vdots & \circ/3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \circ & \vdots & \circ/2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \circ/2 & \circ/1 & \vdots & \circ/2 \\ \circ & \circ/1 & \vdots & \circ/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \circ & \vdots & \circ/2 \end{bmatrix} \quad (27.4)$$

به‌منظور بررسی پایداری مجانبی این سیستم با $q = 1$ تاخیر شرط (۲) از قضیه (۲.۴) را می‌توان به‌کار برد در این صورت ماتریس \bar{A} را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} \circ/1 & \circ/2 & \circ/2 & \circ/1 & \vdots & \circ & \circ/2 \\ \circ & \circ/1 & \circ & \circ/1 & \vdots & \circ/3 & \circ/2 \\ 1 & \circ & \circ & \circ & \vdots & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ & \vdots & \circ & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \vdots & \circ/2 & \circ/2 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \vdots & 1 & \circ \end{bmatrix} \quad (28.4)$$

$$\bar{A} = I_n - A = \begin{bmatrix} I_2 - A_{11}^\circ & -A_{11}^1 & -A_{12}^\circ & -A_{12}^1 \\ -I_2 & I_2 & \circ & \circ \\ -A_{21}^\circ & -A_{21}^1 & I_1 - A_{22}^\circ & A_{22}^1 \\ \circ & \circ & -I_1 & -I_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.2 & -0.1 & \circ & -0.2 \\ \circ & 0.9 & \circ & -0.1 & -0.3 & -0.2 \\ -1 & \circ & 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -1 & \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & 0.8 & -0.2 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (29.4)$$

مینورهای اصلی ماتریس (۲۹.۴) مثبت است زیرا:

$$M_1 = 0.9, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.2 \\ \circ & 0.9 \end{vmatrix} = 0.81, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.2 \\ \circ & 0.9 & \circ \\ -1 & \circ & 1 \end{vmatrix} = 0.63,$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.2 & -0.1 \\ \circ & 0.9 & \circ & -0.1 \\ -1 & \circ & 1 & \circ \\ \circ & -1 & \circ & 1 \end{vmatrix} = 0.7, \quad M_5 = 0.8M_4, \quad M_6 = 0.6M_4.$$

بنابراین شرط (۲) از قضیه (۲.۴) مناسب است و مدل راسر (۲۶.۴) برای $q = 1$ تاخیر با ماتریس‌های (۲۷.۴) پایدار مجانبی است.

به روش مشابه شرایط را می‌توان برای مدل راسر دوبعدی مثبت به فرم زیر گسترش داد و سیستم دوبعدی مثبت با تاخیر را به سیستم دوبعدی بدون تاخیر تبدیل کرد.

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{q_1} \sum_{l=0}^{q_2} A_{kl} \begin{bmatrix} x^h(i-k, j-l) \\ x^v(i-k, j-l) \end{bmatrix}, \quad i, j \in \mathbb{Z}^+. \quad (30.4)$$

که در آن $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_1}$ و $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_2}$ بردارهای حالت افقی و عمودی در نقطه (i, j) هستند و

$$A_{kl} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$$

۲.۲.۴ مدل کلی دوبعدی با تاخیر

مدل کلی دوبعدی مثبت خودکار با تاخیر q را در نظر بگیرید [۱۹]:

$$x(i+1, j+1) = \sum_{k=0}^q \left(A_k^0 x(i-k, j-k) + A_k^1 x(i+1-k, j-k) + A_k^2 x(i-k, j+1-k) \right), \quad i, j \in \mathbb{Z}^+ \quad (31.4)$$

که $x(i, j) \in \mathbb{R}_+^n$ بردار حالت در نقطه (i, j) است و $A_k^t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ برای $k = 0, 1, \dots, q$ و $t = 0, 1, 2$ با تعریف بردار

$$\bar{x}(i, j) = \begin{bmatrix} x(i, j) \\ x(i-1, j-1) \\ x(i-2, j-2) \\ \vdots \\ x(i-q, j-q) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{N}}, \quad \bar{N} = (q+1)n \quad (32.4)$$

و ماتریس‌های

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0^0 & A_0^1 & \cdots & A_0^{q-1} & A_0^q \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1^0 & A_1^1 & \cdots & A_1^{q-1} & A_1^q \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (33.4)$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} A_2^0 & A_2^1 & \cdots & A_2^{q-1} & A_2^q \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

می‌توان (۳۱.۴) را به فرم زیر نوشت:

$$\bar{x}(i+1, j+1) = \bar{A}_0 \bar{x}(i, j) + \bar{A}_1 \bar{x}(i+1, j) + \bar{A}_2 \bar{x}(i, j+1), \quad i, j \in \mathbb{Z}^+ \quad (34.4)$$

بنابراین مدل کلی دوبعدی مثبت با تاخیر q (۳۱.۴) به مدل کلی دوبعدی مثبت بدون تاخیر تبدیل می‌شود اما با بعد بزرگتر.

قضیه ۸.۴. [۱۹]. مدل کلی دوبعدی با تاخیر (۳۱.۴) مثبت است اگر و فقط اگر

$$A_k^t \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad k = 0, 1, \dots, q, \quad t = 0, 1, 2 \quad (35.4)$$

یا به طور هم‌ارز

$$\bar{A}_t \in \mathbb{R}_+^{\bar{N} \times \bar{N}}, \quad t = 0, 1, 2. \quad (36.4)$$

قضیه ۹.۴. [۱۹]. مدل کلی دوبعدی مثبت با تاخیر (۳۱.۴) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر سیستم

یک بعدی مثبت

$$x(i+1) = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 + \bar{A}_2 & \bar{A}_0 \\ I_{\bar{N}} & 0 \end{bmatrix} x(i), \quad i \in \mathbb{Z}^+ \quad (37.4)$$

پایدار مجانبی باشد که ماتریس‌های \bar{A}_t , $t = 0, 1, 2$ توسط (۳۳.۴) تعریف شده است.

نتیجه ۱۰.۴. مدل فورنانشینی - مارکسینی نوع دوم ($\bar{A}_0 = 0$) دوبعدی مثبت با تاخیر (۳۱.۴) پایدار

مجانبی است اگر و فقط اگر سیستم یک بعدی مثبت

$$\bar{x}(i+1) = [\bar{A}_1 + \bar{A}_2] \bar{x}_i, \quad i \in \mathbb{Z}^+ \quad (38.4)$$

پایدار مجانبی باشد.

مثال ۲۰.۴. مدل کلی مثبت (۳۱.۴) برای $q = 1$ با ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A_0^0 = \begin{bmatrix} a & 0/1 \\ 0 & 0/2 \end{bmatrix}, \quad A_1^0 = \begin{bmatrix} 0/1 & 0/2 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad A_2^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (39.4)$$

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1^2 = \begin{bmatrix} 0/2 & 0/1 \\ 0 & 0/1 \end{bmatrix}, \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0/2 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

هدف یافتن مقادیر ضرایب a, b, c است به طوری که مدل مثبت پایدار مجانبی باشد. با استفاده از ماتریس‌های

تعریف شده در (۳۳.۴) داریم:

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0^0 & A_1^0 \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0/1 & 0 & 0 \\ 0 & 0/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (40.4)$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A_0^1 & A_1^1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ/1 & \circ/2 & \circ/2 & \circ/1 \\ \circ & b & \circ & \circ/1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} A_0^2 & A_1^2 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \circ & \circ & \circ/2 \\ \circ & \circ & \circ & c \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}.$$

برای تجزیه و تحلیل پایداری سیستم از قضیه (۹.۴) استفاده می‌شود.

$$I_{\Upsilon n} - A = \begin{bmatrix} I_{\Upsilon n} - \bar{A}_1 - \bar{A}_2 & -\bar{A}_0 \\ -I_{\Upsilon n} & I_{\Upsilon n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \circ/9 & -\circ/2 & -\circ/2 & -\circ/3 & -a & -\circ/1 & \circ & \circ \\ \circ & 1-b & \circ & -(\circ/1+c) & \circ & -\circ/2 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & -1 & \circ & \circ \\ -1 & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -1 & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}.$$

و با استفاده از شرط (۲) از قضیه (۲.۴)

$$M_1 = \circ/9, \quad M_2 = \begin{vmatrix} \circ/9 & -\circ/2 \\ \circ & 1-b \end{vmatrix} = \circ/9(1-b) > \circ,$$

$$M_{\Psi} = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.9(1-b) > 0,$$

$$M_{\Phi} = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.2 & -0.3 \\ 0 & 1-b & 0 & -(0.1+c) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.9(1-b) > 0,$$

$$M_{\Delta} = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.2 & -0.3 & -a \\ 0 & 1-b & 0 & -(0.1+c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0.7-a)(1-b) > 0,$$

$$M_{\Xi} = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.2 & -0.3 & -a & -0.1 \\ 0 & 1-b & 0 & -(0.1+c) & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0.7-a)[0.7-(b+c)] > 0,$$

$$M_{\Xi} = M_{\Upsilon} = M_{\Phi}.$$

بنابراین مدل مثبت (۳۱.۴) با ماتریس‌های (۴۰.۴) و (۴۱.۴) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر

$$0 < a < 0.7, \quad 0 \leq b+c < 0.7.$$

۳.۴ پایداری پس خورد حالت سیستم‌های خطی دوبعدی پیوسته با تاخیر

سیستم دوبعدی پیوسته با تاخیر را به صورت زیر در نظر بگیرید [۲]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = Ax(t_1, t_2) + A_\tau x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) + Bu(t_1, t_2), \quad (42.4)$$

$$\begin{cases} x^h(\circ, t_2) = f(t_2), & t_2 \in [-\tau_2, \circ], \\ x^h(t_1, \circ) = g(t_1), & t_1 \in [-\tau_1, \circ]. \end{cases} \quad (43.4)$$

$$x(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) = \begin{bmatrix} x^h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) \\ x^v(t_1, t_2 - \tau_2) \end{bmatrix}, \quad (44.4)$$

$x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_1}$ بردار حالت افقی، $x(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_2}$ بردار حالت عمودی، $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^m$ بردار کنترل و $f(t_2)$ و $g(t_1)$ شرایط مرزی داده شده هستند و ماتریس‌های حالت ثابت و به صورت زیر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_2 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_\tau = \begin{bmatrix} A_{\tau 11} & A_{\tau 12} \\ A_{\tau 21} & A_{\tau 22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \quad (45.4)$$

قانون پس خورد حالت برای پایداری سیستم (۴۲.۴) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad (46.4)$$

که $\begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}$ ماتریس پس خورد حالت است. سیستم خودکار دوبعدی بدون تاخیر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} x(t_1, t_2), \quad (47.4)$$

که در آن $x(t_1, t_2)$ در (۴۴.۴) تعریف شده است. برای بررسی پایداری سیستم (۴۷.۴)، می‌توان شرط زیر را که براساس چندجمله‌ای مشخصه می‌باشد استفاده نمود:

$$C(s_1, s_2) \neq 0, \quad \forall (s_1, s_2) : \operatorname{Re}(s_1) \geq 0, \operatorname{Re}(s_2) \geq 0, \quad (48.4)$$

که

$$C(s_1, s_2) = \det \begin{bmatrix} s_1 I_{n_1} & -\bar{A}_{12} \\ -\bar{A}_{21} & s_2 I_{n_2} - \bar{A}_{22} \end{bmatrix}. \quad (49.4)$$

این شرط که در عمل برای مساله پایداری استفاده می‌شود دشوار است. بنابراین پیشنهاد خواهد شد برای بررسی پایداری براساس ماتریس‌های لیاپانوف استفاده شود.

قضیه ۱۰.۴ [۹] سیستم دوبعدی (۴۷.۴) به‌طور مجانبی پایدار است اگر و فقط اگر یک ماتریس قطری بلوکی معین مثبت

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \circ \\ \circ & P_2 \end{bmatrix}, \quad (50.4)$$

وجود داشته باشد که $P_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ و $P_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ، به‌طوری که

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} < \circ. \quad (51.4)$$

در این صورت تابع لیاپانوف برای سیستم (۴۷.۴) به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$V(x(t_1, t_2)) = x^T(t_1, t_2) P x(t_1, t_2). \quad (52.4)$$

حال توابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$V_1(t_1, t_2) = x^{hT}(t_1, t_2) P_1 x^h(t_1, t_2), \quad (53.4)$$

$$V_2(t_1, t_2) = x^{vT}(t_1, t_2) P_2 x^v(t_1, t_2), \quad (54.4)$$

بنابراین تابع لیاپانوف (۵۲.۴) را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$V(t_1, t_2) = V_1(t_1, t_2) + V_2(t_1, t_2). \quad (55.4)$$

تعریف ۱۰.۴ [۷]. مشتق یک سویه (یک جهته) $V(t_1, t_2)$ را در تابع لیاپانوف (۵۲.۴) به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dot{V}_u(t_1, t_2) = \frac{\partial V_1(t_1, t_2)}{\partial t_1} + \frac{\partial V_2(t_1, t_2)}{\partial t_2}. \quad (56.4)$$

توجه کنید که این مشتق یک سویه می‌تواند به‌عنوان یک حالت خاص از مشتق تابع $V(t_1, t_2)$ در یک جهت، به‌طور مستقل از جهت دیگر در نظر گرفته شود.

لم ۰.۱۰۴ [۴]. سیستم دوبعدی (۴۷.۴) پایدار مجانبی است اگر مشتق یک سویه (۵۶.۴) معین منفی باشد.

با این پیش‌زمینه، شرایط کافی برای پایداری سیستم‌های دوبعدی پیوسته با تاخیر که به صورت نامساوی ماتریسی خطی بیان شده نتیجه می‌شود.

۱.۳.۴ شرایط پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی پیوسته با تاخیر

یک شرط برای بررسی پایداری سیستم دوبعدی (۴۲.۴) در صورت عدم کنترل اثبات شده است. این شرط به اندازه تاخیر بستگی ندارد و به صورت نامساوی ماتریسی خطی داده شده است. اکنون سیستم دوبعدی پیوسته خودکار با تاخیر به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۳]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = Ax(t_1, t_2) + A_\tau x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2), \quad (57.4)$$

$$\begin{cases} x^h(0, t_2) = f(t_2), & t_2 \in [-\tau_2, 0], \\ x^h(t_1, 0) = g(t_1), & t_1 \in [-\tau_1, 0], \end{cases} \quad (58.4)$$

که ماتریس‌های A و A_τ توسط (۴۵.۴) داده شده است. برای بررسی پایداری سیستم (۵۷.۴) شرط (۴۸.۴) می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد که چندجمله‌ای مشخصه آن به صورت زیر است:

$$C(s_1, s_2) = \det \begin{bmatrix} s_1 I_{n_1} - A_{11} - A_{\tau 11} e^{-\tau_1 s_1} & -A_{12} - A_{\tau 12} e^{-\tau_2 s_2} \\ -A_{21} - A_{\tau 21} e^{-\tau_1 s_1} & s_2 I_{n_2} - A_{22} - A_{\tau 22} e^{-\tau_2 s_2} \end{bmatrix}. \quad (59.4)$$

این شرط برای استفاده خیلی دشوار است، بنابراین هدف ما این است که شرایط پایداری تحت نابرابری لیاپانوف با استفاده از نرم‌افزار متلب آسان حل شود. برای این کار تابع لیاپانوف کیاسوشی زیر پیشنهاد می‌شود:

$$V(t_1, t_2) = V_1(t_1, t_2) + V_2(t_1, t_2), \quad (60.4)$$

$$V_1(t_1, t_2) = x^{hT}(t_1, t_2) P_1 x^h(t_1, t_2) + \int_{t_1 - \tau_1}^{t_1} x^{hT}(\theta, t_2) Q_1 x^h(\theta, t_2) d\theta, \quad (61.4)$$

$$V_2(t_1, t_2) = x^{vT}(t_1, t_2) P_2 x^v(t_1, t_2) + \int_{t_2 - \tau_2}^{t_2} x^{vT}(t_1, \theta) Q_2 x^v(t_1, \theta) d\theta. \quad (62.4)$$

قضیه ۱۱.۴. [۳]. اگر ماتریس‌های متقارن $P_1 > 0$ ، $P_2 > 0$ ، $Q_1 > 0$ و $Q_2 > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\begin{bmatrix} P_1 A_{11} + A_{11}^T P_1 + Q_1 & P_1 A_{12} + A_{12}^T P_1 & P_1 A_{\tau 11} & P_1 A_{\tau 12} \\ * & P_2 A_{22} + A_{22}^T P_2 + Q_2 & P_2 A_{\tau 21} & P_2 A_{\tau 22} \\ * & * & -Q_1 & 0 \\ * & * & 0 & -Q_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (63.4)$$

آنگاه سیستم دوبعدی پیوسته با تاخیر (۵۷.۴) پایدار مجانبی است.

