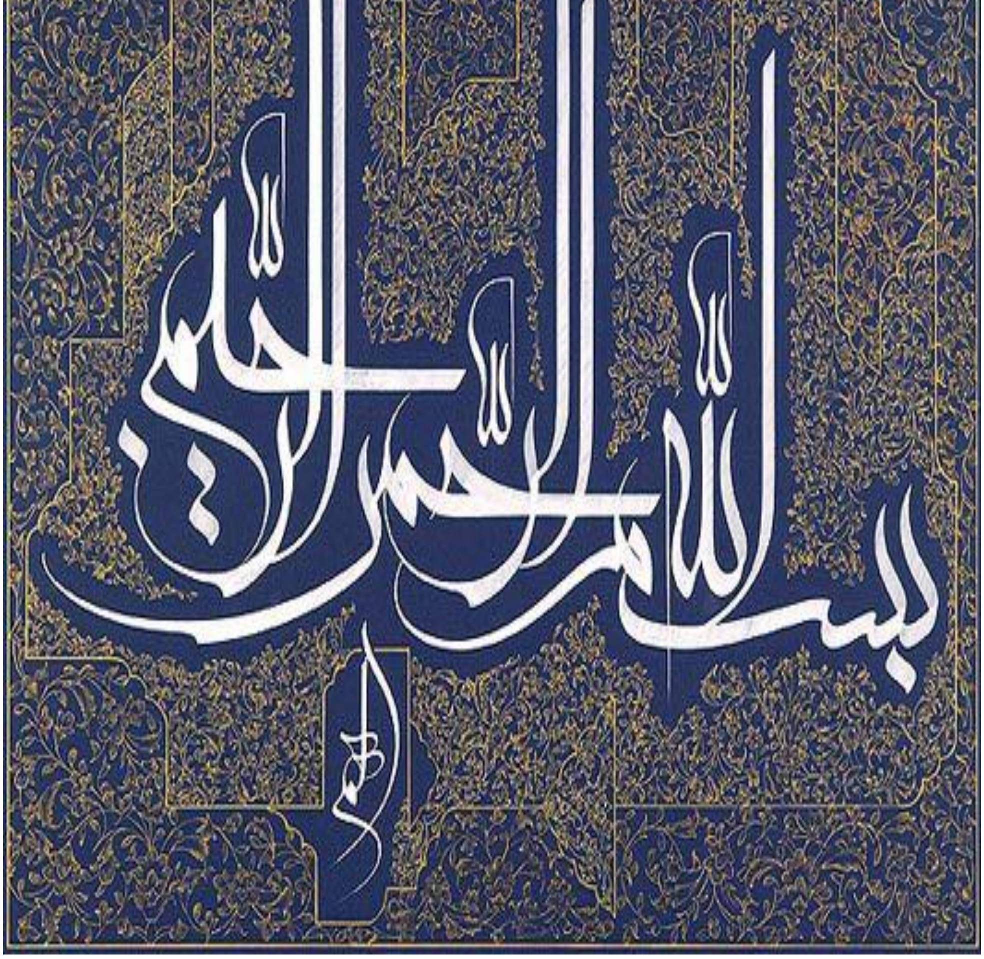

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده :ریاضی

گروه: ریاضی کاربردی

مطالعه مساله p- مرکز روی گرافهای عنکبوتی

دانشجو: آرش گوهری

اساتید راهنما :

آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف

آقای دکتر نادر جعفری راد

استاد مشاور:

آقای دکتر جعفر فتحعلی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

دی (۱۳۸۸)

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

که همواره مشوقم در ادامه تحصیل بوده‌اند.

تقدیر و تشکر

در اینجا لازم است از کلیه کسانی که در طول مدت تحصیل مرا یاری نموده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. ابتدا از خانواده‌ام تشکر می کنم که عزم مرا در ادامه تحصیل جزم کردند .

و نیز لازم است که از جناب آقای دکتر رحیمی شعرباف و آقای دکتر جعفری راد که راهنمایی مرا بعهده داشتند، سپاس‌گذاری نمایم.

از اساتید گروه ریاضی آقایان دکتر فتحعلی – دکتر رحیمی – دکتر نزاکتی- دکتر جعفری راد- دکتر زیره- دکتر احسنی که بسیار از آنها آموخته‌ام ، نهایت تشکر را دارم .

از مسئولین و کارکنان محترم کتابخانه دانشگاه صنعتی شاهرود که نهایت دلسوزی را در برخورد با دانشجو دارند و نیز مسئولین دفتر گروه ریاضی (جناب آقای یوسف‌زاده و سرکار خانم عرب احمدی) کمال تشکر را دارم .

در پایان جا دارد که از همکاری دوستانم آقایان: جمالیان ، کاردانی، رادکانی، رضازاده، کرمی و خانم‌ها میرکریمی، افضل شهیدی، جلالی قدردانی نمایم و از خداوند متعال توفیق روز افزون آنها را خواستارم .

آرش گوهری

چکیده :

در این تحقیق یک دسته از مدل های مکان‌یابی شبکه ای گسسته تحت عنوان مکان‌یابی مراکز (p- مرکز[1]) روی دسته خاصی از گرافها موسوم به شبکه های عنکبوتی یا درختهای عنکبوتی[2] مـورد مطالعـه و بررسـی قرار گرفته است . با توجه به اینکه مساله p- مرکز جزو دسته مسائل Np-hard می باشد , بنابراین باید از طریق روش های ابتکاری جواب آن را برآورد کرد. لذا الگوریتم هایی مبتنی بر مفاهیم کوچکترین مجموعـه غالب و مجموعه مستقل ماکزیمال بیان شده اند و پیچیدگی زمانی آنها بیان شده است. در ادامه تعمیمـی از مسئله p- مرکز تحت عنوان مساله p- مرکز با کمترین پوشش در فصل چهارم مـورد بررسـی قـرار گرفتـه است بطوری که مراکز موظفند حداقل یک تعدادی از مشتری ها یا متقاضیان را سرویس دهند. همچنـین از طریق دو الگوریتم مبتنی بر درختها و مجموعه مستقل ماکزیمال , مساله p- مرکز و p- مرکز همبند[3] روی گرافهای عنکبوتی در شرایط خاص مورد بررسی قرار گرفته است.

1- P-center
2- Spider tree
3- Connected p-center

فهرست مطالب

مقدمه

یکی از مسائلی که تحت عنوان مسائل مکان یابی مطرح می شود، مساله مکانی یـابی مراکـز یـا تاسیسـاتی است که حداکثر فاصله آنها تا تمام گره‌های شبکه، حداقل گردد. مسـائلی نظیـر ایجـاد ایسـتگاههای آتـش نشانی و مراکز اورژانس از این نوع می باشند . برای مثال ایستگاههای آتـش نشـانی بایسـتی در مکان‌هـایی تاسیس گردند که در صورت آتش سوزی، نزدیکترین ایستگاه آتش نشانی به محـل آتـش سـوزی بتوانـد در حداقل مدت به آن سرویس داده و حریق را مهار نماید. این مساله تحـت عنـوان « حـداقل کـردن حـداکثر فاصله از مرکز تاسیساتی مربوطه به هر گره شبکه » بررسی می‌شود.

اهمیت مسائل مکان‌یابی

در طول سه قرن گذشته مسائل مکان یابی متعددی در قالب فرضیات و مـدل هـای ریاضـی پدیـدار و ارائـه گشته اند . اما ظاهراً طرح مساله مکان‌یابی بطور کلی و رسمی برای نخستین بار بـه وبـر[۴] (1909) نسـبت داده شده است . امروزه نیز تعیین محل مناسب برای استقرار تجهیـزات یـا مراکـز خـدماتی در یـک شـبکه موضوع مهمی بوده و در چند دهه اخیر توجه بسیاری را به خود جلب کـرده اسـت . تصـمیمات مربـوط بـه مکان‌یابی در مسائل گوناگونی اعم از بخش های دولتی و خصوصی ظاهر می گردند . در قسـمت خصوصـی، مراکز صنعتی وکارخانجات برای استقرار دفاتر خود در سطح شهر، تعیین محل مراکز توزیع و ... نیاز به اتخاذ تصمیم دارند و در بخش دولتی نیز تعیین مراکزی از قبیل ایستگاههای پلیس راه، اورژانس از اهمیـت ویـژه ای برخوردار است. البته باید توجه داشت که بی‌شتر مسائل روزمره در زمی‌نه مکان ی‌ابی, در فضای گسسته مطرح و بررسی می شوند.

۴- weber

دسته بندی مسائل مکان‌یابی

مسائل و مدل‌های مکان یابی را می توان به روش های متفاوتی طبقه بندی نمود . انواع گوناگونی از مسائل مکان‌یابی تسهیلات وجود دارند که برخی از کلاس های مهم آن عبارتند از :

۱- مساله مکان‌یابی تسهیلات گسسته[۵] که درآن مجموعه‌ای از نقاط تقاضا و مکان‌های تسهیلات مشخص می باشد .

۲- مساله مکان‌یابی تسهیلات پیوسته[۶] که درآن در یک فضای مشخص تعداد معینی از تسهیلات را مکان‌یابی می کنند.

۳- مساله مکان‌یابی تسهیلات تصادفی[۷] که در آن برخی از پارامتر های تقاضا یا زمان سفر نامعین هستند .

۴- مساله مکان‌یابی تسهیلات شبکه‌ای[۸] که در یک شبکه اساسی تعداد معینی از اتصالات و گره‌ها محدود شده اند.

طبقه بندی بر اساس مشخصه های گوناگون صورت می پذیرند. برخی از این مشخصه ها عبارتند از:

۱- روی سطح[۹] یا روی شبکه تعریف شدن مدل

در مسائل مکان یابی که روی سطح تعریف می شوند، محل های استقرار می توانند روی هر نقطه از سطح مشخص شوند که مختصات آن با توجه به مشخصه های طولی عرضی به دست می‌آید, اما در مسائل مکان‌یابی روی شبکه این مراکز تنها در نقاط خاصی امکان استقرار پیدا می کنند.

۵-Discrete facility location
۶-Continues facility location
۷ -Random facility location
۸-Network facility location
۹-Planar

۲- درختی یا گراف بودن مدل

۳- تعداد مراکز استقرار

۴- ساکن یا پویا بودن مدل

ویژگی‌های مدل p- مرکز :

ویژگی های عمده‌ای تاکنون در مورد مدل p- مرکز شناسایی شده اند که عبارتند از :

۱- روی سطح یا شبکه بودن مساله

۲- درحالت شبکه، سیکلی یا درختی بودن شبکه

۳- محدود یا نامحدود بودن ظرفیت منابع

۴- یکسان یا متفاوت بودن نوع مراکز عرضه

۵- وزندار بودن یا بدون وزن بودن تقاضاها

در فصل یک ، نمادها و تعاریف ریاضی و تعریف مساله p- مرکز آمده است .

فصل دوم، مفهوم مجموعه غالب[۱۰] را بیان نموده وسپس به بیان ارتباط آن با مساله p- مرکز می‌پردازد و در ادامه به بیان الگوریتمی جهت تعیین کوچکترین مجموعه غالب و الگوریتم SCR که بر اساس کوچکترین مجموعه غالب استوار است و جهت برآورد جواب مساله p- مرکز به کار می رود، می‌پردازیم .

فصل سوم مفهوم دیگری به نام مجموعه مستقل[۱۱] را مورد بررسی قرار داده و سپس در ادامه به بیان ارتباط آن با مساله p- مرکز می پردازد و سپس الگوریتم هایی با ضرایب تقریب ۲ و۳ برای مساله p- مرکز نرمال و وزن دار ارائه می دهد و همچنین نشان خواهد داد که الگوریتم هایی که براساس مجموعه مستقل

۱۰-Dominating set
۱۱ - Independent set

ماکزیمال[12] پایه ریزی شده اند به مراتب سریعتر از الگوریتم هایی است که بر اساس کوچکترین مجموعه غالب [13] پایه ریزی شده‌اند، ما را در برآورد جواب مساله p- مرکز یاری می کند و در انتها تعمیمی از مساله p- مرکز را تحت عنوان q امین مرکز دایر در مساله p- مرکز[14] را مورد بررسی قرار می دهیم . فصل چهارم به بیان مساله p- مرکز با کمترین پوشش[15] می پردازد و تعمیمی از مساله p- مرکز را تحت عنوان p- مرکز با q- پوشش[16] و p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز[17] معرفی کرده و سپس در مورد صحت الگوریتم‌های مطرح شده و ضرایب تقریب این الگوریتم‌ها در برآورد جواب مسائل فوق در حالتهای مختلف (نرمال، وزن‌دار، وزن دار به همراه هزینه) پرداخته است. فصل پنجم شامل مکان یابی مراکز در حالت خاص شبکه ها یعنی درختها و به خصوص حالت خاصی از درختها یعنی درختهای عنکبوتی می باشد. در این فصل مساله p- مرکز مطرح شده و سپس در مورد صحت الگوریتمهای مطرح شده در مورد درختهای عنکبوتی , بحث گردیده و پیچیدگی زمانی آنها مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل ششم به بررسی مساله p- مرکز و p- مرکز همبند روی درختهای عنکبوتی در حالتهای خاص می پردازد.

۱۲- Maximal independent set
۱۳- Minimum dominating set
۱۴- q-neighbor p-center
۱۵- P-center with minimum coverage
۱۶- q-all coverage p-center
۱۷- q-coverage p-center

فصل اول

نمادها ، تعاريف رياضي و تعريف مساله

۱-۱ تعاریف ریاضی و مرور ادبیات :

تعریف ۱-۱ : منظور از یک گراف[۱۸] عبارت است از دوتایی به صورت $G=(V,E)$ که در آن $V=\{v_1,v_2,v_3,..v_n\}$ مجموعه ای متناهی که عناصر آن را راس[۱۹] و مجموعه $E=\{e_1,e_2,e_3,..e_m\}$ به صورت زوج های $e_k=(v_i,v_j)$ که آنرا یال[۲۰] می نامند. [۱]

تعریف ۱-۲ : منظور از یک مسیر[۲۱] در یک گراف عبارت است از دنباله ای متناهی و متناوب از رئوس و یالها بطوری که رئوس دو به دو متمایز باشند. مسیری از راس u به راس v را یک (u-v) مسیر گوئیم. [۱]

تعریف ۱-۳ : یک مسیر که در آن راس ابتدایی و انتهایی یکسان باشد, دور[۲۲] نامیده می شود. [۱]

تعریف ۱-۴ : گرافی که بین هر دو گره آن یک مسیر وجود داشته باشد، گراف متصل یا همبند***23*** نامیده می‌شود . [۱]

تعریف ۱-۵ : یک گراف متصل یا همبند که شامل حلقه نباشد، درخت[۲۴] نامیده می شود. [۱]

تعریف ۱-۶ : یک گراف متصل $G=(V,E)$ با مقدار نامنفی $\omega(v)$ (که وزن[۲۵] گره $v \in V$ می‌باشد) و یک عدد مثبت L_e (که طول کمان $e \in E$ نامیده می شود) را یک شبکه[۲۶] می نامند .

---

[۱۸]-Graph
[۱۹]-Vertex
[۲۰]-Edge
[۲۱]-Path
[۲۲]-Cycle
[۲۳]-Connected Graph
[۲۴]-Tree
[۲۵]- Weight
[۲۶]- Network

دراین شبکه، V مجموعه گره‌ها و E مجموعه کمان‌هاست و ما از ایـن بـه بعـد نمـاد $G=(V,E)$ را بـرای شبکه‌ای با مجموعه گره‌های V ومجموعه کمان های E بکار خواهیم برد. [۱]

تعریف ۱-۷ : قطر یک درخت[۲۷] ، حداکثر فاصله بین هر دو راس در درخت می‌باشد . [۱]

تعریف ۱-۸ : یک مسیر در درخت T=(V,E) که طول آن مساوی قطر T باشد، یک مسـیر قطـری[۲۸] در T نامیده می شود و با DP(T) نمایش داده می شود . [۱]

از مهم‌ترین نکات طراحی یک الگوریتم، بحث پیچیدگی زمانی[۲۹] یا زمان اجرای کامل الگوریتم می‌باشد. این زمان به تعداد عملیات ریاضی و منطقی موجود در الگوریتم‌ها وابستگی مستقیم دارد. به طور ساده پیچیدگی زمانی یک الگوریتم را می توان تعداد دفعات اجرای دستور اصلی (یا گروهی از دستورهای اصـلی) بـه کـار رفته در الگوریتم و نیز پیش پردازش‌های الگوریتم تعریف کرد.

تعریف ۱-۹ : برای یک تابع مفروض f(n) , O(f(n)) عبارتست از مجموعه همه توابع پیچیدگی مانـند g(n) به طوری که یک عدد ثابت حقیقی مثبت C و یک عدد صحیح نامنفی N موجود باشد که

$$\forall n \geq N \quad , \quad g(n) \leq c.f(n) \qquad (۱-۱)$$

در این صورت اگر $g(n) \in O(f(n))$ آن گاه گفته می شود g(n) از مرتبه اُی بزرگ f(n) است.[۲]

تعریف۱-۱۰: برای تابع پیچیدگی f(n) , (f(n)) Ω مجموعه همه توابع پیچیدگی مانـند g(n) اسـت کـه برای آن یک ثابت حقیقی مثبت C و یک عدد صحیح نامنفی N وجود داشته باشد که

---

[۲۷]- Diameter of tree
[۲۸]- Diameter path
[۲۹]- Complexity time

$$\forall n \geq N \quad , \quad g(n) \geq c.f(n) \qquad (۲-۱)$$

در این صورت اگر$g(n) \in \Omega(f(n))$ ،گفته می شود g(n) از مرتبه امگای بزرگ f(n) است . [۲]

تعریف۱-۱۱ : برای تابع پیچیدگی $f(n)$ ‚ $\theta(f(n))$ مجموعه همه توابع پیچیدگی مانند g(n) است که برای آن ثابتهای حقیقی ومثبت C, D و یک عدد صحیح نامنفی N وجود داشته باشد که

$$\forall n \geq N \qquad cf(n) \leq g(n) \leq Df(n) \qquad (۳-۱)$$

یا به بیان دیگر $\theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega\ (f(n))$

در این صورت اگر $g(n) \in \theta(f(n))$ باشد می‌گوئیم g(n) از مرتبه تتای f(n) است . [۲]

در ابتدا مفهوم مساله p- مرکز را به طور مختصر بیان می کنیم و در ادامه به بیان تعریف ریاضی مساله خواهیم پرداخت .

۱-۲ تعریف مساله :

مفهوم کلی مساله p- مرکز عبارتست از استقرار بهینه p مرکز عرضه (کالا یا خدمات) در یک جامعه (مجموعه‌ای از مراکز تقاضا) به گونه‌ای که حداکثر فاصله (هزینه یا زمان) حمل کالا (خدمات) از مراکز عرضه به مراکز تقاضا حداقل گردد. به عبارت دیگر هدف، حداقل کردن حداکثر هزینه تامین تقاضا از مرکز عرضه می باشد. در حالتی که مساله بر روی شبکه انجام گیرد (یعنی مراکز عرضه و تقاضا هر کدام گره هایی از یک شبکه باشند) مساله عبارت خواهد بود از یافتن مکان p- مرکز عرضه روی یک شبکه به گونه‌ای که حداکثر هزینه تامین تقاضا حداقل گردد.

تعریف۱-۱۲: فرض کنید $G(V,E,\omega)$ یک گرافی با n رأس و m یال باشد. به طوری که به هر یال $e \in E$ یک فاصله مثبت $\omega(e)$ نسبت داده شده است . برای هر مجموعه H که $H \subset V$ فاصله میان H و هر رأس $v \notin H$ به صورت زیر تعریف می شود

$$d(v,H) = \min_{u \in H}\{d(v,u)\} \tag{۴-۱}$$

به طوری که منظور از d(v,u) طول کوتاهترین مسیر از رأسv به راس u می باشد . [۳]

تعریف۱-۱۳: فرض کنید $G(V,E,\omega)$ با شرایط مذکور در تعریف ۱-۱۲ باشد . در این صورت برای هر مجموعه H که $H \subset V$ است تعریف می کنیم

$$\delta(H) = \max_{v \in V-H}\{d(v,H)\} \tag{۵-۱}$$

به طوری که اگر H=V باشد آن گاه $\delta(H) = 0$. [۳]

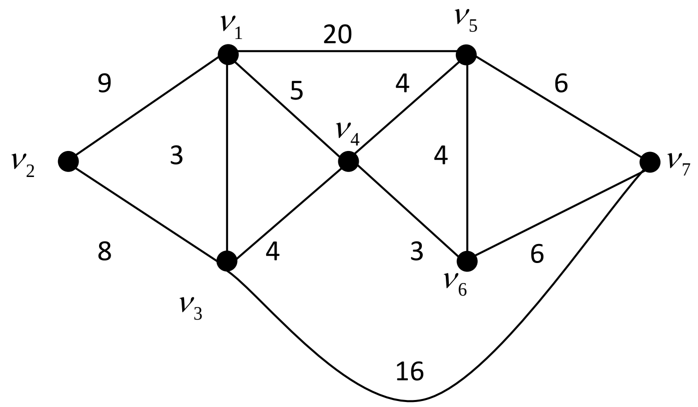
حال با توجه به تعاریف بالا، مساله p- مرکز به صورت زیر تعریف می‌شود :

تعریف۱-۱۴: گراف $G(V,E,\omega)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید p یک عدد صحیح و مثبت باشد بطوری که $P \leq |V|$. مساله p- مرکز عبارتست از تعیین یک زیر مجموعه مانند $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_p\}$ از V به طوری که $\delta(Q)$ مینیمم شده باشد. یعنی

$$\delta(Q) = \max_{v \in V-Q}\{d(v,Q)\}$$

مینیمم شده باشد.[۳]

حال به عنوان مثال گراف (۱-۱) را در نظر بگیرید . در حالتی که P=2 باشد ما به آسانی می‌فهمیم که $H=\{v_3,v_6\}$ یک 2- مرکز از این گراف می باشد به طوری که $\delta(Q)=8$ مینیمم شده است .



شکل (۱- ۱)

<u>تعریف۱-۱۵ :</u> یک P– مرکزی که در بردارنده زیرگرافی همبند باشد را P– مرکز همبند[۳۰] گوئیم .[۳]

با توجه به تعریف (۱-۱۲) بدیهی است که در یک p– مرکز همبند باید داشته باشیم $p\geq 2$ و

همچنین تعداد رئوس گراف G حداقل باید (p+1) باشد یعنی $n\geq p+1$

[۳۰] - Conncted p-center

تعریف ۱-۱۶: گراف $G(V,E,\omega)$ را در نظر بگیرید . فرض کنید که p یک عدد صحیح و مثبت به طوری که $p \geq 2$ باشد. مساله p– مرکز همبند عبارتست از تعیین یک p– مرکز همبندی به صورت $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_p\}$ از G به طوری که $\delta(Q)$ مینیمم شود.[۳]

مجدداً شکل (۱-۱) را در نظر بگیرید. در حالتی که p=2 باشد ، $Q = \{v_3, v_4\}$ یک 2- مرکز همبند از گراف مذکور می باشد به طوری که $\delta(Q) = 9$ مینیمم شده است .