برهان. به منظور استفاده از مشتق یک سویه ارائه شده در (۵۶.۴)، محاسبات زیر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1(t_1, t_2)}{\partial t_1} &= \frac{\partial x^{hT}(t_1, t_2)}{\partial t_1} P_1 x^h(t_1, t_2) + x^{hT}(t_1, t_2) P_1 \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ &+ x^{hT}(t_1, t_2) Q_1 x^h(t_1, t_2) - x^{hT}(t_1 - \tau_1, t_2) Q_1 x^h(t_1 - \tau_1, t_2). \end{aligned} \quad (64.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= \frac{\partial x^{vT}(t_1, t_2)}{\partial t_2} P_2 x^v(t_1, t_2) + x^{vT}(t_1, t_2) P_2 \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \\ &+ x^{vT}(t_1, t_2) Q_2 x^v(t_1, t_2) - x^{vT}(t_1, t_2 - \tau_2) Q_2 x^v(t_1, t_2 - \tau_2). \end{aligned} \quad (65.4)$$

در نتیجه مشتق یک سویه طبق (۵۶.۴) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_u(t_1, t_2) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix}^T P x(t_1, t_2) + x(t_1, t_2)^T P \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} \\ &+ x(t_1, t_2) Q x(t_1, t_2) - x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)^T Q x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2). \end{aligned} \quad (66.4)$$

با

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}. \quad (67.4)$$

با استفاده از (۵۷.۴) مشتق یک سویه را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_u(t_1, t_2) &= x(t_1, t_2)^T (PA + A^T P + Q)x(t_1, t_2) + x(t_1, t_2)^T P A_\tau x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) \\ &- x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)^T A_\tau^T P x(t_1, t_2) - x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)^T Q x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2). \end{aligned} \quad (68.4)$$

با تعریف بردار حالت افزوده

$$\xi(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} x(t_1, t_2) \\ x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) \end{bmatrix}, \quad (69.4)$$

مشتق یک سویه می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\dot{V}_u(t_1, t_2) = \xi(t_1, t_2)^T \begin{bmatrix} PA + A^T P + Q & PA_\tau \\ * & -Q \end{bmatrix} \xi(t_1, t_2). \quad (70.4)$$

مشتق یک سویه معین منفی است اگر

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + Q & PA_\tau \\ * & -Q \end{bmatrix} < 0. \quad (71.4)$$

□ در نتیجه با استفاده از (۴۵.۴) و (۵۰.۴) نامساوی (۶۳.۴) به دست می‌آید و اثبات تمام است.

مثال ۳.۴. سیستم دوبعدی با تاخیر (۵۷.۴) را در نظر بگیرید که ماتریس‌های سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 & 0.4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.3 & 0 \\ 0 & -1 & -0.6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{\tau ij} = 0.3 A_{ij}.$$

هدف بررسی پایداری این سیستم با وجود تاخیرهای شناخته نشده است. برای این کار از نتیجه قضیه (۱۱.۴) می‌توان استفاده کرد. نامساوی ماتریسی خطی (۶۳.۴) را به کار می‌بریم در نتیجه ماتریس‌های P و Q را به صورت زیر به دست خواهیم آورد:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0048 & 0.0001 & 0.0020 \\ 0.0001 & 0.0035 & -0.0014 \\ 0.0020 & -0.0014 & 0.0054 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0029 & -0.0008 & 0.0002 \\ -0.0008 & 0.0055 & -0.0011 \\ 0.0002 & -0.0011 & 0.0045 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.0014 & -0.0005 & 0.0016 \\ -0.0005 & 0.0044 & -0.0042 \\ 0.0016 & -0.0042 & 0.0072 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 0.0007 & -0.0007 & -0.0003 \\ -0.0007 & 0.0042 & 0.0014 \\ -0.0003 & 0.0014 & 0.0025 \end{bmatrix}.$$

بنابراین براساس قضیه (۶۳.۴)، سیستم دویعدی برای هر مقدار تاخیر پایدار مجانبی است.

حال گروهی از سیستم‌های دویعدی توصیف شده در (۴۲.۴) را در نظر بگیرید. هدف محاسبه قانون پس‌خورد حالت داده شده در (۴۶.۴) است به طوری که سیستم دویعدی حلقه بسته پایدار مجانبی باشد.

قضیه ۱۲.۴ [۳]. اگر ماتریس‌های متقارن $X_1 > 0, X_2 > 0, \bar{Q}_1 > 0, \bar{Q}_2 > 0$ و ماتریس‌های Y_1 و Y_2 وجود داشته باشد به طوری که

$$\begin{bmatrix} A_{11}X_1 + B_1Y_1 + X_1A_{11}^T + Y_1^TB_1^T + \bar{Q}_1 & A_{12}X_2 + X_1A_{21}^T + B_1Y_2 + Y_1^TB_2^T & A_{\tau 11}X_1 & A_{\tau 12}X_2 \\ * & A_{22}X_2 + B_2Y_2 + X_2A_{22}^T + Y_2^TB_2^T + \bar{Q}_2 & A_{\tau 21}X_1 & A_{\tau 22}X_2 \\ * & * & -\bar{Q}_1 & 0 \\ * & * & 0 & \bar{Q}_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (72.4)$$

آنگاه سیستم دویعدی پیوسته با تاخیر (۴۲.۴) تحت قانون کنترل در (۴۶.۴) پایدار مجانبی است به طوری که

$$K_1 = Y_1X_1^{-1}, \quad K_2 = Y_2X_2^{-1}, \quad (73.4)$$

علاوه بر این طبق تابع لیاپانوف کیاسوشی داده شده توسط (۶۰.۴) داریم:

$$P_1 = X_1^{-1}, \quad P_2 = X_2^{-1}, \quad Q_1 = P_1\bar{Q}_1P_1, \quad Q_2 = P_2\bar{Q}_2P_2. \quad (74.4)$$

برهان. ماتریس A را با ماتریس $A + BK$ در شرط پایداری داده شده در نامساوی (۷۱.۴) جایگزین می‌کنیم که شرط هم‌ارز زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} PA + PBK + A^TP + K^TB^TP + Q & PA_\tau \\ * & -Q \end{bmatrix}, \quad (75.4)$$

با ضرب قبل و بعد از نامساوی (۷۵.۴) در $\text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}\}$ و با توجه به اینکه $X = P^{-1}Y = KX$ ، $X = P^{-1}$ و $\bar{Q} = XQX$ شرط نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} AX + BY + XA^T + Y^T B^T + \bar{Q} & A_{\tau} X \\ * & -\bar{Q} \end{bmatrix}. \quad (76.4)$$

□ در نتیجه با استفاده از (۴۵.۴) و (۵۰.۴) و (۶۷.۴) نامساوی (۷۲.۴) اثبات می‌شود.

مثال ۴.۴. سیستم دوبعدی (۴۲.۴) تعریف شده با ماتریس‌های سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 & -1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -0.6 \end{bmatrix},$$

$$A_{\tau 11} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, A_{\tau 12} = \begin{bmatrix} 0.02 & -0.2 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}, A_{\tau 21} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix},$$

$$A_{\tau 22} = \begin{bmatrix} 0 & -0.6 \\ 0.2 & -0.12 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

آنگاه هدف محاسبه کنترل‌کننده پایدار با وجود تاخیرهای شناخته شده در سیستم دوبعدی است. به این منظور قضیه (۱۲.۴) به کار برده می‌شود و برای این داده‌ها با استفاده از نامساوی ماتریسی خطی (۷۲.۴) ماتریس‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0413 & -0.0069 \\ -0.0069 & 0.0322 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0.0330 & -0.0323 \\ -0.0323 & 0.1254 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 35.9368 & 0.4677 \\ 0.4677 & 35.2353 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 32.8534 & 1.5800 \\ 1.5800 & 35.9368 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.6187 & 1.1893 \\ 1.1613 & -0.9638 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0.6747 & -1.5995 \\ 0.3789 & -3.1713 \end{bmatrix}.$$

فصل ۵

روشی جدید در بررسی پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته با تاخیر زمانی توسط مدل راسر

در این فصل، روشی نو جهت کنترل بهینه زمانی و پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته زمانی راسر با تاخیر زمانی در متغیر حالت ارایه شده است. این روش در دو مرحله صورت می‌پذیرد. در مرحله اول سیستم تاخیری با تعریف بردار افزوده به سیستم دوبعدی راسر بدون تاخیر زمانی تبدیل می‌شود. از آنجایی که در فصل سوم به‌طور مفصل توضیح دادیم که پایداری مجانبی هر سیستم دوبعدی رفتاری مشابه با پایداری مجانبی سیستم یک بعدی هم‌ارزش را دارا می‌باشد لذا در این فصل، از این ویژگی استفاده کرده و نتیجه می‌گیریم پایداری سیستم‌های دوبعدی گسسته با تاخیر زمانی، هم‌ارز پایداری سیستم‌های یک بعدی نظیرش می‌باشد. سپس در مرحله دوم با استفاده از تبدیلات تشابهی مقدماتی^۱، سیستم به دست آمده به فرم همدم برداری^۲ تبدیل شده و با استفاده از آن ماتریس پس‌خورد حالتی که تمام مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته را به صفر می‌برد محاسبه می‌کنیم.

^۱Elementary similarity transformation

^۲The vector companion form

۱.۵ طراحی فرم راسر بدون تاخیر زمانی

سیستم دوبعدی گسسته زمانی راسر با q تاخیر در بردار حالت را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^q A_k \begin{bmatrix} x^h(i-k, j) \\ x^v(i, j-k) \end{bmatrix} + Bu(i, j) \quad (1.5)$$

به طوری که $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_1}$ و $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_2}$ به ترتیب بردارهای حالت افقی و عمودی در نقطه (i, j) می باشند و $A_k = \begin{bmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{bmatrix}$ برای $k = 0, \dots, q$ که در آن $A_{11}^k \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ، $A_{12}^k \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ، $A_{21}^k \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ ، $A_{22}^k \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$

و $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ که $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ ، $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ و $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی سیستم (۱.۵) می باشد. شرایط مرزی برای سیستم (۱.۵) به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{cases} x^h(0, j) = x_0^h(j), & \forall j \in \mathbb{N}, \\ x^v(i, 0) = x_0^v(i), & \forall i \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.5)$$

جهت تبدیل معادله حالت (۱.۵) به فرم بدون تاخیر، بردارهای حالت افزوده زیر را تعریف می کنیم:

$$\bar{x}^h(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^h(i-1, j) \\ \vdots \\ x^h(i-q, j) \end{bmatrix}, \quad \bar{x}^v(i, j) = \begin{bmatrix} x^v(i, j) \\ x^v(i, j-1) \\ \vdots \\ x^v(i, j-q) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

با به کارگیری دو بردار حالت افزوده تعریف شده (۳.۵) معادله حالت (۱.۵) را به فرم معادله حالت دوبعدی راسر بدون تاخیر زمانی تبدیل می کنیم:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^h(i+1, j) \\ \bar{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \bar{B}u(i, j) \quad (4.5)$$

که در آن

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times m} \quad (5.5)$$

به طوری که $N = (q + 1)(n_1 + n_2)$ و داریم:

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{11}^1 & \dots & A_{11}^{q-1} & A_{11}^q \\ I_{n_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{n_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} A_{12}^0 & A_{12}^1 & \dots & A_{12}^{q-1} & A_{12}^q \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

$$\bar{A}_{21} = \begin{bmatrix} A_{21}^0 & A_{21}^1 & \dots & A_{21}^{q-1} & A_{21}^q \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{22} = \begin{bmatrix} A_{22}^0 & A_{22}^1 & \dots & A_{22}^{q-1} & A_{22}^q \\ I_{n_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{n_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

حال برای معادله حالت (۴.۵) قانون کنترل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u(i, j) = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

که \bar{F}_1 و \bar{F}_2 به ترتیب دارای بعد $m \times (q + 1)n_1$ و $m \times (q + 1)n_2$ می‌باشند. با جایگذاری قانون کنترل در معادله (۴.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^h(i + 1, j) \\ \bar{x}^v(i, j + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + \bar{B}_1 \bar{F}_1 & \bar{A}_{12} + \bar{B}_1 \bar{F}_2 \\ \bar{A}_{21} + \bar{B}_2 \bar{F}_1 & \bar{A}_{22} + \bar{B}_2 \bar{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} = \bar{\Gamma} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix}$$

هدف محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت $\begin{bmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 \end{bmatrix}$ است به گونه‌ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\bar{\Gamma}$ همگی صفر باشند.

با توجه به قضایای گفته شده در فصل سوم، سیستم دوبعدی راسر بدون تاخیر (۴.۵) هم‌ارز سیستم یک بعدی زیر می‌باشد:

$$\bar{x}(i + 1) = \bar{A}\bar{x}(i) + \bar{B}u(i) \quad (9.5)$$

که \bar{A} و \bar{B} به فرم ماتریس‌های تعریف شده در (۵.۵) هستند و به ترتیب دارای بعد $N \times N$ و $N \times m$ می‌باشند.

۲.۵ ناوردهای کرونگر

زوج کنترل‌پذیر (\bar{B}, \bar{A}) را در نظر بگیرید ماتریس کنترل‌پذیری را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\bar{Q} = [\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \bar{A}^2\bar{B}, \dots, \bar{A}^{p_1-1}\bar{b}_1, \bar{A}^{p_2-1}\bar{b}_2, \dots, \bar{A}^{p_m-1}\bar{b}_m] \quad (10.5)$$

به طوری که

$$\text{rank}(\bar{Q}) = N \quad (11.5)$$

به هر ستون از بلوک که متناظر ستونی از ماتریس \bar{B} است عددی صحیح مانند p_i مربوط می‌شود که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$1 \leq p_i \leq N, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (12.5)$$

این p_i ها را ناوردهای کرونگر^۳ می‌نامیم. از طرفی p_i ، تعداد بردارهای باقی‌مانده در ستون i ام بلوک است پس تعداد بردارهای واقع در ستون‌های بلوک برابر است با $p_1 + p_2 + \dots + p_m$. از طرفی این تعداد برابر N است یعنی:

$$\sum_{i=1}^m p_i = N. \quad (13.5)$$

تعریف ۱.۵. ناوردهای کرونگر منظم و نامنظم [۱۷]: ناوردهای کرونگر زوج (\bar{B}, \bar{A}) را منظم می‌نامند، هر گاه اختلاف بین ماکزیمم و می‌نیمم آنها حداکثر یک باشد در غیر این صورت ناوردهای کرونگر را نامنظم می‌نامند.