تعریف ۱-۱۷ : راس v را درگراف G=(V,E) یک نقطه انشعاب[۳۱] گوئیم هرگاه درجه راسی v بزرگتر یا مساوی 3 باشد یعنی $d(v) \geq 3$. [۴]

تعریف ۱- ۱۸ : منظور از گراف عنکبوتی[۳۲] T = (V,E) , عبارت است از درختی که حداکثر یک نقطه انشعاب داشته باشد. یعنی حداکثر دارای یک راس ، با درجه راسی بزرگتر یا مساوی 3 باشد.[۴]

تذکر : در صورتی که چنین راسی (راسی با درجه راسی بزرگتر یا مساوی ۳) موجود باشد (که این چنین راسی درصورت وجود، منحصر به فرد است) آنرا با v^* نمایش می دهیم.

تعریف ۱- ۱۹ : در گراف عنکبوتی T=(V,E) , نقطه انشعاب یا همان v^* را به عنوان مرکز گراف تعریف می‌کنیم. [۴]

تعریف ۱- ۲۰ : به هر مسیری از نقطه انشعاب (v^*) به یک راس برگ درگراف عنکبوتی ، یک پا گوئیم.[۴]

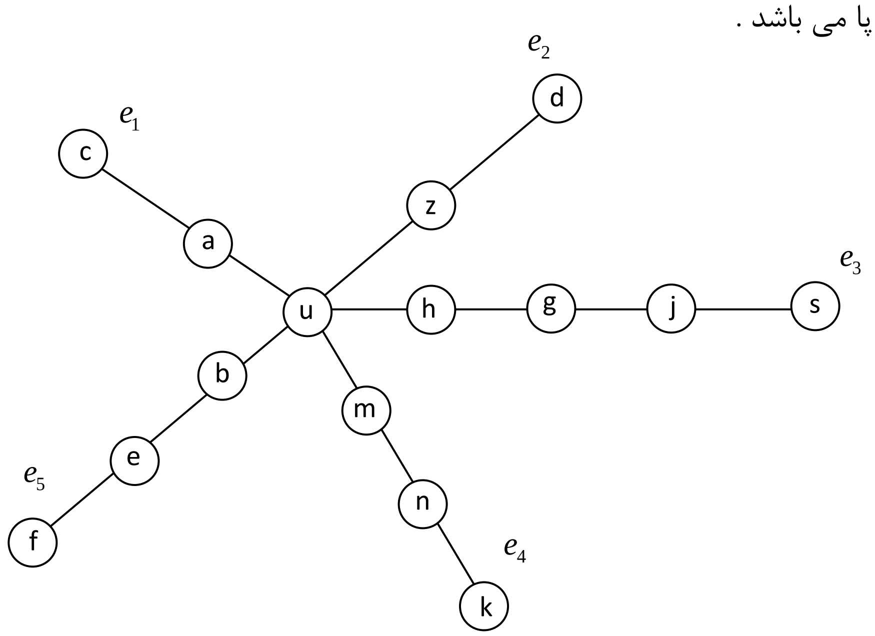
۱۴ -Branch point
۱۵ -Spider graph

توجه : در واقع یک گراف عنکبوتی ، یک درختی است که حداکثر دارای یک نقطه انشعاب می‌باشد و یـک درخت عنکبوتی که دارای نقطه انشعاب نمی‌باشد، به صورت یک مسیرخواهد بود. [۴]

تعریف ۱-۲۱ : منظور از یک الگوریتم با ضریب تقریب[۳۳] α برای یک مساله ماکزیمم یا مینیمم سازی بـا یک جواب بهینه مانند k عبارتست از الگوریتمی با پیچیدگی زمانی از مرتبه چند جمله ای که یـک جـوابی مانند S را برای مساله مذکور ارائه دهد به گونه ای که :

[۵] $S \geq \alpha k$ یا $S \leq \alpha k$ (۶-۱)

به عنوان مثال ، گراف (۱-۲) یک گراف عنکبوتی می‌باشد به طوری که مرکز آن یا نقطه انشعاب آن رأس u بوده و دارای پنج پا می باشد .



۱۶ -Approximation factor

شکل (۱- ۲)

فصل دوم

مجموعه غالب و ارتباط آن با مساله

مساله p- مرکز

۲-۱ مجموعه غالب و ویژگی های آن

در این بخش ما ابتدا مفهومی تحت عنوان مجموعه غالب را بیان نموده و سپس به بیان ارتباط میان آن بـا مساله مکان‌یابیp - مرکز می‌پردازیم و در ادامه , الگوریتمی را تحت عنوان الگوریتم SCR که جهت بـرآورد جواب مساله p- مرکز به کار می رود معرفی نموده و پیچیدگی زمانی الگوریتم بیان می شود.

تعریف۲-۱: فرض کنید G=(V,E) یک گراف باشد. مجموعه $D \subseteq V$ را یک مجموعه غالب[۳۴] از گـراف G گوئیم هر گاه هر راس $v \in V - D$ با حداقل یک راس از D مجاور[۳۵] باشد .[۵]

تعریف۲-۲: فرض کنید G=(V,E) یک گراف باشد. مجموعه $D \subseteq V$ را کوچکترین مجموعـه غالـب[۳۶] از گراف G گوئیم هرگاه D یک مجموعه غالب گراف G باشد و $|D|$کمترین مقدار ممکن باشد .[۵]

چون تعیین کوچکترین مجموعه غالب گراف جزء دسته مسائل Np-hard می باشد, لذا بایـد از طریـق روش های ابتکاری جهت تعیین آن اقدام نمود. لذا در این قسمت ابتدا به بیان یک الگوریتم ابتکاری جهت تعیین

[۳۴]- Dominating set
[۳۵]- Adjacent
[۳۶]- Minimum dominating set

کوچکترین مجموعه غالب گراف G می‌پردازیم و سپس در ادامه پیچیدگی زمانی آن را مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد.

۲-۲ الگوریتم تعیین کوچکترین مجموعه غالب گراف : [۵]

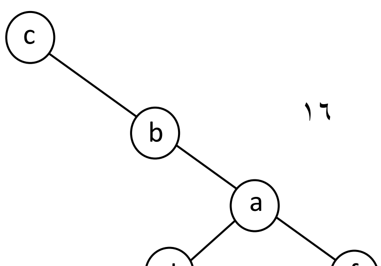
ورودی: گراف G=(V,E)

خروجی : کوچکترین مجموعه غالب D از گراف G

```
for all v ∈ V  do      covcnt[v] = deg(v) + 1;
score[v] := covcnt[v];
D := φ;
repeat |V| times
  x := select a node with minimal Score;
  if ∃y ∈ V : ( (x, y) ∈ E   ,   covcnt[y] = 1)  Then
    D := D ∪ {x};
    for all  y : (x, y) ∈ E  do     covcnt[y] := 0;
  else
    for all  y : (x, y) ∈ E  do
      if  covcnt[y] > 0 Then
        covcnt[y] := covcnt[y] − 1;
        score[y] := score[y] + 1;
      endif ;
  end if ;
  score[x] := ∞;
end;
return D.
```

تذکر : در الگوریتم (۲-۲) ، هر راس با خودش مجاور فرض می شود. بنابراین متغیر $\text{cov}cnt[v]$ بیانگر تعداد رئوسی است که با راس v مجاور است .

برای فهم بهتر الگوریتم (۲-۲) ، گراف G=(V,E) را که به صورت شکل (۲-۱) داده شده است را در نظر می‌گیریم. می خواهیم کوچکترین مجموعه غالب را برای آن بیابیم .



شکل(۲-۱)

مراحل اجرای الگوریتم (۲-۲) برای گراف (۲-۱) در جدول (۲-۱) بیان شده است .

جدول ۲-۱: مراحل اجرای الگوریتم(۲-۲) جهت یافتن کوچکترین مجموعه غالب شکل(۲-۱)

v	s/c	c	e	h	f	b	d	g	a
a	4/4				5/3	6/2	7/1		∞/0
b	3/3	4/2				∞/1			∞/0
c	2/2	∞/1				∞/0			
d	3/3		4/2				∞/1		∞/0
e	2/2		∞/1				∞/0		
f	3/3				∞/2			∞/1	∞/0
g	3/3			4/2	5/1			∞/0	
h	2/2			∞/1				∞/0	

مطابق جدول (۲-۱), مجموعه $D=\{b,d,g\}$ ، کوچکترین مجموعه غالب گراف G می باشد.

۲-۳ بررسی پیچیدگی زمانی الگوریتم (۲-۲):

در این قسمت پیچیدگی زمانی الگوریتم (۲-۲) را مورد بررسی قرار می دهیم. در صورتی که فرض کنیم $|V|=n$ باشد , بنابراین واضح است که دستورات خط ۳-۱ دارای پیچیدگی زمانی از مرتبه $O(n^2)$ می‌باشد. همچنین بدنه اصلی الگوریتم n بار انجام می شود و در هر بار تکرار، تعیین راسی با کمترین مقدار score ، دارای پیچیدگی زمانی از مرتبه $O(n)$ می‌باشد . خط ۶ و به علاوه حلقه های درونی (خطهای ۸ و۱۴-۱۰) همگی در پیچیدگی زمانی از مرتبه $O(n)$ ارزیابی می شوند. بنابراین الگوریتم (۲-۲) دارای پیچیدگی زمانی از مرتبه $O(n^3)$ می باشد.

۲-۴ کاربرد مجموعه غالب در مساله p- مرکز :

الگوریتمی که جهت برآورد مساله p- مرکز به کار می رود , تلفیقی از الگوریتم‌های مجموعه غالب و الگوریتم اصلاح پارامتر[۳۷] می باشد که این الگوریتم تحت عنوان الگوریتم SCR معرفی می شود . شیوه کار این الگوریتم به این صورت است که ابتدا یالها را براساس فاصله ، به صورت غیر نزولی مرتب می کنیم و سپس زیرگرافی از گراف اصلی به این صورت می سازیم که برای هر یالی با فاصله t، گرافی که از حذف یالهایی که فاصله آنها از t بزرگتر است را به دست می‌آوریم[۳۸] وکوچکترین مجموعه غالب C را برای گراف مذکور می یابیم . اگر اندازه مجموعه C ، کوچکتر یا مساویp باشد آنگاه C به عنوان یک جواب برای مساله p- مرکز می باشد . در صورتی که فرض کنیم G=(V,E) یک گراف باشد و D کوچکترین مجموعه غالب

۳۷-Parametric pruning
۳۸ -Bottleneck Graph

برای گراف G باشد در این صورت با توجه به تعریف مجموعه غالب, هر راس $v \in V - D$ باید با حداقل یک راس از D مجاور باشد. مساله p- مرکز را در نظر می گیریم. بنابراین با توجه به مفهوم کوچکترین مجموعـه غالب, هر نقطه یا گره در شبکه (رئوس غیر واقع در مجموعه غالب) باید توسط حداقل یکی از مراکز (رئـوس واقع در مجموعه غالب) تحت پوشش قرار گیرد.

۲-۵ الگوریتم SCR [۳۹]: [۵]

ورودی : گراف G=(V,E) بطوری که به هر یال $e \in E$ ،فاصله c_e نسبت داده شده است .

خروجی : مجموعه C که به عنوان مجموعه مرکزها می باشد .

۱) ابتدا یالها را براساس فاصله ، به صورت غیر نزولی به صـورت $c_1, c_2, \ldots, c_m$ مرتـب مـی کنـیم بـه طوری که $|E| = m$

$$
\begin{aligned}
&2.\ for \quad c_i := c_1 \ \ to \ \ c_m \ \ do \\
&3.\ G_i := BottleneckGraph \quad (G, c_i); \\
&4.\ C := Dominating\ set\ (G_i); \\
&5.\ if\ |C| \le p\ \ Then \quad return C; \\
&6.\ end.
\end{aligned}
$$

۲-۶ بررسی پیچیدگی زمانی:

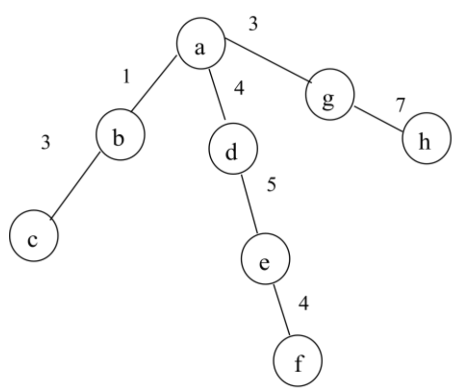
در صورتی که فرض کنیم G=(V,E) گرافی با n راس و m یال باشد یعنی $|V| = n$, $|E| = m$ آن گـاه مرتــب کــردن m یــال بــر اســاس فاصــله بــه صــورت غیــر نزولــی، دارای پیچیــدگی زمــانی از مرتبــه $O(n^2 \log n) = O(m \log m)$ می باشد . بدنه اصلی الگوریتم یعنی خطوط (2-6) دارای پیچیدگی زمانی از

۳۹-Scoring heuristic

مرتبـــه $O(m)=O(n^2)$ مـــی باشـــد . بنـــابراین الگـــوریتم Scr دارای پیچیـــدگی زمـــانی از مرتبـــه $O(mn^3)=O(n^5)$ می باشد . الگوریتم SCR را می توان به صورت دیگری بیان کرد . در واقع اســاس کـار الگوریتم Scr مبتنی بر تکنیک زیرگراف شامل[۴۰] می باشد که به صورت زیر بیان می شود :

ابتدا فرض می کنیم که مجموعه یالها یعنی $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ بر اساس فاصله وزن دار بصورت غیر نزولی مرتب شده است. یعنی برای هر $1\le i\le m-1$ داریم $\omega(e_i)\le\omega(e_{i+1})$ فرض می کنیم زیرگراف ما , گرافی بصورت $G_i=(V,E_i)$ بطوری که $E_i=\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$ باشد . یعنی G_i زیرگرافی از G می باشد بطوری کـه شامل تمام یالهایی اسـت کـه حـداکثر فاصـله وزن دار آن برابـر $\omega(e_i)$ مـی باشـد . بنـابراین بـه ازای هـر $1\le i\le m$ زیرگرافهای $G_m,\ldots,G_2,G_1$ را می‌سازیم و در هر مرحله کوچکترین مجموعـه غالـب را بـرای آن گراف می یابیم . برای یافتن جواب مساله p– مرکز ، کوچکترین مجموعه غالب مانند S ازگـراف G_j را مـی یابیم به طوری که $|S|\le p$ و j کوچکترین اندیسی است به طوری کـه زیرگـراف G_j شـامل یـک مجموعـه غالب از حداکثر p راس می‌باشد .

از طریق الگوریتم (۲- ۵) جواب مساله ۳- مرکز را برای درخت عنکبوتی (شکل ۲-۳) برآورد می کنیم.



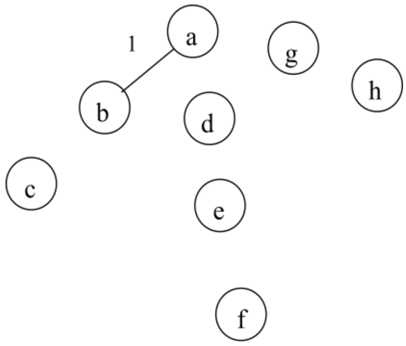
شکل(۲-۳)

[۴۰]- Bottleneck technique

در گام نخست ، وزن یال های درخت را به صورت غیر نزولی مرتب می کنیم .

(۷ و ۵ و ۴ و ۴و ۳ و ۳ و ۱)

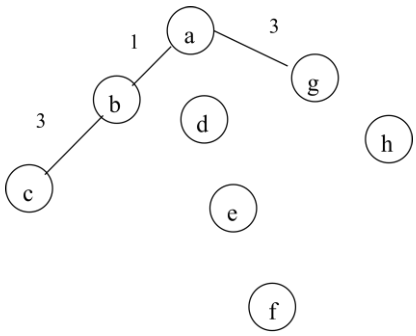
بنابراین زیر گراف (۲-۴) تشکیل می گردد .



شکل(۲-۴)

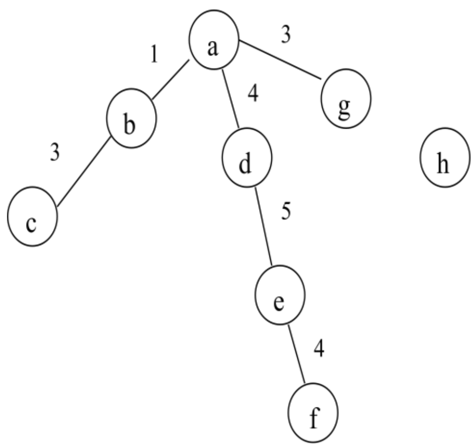
کوچکترین مجموعه غالب برای زیر گراف شکل (۲-۴) به صورت { D = { c, d, e , f , g, h , b

می باشد و چون $|D| = 7 \le 3$ نمی باشد لذا به گام بعد می رویم .



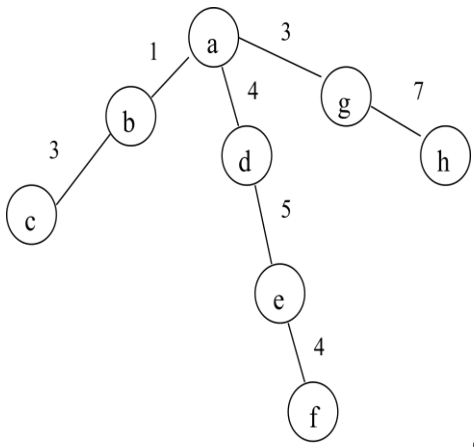
شکل(۲-۵)

کوچکترین مجموعه غالب را برای زیر گراف شکل (۲-۵) بدست می آوریم . کوچکترین مجموعه غالب برای زیر گراف مذکور به صورت D={d , e, f, h, a, b} و چون $|D| = 6 \le 3$ نمی باشد, لذا به گام بعد می رویم. کوچکترین مجموعه غالب را برای زیرگراف شکل (۲-۶) به دست می آوریم. اما کوچکترین مجموعه غالب برای گراف شکل (۲-۶) به صورت D={h , b , e , a} می باشد و چون $|D| = 4 \le 3$ نمی باشد لذا به گام بعد می رویم .



شکل(۲-۶)

کوچکترین مجموعه غالب را برای زیر گراف شکل (۲-۷) بدست می آوریم . اما کوچکترین مجموعه غالب برای گراف مذکور به صورت D = { b, g , e } و چون $|D| = 3 \le 3$ می باشد لذا D = {b, g , e} به عنوان جوابی برای مساله ۳- مرکز می باشد.



شکل(۲-۷)

نتیجه : در این فصل مفهوم کوچکترین مجموعه غالب مورد بررسی قرار گرفت و ذکر شد که تعیین کوچکترین مجموعه غالب از یک گراف جزء دسته مسائل Np-hard می باشد. همچنین در ادامه یک الگوریتم ابتکاری تحت عنوان الگوریتم SCR که بر اساس کوچکترین مجموعه غالب پایه ریزی شده و جهت برآورد جواب مساله p- مرکز به کار می رود, بیان شد که این الگوریتم بر اساس مفهوم مجموعه غالب تضمین می کند که هر نقطه یا هر گره شبکه توسط حداقل یک مرکز ارائه تسهیلات پوشش داده می شود که این مراکز ارائه تسهیلات همان اعضای کوچکترین مجموعه غالب می باشد.

فصل سوم

مجموعه مستقل و ارتباط آن با مساله p- مرکز

۳-۱ مجموعه مستقل و مجموعه مستقل ماکزیمال:

در این قسمت به بیان مفاهیم مجموعه مستقل و مجموعه مستقل ماکزیمال[41] پرداخته و در ادامه بـه بیـان الگوریتم‌هایی که براساس مجموعه مستقل ماکزیمال پایه ریزی شده اند و جهت برآورد مساله p- مرکز بکار می رود، می‌پردازیم. این الگوریتم‌ها برآمده از الگوریتم‌هایی است که توسط وانگ[42], زو[43], لیم[44] و رودریگز[45] در سال ۲۰۰۵ بیان شده اند. همچنـین خـواهیم دیـد کـه الگوریتم‌هـایی کـه براسـاس مجموعـه مسـتقل ماکزیمال پایه ریزی شده اند و جهت بـرآورد مسـاله p- مرکـز بـه کـار مـی رود، بـه مراتـب راحـت تـر از الگوریتم‌هایی است که بر اساس کوچکترین مجموعه غالب پایه ریزی شده اند.

تعریف۳-۱: فرض کنید G=(V,E) یک گراف باشد . در این صورت مجموعه $S \subseteq V$ را مجموعـه مسـتقل برای گراف G گوئیم هرگاه داشته باشیم $\forall i, j \in S : (i, j) \notin E$ [۸]

تعریف۳-۲: مجموعه $S \subseteq V$ را یک مجموعه مستقل ماکزیمال برای گراف G=(V,E) گوئیم هرگاه اولاً S یک مجموعه مستقل باشد و ثانیاً به ازای هر راس $v \notin S$ ، $S \cup \{v\}$ ، یک مجموعه مستقل نباشد. [۸]

تعریف۳-۳: مجذور گراف G(V,E)= ، گرافی است که آن را با $G^2 = (V, E^2)$ نمایش می دهیم به طوری که بین دو راس ، j,i یک یال وجود دارد اگر وتنهـا اگـر یـک مسـیری از یـک یـا دو یـال بـین j,i موجـود باشد.[۸]

۴۱- Maximal independent set
۴۲- Wang
۴۳- uX
۴۴- Lim
۴۵- Rodrigues

تعریف۳-۴ : t امین توان یک گراف مانند G=(V,E) ، گرافی است که آن را بـا $G^t = (V, E^t)$ نمـایش می دهیم به طوری که بین دو راس مجزای i و j یک یال وجود دارد اگر و تنها اگر یک مسیری از حداکثر t یال بینi و j موجود باشد.[۸]

در این قسمت به کمک یک لم، به بیان ارتباط میان مجموعه مستقل ماکزیمال و کوچکترین مجموعه غالب می‌پردازیم . در واقع لم ۳-۱ ارتباط میان اندازه کوچکترین مجموعه غالب گـراف G و انـدازه یـک مجموعـه مستقلی مانند I از گراف G^2 را بیان می کند.

لم۳-۱: فرض کنید G=(V,E) یک گراف باشد و I یک مجموعه مستقل در گراف G^2 باشد. در صورتی کـه فرض کنیم dom(G) بیانگر اندازه کوچکترین مجموعه غالب گراف G باشد آن گاه $|I| \le dom(G)$ [۸]

اثبات: فرض کنیم D کوچکترین مجموعه غالب از گراف G باشد.در این صورت برای هـر راس $d \in D$, یـک دسته[۴۶] در G^2 توسط همسایگی از d تشکیل می شـود. بنـابراین G^2 شـامل $|D|$ دسـته فراگیـر از همـه راس‌ها می باشد به طوری که هر مجموعه مستقل از G^2 حداکثر یک راس را می تواند از این دسته انتخـاب کند . لذا $|I| \le |D|$.

۳-۲ الگوریتم مساله p- مرکز با مجموعه مستقل ماکزیمال[۴۷] :

ورودی : گراف G=(V,E) به طوری که به هر یال $e \in E$ ، یک فاصله مثبت d(e) نسبت داده شده است .

خروجی : مجموعه مرکزها

۴۶-Clique
۴۷-P-center with maximal independent set

۱) ابتدا یالها را بر اساس فاصله، بصورت غیر نزولی مرتب کنید به طوری که $d(e_1) \le d(e_2) \le \ldots \le d(e_m)$ و $|E| = m$

۲) گرافهای $G_m^2, \ldots, G_2^2, G_1^2$ را بسازید که در آن

$$E_i = \{e \in E | d(e) \le d(e_i)\},\ G_i = (V, E_i)$$
$$(1 \le i \le m)$$

۳) مجموعه مستقل ماکزیمال M_i را برای هر گراف G_i^2 $(1 \le i \le m)$ تعیین کنید .