تعریف ۲.۵. اندیس کنترل‌پذیری [۱۷]: در قانون کنترل $u(i) = \bar{F}\bar{x}(i)$ ماتریس پس‌خورد حالت \bar{F} را به گونه‌ای تعیین می‌نماییم که $(\bar{A} + \bar{B}\bar{F})^n = 0$ باشد که در نتیجه بردار حالت اولیه حداکثر در n مرحله به حالت تعادل صفر میل می‌کند یعنی: $\bar{x}(n) = (\bar{A} + \bar{B}\bar{F})^n \bar{x}(0) = 0$. در کنترل بهینه، به دنبال یافتن ماتریس F به گونه‌ای هستیم که در کوتاه‌ترین زمان (کمترین مرحله) مانند v ، متغیر \bar{x} به صفر (حالت تعادل) میل نماید. v را اندیس کنترل‌پذیری می‌نامند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v = \max\{p_1, \dots, p_m\}. \quad (14.5)$$

^۳Kronecker invariants

فرض کنید v عدد تعریف شده در رابطه فوق باشد می‌خواهیم نشان دهیم که دنباله‌ای از ورودی‌ها مانند $u(0), u(1), \dots, u(v-1)$ می‌توان به دست آورد که با جایگذاری در رابطه معادله حالت داشته باشیم $\bar{x}_v = \bar{x}_e$ (حالت تعادل). با توجه به معادله حالت $\bar{x}(i+1) = \bar{A}\bar{x}(i) + \bar{B}u(i)$ می‌توان $\bar{x}(v)$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}\bar{x}(1) &= \bar{A}\bar{x}(0) + \bar{B}u(0) \\ \bar{x}(2) &= \bar{A}^2\bar{x}(0) + \bar{A}\bar{B}u(0) + \bar{B}u(1) \\ &\vdots \\ \bar{x}(v) &= \bar{A}^v\bar{x}(0) + \bar{A}^{v-1}\bar{B}u(0) + \dots + \bar{A}\bar{B}u(v-2) + \bar{B}u(v-1)\end{aligned}\quad (15.5)$$

$$\bar{x}(v) - \bar{A}^v\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \dots & \bar{A}^{v-1}\bar{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(v-1) \\ u(v-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

با توجه به تعریف v می‌توان گفت ماتریس ضرایب دارای رتبه کامل است پس $u(i)$ ها را می‌توان حساب کرد. با توجه به معادله ماتریسی فوق می‌توان حالت‌های زیر را بررسی نمود:

۱. در حالتی که ناوردهای کرونکر با هم برابر باشند که حالت خاصی از ناوردهای کرونکر منظم می‌باشند، نمی‌توان با ورودی‌های متفاوت سیستم را به حالت تعادل رساند بلکه مجموعه‌ای از ورودی‌های منحصربه‌فرد برای کنترل حالت سیستم به دست می‌آید. در این صورت با توجه به اینکه ماتریس مربعی $\begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \dots & \bar{A}^{v-1}\bar{B} \end{bmatrix}$ یک ماتریس معکوس‌پذیر است در صورتی که $\bar{x}_v = \bar{x}_e$ و $\bar{x}(0)$ به دلخواه انتخاب شوند آنگاه این دستگاه جواب منحصربه‌فردی برای بردار ورودی خواهد داشت. همچنین در حالتی که ناوردهای کرونکر زوج (\bar{B}, \bar{A}) با هم برابر باشند ماتریس پس‌خورد حالت F منحصربه‌فرد است زیرا:

کافی است ثابت کنیم معادله زیر دارای جواب منحصربه‌فردی برای مجهول X است.

$$(\bar{A} + \bar{B}X)^v = 0 \quad (16.5)$$

۲. در صورتی که ناوردهای کرونکر زوج (\bar{B}, \bar{A}) برابر نباشند در این صورت ماتریس ضرایب دستگاه (۱۵.۵) غیرمربعی و دارای رتبه کامل است پس دارای جواب‌های متعددی برای مجهول ورودی خواهد بود.

فرض کنید ناوردهای کرونگر (\bar{B}, \bar{A}) منظم باشند می‌توان در صورت لزوم ستون‌های ماتریس \bar{B} را جابه‌جا کرد به گونه‌ای که ناوردهای کرونگر به صورت منظم از ماکسیمم به می‌نیمم قرار گیرند به عبارتی دیگر ماتریس \bar{B} را با ماتریس $\bar{B}P$ که P یک ماتریس جایگشتی $m \times m$ است جایگزین ساخت تا ناوردهای کرونگر زوج $(\bar{B}P, \bar{A})$ در رابطه زیر صدق کنند:

$$\tilde{p}_1 \geq \tilde{p}_2 \geq \tilde{p}_3 \geq \dots \geq \tilde{p}_m \quad (17.5)$$

قضیه ۱.۵. اگر زوج (\bar{B}, \bar{A}) کنترل‌پذیر باشد آنگاه زوج $(\bar{B}P, \bar{A})$ نیز کنترل‌پذیر است و برعکس.

برهان. فرض کنید \bar{Q} ماتریس کنترل‌پذیری زوج (\bar{B}, \bar{A}) و \tilde{Q} ماتریس کنترل‌پذیری زوج $(\bar{B}P, \bar{A})$ باشد آنگاه

$$\bar{Q} = [\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}] \quad (18.5)$$

$$\tilde{Q} = [\bar{B}P, \bar{A}\bar{B}P, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}P] \quad (19.5)$$

از آنجایی که P یک ماتریس جایگشت است می‌توان گفت \tilde{Q} همان \bar{Q} است با این تفاوت که ستون‌های آن جابه‌جا شده است و اگر رتبه \bar{Q} برابر N باشد آنگاه رتبه \tilde{Q} نیز برابر N است و برعکس. \square

قضیه ۲.۵. اندیس کنترل‌پذیری زوج (\bar{B}, \bar{A}) با اندیس کنترل‌پذیری زوج $(\bar{B}P, \bar{A})$ برابر است.

$$\max\{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m\} = \max\{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_m\} \quad (20.5)$$

قضیه ۳.۵. اگر ماتریس جایگشت P معکوس‌پذیر باشد و $\{F \in \bar{F} \mid (\bar{A} + \bar{B}\bar{F})^v = 0\}$ آنگاه

$$P^{-1}F \in \{\bar{F} \mid (\bar{A} + \bar{B}\bar{F})^v = 0\} \quad (21.5)$$

برهان. فرض کنید $(\bar{A} + \bar{B}F)^v = 0$ پس می‌توان نوشت:

$$(\bar{A} + \bar{B}PP^{-1}F)^v = 0 \quad (22.5)$$

و از اینجا نتیجه می‌شود:

$$P^{-1}F \in \{\bar{F} \mid (\bar{A} + \bar{B}\bar{F})^v = 0\} \quad (23.5)$$

\square

نتیجه ۱.۵. حل مساله کنترل بهینه زمانی به روش پس‌خورد حالت برای زوج (\bar{A}, \bar{B}) با حل همان مساله برای زوج $(\bar{B}P, \bar{A})$ معادل است هرگاه ماتریس جایگشت P معکوس‌پذیر باشد.

فرض می‌کنیم ناوردهای کرونگر زوج (\bar{B}, \bar{A}) منظم باشند و به صورت $\bar{p}_1 \geq \bar{p}_2 \geq \dots \geq \bar{p}_m$ مرتب شده باشند. همچنین با توجه به تعریف ناوردهای کرونگر منظم فرض می‌کنیم r تا از ناوردهای کرونگر برابر $q+1$ و s تای دیگر برابر q خواهد بود پس می‌توان نوشت:

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \dots = \bar{p}_r = q + 1, \quad \bar{p}_{r+1} = \bar{p}_{r+2} = \dots = \bar{p}_m = q \quad (24.5)$$

اگر $r + s = m$ باشد در این صورت می‌توان نوشت:

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots + \bar{p}_m = r(q + 1) + sq = (r + s)q + r = N \quad (25.5)$$

که در آن

$$q = \left[\frac{N}{m} \right], \quad N = mq + r, \quad r < m \quad (26.5)$$

لذا اندیس کنترل‌پذیری به صورت زیر می‌باشد:

$$v = q + 1 = \left[\frac{N}{m} \right] + 1 \quad (27.5)$$

اگر $r = m$ باشد آنگاه $s = 0$ لذا خواهیم داشت:

$$N = mq + r = mq + m = m(q + 1) \quad (28.5)$$

در نتیجه

$$q + 1 = \frac{N}{m}, \quad \bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \dots = \bar{p}_m = \frac{N}{m} = q + 1 \quad (29.5)$$

لذا اندیس کنترل‌پذیری به صورت زیر می‌باشد:

$$v = q + 1 = \frac{N}{m} = \left[\frac{N}{m} \right] \quad (30.5)$$

۳.۵ تبدیلات تشابهی فضای حالت - فرم استاندارد اشلون

فرض کنید T تبدیل خطی تشابهی باشد که بر فضای \mathbb{R}^N تعریف شده است. معادله حالت سیستم خطی گسسته زمانی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\bar{x}(i + 1) = \bar{A}\bar{x}(i) + \bar{B}u(i) \quad (31.5)$$

فرض کنید بردار حالت سیستم توسط ماتریس تبدیل T^{-1} به فضای جدید تبدیل شود یعنی:

$$\hat{x}(i) = T^{-1}\bar{x}(i), \quad \bar{x}(i) = T\hat{x}(i) \quad (۳۲.۵)$$

با جایگذاری رابطه (۳۲.۵) در معادله حالت (۳۱.۵) خواهیم داشت:

$$T\hat{x}(i+1) = \bar{A}T\hat{x}(i) + \bar{B}u(i) \quad (۳۳.۵)$$

با ضرب طرفین معادله (۳۳.۵) در T^{-1} خواهیم داشت:

$$\hat{x}(i+1) = T^{-1}\bar{A}T\hat{x}(i) + T^{-1}\bar{B}u(i) \quad (۳۴.۵)$$

با مقایسه معادله حالت سیستم (۳۱.۵) و (۳۴.۵) می توان نتیجه گرفت $T^{-1}\bar{A}T$ جایگزین \bar{A} و $T^{-1}\bar{B}$ جایگزین \bar{B} شده است پس تعریف می کنیم:

$$\hat{B} = T^{-1}\bar{B}, \quad \hat{A} = T^{-1}\bar{A}T \quad (۳۵.۵)$$

با جایگذاری تعریف \hat{B} و \hat{A} در معادله حالت (۳۴.۵) خواهیم داشت:

$$\hat{x}(i+1) = \hat{A}\hat{x}(i) + \hat{B}u(i) \quad (۳۶.۵)$$

چون هدف، کنترل حالت سیستم و رساندن آن به حالت تعادل صفر می باشد با توجه به معادله حالت (۳۶.۵) می توان در فضای حالت جدید بردار حالت $\hat{x}(i)$ را به صفر رساند، در این صورت بدیهی است که $\bar{x}(i)$ که بردار حالت در فضای اولیه است نیز به حالت تعادل صفر خواهد رسید. در این صورت حل مساله مورد نظر با زوج (\bar{B}, \bar{A}) با حل همان مساله با زوج (\hat{B}, \hat{A}) هم ارز است. زوج (\hat{B}, \hat{A}) را فرم استاندارد اشلون^۴ می نامیم.

ماتریس T را می توان به صورت منحصر به فرد با استفاده از ماتریس کنترل پذیری مشخص کرد به این ترتیب که اولین N ستون مستقل خطی ماتریس \bar{Q} را به ترتیب، ستون های ماتریس تبدیل T قرار می دهیم. بنابراین تبدیل مورد نظر به دست می آید:

$$\begin{aligned} T &= \left(\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{p_1-1}\bar{b}_1, \bar{A}^{p_2-1}\bar{b}_2, \dots, \bar{A}^{p_r-1}\bar{b}_r, \bar{A}^{p_{r+1}-1}\bar{b}_{r+1}, \bar{A}^{p_{r+2}-1}\bar{b}_{r+2}, \dots, \bar{A}^{p_m-1}\bar{b}_m \right) \\ &= \left(\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{q-1}\bar{b}_1, \bar{A}^{q-1}\bar{b}_2, \dots, \bar{A}^{q-1}\bar{b}_r, \bar{A}^{q-1}\bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{A}^{q-1}\bar{b}_m, \bar{A}^q\bar{b}_1, \dots, \bar{A}^q\bar{b}_r \right) \\ &= \left(\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{q-1}\bar{B}, \bar{A}^q\bar{b}_1, \dots, \bar{A}^q\bar{b}_r \right) \end{aligned} \quad (۳۷.۵)$$

^۴Standard echelon form

حال فرم استاندارد اشلون زوج (\hat{B}, \hat{A}) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 (\hat{B}, \hat{A}) &= (T^{-1}\bar{B}, T^{-1}\bar{A}T) = T^{-1}(\bar{B}, \bar{A}T) \\
 &= T^{-1}\left(\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \bar{A}^2\bar{B}, \dots, \bar{A}^q\bar{B}, \bar{A}^{q+1}\bar{b}_1, \dots, \bar{A}^{q+1}\bar{b}_r\right) \\
 &= T^{-1}\left(\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \bar{A}^2\bar{B}, \dots, \bar{A}^{q-1}\bar{B}, \bar{A}^q\bar{b}_1, \bar{A}^q\bar{b}_2, \dots, \bar{A}^q\bar{b}_r, \bar{A}^q\bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{A}^q\bar{b}_m, \right. \\
 &\quad \left. \bar{A}^{q+1}\bar{b}_1, \bar{A}^{q+1}\bar{b}_2, \dots, \bar{A}^{q+1}\bar{b}_r\right) \\
 &= T^{-1}\left(T, \bar{A}^q\bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{A}^q\bar{b}_m, \bar{A}^{q+1}\bar{b}_1, \bar{A}^{q+1}\bar{b}_2, \dots, \bar{A}^{q+1}\bar{b}_r\right) \\
 &= T^{-1}\left(T, \bar{A}^q(\bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{b}_m), \bar{A}\bar{b}_1, \dots, \bar{A}\bar{b}_r\right) \\
 &= \left(I, T^{-1}\bar{A}^q(\bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{b}_m), \bar{A}\bar{b}_1, \dots, \bar{A}\bar{b}_r\right) = (I_N, V)
 \end{aligned} \tag{۳۸.۵}$$

به طوری که I یک ماتریس همانی با بعد N و V یک بردار ستونی با بعد $N \times m$ که به صورت زیر به دست می‌آیند.

۴.۵ به دست آوردن فرم استاندارد اشلون با استفاده از تبدیلات تشابهی

در صورتی که بخواهیم زوج (\bar{B}, \bar{A}) را به فرم استاندارد اشلون $(\hat{B}, \hat{A}) = (I_N, V)$ تبدیل نماییم ابتدا ماتریس افزوده $Q = [\bar{B}, \bar{A}, I_N]$ را تشکیل داده، سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی بر روی ماتریس Q و به دنبال آن عملیات ستونی مقدماتی نظیر بر روی ماتریس \bar{A} ، N ستون اول ماتریس Q را به ماتریس همانی I تبدیل می‌کنیم. در این صورت ماتریس افزوده Q به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}] = [I_N, V_{N \times m}] \tag{۳۹.۵}$$

عملیات تشابهی سطری و ستونی نظیر آن را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

۱. ضرب یا تقسیم یک سطر از ماتریس Q به کمیت اسکالر $k \neq 0$ و به دنبال آن تقسیم یا ضرب ستون متناظر از ماتریس \bar{A} .

۲. مجموع مضربی از سطر i ام ماتریس Q با سطر j ام آن و به دنبال آن تفاضل همان مضرب ستون j ام از ستون i ام ماتریس \bar{A} .

۳. جابه‌جایی سطر i ام و سطر j ام از ماتریس Q و به‌دنبال آن جابه‌جایی ستون j ام و ستون i ام از ماتریس \bar{A} .

لازم به ذکر است در صورتی که ناوردهای کرونگر زوج (\bar{B}, \bar{A}) منظم باشند فرم استاندارد اشلون به صورت منظم $(\hat{B}, \hat{A}) = (I_N, V)$ خواهد بود اما در حالتی که ناوردهای کرونگر زوج (\bar{B}, \bar{A}) نامنظم باشند دیگر ستون‌های ماتریس I_N به صورت منظم پشت سر یکدیگر قرار نمی‌گیرند بلکه در ماتریس \hat{Q} پخش می‌شوند.

مثال ۱.۵. سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\bar{x}(i+1) = \bar{A}\bar{x}(i) + \bar{B}u(i)$$

که در آن

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فرم استاندارد اشلون را با استفاده از عملیات تشابهی به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Column}(2) \rightarrow \text{Column}(3) \text{ on } \bar{A}]{\text{Row}(2) \rightarrow \text{Row}(3) \text{ on } Q} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Column}(2) + \text{Column}(1) \rightarrow \text{Column}(2) \text{ on } \bar{A}]{\text{Row}(1) - \text{Row}(2) \rightarrow \text{Row}(1) \text{ on } Q} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -5 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{Column}(3)+\text{Column}(1)\rightarrow\text{Column}(3) \text{ on } \bar{A}}{\text{Row}(1)-\text{Row}(3)\rightarrow\text{Row}(1) \text{ on } Q} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{Column}(4)-2\text{Column}(1)\rightarrow\text{Column}(4) \text{ on } \bar{A}}{\text{Row}(1)+2\text{Row}(4)\rightarrow\text{Row}(1) \text{ on } Q} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{Column}(4)+4\text{Column}(2)\rightarrow\text{Column}(4) \text{ on } \bar{A}}{\text{Row}(2)-4\text{Row}(4)\rightarrow\text{Row}(2) \text{ on } Q} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{Column}(4)+\text{Column}(3)\rightarrow\text{Column}(4) \text{ on } \bar{A}}{\text{Row}(3)-\text{Row}(4)\rightarrow\text{Row}(3) \text{ on } Q} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & -4 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

۵.۵ فرم همدم برداری اولیه

فرض کنید S تبدیل خطی تشابهی باشد که بر فضای \mathbb{R}^N تعریف شده است و بردار حالت به فرم استاندارد اشلون باشد در این مرحله این بردار توسط ماتریس تبدیل S^{-1} به فضای جدید تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}\tilde{x}(i) &= S^{-1}\hat{x}(i) = S^{-1}T^{-1}\bar{x}(i) \\ \hat{x}(i) &= S\tilde{x}(i)\end{aligned}\quad (۴۰.۵)$$

از آنجایی که در فضای استاندارد اشلون معادله حالت به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\hat{x}(i+1) = \hat{A}\hat{x}(i) + \hat{B}u(i) \quad (۴۱.۵)$$

با جایگذاری رابطه (۴۰.۵) در معادله حالت (۴۱.۵) خواهیم داشت:

$$S\tilde{x}(i+1) = \hat{A}S\tilde{x}(i) + \hat{B}u(i) \quad (۴۲.۵)$$

با ضرب طرفین معادله (۴۲.۵) در S^{-1}

$$\tilde{x}(i+1) = S^{-1}\hat{A}S\tilde{x}(i) + S^{-1}\hat{B}u(i) \quad (۴۳.۵)$$

لذا \tilde{A} و \tilde{B} را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}\bar{A}T, \quad \tilde{B} = S^{-1}\hat{B} = S^{-1}T^{-1}\bar{B} \quad (۴۴.۵)$$

با جایگذاری تعریف \tilde{A} و \tilde{B} در معادله (۴۳.۵) معادله حالت سیستم در فضای همدم برداری به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\tilde{x}(i+1) = \tilde{A}\tilde{x}(i) + \tilde{B}u(i) \quad (۴۵.۵)$$

به گونه‌ای که زوج (\tilde{B}, \tilde{A}) به فرم همدم برداری اولیه خواهد بود. حل معادله سیستم (۴۵.۵) در فضای همدم برداری با حل معادله سیستم (۹.۵) هم‌ارز است.

در حقیقت برای تبدیل زوج (\tilde{B}, \tilde{A}) به زوج (\bar{B}, \bar{A}) در فضای همدم برداری ابتدا ماتریس افزوده $Q = [\bar{B}, \bar{A}, I_N]$ را تشکیل داده و با استفاده از عملیات تشابهی که در بخش قبل توضیح داده شد ماتریس افزوده Q را به فرم استاندارد اشلون $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$ تبدیل می‌کنیم. این بار ماتریس افزوده \hat{Q} را در نظر گرفته و برای به دست آوردن فرم همدم برداری ابتدا عملیات ستونی مقدماتی روی ماتریس \hat{A} و به دنبال آن عملیات سطری مقدماتی نظیر بر روی ماتریس \hat{Q} انجام می‌دهیم در نتیجه ماتریس \hat{Q} به فرم همدم برداری

$\tilde{Q} = [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}]$ تبدیل می‌شود.

فرم همدم برداری زوج (\tilde{B}, \tilde{A}) در حالتی که ناوردهای کرونگر منظم باشند به صورت

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} & G_0 & \\ & \dots & \\ I_{N-m} & \circ_{N-m \times m} & \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ \dots \\ \circ_{N-m \times m} \end{bmatrix} \quad (46.5)$$

و در حالتی که ناوردهای کرونگر نامنظم باشند ستون‌های ماتریس I_{N-m} در بلوک پایین ماتریس \tilde{A} پخش می‌شوند.

در حالت کلی زوج (\tilde{B}, \tilde{A}) به فرم همدم برداری است اگر دارای ساختاری به صورت زیر باشد.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ \circ \end{bmatrix} \quad (47.5)$$

که در آن B_0 یک ماتریس $m \times m$ بالا مثلثی و معکوس پذیر است و G_0 ماتریس دلخواه $m \times N$ و G_1 ماتریس $(N-m) \times N$ است که دارای خصوصیات زیر می‌باشد.

۱. آخرین ستون بلوک G_1 مساوی صفر است.

۲. بقیه ستون‌های G_1 ستون‌هایی از ماتریس I_{N-m} است.

۳. اگر e_{N-m}, \dots, e_2, e_1 به ترتیب ستون‌های اول تا $N-m$ ام ماتریس I_{N-m} باشند آنگاه این بردارها به ترتیب اندیس‌شان در ستون‌های G_1 ظاهر می‌شوند یعنی اگر $i < j$ باشد آنگاه e_i در G_1 قبل از e_j قرار می‌گیرد.

مثال ۲.۵. با استفاده از فرم استاندارد اشلون به دست آمده در مثال (۱.۵) فرم همدم برداری آن را به دست می‌آوریم.

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & -4 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن فرم همدم برداری ابتدا اعمال ستونی مقدماتی روی ماتریس \hat{A} و سپس اعمال سطری مقدماتی روی کل ماتریس \hat{Q} انجام می‌دهیم.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow[\text{Row}(1)+\text{Row}(3)\rightarrow\text{Row}(1) \text{ on } \hat{Q}]{\text{Column}(3)-\text{Column}(1)\rightarrow\text{Column}(3) \text{ on } \hat{A}} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -5 & -5 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow[\text{Row}(1)-\text{Row}(4)\rightarrow\text{Row}(1) \text{ on } \hat{Q}]{\text{Column}(4)+\text{Column}(1)\rightarrow\text{Column}(4) \text{ on } \hat{A}} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow[\text{Row}(2)+4\text{Row}(4)\rightarrow\text{Row}(2) \text{ on } \hat{Q}]{\text{Column}(4)-4\text{Column}(2)\rightarrow\text{Column}(4) \text{ on } \hat{A}} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -5 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

لذا ناورداهای کرونکر زوج (\bar{B}, \bar{A}) منظم هستند و عبارتند از: $p_1 = 2, p_2 = 2$

۶.۵ به دست آوردن ماتریس پس خورد حالت

برای معادله حالت سیستم خطی گسسته زمانی (۹.۵) قانون کنترل به صورت $u(i) = \bar{F}\bar{x}(i)$ تعریف می شود و به طور مشابه برای معادله همدم برداری (۴۵.۵) قانون کنترل به صورت زیر تعریف می شود.

$$u(i) = \tilde{F}\tilde{x}(i) \quad (۴۸.۵)$$

که \tilde{F} ماتریس پس‌خورد حالت معادله سیستم تبدیل یافته به فرم همدم برداری اولیه است. با جایگذاری $\tilde{x}(i) = S^{-1}T^{-1}\bar{x}(i)$ در قانون کنترل (۴۸.۵) خواهیم داشت:

$$u(i) = \tilde{F}S^{-1}T^{-1}\bar{x}(i) \quad (۴۹.۵)$$

بنابراین ماتریس پس‌خورد حالت معادله سیستم معمولی (۹.۵) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{F}_p = \tilde{F}S^{-1}T^{-1} \quad (۵۰.۵)$$

ماتریس پس‌خورد حالتی که مقادیر ویژه صفر را به ماتریس حلقه بسته سیستم همدم برداری (۴۵.۵) اختصاص می‌دهد به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{F} = -B_o^{-1}G_o \quad (۵۱.۵)$$

با جایگذاری رابطه (۵۱.۵) در (۵۰.۵) ماتریس پس‌خورد حالتی به دست می‌آید که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته $\bar{\Gamma} = \bar{A} + \bar{B}\bar{F}_p$ را به صفر می‌برد و ماتریس پس‌خورد حالت اولیه زوج (\bar{B}, \bar{A}) نامیده می‌شود و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{F}_p = -B_o^{-1}G_o.S^{-1}T^{-1} = \tilde{F}_p.S^{-1}T^{-1} \quad (۵۲.۵)$$

با جایگذاری رابطه (۵۱.۵) در معادله سیستم همدم برداری (۴۵.۵) ماتریس حلقه بسته تبدیل یافته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p$ به فرم جردن بلوکی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p = \begin{bmatrix} G_o & & \\ & \dots & \\ I_{N-m} & \circ_{N-m \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o & \\ & \dots \\ \circ_{N-m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B_o^{-1}G_o \end{bmatrix} \quad (۵۳.۵)$$

$$\begin{bmatrix} G_o & & \\ & \dots & \\ I_{N-m} & \circ_{N-m \times m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_o & \\ & \dots \\ \circ_{N-m \times m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ_{m \times N} & & \\ & \dots & \\ I_{N-m} & \circ_{N-m \times m} \end{bmatrix}$$

از آنجایی که ماتریس حاصل یک ماتریس پایین مثلثی است که همه درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر صفرند مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma}$ همگی برابر صفر خواهند بود.

از آنجایی که ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p$ با ماتریس حلقه بسته $\bar{\Gamma} = \bar{A} + \bar{B}\bar{F}_p$ متشابه می‌باشد.

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p = S^{-1}T^{-1}\bar{A}TS + S^{-1}T^{-1}\bar{B}\bar{F}_pTS = S^{-1}T^{-1}(\bar{A} + \bar{B}\bar{F}_p)TS \quad (۵۴.۵)$$

$$\tilde{\Gamma} = S^{-1}T^{-1}\bar{\Gamma}TS$$

لذا مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\bar{\Gamma}$ نیز صفر خواهند بود. در صورتی که ناوردهای کرونگر زوج (\bar{B}, \bar{A}) را p_1, p_2, \dots, p_m بنامیم اندیس پوچ توانی ماتریس حلقه بسته $\bar{\Gamma}$ به صورت $v = \max\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ تعریف می شود به عبارت دیگر سیستم توصیف شده (۹.۵) حداکثر در v گام به حالت تعادل صفر می رسد.

الگوریتم ۱. چگونگی تعیین ماتریس پس خورد حالت اولیه \bar{F}_p

- ورودی: ماتریس های \bar{A} ، \bar{B} ، m و N می باشند همچنین $\text{rank}(B) = m$.
- گام ۱: ماتریس افزوده $Q = [\bar{B}, \bar{A}, I_N]$ را تشکیل می دهیم.
- گام ۲: با انجام عملیات تشابهی سطری و ستونی نظیر ماتریس Q را به فرم استاندارد اشلون $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$ تبدیل می کنیم.
- گام ۳: با انجام عملیات تشابهی ستونی و سطری نظیر ماتریس \hat{Q} را به فرم همدم برداری $\tilde{Q} = [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}T^{-1}]$ تبدیل می کنیم.
- گام ۴: m سطر اول \tilde{B} را B و m سطر اول \tilde{A} را G می نامیم.
- گام ۵: ماتریس پس خورد حالت سیستم همدم برداری را به صورت $\tilde{F}_p = -B_o^{-1}G$ محاسبه می کنیم.
- گام ۶: ماتریس پس خورد حالت اولیه زوج (\bar{B}, \bar{A}) را به صورت $\bar{F}_p = \tilde{F}_p S^{-1}T^{-1}$ به دست می آوریم.

مثال ۳.۵. برای مثال قبل ماتریس پس خورد حالت اولیه را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$\tilde{F} = -B_o^{-1}G = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_p = \tilde{F}_p S^{-1}T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma}$ صفر است.

$$\bar{\Gamma} = \bar{A} + \bar{B}\bar{F}_p = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که ماتریس پس‌خورد حالت به‌دست آمده، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته را به صفر می‌برد، باید رد ماتریس $\bar{\Gamma}$ صفر شود [۵] لذا برای آزمون آن کافی است رد ماتریس $\bar{\Gamma}$ را محاسبه کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌شود $\text{trace}(\bar{\Gamma}) = 0$ می‌باشد.

با توجه به اینکه ناوردهای کرونگر زوج (\bar{B}, \bar{A}) عبارتند از: $p_1 = 2$, $p_2 = 2$ لذا سیستم توصیف شده (۹.۵) کنترل بهینه زمانی بوده و در دو گام به حالت تعادل صفر می‌رسد.