۴) j را برابر کوچکترین اندیس i قرار دهید به طوری که $|M_i| \le p$.

۵) M_j را به عنوان مجموعه مراکز معرفی کنید .

الگوریتم (۳-۲) ضریب تقریبی از ۲ را برای مساله p- مرکز ارائه می کند. [۹]

اثبات این مطلب در فصل چهارم بیان شده است.

۳-۳ الگوریتم مساله p- مرکز وزن دار با مجموعه مستقل ماکزیمال [۴۸] :

ورودی: گرافی مانند G=(V,E) به طوری که به هر راس $v \in V$ ، وزنی معادل $\omega(v)$ نسبت داده شده است .

خروجی : مجموعه مرکزها

۱) ابتدا یالها را براساس فاصله وزن دار به صورت غیر نزولی مرتب کنید به این صورت که $\omega(e_1) \le \omega(e_2) \le \ldots \le \omega(e_m)$

۲) گرافهای $G_m^2, \ldots, G_2^2, G_1^2$ را بسازید .

۴۸- Weighted p-center with maximal independent set

۳) مجموعه مستقل ماکزیمال M_i را برای هر گراف G_i^2 $(1 \le i \le m)$ تعیین کنید .

۴) j را برابر کوچکترین اندیس i قرار دهید به طوری که $|M_i| \le p$.

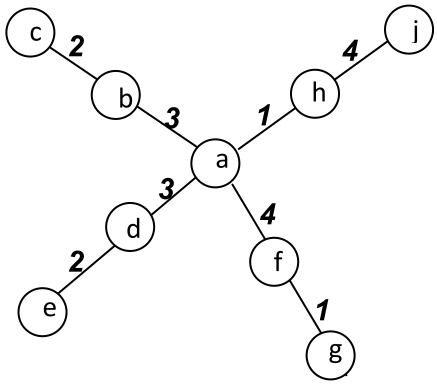
۵) قرار دهید $U = \{g_j(v) | v \in M_j\}$ به طوری که برای هر راس $g_j(v), v \in M_j$ بیانگر راسی است که با راس v مجاور است و دارای حداقل وزن باشد.

۶) U را به عنوان مجموعه مراکز معرفی کنید .

الگوریتم (۳-۳) , ضریب تقریبی از ۳ را برای مساله p- مرکز وزن دار ارائه می کند. [۹]

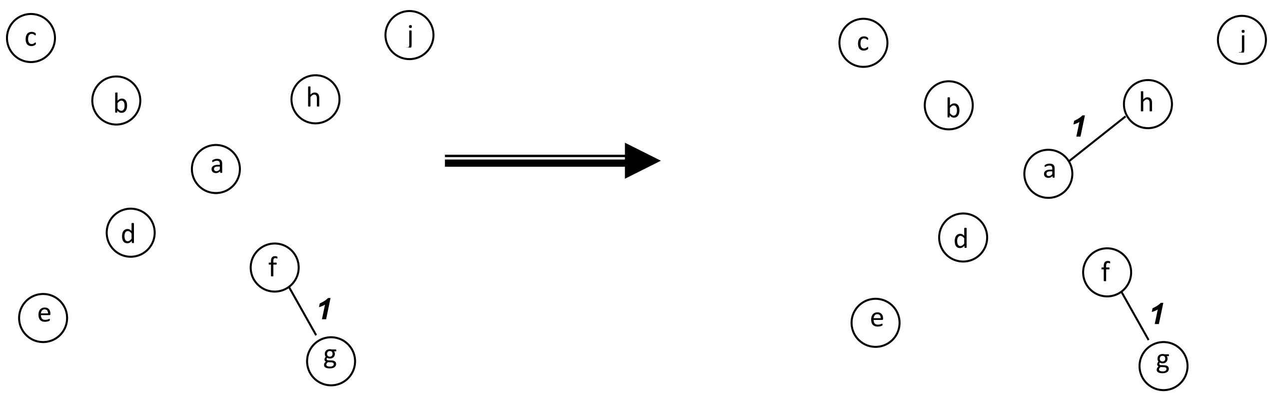
اثبات این مطلب در فصل چهارم بیان شده است. در واقع الگوریتم (۳-۲) و (۳-۳) حالت کلی از الگوریتم های (۴-۳) و (۴-۴) می باشد.

در این قسمت از طریق الگوریتم (۳-۲) جواب مساله ۳- مرکز را برای گراف عنکبوتی شکل (۳-۱) به دست می آوریم.



شکل (۳-۱)

در این حالت ، ابتدا یال‌ها را براساس فاصله به صورت غیر نزولی مرتب نموده و گرافهای G_i^2, G_i ، را که $(1 \le i \le 8)$ را تشکیل می‌دهیم .



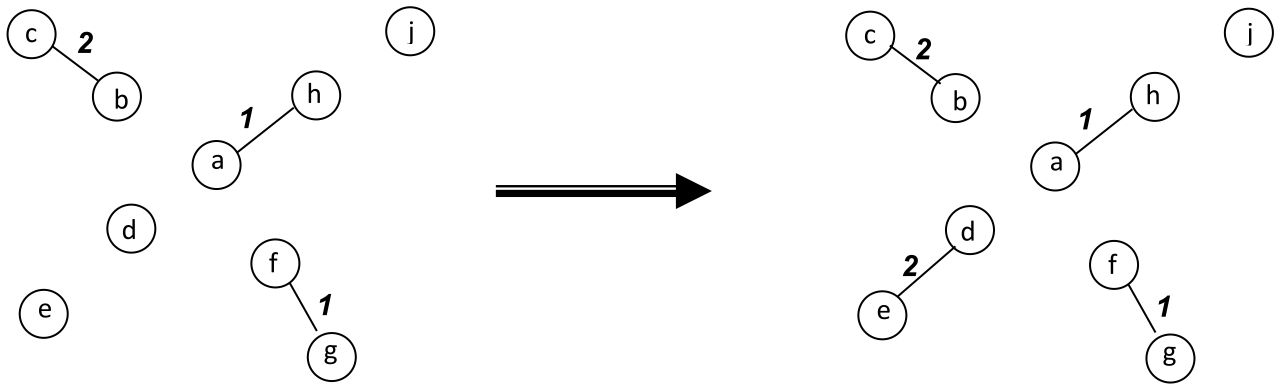
شکل (۳-۲)

گراف G_1^2, G_1

$M_1 = \{a,b,c,d,e,f,h,i\}$

گراف G_2^2, G_2

$M_2 = \{a,b,c,d,e,f,i\}$

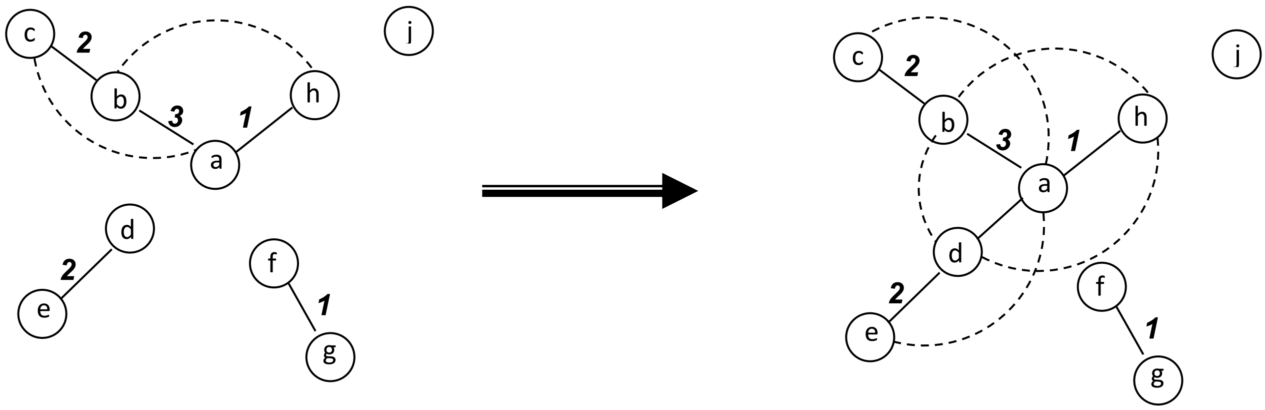


گراف G_3^2, G_3

$M_3 = \{a,b,d,e,f,i\}$

گراف G_4^2, G_4

$M_4 = \{a,b,d,f,i\}$



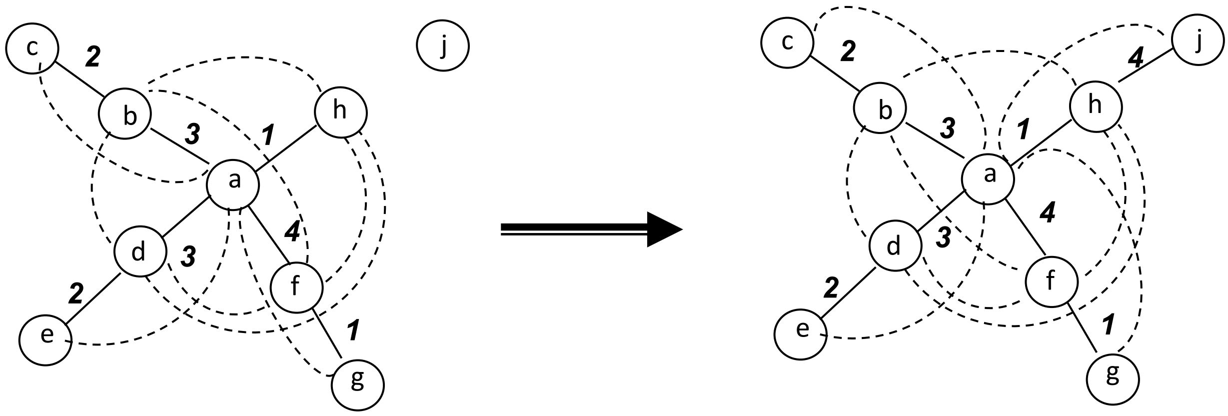
شکل(۳-۴)

گراف G_5^2, G_5

$$M_5 = \{a, d, f, i\}$$

گراف G_6^2, G_6

$$M_6 = \{a, f, i\}$$



گراف G_7^2, G_7

$$M_7 = \{a, i\}$$

گراف G_8^2, G_8

$$M_8 = \{a\}$$

اما چون ما جواب مساله ۳- مرکز را می خواهیم لذا کوچکترین اندیس i بطوری که $|M_i| \le 3$ باشـد برابـر۶ خواهد بود. بنابراین $M_6 = \{a, f, i\}$ جواب مساله ۳- مرکز برای گراف عنکبوتی شکل(۳-۱) می باشد.

۳-۴ q امین مرکز دایر در مساله p- مرکز[۴۹] :

در این قسمت تعمیمی از مساله p- مرکز را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض کنید n شهر داریم . حال می خواهیم که تسهیلات را در p شهر از n شهر مکان‌یابی کنیم به طوری که ماکزیمم فاصله‌ها از یک شهر تا q امین تسهیلات نزدیک به آن، مینیمم شده باشد. در واقع اگر تسهیلات با خرابـی یـا عـدم موفقیـت مواجـه شوند، ما می خواهیم تضمین کنیم که اگر حتی (q-۱) تسهیلات با خرابی مواجـه شـوند، هـر شـهری یـک تسهیلات دایر و در حال کار دارد که به آن نزدیک است . ما این تعمیم مساله p- مرکـز را q امـین مرکـز دایر در مساله p- مرکز نامگذاری می کنیم .

این مساله به صورت زیر بیان می شود :

هدف : عبارتست از تعیین یک مجموعه مانند S از حداکثر p راس به طوری که

$$\max_{v \in V - S} d_q(v,S) \qquad (۱-۳)$$

مینیمم شده باشد . منظور از $d_q(v,S)$ عبارتست از فاصله q امین راس نزدیک به S در V-S می باشد. در حالتی که q=1 باشد، مساله p- مرکز حاصل می شود . ما ابتدا در این قسمت مفهوم مجموعه های مستقل و غالب را تعمیم می دهیم و سپس الگوریتمی را که از طریق یک لم که پیرامون این مجموعه ها در نظریه

۴۹- q neighbor p-center

گرافها مطرح می شود، بیان می کنیم . این الگوریتم توسط شخصی به نام کرومکه[۵۰] در سال ۱۹۹۵ مطرح و بیان گردیده است. [۱۰]

تعریف۳-۵ : فرض کنید G=(V,E) یک گراف باشد. مجموعه $S \subseteq V$ را یک مجموعه p– غالب[۵۱] برای گراف G گوئیم هر گاه هر راس $v \in V - S$ با حداقل p راس در S مجاور باشد.

یعنی داشته باشیم: $\forall v \in V - S : \deg_S(v) \geq p$ [۱۰]

تعریف۳-۶ : فرض کنید G=(V,E) یک گراف باشد. مجموعه $S \subseteq V$ را یک مجموعه p– مستقل[۵۲] برای گراف G گوئیم هرگاه هر راس $v \in S$، با کمتر از p راس در S مجاور باشد . یعنی $\forall v \in S \quad : \deg_S(v) \leq p-1$ [۱۰]

تذکر : با توجه به تعاریف (۳-۵) و(۳-۶) ، یک مجموعه ۱- غالب همان مجموعه غالب خواهد بود و یک مجموعه ۱- مستقل از یک گراف مانند G، همان مجموعه مستقل از گراف G می باشد . حال به بیان لم‌هایی که ارتباط میان اندازه یک مجموعه p– غالب در گراف G و اندازه یک مجموعه p– مستقل در گراف G^2 و G را بیان می کند، می پردازیم که نهایتاً به ارتباط میان مجموعه‌های غالب و مجموعه‌های مستقل ماکزیمال منتهی می شود .

لم۳-۲: فرض کنید G=(V,E) یک گراف باشد. در صورتی که یک مجموعه p– غالب با اندازه k برای گراف G موجود باشد آن گاه مجموعه p– مستقلی با اندازه بزرگتر از k برای گراف G^2 وجود ندارد. [۱۰]

۵۰ -Krumke
۵۱ -P-dominating
۵۲ - P-independent

اثبات: فرض کنید D یک مجموعه p– غالب از گراف G باشد بـه طـوری کـه $|D|=k$ و همچنـین I یـک مجموعه p– مستقل از گراف G^2 باشد. فرض کنیم که $v\in I-D$ و S_1 مجموعه تمام رئوسی درD باشـد به طوری که با راس v مجاورند و S_2 مجموعه تمام رئوسی در V-D باشد به طـوری کـه بـا رئـوس در S_1 مجاورند. فرض کنید $S=S_1\bigcup S_2$. بنابراین هر راسی در S یک همسایه‌ای از v در گراف G^2 می باشد و

مجموعه I حداکثر p راس از S را شامل می شود. لذا مجموعـه D، حـداقل p راس از S را دربـر دارد و ایـن بدان معناست که D-S یک مجموعه p– غالب از گـراف $G[V-S]$ و $I-S$ یـک مجموعـه p– مســتقل از گراف $G^2[V-S]$ می باشد. با ادامه این روند، سرانجام به وضعیتی خواهیم رسید به طوری که راسی وجود ندارد که متعلق به مجموعه p– مستقل باشد اما متعلق به مجموعه p– غالب نباشد. بنابراین در هر مرحلـه تعداد رئوسی که از I حذف شده اند حداکثر برابر تعداد رئوسی است که از D حذف شده اند. بنابراین داریـم $|I|\le|D|=k$.

همچنین کرومکه نشان داده است که یک مجموعه p– مسـتقل ماکزیمـال در گـراف G یـک مجموعـه p– غالب در گراف G^2 می‌باشد. در ادامه نشان خواهیم داد که یک مجموعه p– مسـتقل در گـراف G موجـود است به طوری که یک مجموعه p– غالب نیز می‌باشد.

لم ۳-۳: فرض کنید G=(V,E) یک گراف بوده به طوری که $1\le p\le n$ باشد. در این صورت یک مجموعه – p مستقل مانند $S\subseteq V$ برای گراف G موجود اسـت بـه طـوری کـه S یـک مجموعـه p– غالـب نیـز مـی باشد.[۱۰]

اثبات : فرض کنید S یک مجموعه p– مستقل از گـراف G بـوده بـه طـوری کـه یـک مجموعـه p– غالـب نمی‌باشد . حال فرض کنید $v\in V-S$ باشد به طوری که داشته باشـیم $\deg_S(v)=q<p$. همچنـین

فرض کنید U مجموعه تمام رئوسی در S بوده به طوری که با راس v مجاور است و دارای دقیقاً p-1 راس مجاور در S باشد . فرض کنید $G[U]$ بیانگر زیرگرافی از G باشد که توسط مجموعه U تشکیل شده است. در صورتی که فرض کنیم I یک مجموعه مستقل ماکزیمال از گراف $G[U]$ باشد آن گاه $S - I \cup \{v\}$ یک مجموعه p– مستقل می باشد . جهت اثبات لم (۳-۳) ، برای یک مجموعه p– مستقل یک تابع پتانسیل را به این صورت تعریف می کنیم به طوری که در هر مرحله یک مجموعه p– مستقل جدید $S - I \cup \{v\}$ که دارای پتانسیل اکیداً بیشتر از مجموعه مبدا S می باشد , جایگزین می کند.

این روند ما را به جایی می‌رساند که یک مجموعه p– مستقل با ماکزیمم پتانسیل باید یک مجموعه p– غالب باشد. حال برای یک مجموعه p– مستقل مانند S تابع پتانسیل را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\psi(S) = P.|S| - |E(G[S])| \qquad (۳-۲)$$

به طوری که $E(G[S])$ بیانگر مجموعه یالهای زیرگراف $G[S]$ می باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} &|S| - |S - I \cup \{v\}| = |I| - 1 \\ &|E(G[S])| - |E(G[S - I \cup \{v\}])| = (P-1)|I| - (q - |I|) \end{aligned} \qquad (۳-۳)$$

لذا با توجه به رابطه (۳-۳) داریم

$$\psi(S) - \psi(S - I \cup \{v\}) = q - p < 0$$

بنابراین از یک مجموعه p– مستقل که مجموعه p– غالب نبود ما مجموعه p– مستقل دیگری با پتانسیل اکیداً بزرگتر از مجموعه p– مستقل قبلی به دست می آوریم .

بنابراین مجموعه p– مستقل با ماکزیمم پتانسیل، یک مجموعه p– غالب می باشد . روندی که در اثبات لم ۳-۳ ذکر شد، روشی از مرتبه چندجمله ای را جهت به دست آوردن یک مجموعه p– مستقل که یک

مجموعه p– غالب نیز می باشد ارائه می دهد. ما ابتدا با تعدادی مجموعه p– مستقل شروع می کنیم و اگر این مجموعه, مجموعه ای p– غالب نباشد, ما راسی را که با کمتر از p راس در این مجموعه مجاور است پیدا کرده و همانطور که در اثبات لم ۳-۳ ذکر شد سپس آن را از مجموعه حذف می کنیم و به مجموعه – p مستقل دیگری جهت به دست آوردن مجموعه p– مستقلی که دارای پتانسیل اکیداً بزرگتر از قبلی است اضافه می کنیم. لذا از آنجایی که پتانسیل یک مجموعه p– مستقل حداقل برابر صفر و حداکثر برابر $p|V|$

می‌باشد، ما یک مجموعه p– مستقل که یک مجموعه p– غالب نیز می باشد را در حداکثر $p|V|$ گام به دست می‌آوریم.

۳-۵ الگوریتم با ضریب تقریب ۲ برای مساله q امین مرکز دایر در مساله p- مرکز : [۱۰]

فرض کنید G_i اولین زیرگرافی از دنباله... $G_1,G_2,G_3,$ باشد که برای G_i^2 مجموعه q- مستقل از طریق روشی که در اثبات لم ۳-۳ ذکر شد با اندازه حداکثر p یافت شود. بنابراین نامساوی مثلث ایجاب می کند که طولانی‌ترین یال در گراف G_i^2 دارای فاصله وزنداری حداکثر به میزان $2w_i$ می باشد . بنابراین تا زمانی که در G_{i-1}^2 , ما یک مجموعه q- مستقل با اندازه بزرگتر از p پیدا کنیم با توجه به لم (۳-۲)، G_{i-1} یک مجموعه q- غالب با اندازه کوچکتر از p ندارد . بنابراین مقدار بهینه اکیداً بزرگتر از w_{i-1} می باشد (یعنی حداقل برابر w_i) و لذا این روش یک الگوریتم با ضریب تقریب از ۲ را برای q امین مرکز دایر در مساله p- مرکز ارائه می‌دهد.

نتیجه :

در این فصل مفهوم مجموعه مستقل و مجموعه مستقل ماکزیمال مورد بررسی قرار گرفت و الگوریتم هایی که بر اساس مجموعه مستقل ماکزیمال پایه ریزی شده اند و جهت برآورد جواب مساله p- مرکز در حالتی که رئوس وزندار یا غیر وزندار باشند, به کار می روند مطرح شد. در واقع ارتباط میان مجموعه مستقل ماکزیمال و مساله p- مرکز را می توان به این صورت بیان نمود که با توجه به مفهوم مجموعه مستقل ماکزیمال, تا حد امکان هیچ دو مرکز ارائه تسهیلات با یکدیگر مجاور نبوده و هر نقطه یا گره در شبکه

توسط حداقل یک مرکز ارائه تسهیلات پوشش داده می شود. همچنین طبق لم۳-۳ دیدیم که یک مجموعه q- مستقل با ماکزیمم پتانسیل یک مجموعه q- غالب می باشد و این تضمین می کند که هر نقطه یا گره در شبکه توسط حداقل q مرکز پوشش داده می شود.

فصل چهارم

مساله p- مرکز با کمترین پوشش

۴-۱ مساله p- مرکز با q- پوشش[۵۳] و p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز[۵۴] :

در این قسمت ، ما توسیعی از مساله مکانیابی تسهیلات به نام p– مرکز را مورد بررسی قرار می‌دهیم بطوری که مراکز موظفند که حداقل یک تعدادی از مشتری ها یا متقاضیان را سرویس دهند. این مسائل تحت عناوین مساله p- مرکز با q- پوشش و p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز معرفی می‌شوند که در ادامه به بیان هر کدام از مسائل و الگوریتم‌هایی که برای برآورد جواب آنها به کار می روند می‌پردازیم. تمامی این گونه مسائل جز دسته مسائل Np-hard می‌باشند. ابتدا مساله p- مرکز را تعریف کرده و سپس با توسعه تعریف، مسائل فوق را تعریف می‌کنیم .

تعریف ۴-۱ : گراف غیر جهت‌دار G=(V,E) را به همراه یک متر $d: V \times V \rightarrow R^{+}$ و یک عدد صحیح و مثبت p در نظر بگیرید. مساله p– مرکز عبارتست از تعیین یک زیر مجموعه‌ای مانند $U \subseteq V$ از حداکثر p مرکز بطوری که ماکزیمم فاصله‌ها از نقاط در V به U مینیمم شود. [۱۱]

تابع هدف را می توان به صورت زیر بیان نمود.