مثال ۴.۵. سیستم دوبعدی گسسته زمانی توسط مدل راسر زیر را برای $q = 1$ تاخیر در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} x^h(i-1, j) \\ x^v(i, j-1) \end{bmatrix} + Bu(i, j) \quad (55.5)$$

که در آن بردارهای حالت افقی و عمودی به‌ترتیب دارای ابعاد $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^2$ و $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^1$ می‌باشند و

$$A_0 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & \vdots & 3 \\ 4 & 9 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 9 & \vdots & 6 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & \vdots & 6 \\ 8 & 7 & \vdots & 3 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 5 & 4 & \vdots & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \\ \dots & \dots \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

جهت کنترل این سیستم بردارهای افزوده زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\bar{x}^h(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^h(i-1, j) \end{bmatrix}, \bar{x}^v(i, j) = \begin{bmatrix} x^v(i, j) \\ x^v(i, j-1) \end{bmatrix}$$

لذا سیستم تاخیری (۵۵.۵) را می توان با جایگذاری بردارهای افزوده $\bar{x}^h(i, j)$ و $\bar{x}^v(i, j)$ تعریف شده به فرم سیستم دویعدی راسر بدون تاخیر زمانی زیر تبدیل کنیم.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^h(i+1, j) \\ \bar{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \bar{B}u(i, j) \quad (56.5)$$

به طوری که ماتریس های \bar{A} و \bar{B} به فرم زیر می باشند:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 5 & \vdots & 3 & 6 \\ 4 & 9 & 8 & 7 & \vdots & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 9 & 5 & 4 & \vdots & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (57.5)$$

همان طور که در فصل سوم توضیح دادیم پایداری مجانبی سیستم دویعدی توصیف شده (۵۶.۵) هم ارز پایداری مجانبی سیستم یک بعدی گسسته زمانی زیر می باشد.

$$\bar{x}(i+1) = \bar{A}\bar{x}(i) + \bar{B}u(i) \quad (58.5)$$

به طوری که \bar{A} و \bar{B} به فرم ماتریس های به دست آمده در (۵۷.۵) می باشند. بنابراین برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت اولیه سیستم دویعدی (۵۵.۵) می توان ابتدا ماتریس پس خورد حالت اولیه سیستم یک بعدی هم ارز یعنی (۵۸.۵) را با استفاده از الگوریتم ارائه شده به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\bar{F}_p = \begin{bmatrix} 12,2412 & -2,4956 & -0,0439 & 3,3465 & -0,0000 & 5,6228 \\ -8,5921 & 0,3377 & -1,0439 & -3,1535 & -0,3333 & -4,3772 \end{bmatrix}$$

سپس ماتریس پس خورد حالت اولیه یک بعدی به دست آمده را به دو ماتریس پس خورد حالت اولیه \bar{F}_{1p} و \bar{F}_{2p} به صورت زیر افراز می کنیم که با توجه به توضیحات گفته شده به ترتیب دارای ابعاد $m \times (q+1)n_1$

و $n_2 \times (q + 1) \times m$ می‌باشند.

$$F_1 p = \begin{bmatrix} 12,2412 & -2,4956 & -0,0439 & 3,3465 \\ -8,5921 & 0,3377 & -1,0439 & -3,1535 \end{bmatrix},$$

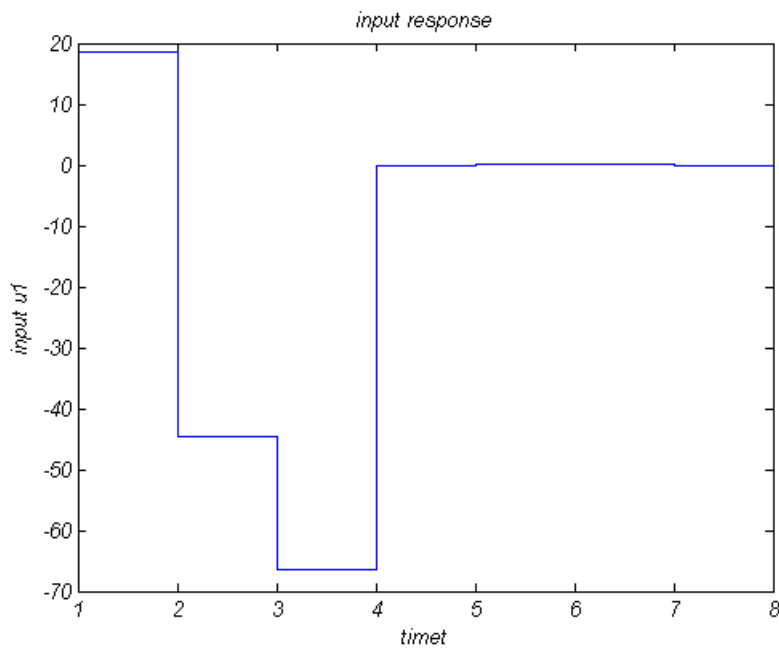
$$F_2 p = \begin{bmatrix} -0,0000 & 5,6228 \\ -0,3333 & -4,3772 \end{bmatrix}.$$

در نهایت ماتریس حلقه بسته سیستم به صورت زیر به دست می‌آید.

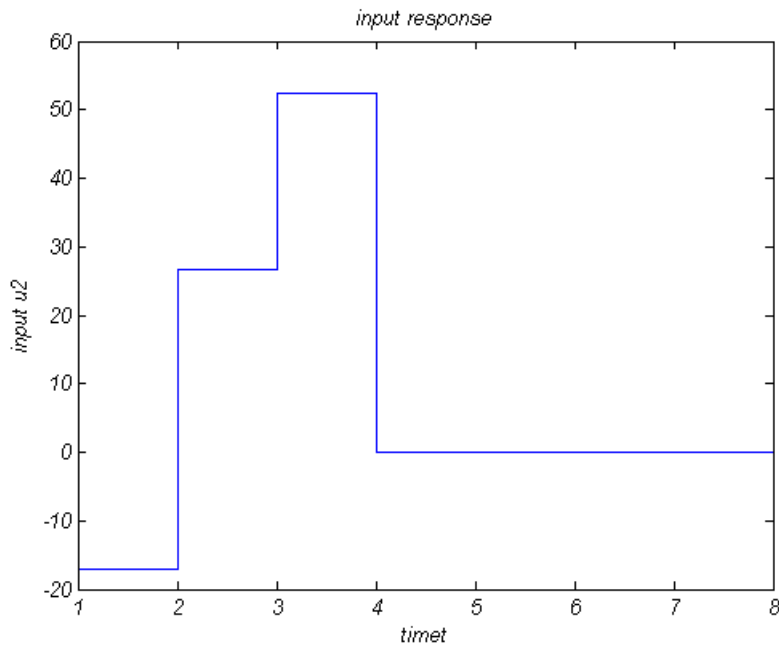
$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} -2,8860 & 0,359 & -0,2632 & -0,9211 & 0,6667 & -0,2632 \\ 5,0614 & -1,1140 & 0,4737 & 1,6579 & -1,3333 & 0,4737 \\ 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -14,8289 & 3,5395 & -1,3947 & -4,8816 & 4,0000 & -1,3947 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که تمام مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته سیستم به صفر برده شده است لذا سیستم دوبعدی فوق کنترل بهینه زمانی بوده و چون ناورداهای کرونگر زوج کنترل پذیر (\bar{B}, \bar{A}) عبارت است از $p_2 = 3, p_1 = 3$ لذا سیستم در سه گام به حالت تعادل صفر می‌رسد.

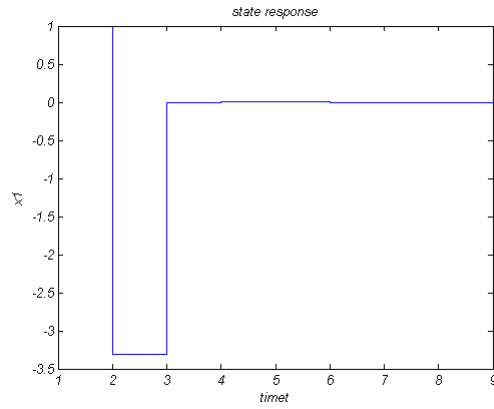
این ماتریس دارای شش مقدار ویژه صفر می‌باشد لذا پایداری مجانبی را برای سیستم فراهم می‌کند به این معنی که در یک فرایند تکراری با دادن مقادیر اولیه دلخواه به $x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ، بعد از حداکثر شش تکرار، x_i ها و u به نقطه تعادل یعنی حالت صفر می‌رسند. برای اثبات این ادعا با استفاده از نرم افزار متلب نمودار مربوط به x_i ها و u را رسم کرده و از آنجایی که سیستم کنترل بهینه زمانی بوده پس بردارهای حالت بعد از سه مرحله به صفر همگرا می‌شوند. چون بردار ورودی u ، مضربی از بردار حالت می‌باشد پس بردارهای ورودی نیز به صفر همگرا می‌شوند.



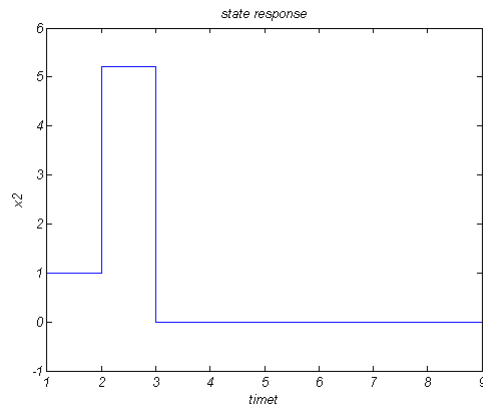
شکل ۱.۵: نمودار مربوط به مولفه اول ورودی



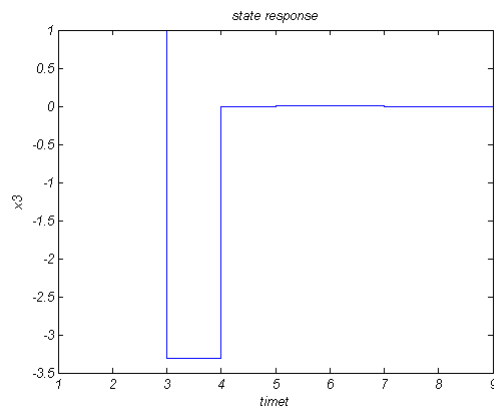
شکل ۲.۵: نمودار مربوط به مولفه دوم ورودی



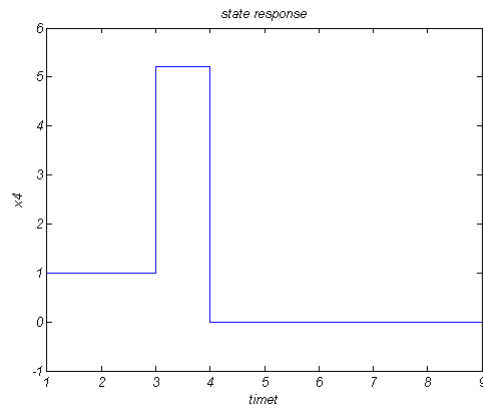
شکل ۳.۵: نمودار مربوط به مولفه اول بردار حالت



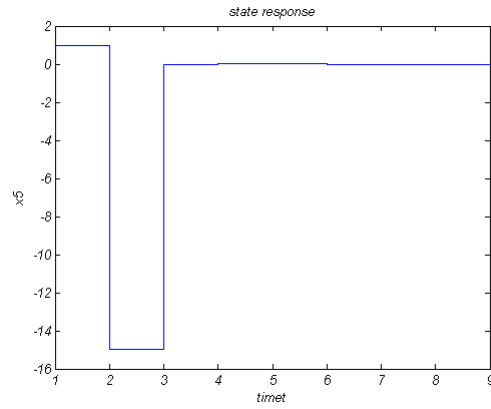
شکل ۴.۵: نمودار مربوط به مولفه دوم بردار حالت



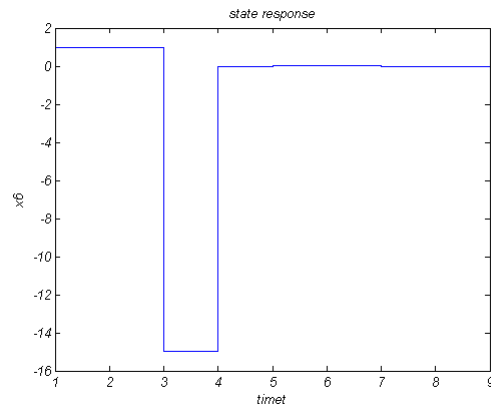
شکل ۵.۵: نمودار مربوط به مولفه سوم بردار حالت



شکل ۶.۵: نمودار مربوط به مولفه چهارم بردار حالت



شکل ۷.۵: نمودار مربوط به مولفه پنجم بردار حالت



شکل ۸.۵: نمودار مربوط به مولفه ششم بردار حالت

فصل ۶

حل مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از تبدیلات تشابهی

در این فصل، روشی جدید برای شرح مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی به منظور پایداری سیستم‌های دویعدی گسسته راسر با تاخیر زمانی ارایه داده می‌شود. با توجه به اینکه برای پایداری سیستم‌های گسسته لازم است تمام مقادیر ویژه آن داخل دایره واحد قرار بگیرد، مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی برای این سیستم‌ها به کار برده می‌شود و آن دسته از مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز را که در ناحیه پایداری قرار ندارند با مقادیر ویژه جدید جایگزین می‌کنیم تا سیستم پایدار شود. برای حل مساله، با استفاده از روش تجزیه شور جزئی ماتریس \bar{A} را که بزرگ بوده به ماتریس‌های کوچک‌تری تجزیه می‌کنیم، سپس با به‌کارگیری روش تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کنترل خطی، طیف موردنظر را به سیستم اختصاص می‌دهیم. بدین ترتیب سیستم پایدار می‌شود. روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی نسبت به روشی که در فصل پنجم بیان کردیم به محاسبات کمتری نیاز دارد در نتیجه در وقت صرفه‌جویی خواهد شد.

۱.۶ مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی

سیستم دویعدی گسسته زمانی راسر با q تاخیر در بردار حالت را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^q A_k \begin{bmatrix} x^h(i-k, j) \\ x^v(i, j-k) \end{bmatrix} + Bu(i, j), \quad (1.6)$$

همان‌طور که در فصل پنجم به‌طور کامل توضیح داده شد سیستم دویعدی گسسته زمانی راسر با q تاخیر در

بردار حالت را با استفاده از بردارهای حالت افزوده تعریف شده به سیستم دویعدی راسر بدون تاخیر زمانی به صورت زیر تبدیل کردیم:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^h(i+1, j) \\ \bar{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \bar{B}u(i, j), \quad (2.6)$$

بنا به قضایای گفته شده در فصل سوم سیستم (۲.۶) را هم ارز سیستم یک بعدی گسسته زمانی زیر در نظر می گیریم:

$$\bar{x}(i+1) = \bar{A}\bar{x}(i) + \bar{B}u(i), \quad (3.6)$$

که در آن $\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ و $\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times m}$ به طوری که $N = (q+1)(n_1 + n_2)$

و $\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12}, \bar{A}_{21}, \bar{A}_{22}, \bar{B}_1, \bar{B}_2$ به فرم ماتریس های تعریف شده در فصل قبل هستند. از آنجایی که در این فصل، مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی به کار برده می شود قانون کنترل برای سیستم (۲.۶) را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u(i) = -\bar{F}^T \bar{x}(i) = - \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

که \bar{F}_1 و \bar{F}_2 به ترتیب دارای بعد $m \times (q+1)n_1$ و $m \times (q+1)n_2$ می باشند. با جایگذاری قانون کنترل در رابطه (۳.۶) داریم:

$$\bar{x}(i+1) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{F}^T)\bar{x}(i). \quad (5.6)$$

تعریف ۱.۶.۱ [۶]. مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی برای سیستم (۳.۶)، تغییر دادن یک بخش از طیف ماتریس حلقه باز سیستم که باعث ناپایداری سیستم می باشد (طیفی که مقادیر ویژه آن داخل دایره واحد قرار ندارند) با یک مجموعه دلخواه جدید و بدون تغییر گذاشتن باقی مانده طیف است.

فرض کنید $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ طیف حلقه باز سیستم (۳.۶) باشد و $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ یک مجموعه دلخواه باشد و هر دو تحت مزدوج مختلط بسته باشند. طیف Λ را به صورت $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ تجزیه می کنیم که در آن $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ و $\Lambda_2 = \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ می باشد. هدف جایگذاری مجموعه $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ به جای مجموعه Λ_1 است.

لازم به ذکر است که مقادیر ویژه $\lambda_k, \dots, \lambda_1$ داخل دایره واحد قرار ندارند لذا از آنجایی که برای پایداری سیستم کنترل خطی لازم است تمام مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته (۳.۶) داخل دایره واحد قرار گیرند، به همین دلیل مجموعه $K = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ که درون دایره واحد قرار دارند جایگزین مجموعه $\Lambda_1 = \{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ می شود به طوری که طیف حلقه بسته $\bar{A} - \bar{B}\bar{F}^T$ به صورت $\{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ می باشد که در این صورت سیستم حلقه بسته، پایدار خواهد بود. برای تخصیص مجموعه K به جای مجموعه Λ_1 نیاز به یک پایه یکا متعامد روی زیرفضای چپ ناوردای ماتریس \bar{A} وابسته به مقادیر ویژه $\lambda_k, \dots, \lambda_1$ داریم [۲۲].

تجزیه شور جزئی ماتریس \bar{A}^T را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\bar{A}^T Q = QR, \quad (۶.۶)$$

به طوری که Q یک ماتریس $N \times k$ است که ستون هایش تشکیل یک پایه یکا متعامد از زیرفضای چپ وابسته به λ_i برای $i = 1, \dots, k$ را می دهد و R یک ماتریس شبه بالامثلثی $k \times k$ است. با در نظر گرفتن ماتریس $Z = \bar{A} - \bar{B}\bar{F}^T$ و تعریف ماتریس پس خورد حالت به فرم

$$\bar{F} = QS, \quad (۷.۶)$$

می توان نوشت:

$$Z^T Q = [\bar{A} - \bar{B}\bar{F}^T] Q = QR - QS\bar{B}^T Q = Q[R - SE^T], \quad (۸.۶)$$

یا به طور معادل به صورت زیر نوشته می شود:

$$Z^T Q = Q[R^T - ES^T]^T = QC_k^T, \quad (۹.۶)$$

که در آن $E = Q^T B$ و $C_k = R^T - ES^T$ می باشد. معادله بالا به این معنی است که انتخاب \bar{F} ، به صورت (۷.۶) زیرفضای تولید شده توسط Q را که تحت Z^T ناورداست، می سازد. به علاوه چون Z^T متشابه با C_k است یعنی $Z^T = QC_k Q^T$ ؛ بنابراین مقادیر ویژه Z وابسته به این زیرفضای ناوردا، مقادیر ویژه ماتریس $C_k = R^T - ES^T$ می باشد.

حال شرح خواهیم داد چگونه به وسیله یک انتخاب مناسب ماتریس S ، مقادیر ویژه ماتریس کوچک C_k می تواند به μ_i تغییر پیدا کند.

فرض کنید S به گونه ای انتخاب شده باشد که

$$\Lambda(C_k) = \Lambda\{R^T - ES^T\} = \{\mu_i : i = 1, \dots, k\}, \quad (۱۰.۶)$$

مساله بالا را مساله تصویر می نامند. بنابراین با این انتخاب S، مقادیر ویژه $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ ماتریس \bar{A} ، به $\{\mu_i\}_{i=1}^k$ تغییر پیدا می کند. در قضیه زیر نشان می دهیم که بقیه مقادیر ویژه ماتریس \bar{A} بدون تغییر باقی می مانند.

قضیه ۰.۱.۶ [۲۲]. فرض کنید S طوری انتخاب شده باشد که مساله تصویر $k \times k$ (۱۰.۶) را حل کند و \bar{F} به صورت (۷.۶) تعریف شده باشد. در نتیجه ماتریس $Z = \bar{A} - \bar{B}\bar{F}^T$ دارای مقادیر ویژه $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ خواهد بود.

برهان. فرض کنید $W = [w_1, w_2, \dots, w_{n-k}]$ بردارهای شور باقی مانده λ_i برای $i > k$ باشد. به عبارت دیگر W یک پایه متعامد از متمم متعامد $span\{Q\}$ است به طوری که $X = [Q, W]$ یکانی است. با استفاده از (۹.۶) داریم:

$$Q^T Z^T Q = C_k^T, \quad W^T Z^T Q = 0, \quad (11.6)$$

با استفاده از (۷.۶) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} Q^T Z^T W &= Q^T (\bar{A}^T - QS\bar{B}^T)W \\ &= Q^T \bar{A}^T W - S\bar{B}^T W = Q^T \bar{A}W + E^T, \end{aligned} \quad (12.6)$$

$$\begin{aligned} W^T Z^T W &= W^T (\bar{A}^T - QS\bar{B}^T)W \\ &= W^T \bar{A}^T W - W^T QS\bar{B}^T W = W^T \bar{A}^T W, \end{aligned} \quad (13.6)$$

بنابراین

$$X^T Z X = \begin{pmatrix} C_k & 0 \\ W^T \bar{A}Q + E & W^T \bar{A}W \end{pmatrix}. \quad (14.6)$$

□

و نتیجه حاصل می شود.

در نتیجه مساله، تبدیل به پیدا کردن ماتریس پس خورد حالت S به طوری که سیستم حلقه بسته $R^T - ES^T$ دارای مقادیر ویژه μ_i باشد می شود.

۲.۶ محاسبه ماتریس پس خورد حالت S

یک روش برای به دست آوردن ماتریس S برای سیستم حلقه بسته $R^T - ES^T$ استفاده از تبدیلات تشابهی در سیستم های کنترل خطی است [۱۱]. سیستم حلقه بسته $R^T - ES^T$ را در نظر بگیرید. فرض کنید زوج (R^T, E) کنترل پذیر باشد ابتدا ماتریس افزوده $[R^T, E, I]$ را با استفاده از عملیات تشابهی اولیه تبدیل به فرم همدم برداری $[\tilde{R}^T, \tilde{E}, T^{-1}]$ می کنیم. بنابراین ماتریس های \tilde{R}^T و \tilde{E} به فرم زیر تبدیل می گردند:

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_{\circ m \times m} \\ \dots \\ \circ \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}^T = \begin{bmatrix} G_{\circ m \times k} \\ \dots \\ I_{k-m} \quad \circ_{k-m \times m} \end{bmatrix}, \quad (15.6)$$

حال ماتریس پس خورد حالتی که مقادیر ویژه صفر را به سیستم اختصاص می دهد به فرم زیر محاسبه می کنیم:

$$\tilde{S}_p = E_{\circ}^{-1} G_{\circ}, \quad (16.6)$$

در نتیجه ماتریس پس خورد حالت اولیه برای زوج (R^T, E) به صورت زیر به دست می آید:

$$S_p^T = \tilde{S}_p T^{-1}, \quad (17.6)$$

ماتریس حلقه بسته تبدیل یافته $\tilde{\Gamma}_k$ ، به شکل بلوکی زیر با مقادیر ویژه صفر است.

$$\tilde{\Gamma}_k = \tilde{R}^T - \tilde{E} \tilde{S}_p = \begin{bmatrix} G_{\circ} \\ \dots \\ I \quad \circ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{\circ} \\ \dots \\ \circ \end{bmatrix} E_{\circ}^{-1} G_{\circ} = \begin{bmatrix} G_{\circ} \\ \dots \\ I \quad \circ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{\circ} \\ \dots \\ \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ_{m \times k} \\ \dots \\ I_{k-m} \quad \circ_{k-m \times m} \end{bmatrix}, \quad (18.6)$$

هدف، به دست آوردن ماتریس پس خورد حالتی که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته در طیف مورد نظر قرار گیرد می باشد. بدین منظور ماتریس قطری $D = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ را با ماتریس $\tilde{\Gamma}_k$ جمع می کنیم، آنگاه $\tilde{R}^T - \tilde{E} \tilde{S}^T$ به صورت زیر خواهد بود.

$$V = (\tilde{R}^T - \tilde{E} \tilde{S}^T) + D = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & & \circ \\ & \ddots & & & \\ \circ & & \mu_m & & \\ & \circ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ I & & & \circ & \mu_k \end{bmatrix}, \quad (19.6)$$

حال با انجام عملیات تشابهی ستونی

$$C(j) - \lambda_j(C_i) \longrightarrow C(j)$$

$$R(i) + \lambda_i(R_j) \longrightarrow R(i) \quad j = k, k-1, \dots, m+1, \quad i = j-m$$

\tilde{V} به فرم

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_\lambda \\ \dots \\ I \quad \circ \end{bmatrix}, \quad (20.6)$$

تبدیل می‌شود. حال چون \tilde{V} مشابه V است بنابراین مقادیر ویژه \tilde{V} نیز همان طیف $K = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ است. بنابراین ماتریس پس‌خورد اولیه S را به فرم زیر تبدیل می‌کنیم.

$$S^T = S_p^T - E_o^{-1} \tilde{G}_\lambda T^{-1}. \quad (21.6)$$

در نتیجه با توجه به تعریف $\bar{F} = QS$ ، ماتریس پس‌خورد حالت سیستم حلقه بسته (۳.۶) محاسبه می‌شود. نکته ۱.۰۶. روش فوق برای $m \leq K$ برقرار است.

الگوریتم ۲. الگوریتم تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از تبدیلات تشابهی

ورودی: ماتریس‌های $\bar{A}_{N \times N}$ و $\bar{B}_{N \times m}$.

خروجی: ماتریس پس‌خورد حالت \bar{F} به طوری که سیستم حلقه بسته دارای مقادیر ویژه مورد نظر باشد.

۱. ابتدا طیف مقادیر ویژه جزئی $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ و تجزیه شور جزئی ماتریس A^T را محاسبه می‌کنیم.

۲. قرار می‌دهیم $E = Q^T B$.

۳. با استفاده از تبدیلات تشابهی و فرم همدم برداری S را به گونه‌ای تعیین می‌نماییم که مقادیر ویژه ماتریس $R^T - ES^T$ طیف $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ باشد.

۴. $\bar{F} = QS$ را محاسبه می‌کنیم.

۵. در نهایت با استفاده از تعریف $\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix}$ ماتریس‌های $\bar{F}_1 \in \mathbb{R}^{(q+1)n_1 \times m}$ و $\bar{F}_2 \in \mathbb{R}^{(q+2)n_2 \times m}$ را به دست می‌آوریم.

۳.۶ وجود و یکتایی جواب مساله تخصیص مقدار ویژه جزئی

مفهوم کنترل‌پذیری برای بررسی وجود و یکتایی جواب مساله بسیار مهم است لذا ابتدا به مفهوم کنترل‌پذیری می‌پردازیم.

تعریف ۲.۶. [۶]. سیستم (۳.۶) یا زوج (\bar{A}, \bar{B}) نسبت به مجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ از طیف \bar{A} به طور جزئی کنترل پذیر است اگر نسبت به هر یک از مقادیر ویژه λ_j برای $j = 1, \dots, k$ کنترل پذیر است.

تعریف ۳.۶. [۶]. سیستم (۳.۶) یا به طور معادل زوج (\bar{A}, \bar{B}) به طور کامل کنترل پذیر است هر گاه نسبت به همه مقادیر ویژه \bar{A} کنترل پذیر باشد.

قضیه ۲.۶. وجود و یکتایی مساله تخصیص مقادیر ویژه [۶]: مساله تخصیص مقادیر ویژه برای زوج (\bar{A}, \bar{B}) ، برای هر مجموعه دلخواه S حل پذیر است اگر و تنها اگر زوج (\bar{A}, \bar{B}) به طور کامل کنترل پذیر باشد. جواب یکتاست اگر و تنها اگر سیستم یک سیستم تک ورودی باشد (یا به عبارتی B یک بردار باشد) در حالت چند ورودی در صورت وجود جواب، تعداد نامتناهی جواب دارد.

قضیه ۳.۶. [۶]. مجموعه Λ طیف ماتریس \bar{A} و مجموعه $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید بتوان مجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ را به مجموعه $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ تغییر داد و بقیه مقادیر ویژه بدون تغییر باقی بمانند. پس مساله مقادیر ویژه جزئی برای زوج (\bar{A}, \bar{B}) برای هر انتخاب مقادیر ویژه حلقه بسته μ_1, \dots, μ_k دارای جواب است اگر و فقط اگر زوج (\bar{A}, \bar{B}) به طور جزئی نسبت به مجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ کنترل پذیر باشد، جواب منحصر بفرد است اگر و تنها اگر سیستم یک سیستم به طور کامل کنترل پذیر تک ورودی باشد. در حالت چندین ورودی و در حالت تک ورودی زمانی که زوج (\bar{A}, \bar{B}) به طور کامل کنترل پذیر نیست در صورت وجود جواب، تعداد نامتناهی جواب دارد.

مثال ۱.۰۶. سیستم دوبعدی گسسته زمانی توسط مدل راسر زیر را برای $q = 1$ تاخیر در نظر می گیریم:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} x^h(i-1, j) \\ x^v(i, j-1) \end{bmatrix} + Bu(i, j), \quad (22.6)$$

که در آن بردارهای حالت افقی و عمودی به ترتیب دارای ابعاد $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^2$ و $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^1$ می باشند و

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.4065 & 0.8867 & \vdots & 0.9518 \\ 0.787 & 0.3335 & \vdots & 0.9331 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0.9514 & 0.5205 & \vdots & 0.1669 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.2158 & 0.7922 & \vdots & 0.2100 \\ 0.9120 & 0.1309 & \vdots & 0.6927 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0.6029 & 0.2038 & \vdots & 1.6808 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۵ & ۷ \\ \dots & \dots \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix},$$

جهت کنترل این سیستم بردارهای افزوده زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\bar{x}^h(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^h(i-1, j) \end{bmatrix}, \bar{x}^v(i, j) = \begin{bmatrix} x^v(i, j) \\ x^v(i, j-1) \end{bmatrix},$$

لذا سیستم تاخیری (۲۲.۶) را می‌توان با جایگذاری بردارهای افزوده $\bar{x}^h(i, j)$ و $\bar{x}^v(i, j)$ تعریف شده به فرم سیستم دوبعدی راسر بدون تاخیر زمانی زیر تبدیل کنیم.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^h(i+1, j) \\ \bar{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \bar{B}u(i, j), \quad (۲۳.۶)$$

همان‌طور که در فصل سوم توضیح داده شد پایداری سیستم دوبعدی توصیف شده (۲۳.۶) هم‌ارز پایداری سیستم یک بعدی گسسته زمانی زیر می‌باشد.

$$\bar{x}(i+1) = \bar{A}\bar{x}(i) + \bar{B}u(i), \quad (۲۴.۶)$$

که در آن ماتریس‌های \bar{A} و \bar{B} به صورت زیر می‌باشند.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} ۰/۴۰۶۵ & ۰/۸۸۶۷ & ۰/۲۱۵۸ & ۰/۷۹۲۲ & \vdots & ۰/۹۵۱۸ & ۰/۲۱۰۰ \\ ۰/۰۷۸۷ & ۰/۳۳۳۵ & ۰/۹۱۲۰ & ۰/۱۳۰۹ & \vdots & ۰/۹۳۳۱ & ۰/۶۹۲۷ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & \vdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \vdots & ۰ & ۰ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ ۰/۹۵۱۴ & ۰/۵۲۰۵ & ۰/۶۰۲۹ & ۰/۲۰۳۸ & \vdots & ۰/۱۰۰۹ & ۱/۶۸۰۸ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \vdots & ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۵ & ۷ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ \dots & \dots \\ ۳ & ۶ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

فرض کنید طیف مقادیر ویژه ماتریس \bar{A} را به صورت $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ تجزیه کرده‌ایم که در آن

$$\Lambda_1 = \{۲/۴۹۳۴, -۱/۳۹۹۱\},$$

$$\Lambda_2 = \{0/5103, -0/409 \pm 0/8765i, -0/6158\},$$

می‌باشد. مجموعه $K = \{0/3514, -0/2137\}$ را در نظر می‌گیریم. هدف پیدا کردن ماتریس پس‌خورد \bar{F} است به صورتی که طیف سیستم حلقه بسته $\bar{A} - \bar{B}\bar{F}^T$ برابر $\Lambda = K \cup \Lambda_2$ باشد. با استفاده از تجزیه شور جزئی ماتریس \bar{A}^T به صورت $\bar{A}^T Q = QR$ ، ماتریس‌های Q و R را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$Q = \begin{bmatrix} -0/4088 & 0/1677 \\ -0/3882 & 0/0312 \\ -0/3081 & 0/1221 \\ -0/1945 & -0/0875 \\ -0/5408 & -0/7590 \\ -0/5068 & 0/6101 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2/4934 & 0/7209 \\ 0/0000 & -1/3991 \end{bmatrix},$$