۵۳- q-all coverage p-center
۵۴- q-coverage p-center

$$\min_{\substack{|U|\le p \\ U\subseteq V}} \max_{v\in V} \min_{r\in U} d(v,r) \qquad (۱-۴)$$

تعریف ۴-۲ : گراف G=(V,E) (غیر جهت‌دار) را به همراه یک متر $d: V\times V \rightarrow R^{+}$ و یک عدد صحیح و مثبت p در نظر بگیرید. مساله p- مرکز با q- پوشش عبارتست از تعیین یک زیر مجموعه‌ای مانند $U\subseteq V$ از حداکثر p– مرکز به طوری که ماکزیمم فاصله‌ها از نقاط در V به U مینیمم شود، به علاوه هر راسی در U که به عنوان مرکز تعریف می شود باید حداقل q راس (شامل خودش) درV را پوشش دهد. [۱۱]

مساله p- مرکز با کمترین پوشش

در تعریف ۴-۲ ، q یک عدد صحیح غیر منفی است به طوری که مقدار آن حداکثر برابر $|V|$ می‌باشد. با توجه به تعریف ۴-۲ در مساله p- مرکز ، ضروری است که هر راس در V توسط یکی از رئوس در U که به عنوان مجموعه مراکز در نظر گرفته شده است، پوشش داده شده باشد.

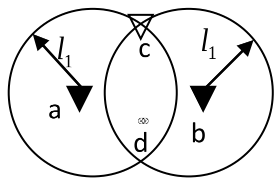
در حالت کلی تابع هدف مساله p- مرکز با q- پوشش بصورت زیر بیان می‌گردد.

$$\min_{\substack{U\subseteq V \\ |U|\le p}} \max\left(\max_{v\in V} \min_{r\in U} d(v,r)\ ,\ \max_{r\in U} d_q(V,r)\right) \qquad (۲-۴)$$

در تعریف بالا $d_q(v,r)$ بیانگر فاصله میان q امین راس نزدیک به r در V می‌باشد. توجه کنید چون $r\in V$ لذا نزدیکترین راس به r خودش می باشد.

تعریف ۴-۳ : راس c ، راس v را درشعاع r پوشش می‌دهد[55] , هرگاه $d(c,v) \le r$. همچنین این تعریـف را می توان در مجموعه‌ها نیز توسعه داد به این صورت که یک مجموعه‌ای مانند C یک مجموعه مانند A را در شعاع r پوشش می‌دهد, هرگاه برای هر راس $a \in A$ ، وجود دارد تعدادی از رئوس مانند $c \in C$ به طوری که $d(c,a) \le r$. [۱۱]

به عنوان مثال شکل (۴-۱) یک مثالی از مساله ۲- مرکز با ۳- پوشش می‌باشد، به طوری که هر کـدام از ۲ مرکز، سه راس (شامل خودش) را در یک شعاع l_1 پوشش می دهد . یعنی هر کدام از مراکز a و b به ترتیب سه راس {a,c,d} و {b,c,d} را در یک شعاع l_1 پوشش می دهند.



شکل(۴-۱)

مساله دیگری که در اینجا به آن اشاره می‌کنیم مساله p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز می‌باشد و به صورت زیرتعریف می‌شود .

تعریف ۴-۴ : گراف غیر جهت دار G=(V,E) را به همراه یک متـر $d: V \times V \to R^+$ و یـک عـدد صـحیح و مثبت p در نظر بگیرید. مساله p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز عبارتست از تعیین یک زیر مجموعـه‌ای

۵۵- c r-covers v

مانند $U \subseteq V$ از حداکثر p مرکز به طوری که ماکزیمم فاصله‌ها از نقاط در V به U مینیمم شود بـه عـلاوه هر راس در U که به عنوان مرکز تعریف می شود، لازم است که حداقل q راس غیر مرکز (راسـهایی در V-U) را پوشش دهد.[۱۱]

با توجه به تعریف ۴-۴ تابع هدف مساله p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز را می توان به صورت زیر بیان نمود.

$$\min \max\left(\max_{v \in V-U} \min_{r \in U} d(v,r)\ ,\ \max_{r \in U} d_q(V-U,r)\right) \qquad (۳-۴)$$

مساله p- مرکز با کمترین پوشش

به طوری که منظور از $d_q(V-U,r)$ ، فاصله میان q امین راس نزدیک به r در V-U می‌باشد. مسـائلی کـه در بالا ذکر شد را می‌توان با این شرایط اضافی نیز در نظر گرفت و آنها را تعمیم داد به این صورت که به هر راسی هزینه و یا وزنی تخصیص یابد. مثلاً درحالتی که هزینه در نظر گرفته شود ما برای هر راس $v \in V$ ، هزینه‌ای معادل c(v) را تعریف می کنیم که در این صورت در مساله p - مرکز با توجه به اینکه برای هر راس $c(v)=1\ ,\quad v \in V$ می‌باشد داریم:

$$\sum_{r \in U} c(r) \le p \qquad (۴-۴)$$

همچنین اگر مسائل مذکور را در حالتی کـه راس هـا وزن دار هسـتند در نظـر بگیـریم مـا بـرای هـر راس $v \in V$ وزنی معادل $\omega(v)$ را تعریف می‌کنیم و بر این اساس فاصله وزن دار از راس u به راس v در V را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\omega(u,v) = d(u,v).\omega(v) \qquad (۵-۴)$$

تعریف ۴-۵ : برای هر گراف G ، می گوئیم راس v به راس u مسلط است اگر و تنها اگر u = v یا یالی از u به v درگراف G وجود داشته باشد.[۱۱]

قابل ذکر است که یافتن بزرگترین مجموعه مستقل[۵۶] در یـک گـراف، یـک مسـاله Np-hard می‌باشـد در صورتی که یک مجموعه مستقل ماکزیمال از یک گراف، می تواند توسط الگـوریتم بـه روش حریصـانه[۵۷] از مرتبه چند جمله‌ای بدست آید. [۱۱]

حال در این قسمت به بیان یک الگوریتم جهت یافتن مجموعه مسـتقل ماکزیمـال، گـراف وزن دار (وزن‌دار راسی) $H' = (U', E')$ می‌پردازیم.

۴-۲ الگوریتم تعیین مجموعه مستقل ماکزیمال از گراف $H' = (U', E')$ با وزن ω: [۱۱]

۱. $U \leftarrow \phi$

۲. هنگامی که $U' \neq \phi$ دستورات ۳ تا ۶ را تکرار کنید وگرنه به گام ۷ بروید.

۳. v را راسی انتخاب کنید که دارای کوچکترین وزن $\omega(u)$، از میان همه $u \in U'$ می‌باشد.

۴. $U \leftarrow U + \{v\}$, $U' \leftarrow U' - \{v\}$

۵۶ -Maximum independent set
۵۷ -Greedy

۵. کلیه راسهای $u \in U'$ را که با راس v مجاور هستند، یعنی $(u,v) \in E'$ را در نظر بگیرید وسپس $U' \leftarrow U' - \{u\}$

۶. به گام ۲ بروید.

۷. U که مجموعه مستقل ماکزیمال از گراف $H' = (U', E')$ می‌باشد, را برگردانید.

تذکر: این الگوریتم را می توان جهت تعیین مجموعه مستقل ماکزیمال برای گرافهایی که راس آنها وزن دار نمی‌باشد نیز به کار برد. در این حالت برای هر راس $u \in V \quad , \quad \omega(u)=1$ در نظر می‌گیریم.

در ادامه به بیان الگوریتم‌هایی که جهت تقریب جواب مساله p- مرکز با q- پوشش در حالت اصلی(نرمال) و وزن‌دار و (وزن‌داربه همراه هزینه) بکار می‌رود، می‌پردازیم.

۳-۴ الگوریتم مساله p- مرکز با q- پوشش در حالت اصلی [58]:[۱۱]

1. ابتدا یالها را براساس فاصله به صورت غیر نزولی مرتب کنید به این صورت که $d(e_1) \le d(e_2) \le \ldots \le d(e_m)$ و سپس گراف‌های $H_m, \ldots, H_2, H_1$ را تشکیل دهید.
2. برای هر گراف H_i که $1 \le i \le m$ ، مجموعه مستقل ماکزیمال $I(H_i)$ را محاسبه کنید.
3. j را برابر کوچکترین مقدار اندیس i قرار دهید به طوری که $|I(H_i)| \le p$ و برای هر $v \in V$ $\deg(v) \ge q$ در H_i باشد.
4. $I(H_j)$ را برگردانید.

۵۸-Basic q-all coverage p-center

جهت توضیح الگوریتم ۴-۳ ، ما ابتدا یالها را بصورت غیر نزولی براساس فاصله مرتب می‌کنیم. یعنی $d(e_1) \le d(e_2) \le \ldots \le d(e_m)$. فرض می‌کنیم $G_i = (V, E_i)$ بطوری که $E_i = \{e\ , e_2, \ldots, e_i\}$ برای $1 \le i \le m$ بنابراین اگر گراف G_i شامل مجموعه‌ای مانندU از حداکثر p راس باشد به طوری که برهمه رئوس در G_iمسلط است وهر راسی در U، حداقل بر q راس (شامل خودش) در G_i مسلط باشد آنگاه U حداکثر p مرکز را برای این مساله با حداکثر فاصله $d(e_i)$ عرضه می نماید. در صورتی که فرض کنیم i^* کوچکترین مقدار اندیسی باشد به طوری که شرایط فوق برای زیرگراف مربوط به چنین اندیس‌هایی برقرار باشد آنگاه $d(e_{i^*}) = OPT$ یعنی $d(e_{i^*})$ فاصله بهینه می‌باشد.

جهت تعیین یک کران پائین برای OPT [۵۹] ، گراف غیر جهت‌دار H_i را می سازیم به این صورت که H_i شامل یال (u,v) است هرگاه $u,v \in V$. در صورتی که دو راس $u,v \in V$ هم ارز باشند (یعنی راسی مانند $r \in V$ موجود باشد بطوری که $\deg(r) \ge q$ و هر دویال (u,r), (v,r) در G_i باشند) آن گاه برای هر راس $v \in V$حلقه (v,v) را درگراف H_i داریم. همچنین اگر $(u,v) \in G_i$ باشد آن گاه $(u,v) \in H_i$

قضیه ۴-۱: الگوریتم ۴-۳ ، ضریب تقریبی از ۲ را برای مساله p- مرکز با q- پوشش ارائه می‌کند.[۱۱]

حال در این قسمت به بیان یک الگوریتم که برای مساله p- مرکز با q- پوشش درحالت وزن‌دار به کار می رود، می‌پردازیم.

۵۹ - Optimization

۴-۴ الگوریتم مساله p- مرکز با q- پوشش وزن‌دار [۶۰] : [۱۱]

۱) ابتـدا یالهـا را براسـاس فاصـله وزنـدار بـه صـورت غیـر نزولـی مرتـب مـی کنـیم بـه ایـن صـورت کـه $\omega(e_1) \le \omega(e_2) \le \ldots \le \omega(e_m)$ و سپس گرافهای $H_m,\ldots,H_2,H_1$ را تشکیل می‌دهیم.

۲) برای هر گراف H_i که $1 \le i \le m$ ، مجموعه مستقل ماکزیمال $I(H_i)$ را محاسبه می‌کنیم .

۳) j را برابر کوچکترین مقدار اندیس i قرار بده بطوری که $|I(H_i)| \le p$ و برای هر $v \in V$ $\deg(v) \ge q$ در H_i باشد.

مساله p- مرکز با کمترین پوشش

---

۴) قرار می دهیم $U = \{g_j(v) | v \in I(H_j)\}$ بطوری که برای هر راس $v \in I(H_j)$ ، $g_j(v)$ بیانگر راسی است که با راس v مجاور است و دارای حداقل وزن باشد.

۵) U را برگردان .

جهت توضیح الگوریتم ۴-۴ ، ما ابتدا یالها را براساس فاصله وزندار بصورت غیر نزولی مرتب می‌کنیم. یعنـی $\omega(e_1) \le \omega(e_2) \le \ldots \le \omega(e_m)$ ، فـرض کنـیم کـه $G_i = (V, E_i)$ بطـوری کـه $E_i = \{e\ , e_2,\ldots,e_i\}$ $(1 \le i \le m)$. گراف H_i برای گراف G_i شامل یک یال (u,v) است هرگـاه $u,v \in V$. در صـورتی کـه دو راس $u,v \in V$ هم ارز باشند (یعنی راسی مانند r موجود باشد بـه طـوری کـه دو یـال (v,r),(u,r) در G_i باشند، که این ایجاب می کند که $\omega(v,r) \le \omega(e_i), \omega(u,r) \le \omega(e_i)$ آن گاه برای هـر راس $v \in V$ حلقـه (v,v) را در گراف H_i داریم.) به منظور یافتن کران برای فاصله وزندار بهینه (OPT) ، j را برابر کـوچکترین

---

۶۰ -Weighted q-all coverage p-center

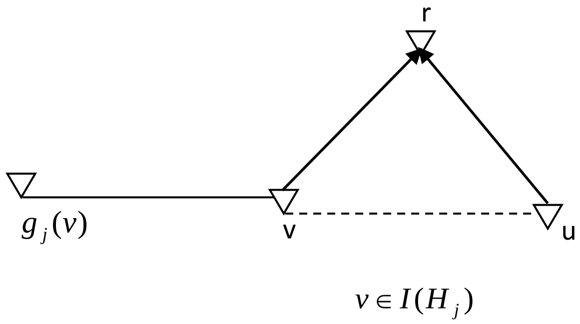
مقدار اندیس i قرار می‌دهیم به طوری که درجه هر راس در گراف H_i، حداقل برابر q باشد و اندازه مجموعه مستقل ماکزیمال $I(H_i)$ حداکثر برابر p باشد. بنابراین بحث فوق تضمین می‌کند که $\omega(e_j) \le OPT$.
سرانجام هر راس $v \in V$ را در نظر می‌گیریم و از میان همه راسهای $u \in V$ که $\omega(v,u) \le \omega(e_i)$ فرض می کنیم که $g_i(v)$ بیانگر راسی است که با راس v مجاور بوده و دارای کمترین وزن می باشد، با انتقال دادن هر راس $v \in I(H_j)$ و محاسبه $g_j(v)$, مجموعه U که به عنوان جوابی برای مساله p- مرکز با q- پوشش وزن‌دار می‌باشد، به دست می آید.

<u>قضیه ۴-۲ :</u> الگوریتم ۴-۴، ضریب تقریبی از۳ را برای مساله p- مرکز با q- پوشش وزن‌دار تخصیص می دهد .[۱۱]

اثبات: ابتدا از رابطه $|I(H_j)| \le p$, $U = \{g_j(v) | v \in I(H_j)\}$ ما داریم $|U| \le p$. سپس همان طور که در شکل (۴-۲) نشان داده شده است برای هر راس $u \in V$ ، راسی مانند v در $I(H_j)$ باید موجود باشد که (u,v)، یالی در گراف H_j می‌باشد که به یک راس $r \in V$ دو یال (u,r), (v,r) را در G_j نسبت می‌دهد .
از این رو $w(v,r) \le w(e_j), w(u,r) \le w(e_j)$ با توجه به اینکه $\omega(v,g_j(v)) \le \omega(e_j), \omega(g_j(v)) \le \omega(r)$
لذا u توسط $g_j(v) \in U$ پوشش داده می شود به طوری که :

$$\omega(u, g_j(v)) \le (d(u,r) + d(v,r) + d(v, g_j(v))\omega(g_j(v)) \le 3\omega(e_j) \qquad (۶-۴)$$

به علاوه درجه هر راس $v \in I(H_j)$ حداقل برابر q می‌باشد که ایجاب می کند حداقل q راس مانند u ، هم ارز یا مجاور با v در H_j می باشند که می تواند توسط $g_j(v) \in U$ در محدوده $3\omega(e_j)$ پوشش داده شده باشد. لذا $\omega(e_j) \le OPT$.



شکل (۴-۲)

دراین قسمت پارامترهای β, b, a را معرفی می کنیم و در ادامه به بیان الگوریتمی که جهت تقریب جـواب مساله p- مرکز با q- پوشش وزن‌دار به همراه هزینه[۶۱] به کار می رود می‌پردازیم .

در صورتی که فرض کنیم پارامتر a بیانگر بهترین ضریب تقریب ممکن مگر این که P=NP باشد و b بیانگر بهترین ضریب تقریب شناخته شده باشد و β بیانگر نسبت میان ماکزیمم مقدار وزن و کمترین مقـدار وزن باشد، در ادامه به بیان الگوریتمی با ضریب تقریب $(2\beta+1)$ که جهت تقریب مساله p- مرکز با q- پوشــش در حالت (وزن دار به همراه هزینه) به کار می رود می‌پردازیم.

۴-۵ الگوریتم مساله p- مرکز با q- پوشش وزن‌دار به همراه هزینه : [۱۱]

۶۱-Weighted and cost q-all coverage p-center

۱) ابتـدا یالهـا را براسـاس فاصـله وزن‌دار بـه صـورت غیـر نزولـی مرتـب کنیـد بـه ایـن صـورت کـه $\omega(e_1) \le \omega(e_2) \le \ldots \le \omega(e_m)$ و سپس گرافهای $H_m, \ldots, H_2, H_1$ را تشکیل دهید.

۲) برای هر گراف H_i که $1 \le i \le m$ ، مجموعه مستقل ماکزیمال $I(H_i)$ را محاسبه کنید.

۳) قرار دهید $U_i = \{s_i(v) | v \in I(H_i)\}$ به طوری که $s_i(v)$ بیانگر راسی است که دارای کمترین هزینـه از میان تمام رئوس $u \in V$ می‌باشد به طوری که $\omega(v,u) \le \omega(e_i)$. $s_i(v)$ را بـه عبـارت دیگـر ارزان‌تـرین همسایه از راس v درگراف G_i گوئیم.

۴) j را برابر کوچکترین مقـدار انـدیس i قـرار دهیـد بـه طـوری کـه $|U_i| \le p$ و بـرای هـر راس $v \in V$ $\deg(v) \ge q$ در H_i باشد .

۵) U_j را برگردانید .

قضیه۴-۳ : الگوریتم ۴-۵ ، ضریب تقریبی از $(2\beta+1)$ را برای مساله p- مرکـز بـا q- پوشـش در حالـت وزندار به همراه هزینه تخصیص می‌دهد .[۱۱]

اثبات: برای هر راس $u \in V$ ، راسی مانند $v \in I(H_j)$ وجود دارد به طوری که v بـا راس u در گـراف H_j مجـاور اسـت. لـذا ایـن ایجـاب مـی کنـد کـه راسـی ماننـد $r \in V$ موجـود باشـد بـه طـوری کـه $\omega(u,r) \le \omega(e_j)$, $\omega(v,r) \le \omega(e_j)$ از آنجـا کـه $\omega(r) \le \beta\omega(s_j(v))$ و $\omega(v,s_j(v)) \le \omega(e_j)$ لـذا u توسط $s_j(v) \in U_j$ در محدوده

$$\omega(u,s_j(v)) \le (d(u,r)+d(v,r)+d(v,s_j(v))\omega(s_j(v)) \le (2\beta+1)\omega(e_j) \qquad (۷-۴)$$

پوشش داده شده است . به عبارت دیگر چون درجه هر راس $u \in I(H_j)$ حداقل برابر q است لذا حـداقل q راس مانند u هم ارز یا مجاور v در H_j موجود است بطوری که توسـط $s_j(v) \in U_j$ در محـدوده حـداکثر فاصله وزن‌دار $(2\beta+1)\omega(e_j)$ پوشش داده شده است. لذا با توجه به آنکه $w(e_j) \le OPT$ ، ضریب تقریـب برای الگوریتم (۴-۵) ، برابر $(2\beta+1)$ خواهد بود .

در این قسمت پیرامون مساله p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز بحث خواهیم نمود به طوری که این مسـاله مشابه با مساله p- مرکز با q- پوشش بوده ، به طوری که دارای تنها یک محدودیت اضافی نسبت به آن می باشد و آن این است که هر راسی که به عنوان مرکز تعیین می شود باید حداقل q راس غیر مرکز را پوشش دهد.

مساله p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز را مشابه بحث قبلی در شـرایط اصـلی, وزن‌دار و وزن‌دار بـه همـراه هزینه مورد بررسی قرار می دهیم.

۴-۶ الگوریتم مساله p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز در حالت اصلی[۶۲] : [۱۱]

۱) ابتـدا یالهـا را بـر اسـاس فاصـله بـه صـورت غیـر نزولـی مرتـب مـی کنـیم بـه ایـن صـورت کـه $d(e_1) \le d(e_2) \le \ldots \le d(e_m)$ و سپس گراف‌های $H_m,\ldots,H_2,H_1$ را می‌سازیم .

۲) برای هر گراف H_i که $1 \le i \le m$ ، مجموعه مستقل ماکزیمال $I(H_i)$ را محاسبه می‌کنیم.

۳) j را برابـر کـوچکترین مقـدار انـدیس i قـرار مـی دهـیم بـه طـوری کـه $|I(H_i)| \le p$ و بـرای هـر $\deg(v) \ge q+1, v \in V$ در H_i باشد.

۶۲- Basic q-coverage p-center

۴) $I(H_j)$ را برمی گردانیم .

همان طور که دیده می شود تنها اختلاف الگوریتم فوق با الگوریتم (۴-۳) در آن است کـه بایـد بـرای هـر $v \in V$، $\deg(v) \geq q+1$ در H_i باشد.

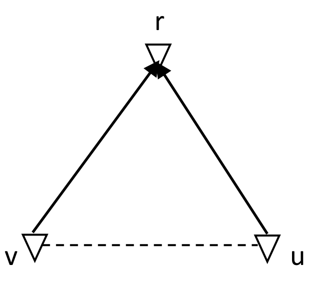
<ins>قضیه ۴-۴ :</ins> الگوریتم(۴-۶) ، ضریب تقریبی از ۲ را برای مساله p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز در حالت اصلی تخصیص می‌دهد .[۱۱]

اثبات: ابتدا می دانیم که $d(e_j) \leq OPT$ و این که $I(H_j)$ حداکثر p مرکز را ایجاد می کند به طوری که همه راس‌ها را در محدوده حداکثر $2d(e_j)$ پوشش می‌دهد. زیرا با توجه به شکل (۴-۳) برای هر راس $u \in V$ راسی مانند $v \in I(H_j)$ موجود است به طوری که (u,v) یالی درگراف H_j می باشد. از طرفی راسی مانند $r \in V$ موجود است به طوری که دو یال (v,r),(u,r) را به G_j نسبت می‌دهد . بنابراین

$$d(u,v) \leq d(u,r) + d(v,r) \leq d(e_j) + d(e_j) = 2d(e_j) \qquad (۸-۴)$$

مساله p- مرکز با کمترین پوشش

از طرفی هر راس $v \in I(H_j)$ ، با حداقل q راس غیر از خودش در H_j مجاور است. برای ایـن کـه ثابـت کنیم که هر راس حداقل q راس را در محدوده $2d(e_j)$ پوشش می‌دهد ما نیاز داریم که نشان دهیم هـیچ دو راسی در $I(H_j)$ با یکدیگر در H_j مجاور نیستند که این تا زمانی که $I(H_j)$ یک مجموعه مسـتقل از H_j باشد واضح است. لذا تا زمانی که $2d(e_j) \leq 2*OPT$ ضریب تقریب الگوریتم برابر ۲ خواهد بود .