و E را نیز به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$E = Q^T \bar{A} = \begin{bmatrix} -4/3812 & -7/5977 \\ -1/7857 & -3/6650 \end{bmatrix},$$

حال با استفاده از تبدیلات تشابهی ماتریس S را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$S^T = \begin{bmatrix} -0/9534 & -5/3424 \\ 0/6732 & 2/0862 \end{bmatrix},$$

بنابراین ماتریس پس‌خورد حالتی که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\bar{A} - \bar{B}\bar{F}^T$ را به طیف

$$\Lambda = \{0/3514, -0/2137, 0/5103, -0/409 \pm 0/8765i, -0/6158\},$$

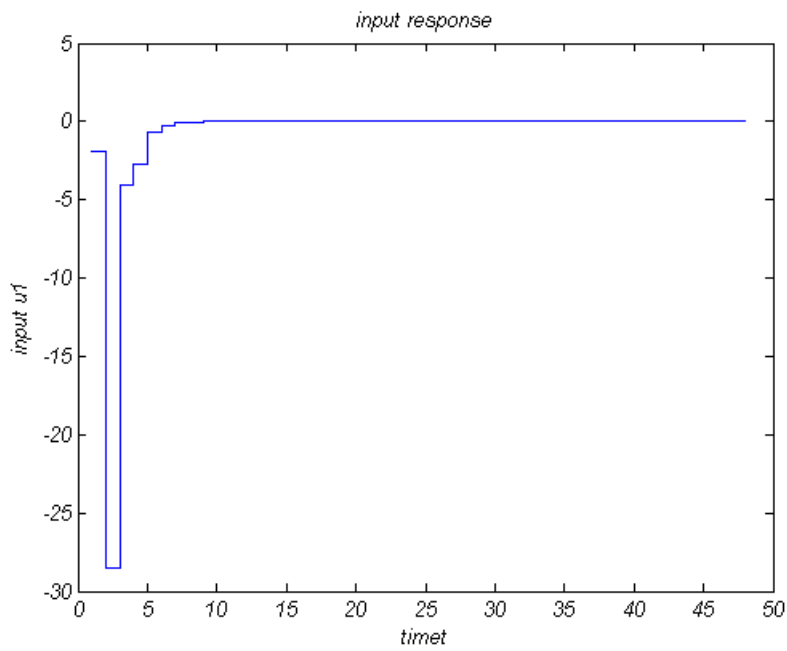
می‌برد را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{F} = QS = \begin{bmatrix} -0,5063 & 0,0747 \\ 0,2035 & -0,1963 \\ -0,3586 & 0,0473 \\ 0,6530 & -0,3135 \\ 4,5706 & -1,9475 \\ -2,7760 & 0,9315 \end{bmatrix},$$

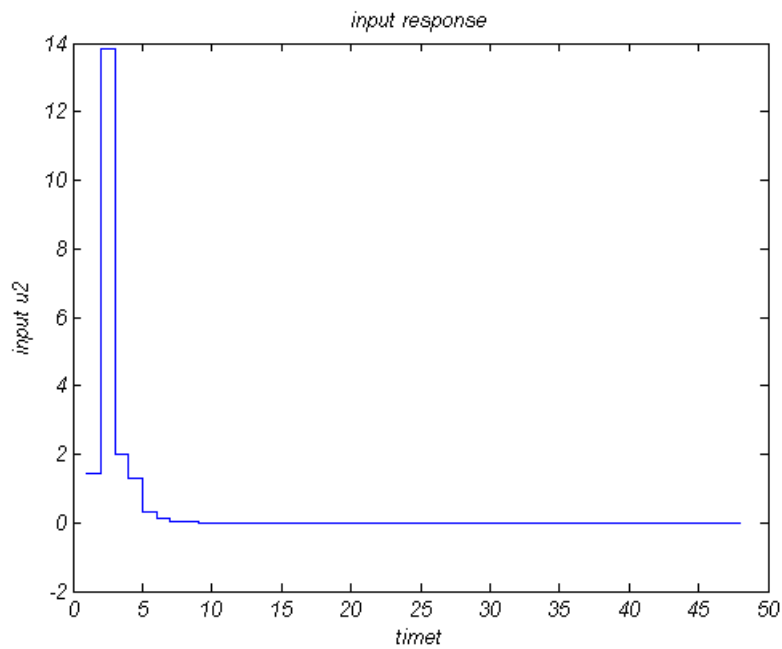
سپس ماتریس پس‌خورد حالت اولیه یک بعدی به دست آمده را به دو ماتریس پس‌خورد حالت اولیه \bar{F}_1 و \bar{F}_2 به صورت زیر افراز می‌کنیم که با توجه به توضیحات گفته شده به ترتیب دارای ابعاد $(q+1)n_1 \times m$ و $(q+1)n_2 \times m$ می‌باشند.

$$\bar{F}_1 = \begin{bmatrix} -0,5063 & 0,0747 \\ 0,2035 & -0,1963 \\ -0,3586 & 0,0473 \\ 0,6530 & -0,3135 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_2 = \begin{bmatrix} 4,5706 & -1,9475 \\ -2,7760 & 0,9315 \end{bmatrix}.$$

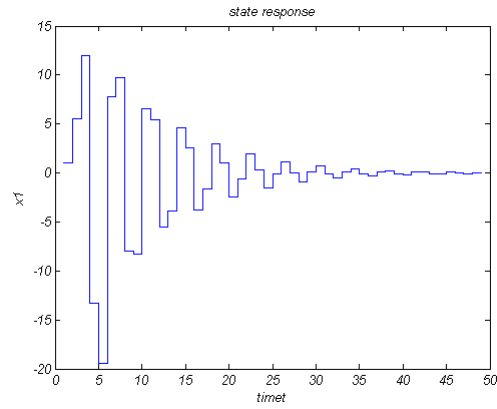
با استفاده از نرم‌افزار متلب نمودار مربوط به $x(i)$ ها و u را رسم کرده و مساله پایداری را به وضوح مشاهده می‌کنیم.



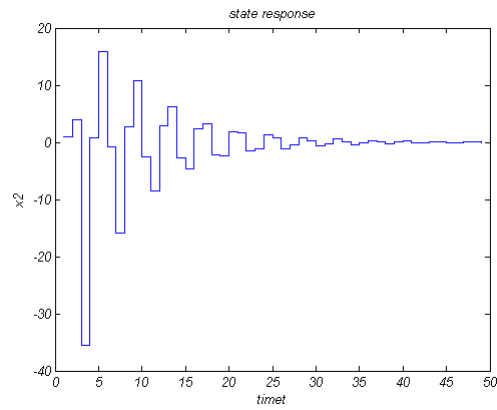
شکل ۱.۶: نمودار مربوط به مولفه اول ورودی



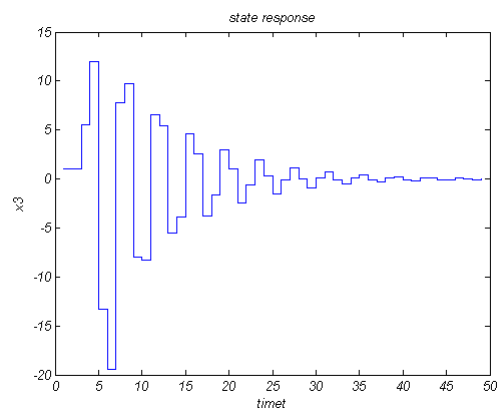
شکل ۲.۶: نمودار مربوط به مولفه دوم ورودی



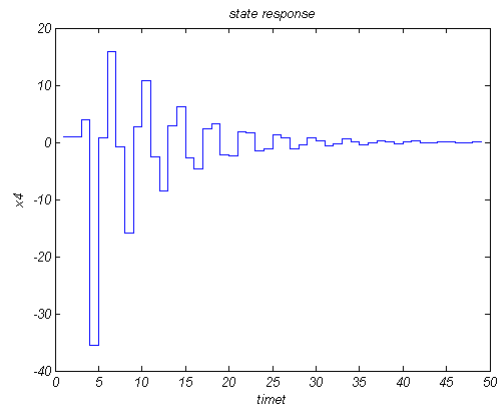
شکل ۳.۶: نمودار مربوط به مولفه اول بردار حالت



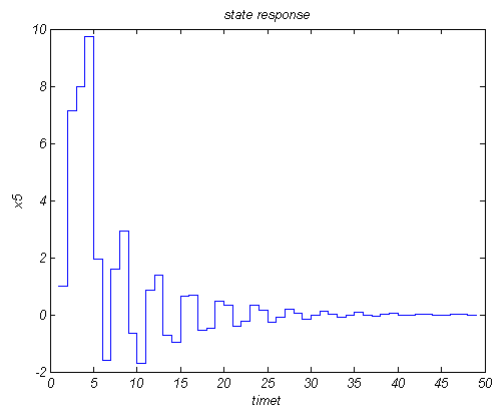
شکل ۴.۶: نمودار مربوط به مولفه دوم بردار حالت



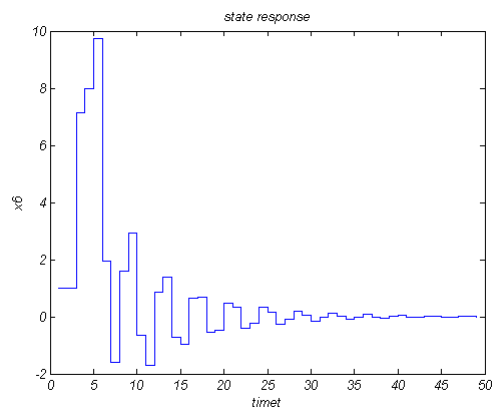
شکل ۵.۶: نمودار مربوط به مولفه سوم بردار حالت



شکل ۶.۶: نمودار مربوط به مولفه چهارم بردار حالت



شکل ۷.۶: نمودار مربوط به مولفه پنجم بردار حالت



شکل ۸.۶: نمودار مربوط به مولفه ششم بردار حالت

فصل ۷

نتیجه‌گیری، نظرات و پیشنهادات

۱.۷ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، روشی جدید برای پایداری و کنترل بهینه سیستم‌های دوبعدی گسسته زمانی تاخیری مدل راسر ارایه گردید. نوآوری این پایان‌نامه در فصل پنجم، تبدیل سیستم دوبعدی تاخیری با استفاده از روش بردارهای افزوده افقی و عمودی، به فرم سیستم دوبعدی بدون تاخیر زمانی می‌باشد و از این ویژگی که پایداری مجانبی هر سیستم دوبعدی رفتاری مشابه با پایداری مجانبی سیستم یک بعدی هم‌ارزش را دارا می‌باشد استفاده کرده و نتیجه می‌گیریم پایداری سیستم‌های دوبعدی گسسته با تاخیر زمانی هم‌ارز پایداری سیستم‌های یک بعدی نظیرش می‌باشد. سپس با استفاده از تبدیلات تشابهی، سیستم به‌دست آمده را به فرم همدم برداری تبدیل کرده و در نهایت ماتریس پس‌خورد حالتی که تمام مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته را به صفر می‌برد محاسبه کردیم. در نتیجه برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت در یک سیستم دوبعدی گسسته زمانی تاخیری می‌توان ماتریس پس‌خورد حالت سیستم یک بعدی هم‌ارزش را محاسبه کرده و سپس با توجه به اندازه ماتریس‌هایی که جزو مفروضات مساله هستند، ماتریس پس‌خورد حالت به‌دست آمده را به دو مولفه تفکیک کنیم. مزیت روش ارایه شده نسبت به روش نامساوی‌های ماتریسی خطی به محاسبات کمتری نیاز دارد در نتیجه در وقت صرفه‌جویی خواهد شد.

در نهایت، مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی، برای سیستم‌های دوبعدی گسسته زمانی تاخیری شرح داده شد. نوآوری این پایان‌نامه در فصل ششم، جهت پایداری سیستم‌های دوبعدی گسسته تاخیری بدین صورت است که با استفاده از تجزیه شور جزئی و تبدیلات تشابهی، ماتریس پس‌خورد حالت را به گونه‌ای به‌دست آوردیم که تمام مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته داخل دایره واحد قرار گیرد و الگوریتم مربوط به این روش نیز ارایه گردید. با توجه به اینکه ماتریس حلقه باز سیستم توصیف شده بزرگ بوده، روش پیشنهادی ماتریس را به ماتریس‌هایی با ابعاد کوچک‌تر تجزیه می‌کند که از این طریق می‌توان محاسبات را سریع‌تر

روی ماتریس‌های جدید انجام داد. به همین دلیل مزیت روش ارایه شده نسبت به روش تبدیلات تشابهی که در فصل پنجم ارایه گردید به محاسبات کمتری نیاز دارد و برای سیستم‌هایی که دارای ماتریس‌های بزرگ و اسپارس بوده مناسب می‌باشد.

۲.۷ نظرات و پیشنهادات

پیشنهاداتی که برای علاقه‌مندان به تحقیق و مطالعه سیستم‌های کنترل خطی می‌تواند زمینه کارهای بعدی قرار گیرد به صورت زیر می‌باشد:

۱. مطالعه و تحقیق کنترل‌پذیری و پایداری سیستم‌های n بعدی گسسته زمانی با تاخیر توسط مدل‌های راسر، فورناسا-مارکسینی و کلی.
۲. مطالعه و تحقیق کنترل‌پذیری و پایداری سیستم‌های n بعدی پیوسته زمانی با تاخیر توسط مدل راسر.
۳. کاربرد مساله در سیستم‌های دوبعدی گسسته زمانی با تاخیر توسط ماتریس پس‌خورد خروجی.
۴. کاربرد مساله در سیستم‌های توسعه‌یافته.

پیوست آ

برنامه‌های کامپیوتری

آ.۱۰۰ برنامه‌نویسی مربوط به روش تبدیلات تشابهی

```
t0=cputime;
A=[7 4 4 5 2 6;4 9 8 7 1 3;1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 9 5 4 6 8;0 0 0 0 1 0];
B=[2 4;5 7; 0 0;0 0;3 6;0 0];
[n,m]=size(B);
r=n+m;
Q=[B,A];
T1=eye(n);
tol=1e-6;
while ( i<=n ) & ( j<=r )
[q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
if (q<=tol)
Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
j=j+1;
else
if i=k
Q([i,k],:)=Q([k,i],:);
T1([i,k],:)=T([k,i],:);
```

```
Q(:, [i+m, k+m])=Q(:, [k+m, i+m]);
end
t=Q(i, j);
Q(i, :)=Q(i, :)/t;
Q(:, i+m)=Q(:, i+m)*t;
T1(i, :)=T1(i, :)/t;
if i=n
for k=i+1:n
t=Q(k, i);
if t=0
Q(k, :)=Q(k, :)-t*Q(i, :);
Q(:, i+m)=Q(:, i+m)+t*Q(:, k+m);
T1(k, :)=T1(k, :)-t*T1(i, :);
end
end
end
i=i+1;
j=j+1;
end
end
s=1;
while s < n
i=s+1 ;
for j=i:r
if Q(i, j)~=0
for k=1:s
if Q(k, j)~=0
t=Q(k, j);
Q(k, :)=Q(k, :)-t*Q(i, :);
T1(k, :)=T1(k, :)-t*T1(i, :);
```

```

Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
end
end
break
end
end
s=s+1;
end
for i=n:-1:m+1
for k=i:r
if Q(i,k)==1
for j=k+1:r
t=Q(i,j);
Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
end
break
end
end
end
Q
T1
B1=Q(:, [1:m]); A1=Q(:, [m+1:r])
B0=Q(1:m, 1:m); bo=inv(B0)
G=Q(1:m, m+1:r); F1=-bo*G; G0=G;
Fp=F1*T1;
Fp
gama=A+B*Fp
t0=cputime;

```

```
t1=cputime-t0;
xp=[];
up=[];
x0=ones(6,1);
xp(:,1)=x0;
i=2;
while i<10
xp(:,i)=gama*xp(:,i-1);
up(:,i-1)=Fp*xp(:,i-1);
i=i+1;
end
clf
stairs(up(1,:)),hold on
title('input response')
ylabel('input u1')
xlabel('timet')
pause
hold off
stairs(up(2,:)),hold on
title('input response')
ylabel('input u2')
xlabel('timet')
pause
hold off
stairs(xp(1,:)),hold on
title('state response')
ylabel('x1')
xlabel('timet')
hold off
pause
```

```

stairs(xp(2,:)),hold on
title('state response')
ylabel('x2')
xlabel('timet')
hold off
pause
stairs(xp(3,:)),hold on
title('state response')
ylabel('x3')
xlabel('timet')
hold off
pause
stairs(xp(4,:)),hold on
title('state response')
ylabel('x4')
xlabel('timet')
hold off
pause
stairs(xp(5,:)),hold on
title('state response')
ylabel('x5')
xlabel('timet')
hold off
pause
stairs(xp(6,:)),hold on
title('state response')
ylabel('x6')
xlabel('timet')
hold off
pause

```

آ.۲۰۰ برنامه نویسی مربوط به روش مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی

```

A=[0.4065 0.8867 0.2158 0.7922 0.9518 0.2100;0.0787 0.3335 0.9120 0.1309 0.9331 0.6927;
1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0.9514 0.5205 0.6029 0.2038 0.1009 1.6808;0 0 0 0 1 0];
B=[2 4;5 7;0 0;0 0;3 6;0 0];
A=A';
[V,D]=eig(A);
V1=V(:, [1 2])
Qp=gramsch(V1)
R=Qp'*A*Qp
E=Qp'*B
A=R'
B=-E
[n,m]=size(B);
r=n+m;
Q=[B,A];
T1=eye(n);
i=1;j=1; tol=1e-6;
while ( i<=n ) & ( j<=r )
[q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
if (q<=tol)
Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
j=j+1;
else
if i=k
Q([i,k],:)=Q([k,i],:);
T1([i,k],:)=T1([k,i],:);
Q(:, [i+m,k+m])=Q(:, [k+m,i+m]);
end
t=Q(i,j);
Q(i,:)=Q(i,:)/t;

```



```

Q(:,i+m)=Q(:,i+m)*t;
T1(i,:)=T1(i,+)/t;
if i=n
for k=i+1:n
t=Q(k,i);
if t=0
Q(k,:)=Q(k,)-t*Q(i,);
Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
T1(k,:)=T1(k,)-t*T1(i,);
end
end
end
i=i+1;
j=j+1;
end
end
s=1;
while s < n
i=s+1 ;
for j=i:r
if Q(i,j)~=0
for k=1:s
if Q(k,j)~=0
t=Q(k,j);
Q(k,:)=Q(k,)-t*Q(i,);
T1(k,:)=T1(k,)-t*T1(i,);
Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
end
end
break

```

```

end
end
s=s+1;
end
for i=n:-1:m+1
for k=i:r
if Q(i,k)==1
for j=k+1:r
t=Q(i,j);
Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
end
break
end
end
end
Q
T1
B1=Q(:, [1:m]); A1=Q(:, [m+1:r])
B0=Q(1:m,1:m); bo=inv(B0)
G=Q(1:m,m+1:r); F1=-bo*G; G0=G;
Fp=F1*T1;
Fp
gama=A+B*Fp
D=[];
for j=1:n
landa(j)=input(['Enter landa(',int2str(j),')=']);
end
for i=1:n

```

```

D(i,i)= landa(i);
end
Acap=A1;
Bcap=B1;
newF=Fp ;
ac=Acap+Bcap*F1;
ac1=ac+D;
bc1=Bcap*bo;
Qc=[bc1 ac1];
for i=n:-1:m+1
for k=1:r
if Qc(i,k)==1
for j=k+1:r
t=Qc(i,j);
Qc(:,j)=Qc(:,j)-t*Qc(:,k);
Qc(k-m,:)=Qc(k-m,:)+t*Qc(j-m,:);
end
break
end
end
end
G2=Qc(1:m,m+1:r);
glanda=Qc(:,m+1:r);
Fc=bo*G2*T1;
disp(' The feedback matrix which gives the desired eigenvalues')
Kp=newF+Fc
F=Qp*Kp';
disp(' with the closed-loop matrix ')
gamac=A+B*Kp;
disp(' checking the eigen values ')

```

```
v=eig(gamac)'  
[u1,v1]=eig(gamac);  
c2=cond(u1)  
disp(' Frobenius norm of feedback matrix ')  
Normkp=norm(Kp,'fro')  
F  
A=[0.4065 0.8867 0.2158 0.7922 0.9518 0.2100;0.0787 0.3335 0.9120 0.1309 0.9331 0.6927;  
1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0.9514 0.5205 0.6029 0.2038 0.1009 1.6808;0 0 0 0 1 0];  
B=[2 4;5 7;0 0;0 0;3 6;0 0];  
gama=A-B*F'  
t0=cputime;  
t1=cputime-t0;  
xp=[];  
up=[];  
x0=ones(6,1);  
xp(:,1)=x0;  
i=2;  
while i<50  
xp(:,i)=gama*xp(:,i-1);  
up(:,i-1)=-F'*xp(:,i-1);  
i=i+1;  
end  
clf  
stairs(up(1,:)),hold on  
title('input response')  
ylabel('input u1')  
xlabel('timet')  
pause  
hold off  
stairs(up(2,:)),hold on
```

```
title('input response')
ylabel('input u2')
xlabel('timet')
pause
hold off
stairs(xp(1,:)),hold on
title('state response')
ylabel('x1')
xlabel('timet')
hold off
pause
stairs(xp(2,:)),hold on
title('state response')
ylabel('x2')
xlabel('timet')
hold off
pause
stairs(xp(3,:)),hold on
title('state response')
ylabel('x3')
xlabel('timet')
hold off
pause
stairs(xp(4,:)),hold on
title('state response')
ylabel('x4')
xlabel('timet')
hold off
pause
stairs(xp(5,:)),hold on
```

```
title('state response')
ylabel('x5')
xlabel('timet')
hold off
pause
stairs(xp(6,:)),hold on
title('state response')
ylabel('x6')
xlabel('timet')
hold off
pause
```

مراجع

- [1] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, Numerical mathematics, Springer- Verlag New York, Inc, (2000).
- [2] A. Hmamed, M. Ait Rami and M. Alfi, *Controller synthesis for positive 2D systems described by the Roesser model*, Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control Cancun, Mexico, December(2008), pp.9-11.
- [3] A. Benzaouia, M. Benhayoun and F. Tadeo, *State-feedback stabilization of 2D continuous systems with delays* , International Journal of Innovative Computing, Information and Control, Vol.7, No.2, February (2011), pp.977-988.
- [4] A. Hmamed, F. Mesquine, F. Tadeo, M. Benhayoun and A. Benzaouia, *Stabilization of 2D saturated systems by state feedback control*, *Multidimensional Systems and Signal Processing*, Vol.21, (2010), pp.277-292.
- [5] B. Data, Numerical linear algebra and applicatins, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, CA, (1995).
- [6] B. N. Datta, D. R. Sarkissian, *Partial eigenvalue assignment in linear systems: existence, uniqueness and numerical solution*, IEEE , (2002), pp.1-11
- [7] D. D. Givone and R. P. Roesser, *Multidimensional linear iterative circuits -General properties* , IEEE Transactions on Computers, Vol.21, No.10, (1972), pp.1067-1073.
- [8] E. Fornasini and G. Marchesini, *Doubly-indexed dynamical systems: state-space models and structural properties*, Mathematical System Theory, Vol.12, (1978), pp. 59-72.
- [9] K. Galkowski, *LMI based stability analysis for 2D continuous systems*, Proc. of the 9th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, Dubrovnik, Croacia, Vol.3, (2002), pp.923-926.

- [10] M. Ait Rami, F. Tadeo, *Positive observation problem for linear discrete positive systems*, IEEE Conference on Decision and Control, December(2006), pp.13-15.
- [11] M. M. Fateh, H. Ahsani Tehrani and S. M. Karbassi, *Repetitive control of electrically driven robot manipulators*, International Journal of Systems Science, (2011), pp.1057-1065.
- [12] P. Lancaster and M. Tismenetsky, *The theory of matrices second edition with applications*, Academic Press, (1985).
- [13] R.Sivan, *Linear optimal control systems*, Technion, Israel Institute of Technology, Haifa Israel,(1972).
- [14] R. Dorf, R. H. Bishop, *Modern control systems*, Ninth edition.
- [15] R. Roesser, *A discrete state-space model for linear image processing*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.20, (1975), pp.1-10.
- [16] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, (1994).
- [17] S. M. Karbassi and D. J. Bell, *Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-Part 1: Regular Kronecker invariants*, International Journal Control 57, (1993), pp. 817-830.
- [18] T. Kaczorek, *Positive 1D and 2D systems*, Springer-Verlag, London(2001).
- [19] T. Kaczorek, *Asymptotic stability of positive 2D linear systems with delays*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences, Vol.57, No.2, (2009), pp.133-138
- [20] T. Kaczorek, *Realizations problem for positive discrete-time systems with delays*, Systems Science 29 (1), (2003), pp.15-29.
- [21] W. Paszkea, J. Lam, K. Galkowski, S. Xu, Z. Lin, *Robust stability and stabilisation of 2D discrete state-delayed systems*, Systems and Control Letters 51 (2004), pp.277 - 291.
- [22] Y. Saad, *Projection and deflation methods for partial pole assignment in linear state feedback*, IEEE Transactions on Automatic Control, Ac-33 (1988), pp.290-297.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Horizontal	افقی
Vector	بردار
Left eigenvector	بردار ویژه چپ
Right eigenvector	بردار ویژه راست
State vector	بردار حالت
Output vector	بردار خروجی
Bases	پایه
Primary state feedback	پس‌خورد حالت اولیه
Asymptotically stable	پایدار مجانبی
Stability	پایداری
Feedback	پس‌خورد
Continuous-time	پیوسته زمانی
Similarity transation	تبدیلات تشابهی
Schur decomposition	تجزیه شور
Assignment	تخصیص
Transpose	ترانهاد
Linear composition	ترکیب خطی

Single-input	تک- ورودی
Projection	تصویر
Characteristic equation	چندجمله‌ای مشخصه
Solving	حل پذیر
Open-loop	حلقه باز
Closed-loop	حلقه بسته
Determinant	دترمینان
Two-dimensional	دو بعدی
Rank	رتبه
Sub space	زیر فضا
Delay system	سیستم تاخیری
Bounded conditions	شرایط مرزی
Spectrum	طیف
Jordan form	فرم جردن
Vector companion form	فرم همدم برداری
Standard echelon form	فرم استاندارد اشعلون
Vector space	فضای برداری
Null space	فضای پوچ
Control law	قانون کنترل
Controlable	کنترل پذیر
Controller	کنترل گر
Descript-time	گسسته زمانی
Elementary row operations	عملیات سطری مقدماتی

Vertical	عمودی
Augmented matrix	ماتریس افزوده
Triangular matrix	ماتریس مثلثی
Square matrix	ماتریس مربعی
Symmetric matrix	ماتریس متقارن
Identity matrix	ماتریس همانی
Similarity matrix	ماتریس‌های متشابه
Unitary matrix	ماتریس یکانی
Projection problem	مساله تصویر
Conjugated complex	مزدوج مختلط
Linear independent	مستقل خطی
Control variable	متغیر کنترل
Eigenvalue	مقدار ویژه
Inverse	معکوس
Field	میدان
Kronecker invariant	ناوردای کرونکر
linear depended	وابسته خطی
Existence	وجود
Equivalent	هم‌ارز
Uniqueness	یکتایی
Orthonormal	یک‌معامد

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Assignment	تخصیص
Asymptotically stable	پایدار مجانبی
Augmented matrix	ماتریس افزوده
Bases	پایه
Bounded conditions	شرایط مرزی
Characteristic equation	چندجمله‌ای مشخصه
Closed-loop	حلقه بسته
Control law	قانون کنترل
Controlable	کنترل پذیر
Controller	کنترل گر
Conjugated complex	مزدوج مختلط
Control variable	متغیر کنترل
Continous-time	پیوسته زمانی
Determinant	دترمینان
Delay system	سیستم تاخیری
Descrit-time	گسسته زمانی
Elementary row operations	عملیات سطری مقدماتی

Eigenvalue	مقدار ویژه
Equivalent	هم‌ارز
Existence	وجود
Fild	میدان
Feedback	پس‌خورد
Horizontal	افقی
Identity matrix	ماتریس همانی
Inverse	معکوس
Jordan form	فرم جردن
Kronecker invariant	ناوردای کرونگر
Left eigenvector	بردار ویژه چپ
Linear depended	وابسته خطی
Linear composition	ترکیب خطی
Linear independed	مستقل خطی
Open-loop	حلقه باز
Orthonormal	یکا متعامد
Output vector	بردار خروجی
Primarystate feedback	پس‌خورد حالت اولیه
PRojection problem	مساله تصویر
Rank	رتبه
Right eigenvector	بردار ویژه راست
Schur decomposition	تجزیه شور
Similarity transation	تبدیلات تشابهی

Similarity matrix	ماتریس‌های متشابه
Single-input	تک-ورودی
Spectrum	طیف
Squar matrix	ماتریس مربعی
Stablity	پایداری
Standard echelon form	فرم استاندارد اشعلون
State vector	بردار حالت
Sub space	زیرفضا
Symmetric matrix	ماتریس متقارن
Transpose	ترانهاده
Trianglar matrix	ماتریس مثلثی
Tow-dimensional	دو بعدی
Uniqueness	یکتایی
Unitary matrix	ماتریس یکانی
Vector	بردار
Vector companion form	فرم همدم برداری
Vector space	فضای برداری
Vertical	عمودی

Surname: Enjili

Name: Fatemeh

Title: Asymptotic of two-dimensional systems with time-delays by Roesser model

Supervisor: Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

Degree: Master of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Numerical Analysis

Technology University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: December 2013

Number of pages: 102

Keywords: two-dimensional systems with delays, State-feedback matrix, Asymptotic stability, Similarity transformation, Partial eigenvalue assignment, Partial Schur decomposition.

Abstract

in this thises, the is present new method for time-optimal control and asymptotic of 2D discrete-time linear systems with time-delays by model Roesser. This method has 2 steps. In the first step, the delays 2D linear system with definition gain state vector convert to the 2D system without time delays. Then using elemintary similarity transformation, obtained system convert to the vector companion form, we compute state-feedback matrix F so that the closed-loop system tends to zero all of eigenvalues. In the second step, as for the stability of discrete time systems it is necessary to place all of its eigenvalues in unit circle, we use partial eigenvalue assignment problem for delays 2D discrete-time linear systems and replace that eigenvalues of the open-loop matrix of system which isn't in stability region with arbitrary eigenvalue untill system is stable. For solving this problem, with using of partial Schur decomposition method, we decompose big matrix \bar{A} to smaller matrixs. Then with applying similarity transation method for linear control systems, we allocate the desired spectrum to the system, so system will be stable. According to the open-loop matrix \bar{A} of the 2D discribed systemes is large and by solving partial eigenvalue assignment problem, we decompose it into smaller matrices and then assignment applied only for the small matrix, advantage of the presented method required less computation compared to similarity transation method and is suitable for systems that have been large and sparse matrices.



Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Asymptotic of two-dimensional systems with time-delays by Roesser model

Supervisor

Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

by

Fatemeh Enjili

December 2013