$v \in I(H_j)$

شکل (۴-۳)

حالت وزن‌دار مساله p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز را می توان از طریق الگوریتم (۴-۷) که در ادامه به بیان آن می پردازیم حل نمود به طوری که نسبت به الگوریتم های قبلی پیچیده‌تر خواهد بود. روش کار این الگوریتم به این صورت است که ابتدا m یال را بر اساس فاصله وزن‌دار به صورت غیر نزولی مرتب می کنیم و سپس یک گراف غیر جهت‌دار P_i را بجای H_i برای $1 \le i \le m$ از گراف G_i می‌سازیم. نحوه ساخت گراف P_i به این صورت است که فرض کنیم $Q_i = \{v \in V | \deg(v) \ge q+1\}$. هنگامی که دو راس v,u هم ارز باشند یال (u,v) در گراف P_i موجود است اگر و تنها اگر راسی مانند $r \in Q_i$ موجود باشد به طوری که دو یال (v,r),(u,r) در گراف G_i موجود باشند. اندیس i^* را در نظر بگیرید به طوری که $\omega(e_i^*) = OPT$ باشد . چون هر مرکز انتخاب شده باید بر حداقل q راس غیر از خودش مسلط باشد و هیچ دو راسی در $I(p_i^*)$ به یک راس یکسان در G_i^* مسلط نمی‌باشند, لذا مشاهده می‌کنیم که

۱) هر راس از v توسط حداقل یک راس از Q_i^* در G_i^* مسلط شده است.

۲) اندازه مجموعه $I(p_i^*)$ می تواند حداکثر برابر p باشد. یعنی $|I(p_i^*)| \le p$

بنابراین فرض می کنیم که j برابر کوچکترین مقدار اندیس i باشد بطوری که Q_i برتمام رئوس از V مسلط است و $|I(p_i)| \le p$ که در این صورت نتیجه می شود که $\omega(e_j) = OPT$

حال برای هر راس $v \in I(P_j)$، فرض کنیم p(v) بیانگر راسی مانند u با کمترین وزن باشد (از میان تمام رئوس در Q_i) به طوری که (v,u) یالی در گراف G_j می باشد . لذا تعریف می‌کنیم $U' = \{p(v) | v \in I(P_j)\}$. حال گراف غیر جهت دار $H' = (U', E')$ را تشکیل می‌دهیم به این صورت که

برای هر دو راس $u,v \in I(P_j)$ یال $(p(u),p(v)) \in E'$ اگـر وتنهـا اگـر $(p(u),p(v))$ یـا $(p(v),p(u))$ یالی در G_j باشد . اگر مجموعه مستقل ماکزیمال گراف H' را با $I(H')$ بیـان کنـیم, آن گـاه آن را مـی توان توسط الگوریتم (۴-۲) بـه دسـت آورد. همچنـین بـه آسـانی مـی تـوان دریافـت کـه بـرای هـر راس $u \in U'-I(H')$ وجود دارد راسی مانند $v \in I(H')$ به طوری که $(u,v) \in E'$, $\omega(v) \le \omega(u)$.

۴-۷ الگوریتم p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز در حالت وزندار[۶۳]: [۱۱]

۱) ابتـدا یالهـا را براسـاس فاصـله وزن‌دار بـه صـورت غیـر نزولـی مرتـب مـی کنـیم بـه طـوری کـه $\omega(e_1) \le \omega(e_2) \le \ldots \le \omega(e_m)$.

۲) برای هر $1 \le i \le m$ قرار می دهیم $Q_i = \{v | \deg(v) \ge q+1\}$.

مساله p- مرکز با کمترین پوشش

---

۳) گرافهای $p_m,\ldots,p_2,p_1$ را تشکیل می‌دهیم.

۴) برای هر گراف p_i $(1 \le i \le m)$ مجموعه مستقل ماکزیمال $I(p_i)$ را محاسبه می کنیم .

۵) j را برابر کوچکترین مقدار اندیس i قرار بده بطوری که Q_i بر تمام رئوس v در G_i مسلط باشد و $|I(p_i)| \le p$ باشد.

۶) برای هر راس $v \in I(p_j)$ قرار می دهیم $U' = \{p(v) | v \in I(p_j)\}$

۷) برای گراف $H' = (U',E')$ ، مجموعه مستقل ماکزیمال را به دست می آوریم .

۸) $I(H')$ را برمی گردانیم .

۶۳-Weighted q-coverage p-center

قضیه ۴-۵ : الگوریتم (۴-۷) ، ضریب تقریبی از ۴ را برای مساله p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز در حالت وزندار تخصیص می‌دهد.[۱۱]

اثبات: با توجه به اینکه $\omega(e_j) \le OPT$ و $\left|I(H^{'})\right| \le \left|U^{'}\right| \le \left|I(p_j)\right| \le p$ ما تنها نیاز داریم که دو مطلب زیر را ثابت کنیم.

۱) هر $p(v) \in I(H')$ ، حداقل q راس مانند $u \in V - I(H')$ را در محدوده $\omega(u, p(v)) \le 4\omega(e_j)$ به طوری که $v \in I(p_j)$ پوشش می دهد.

۲) هر راس $u \in V - I(H')$ توسط یک راس معین $p(v) \in I(H')$ در محدوده $\omega(u, p(v)) \le 4\omega(e_j)$ به طوری که $v \in I(p_j)$ پوشش داده شده است.

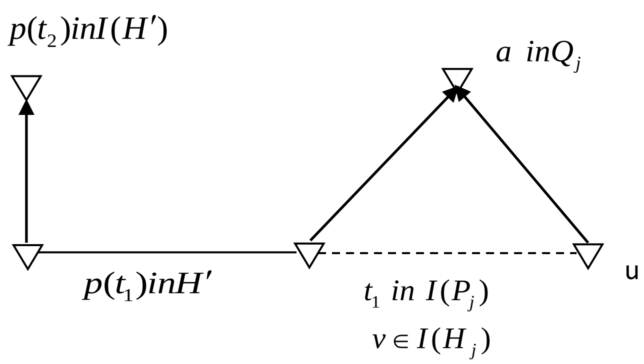
برای هر $p(v) \in I(H')$ به طوری که $v \in I(p_j)$ چون $I(H') \subseteq U' \subseteq Q_j$ بنابراین $p(v) \in Q_j$ و همچنین حداقل q راس به غیر از p(v) موجودند به طوری که توسط p(v) در G_j مسلط شده اند. علاوه بر این هر راس مانند u از این q راس در $I(H')$ قرار ندارد، زیرا در غیر این صورت یال (u,p(v)) در G_i ، وجود یال (u,p(v)) در H' را ایجاب می‌کند که با استقلال $I(H')$ متناقض است. همچنین چون $\omega(u, p(v)) \le \omega(e_j) \le 4\omega(e_j)$ بنابراین مورد (۱) ثابت می شود.

برای اثبات مورد (۲) برای هر راس $u \in V - I(H')$ همان طور که در شکل (۴-۴) نشان داده شـده اسـت، چون $I(P_j)$ مجموعه مستقل ماکزیمال گراف P_j می‌باشد، لذا یک راسی مانند $t_1 \in I(p_j)$ موجود است به طوری که (u,t_1) یالی از گراف P_j خواهد بود . (توجه کنید که اگر $u \in I(p_j)$ باشد آن گاه یال (u,u) باید در گراف P_j موجود باشد زیرا هر راسی از V توسط Q_j مسلط شده است.) بنابراین $P(t_1)$ راسـی درگـراف H' خواهد بود. لذا تا زمانی که $I(H')$ مجموعه مستقل ماکزیمال گراف H' باشد، بـرای $t_2 \in I(p_j)$ راسـی مانند $P(t_2) \in I(H')$ موجود است به طوری کـه $\omega(p(t_2)) \le \omega(p(t_1))$ و $(p(t_1), p(t_2))$ یـالی در گـراف H' می‌باشد.

بنابراین $\omega(p(t_1), p(t_2)) \le \omega(p(t_2), p(t_1))$ و لذا $(p(t_1), p(t_2))$ یالی در گراف G_j می باشد. چون (u,t_1) یالی از گراف P_j می باشد بنابراین راسی مانند $a \in Q_j$ وجود دارد به طوری که بـر هـر دو راس u و t_1 در G_j مسـلط اسـت و $\omega(p(t_1)) \le \omega(a)$. همچنـین مـی‌دانیم کـه فاصـله‌های وزنـدار یالهـای $(p(t_1), p(t_2)),(t_1, p(t_1)),(t_1,a),(u,a)$ همگی حداکثر برابر $\omega(e_j)$ می‌باشند. بنابراین داریم :

$$w(u, p(t_2)) \le (d(u,a) + d(t_1,a) + d(t_1, p(t_1)) + d(p(t_1), p(t_2)))w(p(t_2)) \le 4w(e_j) \qquad (۴-۹)$$

لذا اثبات مورد(۲) نیز کامل می شود.



شکل (۴-۴)

دراین قسمت مساله p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز را در حالتی که به هر راس علاوه بر وزن، هزینه‌ای نیز نسبت داده می‌شود , مورد بررسی قرار می‌دهیم . ابتدا پیرامون الگوریتمی که جهت حل این گونه مسائل به کار می رود ، به بیان توضیح پرداخته و سپس در ادامه، الگوریتم را مطرح می‌کنیم. نحوه کار این الگوریتم بدین صورت است که ابتدا یالها را بر اساس فاصله وزن دار به صورت غیر نزولی مرتب می کنیم و سپس گرافهای $H_1, H_2, ..., H_m$ را تشکیل می‌دهیم به این صورت که برای هر دو راس $u,v \in V$ یال (u,v) یالی از گراف H_i' خواهد بود اگر وتنها اگر یک راسی مانند $r \in V$ موجود باشد به طوری که (u,r) یالی در گراف G_i باشد و (v,r) یالی در گراف H_i باشد یا (v,r) یالی در گراف G_i بوده و (u,r) یالی در گراف H_i باشد. سپس $I(H_i')$ را برای $1 \le i \le m$ که بیانگر مجموعه مستقل ماکزیمال از گراف H_i' است , محاسبه می‌کنیم . سپس مجموعه‌ای مانند U_i' را به این صورت تعریف می‌کنیم:

را می‌سازیم. سپس برای $1 \le i \le m$ ،گرافهای H_i'

مساله p- مرکز با کمترین پوشش

$$U_i' = \{s_i(v) | v \in I(H_i')\} \quad (۱۰-۴)$$

به طوری که $s_i(v)$ بیانگر راسی است که دارای کمترین هزینه از میان تمام رئوسی است که در مجاورت با راس v در G_i قرار دارد. حال j را برابر کوچکترین اندیس i قرار می دهیم به طوری که $\deg(v) \ge q+1$ در H_i باشد و همچنین $|U_i'| \le p$. همچنین می‌دانیم که H_i' یک زیرگرافی از H_i می‌باشد و $I(H_i')$ یک مجموعه مستقل از گراف H_i نیز می‌باشد.

۸-۴ الگوریتم **p**- مرکز با **q**- پوشش غیر مرکز وزن‌دار به همراه هزینه[۶۴]: [۱۱]

۱) ابتدا یالها را براساس فاصله وزن‌دار به صورت غیر نزولی مرتب می کنیم به طوری که $\omega(e_1) \le \omega(e_2) \le \ldots \le \omega(e_m)$.

۲) گرافهای $H_m,\ldots,H_2,H_1$ را تشکیل می دهیم و از روی آن گرافهای $H'_m,\ldots,H'_2,H'_1$ را می‌سازیم .

۳) برای هر گراف H'_i که $1 \le i \le m$ مجموعه مستقل ماکزیمال $I(H'_i)$ را محاسبه می کنیم.

۴) برای هر $1 \le i \le m$ ، قرار می‌دهیم $U_i' = \{s_i(v) | v \in I(H'_i)\}$ به طوری که $s_i(v)$ بیانگر راسی با کمترین هزینه در G_i بوده به طوری که با راس **v** مجاوراست.

۵) **j** را برابر کوچکترین اندیس **i** قرار می‌دهیم به طوری که $|U'_i| \le p$ و برای هر راس $v \in V$ ، $\deg(v) \ge q+1$ در H_i باشد.

۶) U_j' را برمی گردانیم .

مساله **p**- مرکز با کمترین پوشش

قضیه ۴-۶: الگوریتم (۴-۸) ، ضریب تقریبی از $(3\beta+1)$ را برای مساله **p**- مرکز با **q**- پوشش غیر مرکز وزن‌دار به همراه هزینه تخصیص می‌دهد .[۱۱]

اما در پایان این بخش می توان کلیه نتایج را که از طریق اثبات قضایا بیان شد ، به صورت زیر در قالب جدول (۴-۱) بیان کرد.

[۶۴]-Weighted and cost q-coverage p-center

۴-۹ خلاصه ای ازضرایب تقریب[۶۵]:

(جدول ۴-۱: ضرایب تقریب)

وزندار+ هزینه	هزینه	وزندار	اصلی	
$2\beta+1$	3^{b}	3	2^{a}	p- مرکز با q- پوشش
$3\beta+1$	4	4	2^{a}	p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز

شکل(۴-۵)

a: پارامتری که بیانگر بهترین ضریب تقریب ممکن مگر اینکه P=NP باشد.

b : پارامتری که بیانگر بهترین ضریب تقریب شناخته شده باشد.

β: پارامتری که بیانگر نسبت میان ماکزیمم مقدار وزن و کمترین مقدار وزن باشد.

۶۵- summary of approximation factor

فصل پنجم

۵-۱ بررسی مساله p- مرکز همبند روی درختها :

در این قسمت ما مساله p- مرکز همبند و مساله p- مرکز همبند با رئوس ممنوعه [۶۶] را ابتـدا روی درختهـا بحث و بررسی نموده و با توجه به آنکه یک گراف عنکبوتی ، یک درختی است که حداکثر دارای یک نقطه

[٦٦]- Forbidden connected p-center

انشعاب می‌باشد, لذا کلیه مباحثی که در مورد درختها بیان می شود برای گراف عنکبوتی نیز برقرار می باشد. اما یک گراف عنکبوتی ، یک گراف همبند و فاقد دور بوده به طوری که آن را می‌توان به عنوان حالت خاصی از یک درخت در نظر گرفت. (درختی که حداکثر دارای یک نقطه انشعاب می‌باشد.) بنابراین فقط کافی است که ما رأس ریشه را در این گراف بیابیم و با توجه به روابط موجود برای مساله p- مرکز در درختها، این مساله برای گرافهای عنکبوتی نیز بررسی می شود . یک درخت عنکبوتی که دارای نقطه انشعاب نمی‌باشد، به صورت یک مسیرخواهد بود, که در این صورت نیز به کمک یک لم که در ادامه بیان می شود, می توان راس ریشه را تعیین نموده و آن را به صورت یک درخت پیاده سازی نمود.

لم ۵-۱: برای هر درخت T=(V,E) فرض کنید v,u یک جفت از رئوسی باشند بطوری برای هر راس y,x از V، $d(u,v) \geq d(x,y)$. همچنین فرض کنید m نقطه‌ای باشد که در وسط کوتاهترین مسیر از u به v قرار دارد . یعنی d(u,m)=d(m,v)=0.5*d(u,v) فرض کنید r راسی از T باشد به طوری که نزدیکترین رأس به نقطه m باشد . این راس را به عنوان راس ریشه[۶۷] گراف T در نظر می‌گیریم . همچنین فرض کنید Q یک P– مرکز همبند از T باشد به طوری که $r \in Q$. آن گاه برای هر P– مرکز همبند H که $r \notin H$ داریم $\delta(Q) \leq \delta(H)$ [۳]

اثبات: با توجه به تعریف راس ریشه r ، نقطه m روی یکی از یالهای مجاور با راس r قرار می‌گیرد. آسانترین وضعیت حالتی است که نقطه m خود رأس ریشه باشد . یعنی نقطه m و راس r منطبق شوند. بنابراین ما

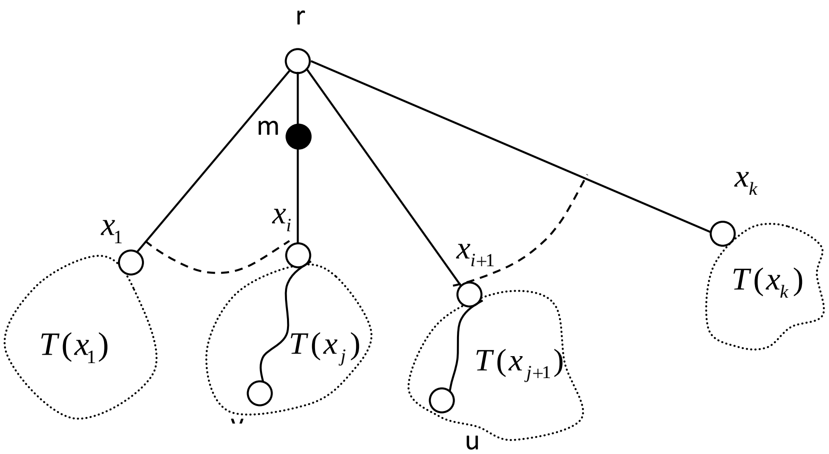
۶۷-Root vertex

حالتی را در نظر می‌گیریم که m روی یکی از یالهای (r,x_j) قرار می‌گیـرد. یعنــی $m \neq r$ و $m \neq x_j$ بطوری که $x_k,....,x_2,x_1$ بچه های راس ریشه (r) می‌باشند . یعنی

$$d(r,m) \leq d(r,x_j) \qquad (۵-۱)$$

همانطور که در شکل (۵-۱) دیده مـی شـود نقطـه m در وسـط کوتـاهترین مسـیر از u بـه v قـرار دارد و

$$d(u,v) \geq d(s,t) \quad \forall s,t \in V \qquad (۵-۲)$$



شکل (۵-۱)

بنابراین به آسانی می توان فهمید که $\{r,x_j\} \subseteq Q$ و لذا این مطلب ایجاب می کند که :

$$\delta(Q) \leq \max\{d(v,x_j),d(u,r)\} < d(v,m) = 0.5 \times d(u,v) \qquad (۵-۳)$$

تا زمانی که $r \notin H$ ، با توجه به تعریف درختها و p– مرکـز همبنـد، بـرای تعـدادی از زیردرختهـای $T(x_z)$ داریم

$H \subseteq V(T(x_z))$. لذا دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

حالت ۱: $H \subseteq V(T(x_j))$

این حالت به این معنی است که H روی زیر درخت $T(x_j)$ قرار می گیرد. لذا به آسانی می‌توان دریافت که

$$\delta(H) \geq d(u,x_j) = d(u,x_{j+1}) + d(x_{j+1},m) + d(m,x_j) = 0.5*d(u,v) + d(m,x_j) \quad (۴-۵)$$

بنـــابراین بطور مستقیم نتیجه می شود که $\delta(H) \geq \delta(Q)$.

حالت ۲: $H \subseteq V(T(x_t))$ $1 \leq t \leq k$, $t \neq j$ یعنی در این حالت H روی زیر درخت $T(x_t)$ قرار دارد.

بنابراین به راحتی می‌توان دریافت که

$$\delta(H) \geq d(v,r) + d(r,x_t) = 0.5*d(u,v) + d(m,x_t) \quad (۵-۵)$$

بنابراین (۵-۵) ایجاب می کند که $\delta(H) \geq \delta(Q)$.

برای مساله P– مرکز روی درختها ، با به کارگیری لم (۵-۱) ، ریشه را تعیین می کنیم و بـا فـرض آن کـه راس ریشه درخت ، راس r باشد آن را با T(r) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵-۱: برای هر رأس x در $V-\{r\}$ ، $par(x)$ [۶۸] بیانگر راسـی اسـت کـه راس x از آن سرچشـمه گرفته است و $ace(x)$ بیانگر مجموعه رئوسی است که به عنوان اجداد[۶۹] x تلقی می‌شود. [۳]

همچنـین اگـر راس y یـک راس بـرگ نباشـد آن گـاه children(y) بیـانگر مجموعـه بچـه هـای راس y می‌باشد.[۳]

حال برای هر رأس z از گراف T(r) مقادیر $\mu(z)$ طبق روابط زیر محاسبه می‌گردد:

۶۸-Parent
۶۹-Ancestors

$$\mu(z) = w(z, par(z)) \qquad (۶-۵)$$

اگر z راس ریشه نبوده و z یک راس برگ باشد.

$$\mu(z) = \max_{t \in children(z)} \{\mu(t)\} + w(z, par(z)) \qquad (۷-۵)$$

اگر z نه راس ریشه و نه راس برگ باشد.

$$\mu(r) = \max \{\mu(t)\} t \in children(r) \qquad (۸-۵)$$

اگر z راس ریشه باشد.

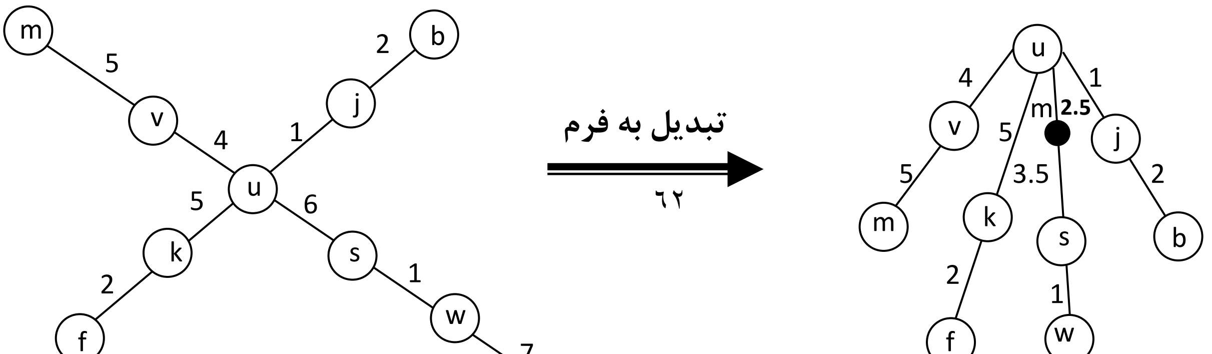
<u>تعریف ۵-۲</u> : برای هر رأس y , V(T(y)) بیانگر مجموعه رئوس زیر درختی است، که راس ریشه آن، راس y می باشد. [۳]

<u>لم ۵-۲</u> : برای هر راس غیر ریشه z از T(r) ، فرض کنید که H زیر مجموعه‌ای از V باشد بطوری که $H \cap V(T(z)) = \phi$ و $par(z) \in H$ دراین صورت

$$\mu(z) = \max_{u \in V(T(z))} \{d(u, par(z))\} = \max_{u \in V(T(z))} \{d(u, H)\} \qquad (۹-۵)$$

و $\delta(H) \geq \mu(z)$ [۳]

به عنوان مثال گراف عنکبوتی T=(V,E) را که در شکل (۵-۲) بیان شده است را در نظر بگیرید.



شکل(۵-۲)

با توجه به روابط قبل برای هر رأس ، مقدار μ را محاسبه می کنیم .

$$\begin{array}{ll} \mu(z)=7 & \\ \mu(m)=5 \quad \mu(j)=3 & \\ \mu(f)=2 \quad \mu(u)=14 & \\ \mu(b)=2 & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \mu(w)=8 \\ \mu(s)=14 \\ \mu(k)=7 \\ \mu(v)=9 \end{array} \right.$$

فـــرض کنـــیم کـــه $H=\{u,v\}$ باشـــد در اینصـــورت $V(T(s))=\{s,w,z\}$ و $H\cap V(T(s))=\phi$ و $par(s)\in H$ بنابراین :

$$\mu(S)=\max_{u'\in V(T(s))}\{d(u',s)\}=\max_{u'\in V(T(s))}\{d(u',par(s))\}$$
$$=\max\{d(s,u),d(w,u),d(z,u)\}=14$$

<u>لم ۵-۳ :</u> در درخت T=(V,E) با رأس ریشه r ، برای هر $\mu(r)\geq\mu(y), y\in V$ وهمچنین برای هر رأس x در $V-\{r\}$ ، $\mu(v)>\mu(x)$ برای هر راس $v\in ace(x)$ [۳]

<u>لم ۵-۴ :</u> فرض کنید H یک P– مرکز همبند از گراف T(r) باشد به طوری که $r\in H$ ، در این صورت:

$$\delta(H) = \max_{y \in V-H}\{\mu(y)\} \qquad (۱۰-۵)$$

[۱]

اثبات: فرض کنیم L(H) بیانگر زیرگرافهایی از(T(r باشد به طوری که H را شامل باشد. در این صورت لـم (۵-۲) ایجاب می‌کند که

$$\delta(H) = \max_{u \in V-H}\{d(u, L(H))\} = \max_{y \in chidren(L(H))}\{\mu(y)\} = \max_{y \in V-H}\{\mu(y)\}$$

تعریف ۵-۳ : درخت T=(V,E) را در نظر بگیرید به طوری که رأس ریشه آن رأس r باشـد. اگـر چنـین گرافی را با (T(r نمایش دهیم , مسأله $p^{(r)}$ عبارت است از تعیین یک p– مرکز همبند مانندQ بـه طـوری که

$$\delta(Q) = \max_{v \in V-Q}\{d(v,Q)\} \qquad (۱۱-۵)$$

تحت این شرط که $r \in Q$ باشد ، مینیمم شود.[۳]

لم ۵– ۵ : فرض کنید $Q = \{q_1, q_2, ..., q_p\}$ به طوری که $\mu(q_p)...,\mu(q_2),\mu(q_1)$ اولین P عدد بـزرگ از میان مجموعه$S = \{\mu(z) | z \in V\}$ باشند. در این صورت Q یک جواب برای مساله $p^{(r)}$ روی T=(V,E) می‌باشد به طوری که $\delta(Q) = \gamma$ که γ برابر (p+1) امین عدد بزرگ در مجموعه S می‌باشد. [۳]

اثبات: با توجه به لم (۵-۳) ، $r \in Q$. زیرگرافی را در نظر می‌گیریم که Q را شامل بوده اما همبنـد نباشـد. فرض کنید $(1 \le j \le p), j$ کوچکترین عددی باشد به طوری که $Q^* = \{q_1, q_2, ..., q_j\}$

شامل یک زیردرخت باشد به طوری که q_{j+1} با هیچ رأسی در Q^* مجاور نباشد. تا زمانی که با گراف های همبند سروکار داریم، ایجاب می کند که $par(q_{j+1}) \not\in Q^*$. اما با توجه به لم (۵-۳) ، $\mu(par(q_{j+1})) > \mu(q_{j+1})$. این به این معنی است که اولین p عدد بزرگ از میان مجموعه S باید شامل ($\mu(par(q_{j+1})$ باشد . یعنی $par(q_{j+1}) \in Q^*$ و این تناقض است . ضمناً با توجه به لم (۵-۴) ، $\delta(Q) = \max_{y \in V-Q}\{\mu(y)\} = \gamma$ که γ ,(p+1) امین عدد بزرگ از مجموعه S می باشد.

قضیه ۵-۱: درخت T با راس ریشه r را در نظر بگیرید. مساله $p^{(r)}$ روی T(r) با پیچیدگی زمانی از مرتبه $O(n)$ حل می شود . [۳]

اثبات: فرض کنید $Q = \{q_1, q_2, ..., q_p\}$ به طوری که $\mu(q_p)...,\mu(q_2),\mu(q_1)$ اولین p عدد بزرگ از میان $S = \{\mu(z) | z \in v\}$ باشد بنابراین طبق لم (۵-۳) ، $r \in Q$. لذا Q یک جواب برای مساله $p^{(r)}$ روی(T(r میباشد. اما انتخاب اولین p عددبزرگ از میان n عدد، در یک پیچیدگی زمانی از مرتبه o(n) انجام می شود.

۵-۲ الگوریتم p- مرکز همبند روی درختها : [۱]

در این قسمت به بیان یک الگوریتم برای حل مساله p– مرکز همبند روی درخت T=(V,E) میپردازیم.

گام۱: ابتدا یک جفت از رئوس مانند v,u را به گونه ای بیابید به طوری که برای هر جفت از رئوس y,x داشته باشیم $d(u,v) \geq d(x,y)$

گام ۲: فرض کنید که m نقطهای در وسط کوتاهترین مسیر از u به v باشد و راس r را نزدیکترین

راس به نقطه m در نظر بگیرید .

گام ۳: قرار دهید $Q = p^{(r)}$

گام ۴: Q را برگردانید .

اما همان طور که در الگوریتم (۵-۲) دیده می شود ، درگام ۳ الگوریتم ، ما باید مساله $p^{(r)}$ را روی درخت T(r) حل کنیم . لذا ما نیاز به الگوریتمی برای حل مساله $p^{(r)}$، روی درخت T(r) داریم .

۵-۳ الگوریتم $p^{(r)}$ روی درخت T(r) : [۳]

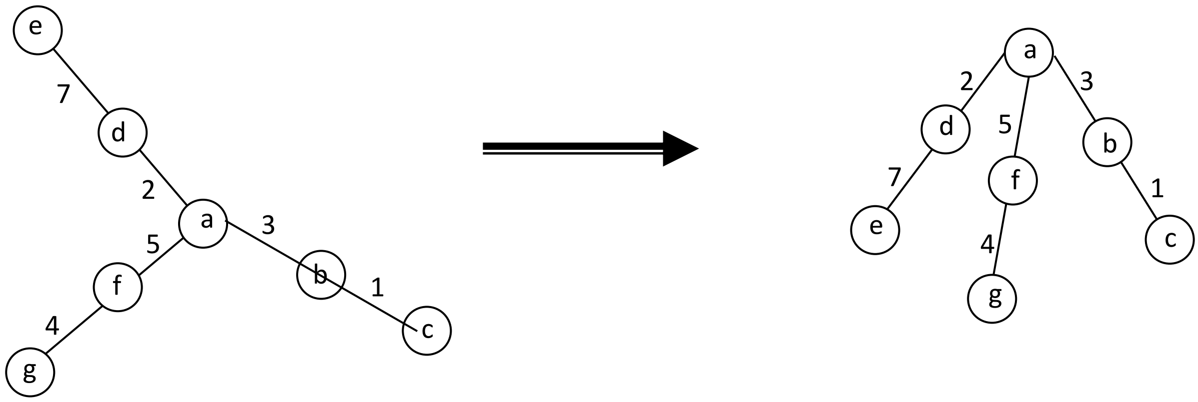
گام۱: ابتدا برای هر راس z از درخت T(r)، مقادیر $\mu(z)$ را محاسبه کنید .

گام۲: قرار دهید $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_p\}$ به طوری که $\mu(q_1), \mu(q_2), \ldots, \mu(q_p)$ اولـین p عـدد بـزرگ از میـان مجموعه $S = \{\mu(z) | z \in v\}$ می‌باشد .

گام ۳: Q را برگردانید .

<u>**قضیه ۵-۲ :**</u> مساله p– مرکز همبند روی درخت ، در پیچیدگی زمانی از مرتبه $O(n)$ حل می شود. [۳]

به مثال زیر توجه کنید. فرض کنید می‌خواهیم مساله ۳- مرکز همبند را برای گرافی کـه در شـکل (۵-۳) بیان شده است حل کنیم.



شکل(۵-۳)

مقادیر μ را برای هر راس می‌یابیم.

$\mu(e)=7 \quad , \quad \mu(d)=9$

$\mu(g)=4 \quad , \quad \mu(f)=9 \quad , \quad \mu(a)=9$

$\mu(c)=1 \quad , \quad \mu(b)=4$

بنابراین اولین 3 عدد بزرگ را از میان مقادیر μ انتخاب می‌کنیم. بنـابراین $Q=\{a,d,f\}$ یـک 3-مرکـز همبند می باشد و $\delta(Q)=7$

در سیستم جهان حقیقی، بعضی از رئوس نمی توانند به عنوان مرکز انتخاب شوند لـذا اگـر مجموعـه تمـام رئوسی که نباید به عنوان مرکز انتخاب شوند را با F نمایش می دهیم، آن گاه F را مجموعه رئوس ممنوعه[۷۰] می‌نامیم. اکنون می خواهیم در این قسمت مساله p– مرکـز همبنـد بـا رئـوس ممنوعـه را روی گرافهـای عنکبوتی حل کنیم.

۷۰-Forbidden vertices

۵-۴ p- مرکز همبند با رئوس ممنوعه[۷۱] :

گراف G(V,E,w) و یک زیر مجموعه F از V و یک عدد صحیح و مثبت $p \geq 2$ را در نظر بگیرید. می خواهیم یک P– مرکز همبند مانند Q از گراف G را به گونه ای بیابیم به طوری که $\delta(Q)$ تحت این شرط که $Q \cap F = \phi$ مینیمم شود. [۳]

برای هر راس z از درخت T(r)، مقادیر $\Delta(z)$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم :

$$\Delta(z) = 0 \qquad (۵-۱۲)$$

اگر $z \in F$ باشد .

$$\Delta(z) = 1 \qquad (۵-۱۳)$$

اگر z یک راس برگ بوده و $z \in F$ نباشد .

$$\Delta(z) = \sum_{y \in children(z)} \Delta(y) + 1 \qquad (۵-۱۴)$$

اگر z یک راس برگ نبوده و $z \in F$ نباشد .

لم ۵-۶ : درخت T(r) را در نظر بگیرید. فرض کنیم F مجموعه رئوس ممنوعه باشد و $p \geq 2$ همچنین فرض کنید $T_k,....,T_2,T_1$ زیردرختهای مجزا بوده که از طریق حذف رئوس در F حاصل شده اند . در این صورت روابط زیر برقرار است :

۱) $|V(T_j)| < p$ اگر و تنها اگر برای هر رأس u در زیر درخت T_j داشته باشیم $\Delta(u) < p$

۷۱- The forbidden connected p-center

۲) فرض کنید H یک P– مرکز همبند از T باشد بطوری که $H \cap F = \phi$ و T^* زیرگرافی بوده که از طریق اجتماع تمام زیرگرافهایی که در خاصیت (۱) صدق می کنند به دست آمـده باشـد. در ایـن صورت $H \cap V(T^*) = \phi$ [۳]

در واقع لم (۵-۶) ایجاب می کند که همه رئوس در T^*می توانند به عنوان رئـوس ممنوعـه اضـافی، تلقـی شوند. یعنی همه رئوس در T^* می توانند به عنوان اعضای اضافی از مجموعه F لحاظ شوند.

برای یافتن $V(T^*)$ ، برای هر رأس $z \notin F$ ،مقدار $\varepsilon(z)$ را محاسبه می کنیم، سپس قرار می‌دهیم

$$V(T^*) = \{z | z \notin F, \varepsilon(z) < P\} \qquad (۱۵-۵)$$

۱) اگر z=r آن گاه $\varepsilon(z) = \Delta(z)$

۲) $,z \neq r$ $$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon(par(z)) & par(z) \notin F \\ \Delta(z) & par(z) \in F \end{cases}$$

تعریف ۵-۴ : (مساله $FP^{(r)}$): درخت T=(V,E) با راس ریشه r را در نظر بگیرید. فرض کنـیم F مجموعـه رئـوس ممنوعـه باشـد و $r \notin F$. می‌خـواهیم P– مرکـز همبنـد، Q را بگونـه ای تعیـین کنـیم کـه $\delta(Q) = \max\limits_{v \in V-Q}\{d(v,Q)\}$ تحت این شرط که $Q \cap F = \phi$ و $r \in Q$ مینیمم شود. [۳]

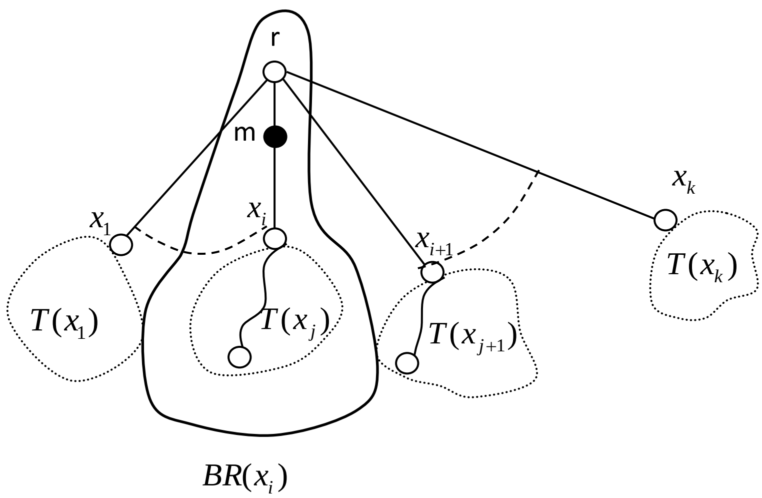
لم ۵-۷: فرض کنید $Q = \{q_1, q_2, ..., q_p\}$ به طوری کـه $\mu(q_p)...,\mu(q_2),\mu(q_1)$ اولـین P عـدد بـزرگ از میان مجموعه $S = \{\mu(z) | z \in V-F\}$ باشد . درایـن صـورت Q یـک جـواب بـرای مسـاله $FP^{(r)}$ بـوده و $\delta(Q) = \gamma$ کـه γ , (p+1) امـین عـدد بـزرگ از میـان $\max\{\mu(z) | z \in F|\}, \{\mu(z) | z \in V-F\}$ می‌باشد. [۱]

لم ۵- ۸ : درخت $T=(V,E)$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم F مجموعه رئوس ممنوعه T باشد. فرض کنیم v,u یک جفت از رئوس T باشد به طوری که برای هر جفت از رئوس y,x از T داشته باشیم $d(u,v)\geq d(x,y)$. همچنین فرض کنید m نقطه‌ای در وسط کوتاهترین مسیر از u به v باشد یعنی $d(u,m)=d(m,v)=0.5*d(u,v)$. حال فرض کنیم r ، راسی غیر ممنوعه باشد به طوری که کمترین فاصله را با m داشته باشد . در این صورت اگر Q یک p- مرکز همبند گراف T باشد به طوری که $r\in Q$، برای هر P- همبند H از T که $r\notin H$ داریم $\delta(Q)\leq\delta(H)$. [۳]

اثبات: فرض کنیم $x_K,\ldots,x_2,x_1$ بچه های راس r باشند. تعریف می کنیم

$$\mathrm{B}R(x_t)=T(x_t)\cup\{(r,x_t)\} \qquad (۵-۱۶)$$

$\mathrm{B}R(x_t)$ را به عنوان انشعاب روی x_t تعریف می کنیم $(1\leq t\leq k)$. نقطه میانی m در نهایت در یکی از $\mathrm{B}R(x_t)$ها قرار می گیرد. فرض کنیم نقطه میانی m روی $\mathrm{B}R(x_j)$ قرار گیرد. همچنین با توجه به نحوه انتخاب راس r، داریم $x_j\in F$. بنابراین مطابق شکل (۵-۴) داریم :



شکل(۵-۴)

$$\delta(Q) \le d(v,r) = d(v,m) + d(m,r) = 0.5 * d(u,v) + d(m,r) \qquad (۱۷-۵)$$

بنابراین چون $r \notin H$ لذا رأسی مانند x_z موجود است $(1 \le z \le k)$ به طوری که $H \subseteq V(T(x_z))$ حـال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: $H \subseteq V(T(x_j))$ **:** این حالت بیانگر زمانی است که H روی زیر درخت $T(x_j)$ قرار دارد.

بنابراین

$$\delta(H) \ge d(u,y) = d(u,m) + d(m,y) \ge 0.5 * d(u,v) + d(m,r) \qquad (۱۸-۵)$$

به طوری که $y \in H$ بنابراین $\delta(H) \ge \delta(Q)$

حالت ۲: $H \subseteq V(T(x_t))$: بطوری که $t \ne j$, $1 \le t \le k$ این حالت بیانگر زمانی اسـت کـه H روی زیـر درخت $T(x_t)$ قرار دارد. بنابراین

$$\begin{aligned} &\delta(H) \ge d(v,x_t) = d(v,r) + d(r,x_t) = d(v,m) + d(m,r) + d(r,x_t) = \\ &0.5 * d(u,v) + d(m,r) + d(r,x_t) \ \ \ge \delta(Q) \end{aligned} \qquad (۱۹-۵)$$

بنابراین درهر دو حالت $\delta(Q) \le \delta(H)$.

دراین قسمت به بیان الگوریتم‌هایی برای حل مساله P– مرکز همبند بـا رئـوس ممنوعـه روی درختهـا مـی پردازیم.

۵-۵ الگوریتم p– مرکز همبند با رئوس ممنوعه: [۳]

گام۱: برای هر راس z، مقادیر $\varepsilon(z),\mu(z)$ را محاسبه می کنیم و رئوس ممنوعه اضافی را می‌یـابیم و به مجموعه F اضافه می‌کنیم .

گام۲: اگر F=V بود آنگاه $Q=\phi$

گام۳: یک جفت از رئوس v,u را به گونه‌ای می یابیم به طـوری کـه $d(u,v)\ge d(x,y)$ بـرای هـر دو راس $x,y\in V$. نقطه m را که در وسط کوتاهترین مسـیر از u بـه v قـرار دارد می‌یـابیم . راس r (ریشـه) را نزدیکترین راس به نقطه m قرار می‌دهیم بطوریکه $r\notin F$

گام۴: $Q=FP^{(r)}$ روی گراف T(r)

گام۵: Q را بر می گردانیم .

همانطور که در گام ۴ الگوریتم (۵-۵) دیده می‌شود ما نیاز به الگوریتمی برای حل مساله $FP^{(r)}$ داریم کـه در قسمت زیر به بیان الگوریتمی برای حل این مساله می‌پردازیم .

۵-۶ الگوریتم $FP^{(r)}$ روی درختها : [۱]

گام۱: برای هر راس z، مقادیر $\mu(z)$ را محاسبه می‌کنیم.

گام۲: قرار می‌دهیم $Q=\{q_1,q_2,...,q_p\}$ به طوری که $\mu(q_1),\mu(q_2),...\mu(q_p)$ اولین p عدد بزرگ از میان مجموعه $\{\mu(z)|z\in V-F\}$ می‌باشد.

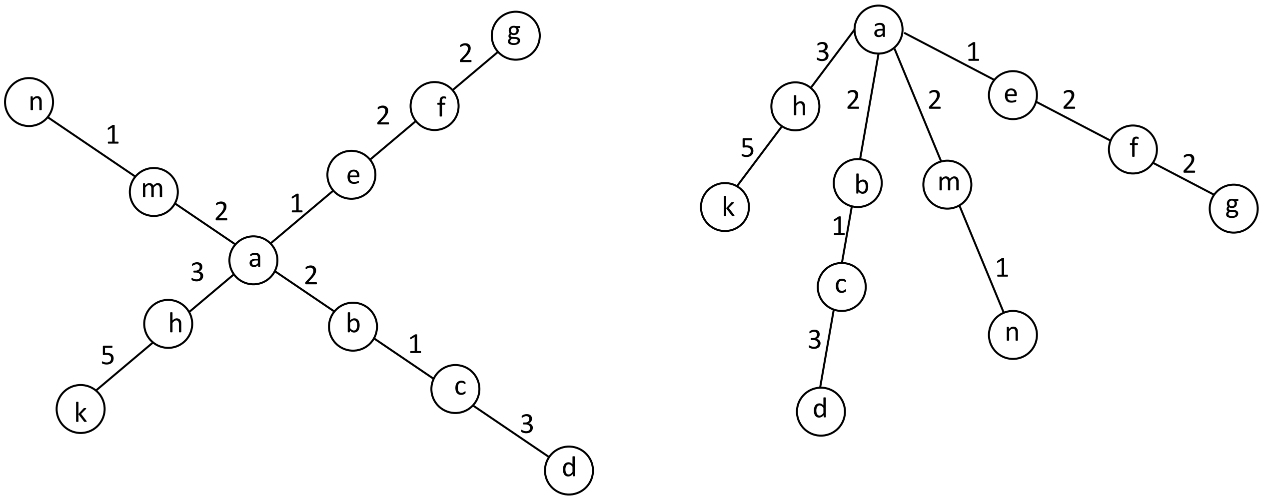
گام۳: Q را بر می گردانیم .

این بحث را با یک قضیه و یک مثال به پایان می رسانیم .

قضیه ۵-۳ : مساله p– مرکز همبند با رئوس ممنوعه روی درختها در پیچیدگی زمانی از مرتبه $O(n)$ حل می شود . [۳]

به عنوان مثال درخت عنکبوتی T=(V,E) را به صورت شکل (۵-۵) در نظر بگیرید.

فرض کنید مجموعه رئوس ممنوعه برابر $F=\{b,m,h\}$ باشد . حال می خـواهیم ۳- مرکـز همبنـد را روی درخت عنکبوتی شکل (۵-۵) بیابیم.



شکل(۵- ۵)

حال مقادیر $\varepsilon(z),\mu(z)$ را برای هر راس $z\in V$ می‌یابیم

$$\mu(b)=6 \qquad \mu(h)=8 \qquad \mu(k)=5$$
$$\mu(e)=5 \qquad \mu(c)=4 \qquad \mu(d)=3$$
$$\mu(a)=8 \qquad \mu(m)=3 \qquad \mu(n)=1$$
$$\mu(f)=4 \qquad \mu(g)=2$$

$$V(T^*)=\{z|z\notin F,\varepsilon(z)<p=3\}$$

برای هر z، مقادیر $\Delta(z)$ به صورت زیر است

$\Delta(k)=1 \qquad \Delta(h)=0 \qquad \Delta(b)=0$

$\Delta(d)=1 \qquad \Delta(c)=2 \qquad \Delta(e)=3$

$\Delta(n)=1 \qquad \Delta(m)=0 \qquad \Delta(a)=4$

$\Delta(g)=1 \qquad \Delta(f)=2$

با توجه به مقادیر Δ، برای هر رأس $z \in V$ ، مقدار $\varepsilon(z)$ به صورت زیر است:

$\varepsilon(k)=\Delta(k)=1 \qquad \varepsilon(g)=\varepsilon(f)=\varepsilon(e)=\varepsilon(a)=\Delta(a)=4$

$\varepsilon(d)=\varepsilon(c)=\Delta(c)=2 \qquad \varepsilon(h)=\varepsilon(a)=\Delta(a)=4$

$\varepsilon(n)=\Delta(n)=1$

$\varepsilon(m)=\varepsilon(a)=1$

$\varepsilon(b)=\varepsilon(a)=1$

لذا $V(T^*)=\{n,c,d,k\}$. بنابراین این رئوس نیز به مجموعه رئوس ممنوعه یعنی $F=\{b,m,h\}$ اضافه می شود. بنابراین مجموعه رئوس ممنوعه جدید به صورت

$F^*=\{b,m,h,n,c,d,k\}$

خواهد بود . بنابراین $Q=\{a,e,f\}$

3- مرکز همبند برای درخت عنکبوتی مذکور می‌باشد به طوری که $\delta(Q)=8$

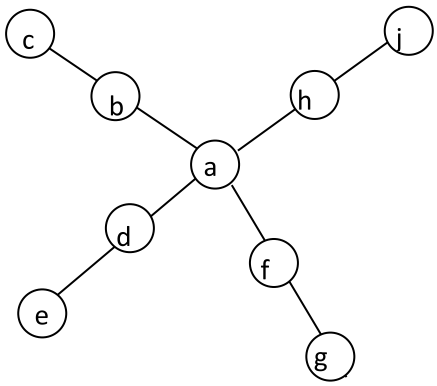
فصل ششم

مقایسه جواب مساله P- مرکز وP-مرکزهمبند روی درختهای عنکبوتی در شرایط خاص

۶-۱ مقایسه جواب مساله p- مرکز و p- مرکز همبند روی درختهای عنکبوتی در شرایط خاص :

در این قسمت با الگوریتم $P^{(r)}$ مساله p– مرکز همبند را روی درختهای عنکبوتی در شرایطی که مطـرح می‌شود ، به طور جداگانه بحث و بررسی می‌کنیم .

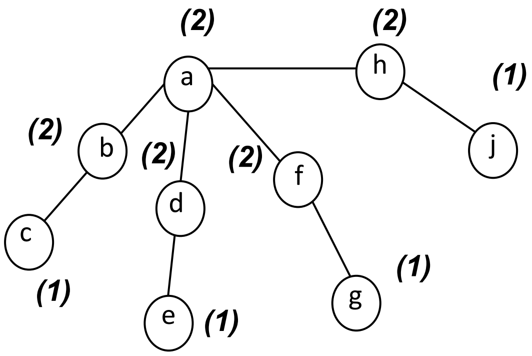
۱- ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که درخت عنکبوتی دارای طول پاهای یکسان و همچنین طول تمام یالها نیز یکسان باشد یا یالها با وزن واحد در نظر گرفته شوند . (فرض می‌کنیم که برای هر یـال $e \in E$ داشــته باشیم $l(e)=1$)



شکل(۶-۱)

همانطور که دیده می شود ، طول طولانی‌ترین مسیر درگـراف مـذکور برابـر ۴ خواهـد بـود. بنـابراین نقطـه انشعاب که همان گره a می‌باشد، به عنوان ریشه درخت منظور می شود. بنابراین داریم :

پس از آنکه فرم درختی گراف فـوق پیـاده سـازی شـد مقـادیر $\mu(z)$ را بـرای هـر راس $z \in V$ محاســبه می‌کنیم. (مقادیر μ پس از محاسبه در کنار هر راس نوشته شده است)



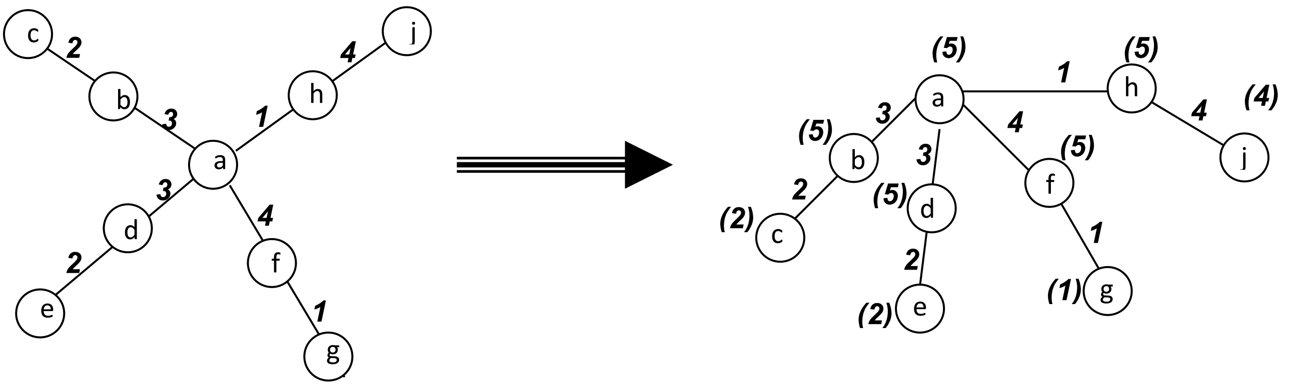
شکل (۶-۲)

بنابراین راس a به عنوان جواب مساله ۱- مرکز می باشد. اما زمانی که با مساله ۲- مرکز سر و کار داشته باشیم $\{a,b\}$ یا $\{a,d\}$ یا $\{a,f\}$ یا $\{a,h\}$ می توانند هر کدام به عنوان جوابی برای مساله ۲- مرکز لحاظ شوند. به همین ترتیب $\{a,b,d\}$ یا $\{a,b,f\}$ یا $\{a,b,h\}$ یا ... می توانند به عنوان جوابی برای مساله ۳- مرکز لحاظ شوند. بنابراین تا زمانی که بخواهیم مساله ۵- مرکز را حل کنیم، راس a به همراه ۴ راس مجاورش جوابی برای مساله ۵- مرکز می‌باشد. اما اگر بخواهیم مساله ۶- مرکز را برای گراف مذکور حل کنیم پس از انتخاب کلیه رئوسی که با نقطه انشعاب مجاور هستند به سراغ یکی از پاهای گراف عنکبوتی رفته و راسی را که با یکی از رئوسی که به عنوان مرکز انتخاب شده ، مجاور است را به عنوان یک مرکز جدید انتخاب می‌کنیم .

بنابراین زمانی که با یک درخت عنکبوتی با طول پاهای یکسان و طول یالهای برابر سر وکار داریم ابتدا نقطه انشعاب را به عنوان جواب مساله ۱- مرکز در نظر می‌گیریم و سپس با حرکت روی دوایر متحد المرکزی که همگی آنها مرکزشان نقطه انشعاب درخت عنکبوتی است (حرکت از دایره باشعاع کوچکتر به دایره با شعاع بزرگتر) و انتخاب گره‌های روی این دوایر به عنوان مراکز، مساله p– مرکز برای این دسته از گرافها حل می شود.

یعنی اگر فرض کنیم که $|l|$ بیانگر تعداد پاهای درخت عنکبوتی باشد, در این حالت اگر p=۱ آنگاه نقطه انشعاب را به عنوان جواب مساله p- مرکز در نظر می‌گیریم. در حالتی که $p \le |l|+1$ نقطه انشعاب و کلیه رئوسی که با نقطه انشعاب مجاورند می توانند به عنوان جواب مساله p- مرکز لحاظ گردند. اما اگر $p > |l|+1$ نقطه انشعاب و کلیه رئوسی که با نقطه انشعاب مجاور هستند به همراه رئوسی که با راس هایی که به عنوان مرکز انتخاب شده اند , مجاورند می توانند به عنوان جواب مساله p- مرکز لحاظ گردند.

۲- حالتی که درخت عنکبوتی دارای طول پاهای یکسان ولی طول تمام یالها یکسان نباشد.



شکل(۶-۳)

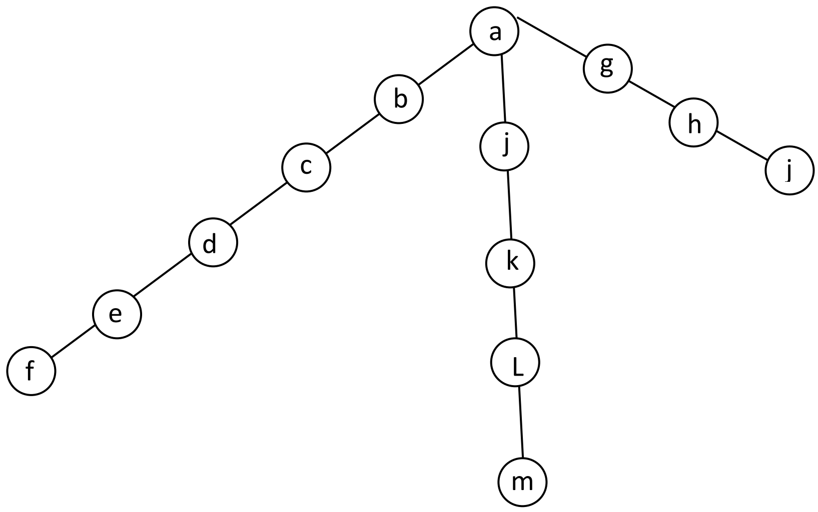
در این حالت مشابه حالت قبل، راس a یا همان نقطه انشعاب به عنوان جواب مساله ۱- مرکز می‌باشد.

زمانی که $p \le |l|+1$, نقطه انشعاب و کلیه رئوسی که با نقطه انشعاب مجاورند می توانند به عنوان جواب مساله p- مرکز لحاظ گردند. اما اگر $p > |l|+1$, نقطه انشعاب و کلیه گره‌هایی که با نقطه انشعاب مجاور است ، جواب مساله p- مرکز بوده و برای انتخاب مراکز بعدی به سراغ راس مجاور با یالی رفته که آن یال دارای بیشترین طول بوده و با یکی از رئوسی که به عنوان مرکز انتخاب شده است مجاور باشد.

بنابراین این روند را برای انتخاب مراکز بعدی نیز انجام می‌دهیم .

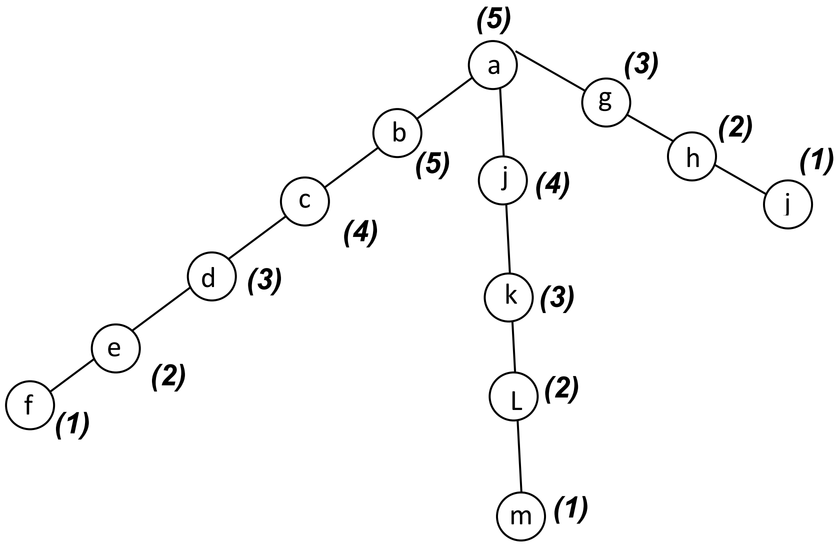
۳- حالتی که در آن طول هر پا در گراف عنکبوتی، از نصف طولانی‌ترین پا ، بزرگتـر یـا مسـاوی باشـد. در صورتی که فرض کنیم طول بزرگترین پا ، برابر n باشد آنگاه باید برای هر پا از درخت عنکبـوتی بـا طـولی مانند L داشته باشیم $\frac{n}{2} \le L < n$ (توجه کنید که برای هر یال $e \in E$ داریم $l(e) = 1$)

برای بررسی این روند، درخت عنکبوتی با شرایط فوق را در نظر می‌گیریم .



شکل(۶-۴)

ابتدا راس ریشه را درگراف فوق می‌یابیم . لذا طبق لم (۵-۱) ، راس a یا b می‌توانند به عنوان ریشه انتخاب شوند. اگر ما راس a را به عنوان ریشه انتخاب کنیم, بنابراین با محاسبه مقادیر $\mu(z)$ برای هر راس $z \in V$ ، داریم :

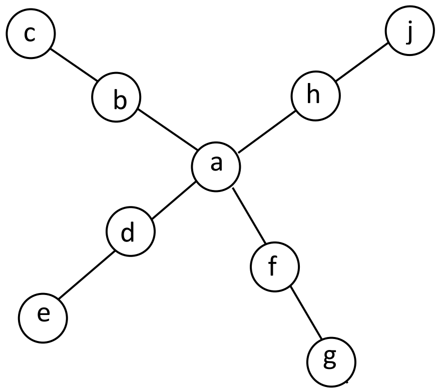


شکل(۶-۵)

پس از محاسبه مقادیر μ همانطور که دیده می شود رئوس a یا b می‌توانند به عنوان جواب مساله ۱- مرکز معرفی شوند. اما با توجه به مقادیر μ ، $\{a,b\}$ جواب مساله ۲- مرکز همبند از گراف عنکبوتی مذکور می‌باشد. به همین ترتیب $\{a,b,c\}$ جواب مساله ۳- مرکز می باشد. بنابراین تا این لحظه جواب روی طولانی‌ترین پا می‌باشد. حال اگر بخواهیم مساله ۴- مرکز را برای گراف فوق حل کنیم همانطور که دیده می‌شود باید راس چهارم را در دومین پا که طولانی‌ترین طول را نسبت به بقیه دارد جستجو کرد. یعنی تا زمانی که $p \leq \left[\frac{n}{2}\right]+1$ جواب مساله p– مرکز همبند روی طولانی‌ترین پا از گراف عنکبوتی می‌باشد. بنابراین کافی است که عملیات جستجو روی طولانی‌ترین پا از گراف عنکبوتی انجام گیرد. اما به محض اینکه $p > [n/2]+1$ ، آن گاه به منظور یافتن جوابی برای مساله p– مرکز همبند، تنها باید از طریق مقادیر μ عملیات جستجو را ادامه داد.

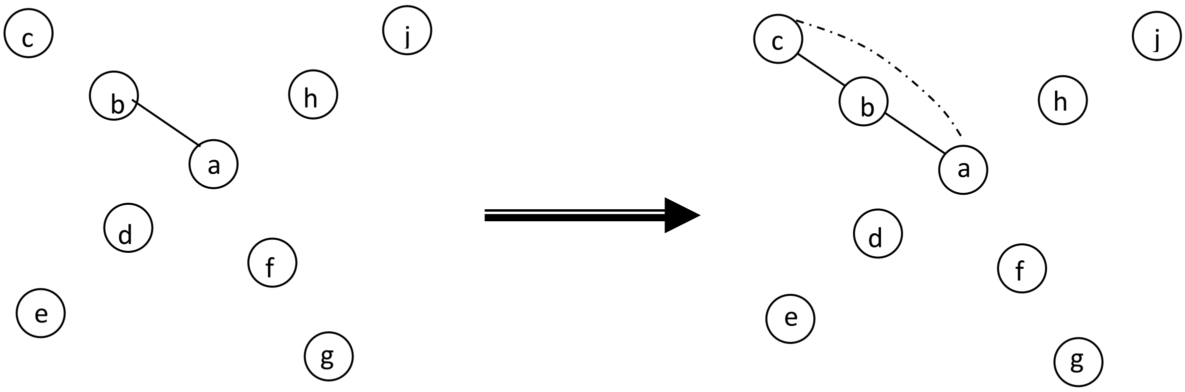
حال در این قسمت ، از طریق الگوریتم (۳-۲) که اساس آن بر پایه مجموعه مستقل ماکزیمال پایه‌ریزی شده مساله p– مرکز را روی درختهای عنکبوتی در شرایطی که مطرح می‌شود ، به طور جداگانه بحث و بررسی می‌کنیم.

۱- ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که درخت عنکبوتی دارای طول پاهای یکسان و همچنین طول تمام یالها نیز یکسان باشد.(فرض کنیم که برای هر یال $e \in E$ داشته باشیم $l(e)=1$)



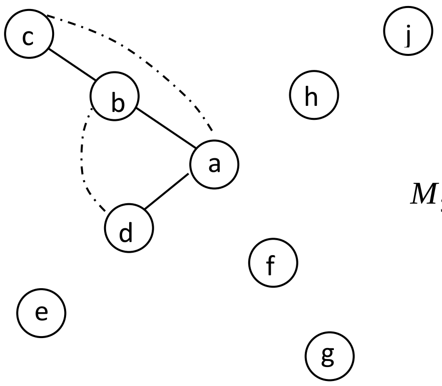
شکل(۶-۶)

ابتدا چون در این حالت وزن یالها (براساس فاصله) با هم برابر است ، لذا گراف G_1 و سپس گراف G_1^2 را تشکیل می‌دهیم.



گراف G_2^2, G_2 شکل (۶-۷)   گراف G_1^2, G_1

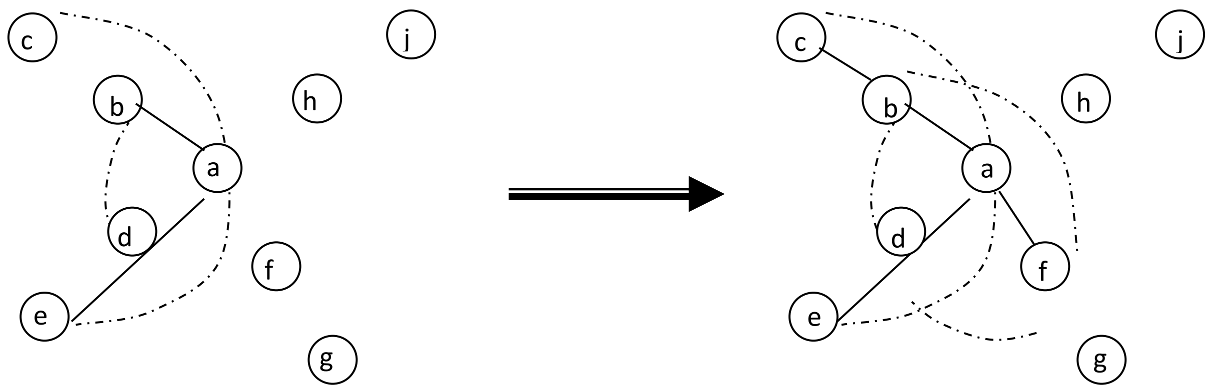
$M_2 = \{a, d, e, f, g, h, i\}$ $M_1 = \{a, c, d, e, f, g, h, i\}$



گراف G_3^2, G_3

$M_3 = \{a, e, f, g, h, i\}$

شکل (۶-۸)



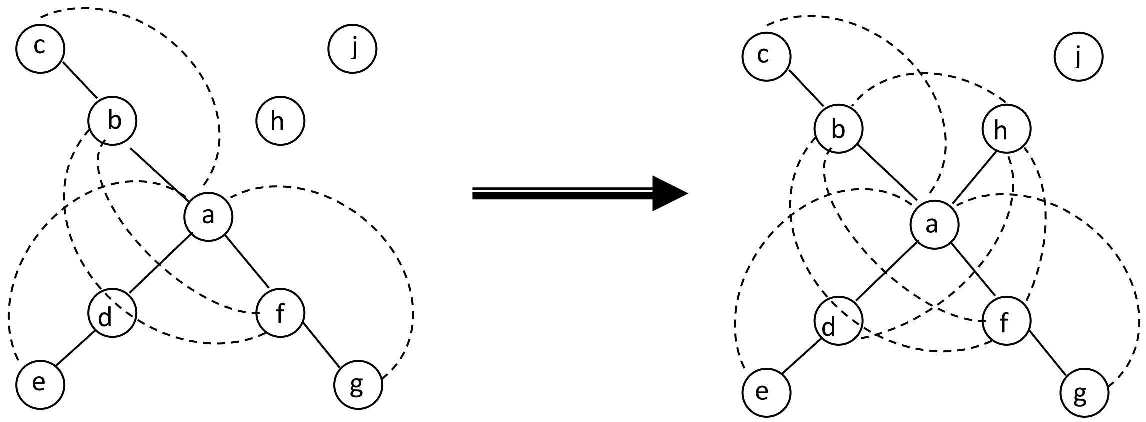
گراف G_4^2,G_4

شکل (۶-۹)

گراف G_5^2,G_5

$M_4=\{a,f,g,h,i\}$

$M_5=\{a,g,h,i\}$



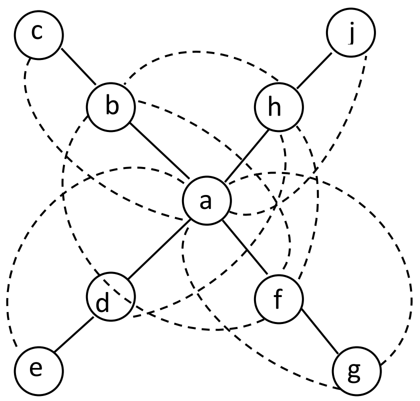
گراف G_6^2,G_6

شکل (۶-۱۰)

گراف G_7^2,G_7

$M_6=\{a,h,i\}$

$M_7=\{a,i\}$



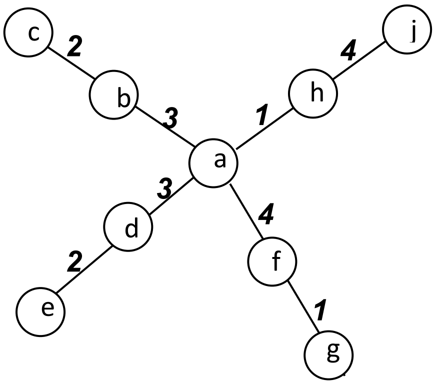
شکل (۶-۱۱)　　　گراف G_8^2, G_8

$$M_8 = \{a\}$$

بنابراین همان طور که مرحله فوق نشان می‌دهد در درخت عنکبوتی با طول پاهای مساوی و یالهای یکسان ، نقطه انشعاب آن جواب مساله ۱- مرکز می‌باشد. برای تعیین مرکز بعدی، چون طول همه پاها یکسان می باشد، لذا یک پا را به دلخواه انتخاب کرده ، و راس برگ آن پا را به عنوان مرکز بعدی یعنی جواب مساله ۲- مرکز در نظر می‌گیریم. همچنین جهت تعیین مرکز بعدی، راسی را که با راس برگ که به عنوان مرکز تعیین شده ، مجاور است را به عنوان جواب مساله ۳- مرکز لحاظ می‌کنیم و این روند را روی پای انتخاب شده جهت تعیین مراکز بعدی تا زمان رسیدن به نقطه انشعاب درخت عنکبوتی ادامه می دهیم و پس از آن همین روند را جهت تعیین مراکز بعدی روی پاهای دیگر درخت عنکبوتی تکرار می‌کنیم.

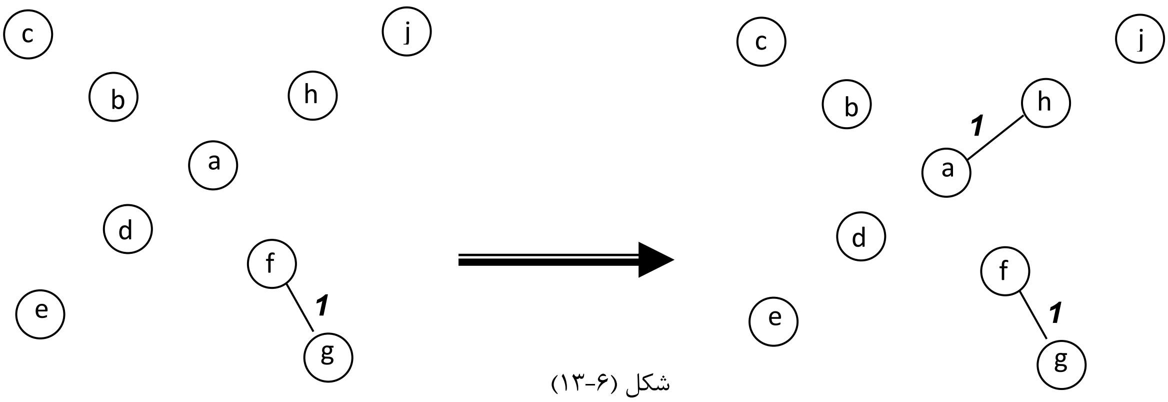
۲- حالتی که درخت عنکبوتی دارای طول پاهای یکسان ولی طول تمام یالها یکسان نباشد.

به عنوان مثال درخت عنکبوتی شکل (۶-۱۲) را در نظر بگیرید.



شکل (۶-۱۲)

در این حالت ، ابتدا یال‌ها را براساس فاصله به صورت غیر نزولی مرتب نموده و گرافهای G_i^2, G_i ، که $(1 \le i \le 8)$ را تشکیل می‌دهیم .



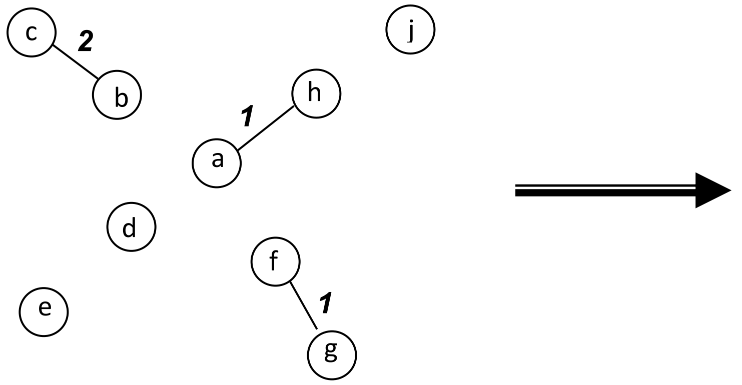
شکل (۶-۱۳)

گراف G_1^2, G_1

$M_1 = \{a, b, c, d, e, f, h, i\}$

گراف G_2^2, G_2

$M_2 = \{a, b, c, d, e, f, i\}$



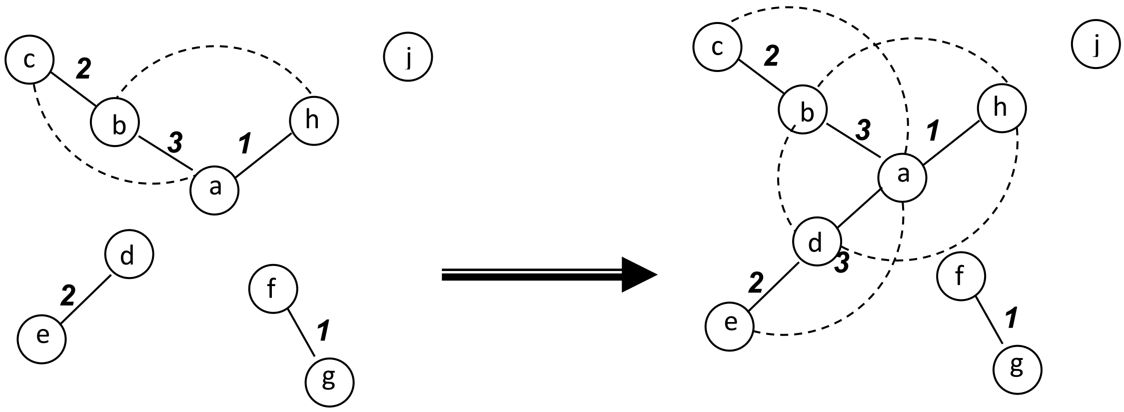
گراف G_3^2, G_3

شکل (۶-۱۴)

گراف G_4^2, G_4

$M_3 = \{a, b, d, e, f, i\}$

$M_4 = \{a, b, d, f, i\}$



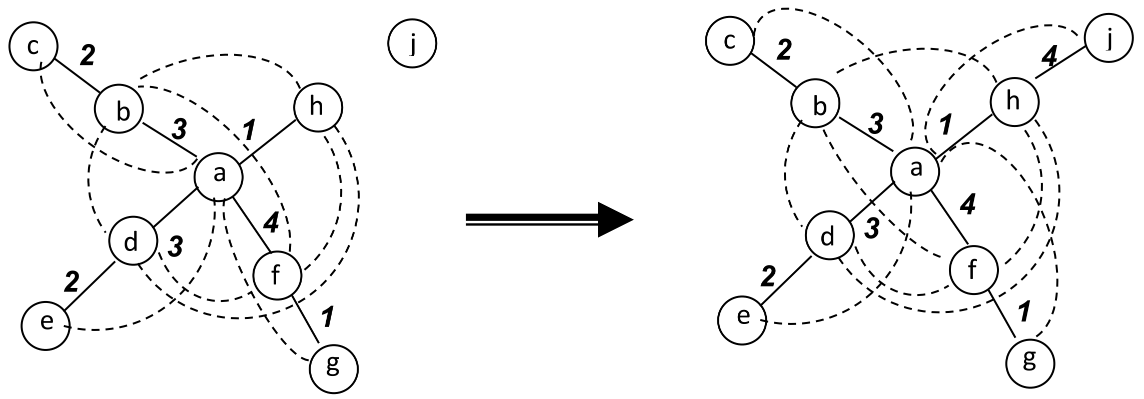
گراف G_5^2, G_5

شکل (۶-۱۵)

گراف G_6^2, G_6

$M_5 = \{a, d, f, i\}$

$M_6 = \{a, f, i\}$

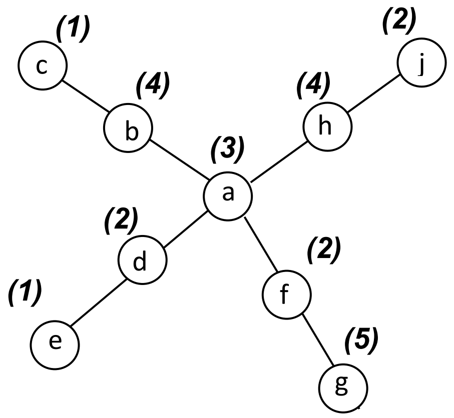


گراف G_7^2, G_7 شکل (۶-۱۶) گراف G_8^2, G_8

$M_7 = \{a, i\}$ $M_8 = \{a\}$

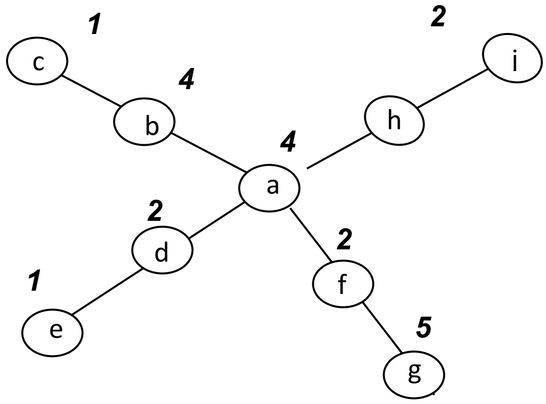
همان طور که مراحل فوق نشان می‌دهد در یک درخت عنکبوتی با طول پاهای مساوی ولی وزن یالها (فاصله) یکسان نباشند، نقطه انشعاب آن جواب مساله ۱- مرکز می‌باشد. برای تعیین مرکز بعدی ، راس مجاور با یالی که دارای بیشترین (فاصله) یا وزن است را انتخاب می‌کنیم. لذا این راس به همراه نقطه انشعاب، جواب مساله ۲- مرکز می‌باشد. به همین ترتیب برای انتخاب مراکز بعدی، روندی که در پیش می‌گیریم بدین صورت است که راس مجاور با یالی که دارای بیشترین وزن یالی نسبت به سایر یالهای انتخاب نشده است را به عنوان مرکز بعدی لحاظ می‌کنیم.

تا کنون شرایطی که درحالات ۱و۲ ذکر شد، وضعیتی بودکه وزن تمامی رئوس یکسان بودند . حال از طریق الگوریتم (۳-۳) حالت ۱ را در شرایطی که رئوس نیز وزندار هستند، بررسی می‌کنیم. به عنوان مثال درخت عنکبوتی با شرایط ۱ را به طوری که وزن راسهای آن متفاوتند به صورت شکل (۶-۱۷) در نظر بگیرید.



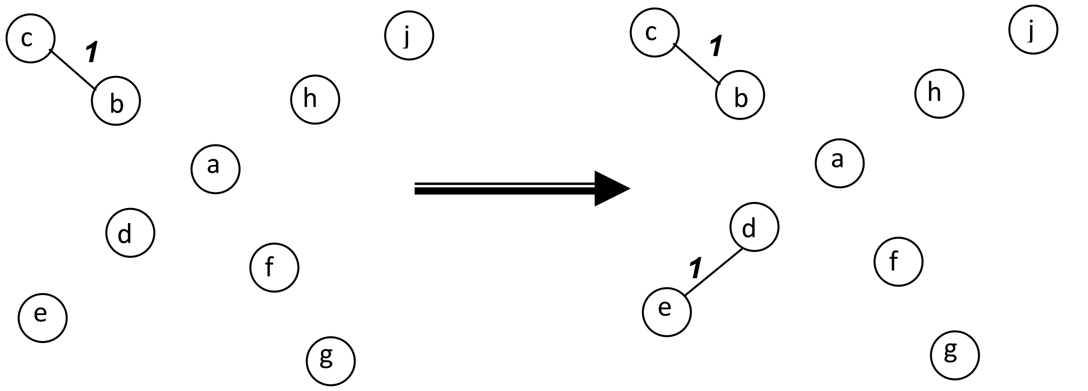
شکل (۶-۱۷)

مطابق الگوریتم (۳-۳) ابتدا یالها را براساس فاصله وزن‌دار به صورت غیر نزولی مرتب می‌کنیم. لـذا درخـت عنکبوتی شکل (۶-۱۷) به صورت گراف شکل (۶-۱۸) تبدیل می‌شود.



شکل (۶-۱۸)

حال طبق الگوریتم (۳-۳) ، گرافهای زیر را می سازیم و برای هر کدام مجموعه مستقل ماکزیمال را تعیین می‌کنیم . در محاسبات زیر, مجموعه U بیانگر مجموعه مراکز می‌باشد.



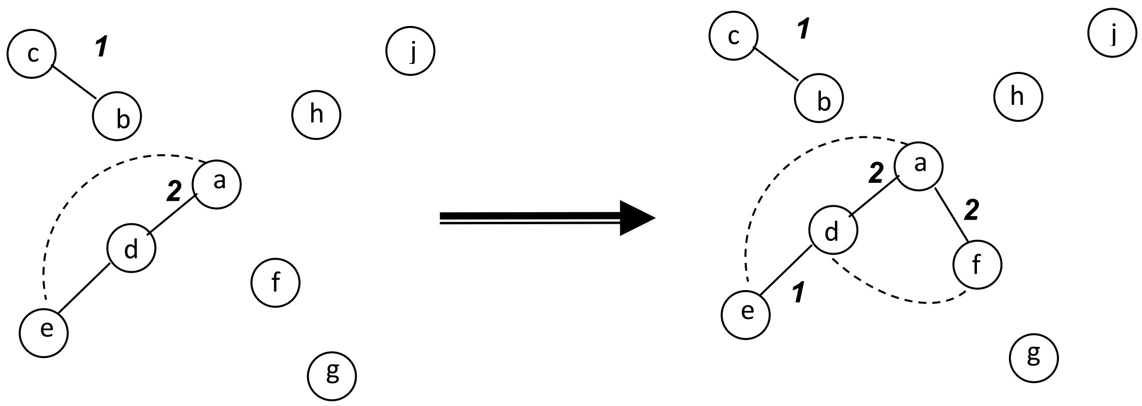
گراف G_1^2, G_1

شکل (۶-۱۹)

گراف G_2^2, G_2

$$M_1 = \{a, b, d, e, f, g, h, i\}$$
$$U = \{a, c, d, e, f, g, h, i\}$$

$$M_2 = \{a, b, d, f, g, h, i\}$$
$$U = \{a, c, e, f, g, h, i\}$$



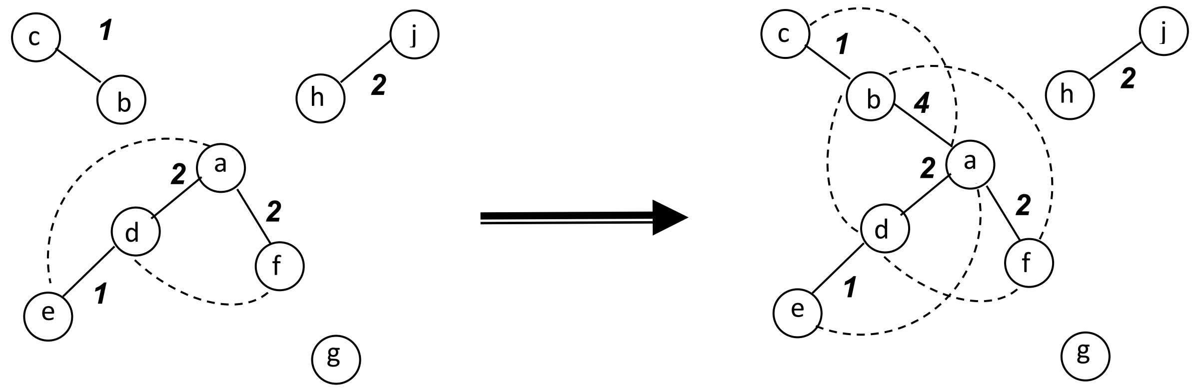
گراف G_3^2, G_3

شکل (۶-۲۰)

گراف G_4^2, G_4

$$M_3 = \{a, b, f, g, h, i\}$$
$$U = \{d, c, f, g, h, i\}$$

$$M_4 = \{a, b, g, h, i\}$$
$$U = \{d, c, g, h, i\}$$
$$or$$
$$\{f, c, g, h, i\}$$



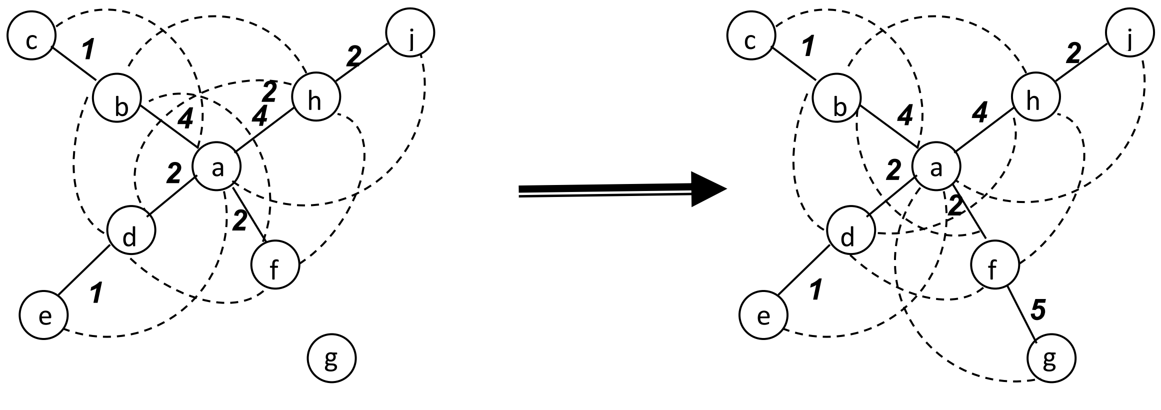
گراف G_5^2, G_5

شکل (۶-۲۱)

گراف G_6^2, G_6

$$M_5 = \{a, b, g, h\}$$
$$U = \{d, c, g, i\}$$
$$or$$
$$\{f, c, g, i\}$$

$$M_6 = \{a, g, h\}$$
$$U = \{d, g, i\}$$
$$or$$
$$\{f, g, i\}$$



گراف G_7^2, G_7

شکل (۶-۲۲)

گراف G_8^2, G_8

$$M_7 = \{a, g\}$$
$$U = \{d, g\}$$
$$or$$
$$\{f, g\}$$

$$M_8 = \{a\}$$
$$U = \{d\}$$
$$or$$
$$\{f\}$$

همان طور که در مراحل فوق دیده می شود ممکن است برای مساله p- مرکز چندین جواب موجود باشد. به عنوان مثال در شکل (۶-۲۲) رئوس d یا f می توانند به عنوان جوابی برای مساله ۱- مرکز برای شکل (۶-۱۷) لحاظ شوند.

نتایج :

به طور کلی با توجه به آن که مساله p- مرکز جزء دسته مسائل Np-hard می باشد بنابراین باید جواب آن را از طریق روش های ابتکاری برآورد نمود. در این پایان نامه , ما الگوریتم های p- مرکز همبند و p- مرکز همبند با رئوس ممنوعه را روی درختها بیان کردیم و پیچیدگی زمانی هر کدام از آنها را ذکر کردیم .

همچنین الگوریتمی تحت عنوان الگوریتم SCR که بر اساس کوچکترین مجموعه غالب پایه ریزی شده است را بیان نموده و در ادامه الگوریتم هایی که براساس مجموعه مستقل ماکزیمال پایه ریزی شده اند و به منظور برآورد مساله p- مرکز در حالت اصلی و در حالت وزندار به کار می روند، را بیان کردیم و بر اساس لم (۳-۱) به این نتیجه رسیدیم که الگوریتم‌هایی که براساس مجموعه مستقل ماکزیمال پایه ریزی شده اند و جهت برآورد مساله p- مرکز به کار می رود، به مراتب سریع تر از الگوریتم‌هایی است که بر اساس کوچکترین مجموعه غالب پایه ریزی شده اند. بنابراین کلیه بحث های فوق را می توان در قالب یک جدول به صورت زیر بیان نمود .

جدول ۱- فهرست الگوریتم‌هایی که مورد بررسی قرار گرفته اند.

فصل / صفحه	الگوریتم	پیچیدگی زمانی	ضرایب تقریب
۶۳/۵	p- مرکز همبند روی درختها	$o(n)$	
۶۹/۵	p- مرکز همبند با رئوس ممنوعه روی درختها	$o(n)$	
۱۸/۲	p- مرکز با کوچکترین مجموعه غالب	$o(n^5)$	
۲۵/۳	p- مرکز با مجموعه مستقل ماکزیمال		2
۲۶/۳	p- مرکز با مجموعه مستقل ماکزیمال در حالت وزن‌دار		3
۴۲/۴	p- مرکز با q- پوشش در حالت اصلی		2
۴۳/۴	p- مرکز با q- پوشش در حالت وزن‌دار		3
۴۶/۴	p- مرکز با q- پوشش وزن‌دار به همراه هزینه		$(2\beta+1)$
۴۸/۴	p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز در حالت اصلی		2
۵۰/۴	p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز در حالت وزندار		4
۵۴/۴	p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز وزن‌دار به همراه هزینه		$(3\beta+1)$
۳۴/۳	q امین مرکز دایر در مساله p- مرکز		2

فهرست منابع فارسی :

۱) حسینی م، (۱۳۷۵) پایان نامه ارشد: ″ مسـاله p− مرکـز در شـبکه هـا″ دانشـکده علـوم ریاضـی، دانشگاه فردوسی مشهد

۲) میرجلالی ف، (۱۳۸۷) پایان نامه ارشد:″ مساله p− مرکز با وزن مثبت و منفی روی شبکه″ دانشکده ریاضی, دانشگاه صنعتی شاهرود

فهرست منابع لاتین :

3) Kung yen. W. C and Tsai chen. C , " The p-center problem with connectivity constraint", **Appl.Math** , 2007, Vol.1, no.27, pp. **1311-1324.**

4) BAHLS. P , Lake. S , Wertheim. A , " Gracefulness of families of spiders" , **Atlantic Electronical Journal of Mathematics**, 2004, no.1, pp. **5-30.**

5) Mihelic. J , "Solving the k-center problem efficiently with a dominating set algorithm"**J.of .computing and information technology-CIT 13**, 2005, 3, pp. **225-233.**
6) Li Gortz. i , "Asymmetric k-center with minimum coverage "**IT University Technical Report Series**, 2005, pp. **66-72.**
7) Dyer. M , Frieze. A. M , " A simple heuristic for the p-center problem "**Math.of Oper.res.**1985, Vol.10, no.2, pp**. 180-184 .**
8) Mihelic. J and Robic. B, "Facility location and covering problems " **Faculty of Computer and Information Science**, 2005, pp. **178-181.**
9) Mihelic. J and Robic. B , " Approximation algorithms for the k-center problem:an experimental evaluation " **Faculty of Computer and Information Science,** 2004, pp. **215-223.**
10) Chaud huri. S and Garg. N and Ravi. R , " The p-neighbor k-center problem" **Math.of Oper.res**, 2006, no.5, pp. **34-39.**
11) Lim. A, Rodrigues. B,Wang. F, Xu**. Z**, " K-center problems with minimum coverage"**Theoretical Computer Science** , 2005, no**.**332**,** pp. **1-17.**
12) Caruso. C and Colorni. A and Aloi. L, " Dominant, an algorithm for the p-center problem " **European Journal of Operational Research**, 2004, no.149**,** pp. **53-64.**
13) Khuller. S , Sussmann. Y. J, " The capacitated k-center problem " **Technical Report UMIACS-TR** , 2000, no.96, pp. **56-76.**
14) Hsu. W, Nemhauser. G , " Easy and hard bottleneck location problems "**Graphs Combin**, 1979, no.17, pp. **209-216.**
15) D. S. Hochbaum and D. B. Shmoys , " A unified approach to approximate algorithms for bottleneck problems "**Journal of the ACM** , 1986, no.33, pp. **533-550.**
16) Vishwanathan. S , " An O(log n) approximation algorithm for the asymmetric p-center problem "**Appl.Math** ,1996, no.35, pp. **71-79.**
17) Tamir. A , " Obnoxious facility location on graphs "**Appl.Math**, 2004, no.39, pp. **61-68.**
18) Krumke. S. O , " On a generalization of the p-center problem " **Inf.proc.Lett**.1995, no.56, pp. **67-71.**
19) Buettcher.S, " Approximability results for the p-center problem" **Algorithm Design and Analysis,** 2004, pp **1-7**
20) Plesnik. J, " A heuristic for the p-center problem in graphs "**Disc. Appl.Math**, 1987, no.17, pp. **263-268.**
21) Kariv. O , Hakimi . S , " An algorithmic approach to network location problems"**SIAM J.of Appl.Math**, 1979, no.37, pp. **513-538**.
22) Cowen. L,Wang. Y, " K-center problem in graphs "**J.of .computing and information technology**, 2005, pp. **143-149**.

واژه نامه :

Adjacent	مجاور
Ancestors	اجداد
Basic q-all coverage p-center	p- مرکز با q- پوشش اصلی
Basic q-coverage p-center	p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز اصلی
Bottleneck graph	زیر گراف در بردارنده
Bottleneck technique	تکنیک زیر گراف دربردارنده
Branch point	نقطه انشعاب
Clique	دسته
Complexity time	پیچیدگی زمانی
Connected graph	گراف همبند
Connected p-center	p- مرکز همبند
Cycle	دور
Diameter of tree	قطر درخت
Diameter path	مسیر قطری
Dominating set	مجموعه غالب
Discrete facility location	مکان یابی تسهیلات گسسته
Edge	یال
Forbidden connected p-center	p- مرکز همبند با رئوس ممنوعه
Forbidden vertices	رئوس ممنوعه
Facility location	مکان یابی تسهیلات
Graph	گراف
Greedy	گریدی
Heuristic	ابتکاری

Independent set	مجموعه مستقل
Krumke	کرومکه
Leaf vertex	راس برگ
Leg	پا
Maximal independent set	مجموعه مستقل ماکزیمال
Maximum independent set	بزرگترین مجموعه مستقل
Minimum coverage	کمترین پوشش
Minimum dominating set	کوچکترین مجموعه غالب
Network	شبکه
Network facility location	مکان یابی تسهیلات شبکه ای
Parametric pruning	اصلاح پارامتر
Parent	نشات گرفته
Path	مسیر
p-center	p- مرکز
P-dominating	p- غالب
P-independent	p- مستقل
Planar	سطح
q-neighbor p-center	q امین مرکز دایر در p- مرکز
q-all coverage p-center	p- مرکز با q- پوشش
q-coverage p-center	p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز
Random facility location	مکان یابی تسهیلات تصادفی
Root vertex	راس ریشه
Spider graph	گراف عنکبوتی

Tree	درخت
Undirected graph	گراف غیرجهت دار
Vertex	راس
Weber	وبر
Weighted p -center	p- مرکز وزن دار