بسم الله الرحمن الرحيم

حوزه معاونت پژوهشی و فناوری

گزارش پایانی طرح پژوهشی

بررسی پوچ سازهای چندجمله ایها روی مدولها

با کد ۲۳۰۵۹

مجری: ابراهیم هاشمی

عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی شاهرود

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است و تاریخ های تصویب و خاتمه آن به ترتیب ۱۳۸۹/۴/۱۳ و ۱۳۸۹/۸/۹ می باشد.

چکیده

در این طرح ابتدا شبه مدولها را به عنوان تعمیمی از مدولها معرفی می کنیم. این خانواده بسیار وسیعتر از خانواده مدولها روی حلقه ها است. فرض کنیم M یک گروه جمعی آبلی، و R یک شبه حلقه یکدار باشد. M را یک شبه مدول روی R نامیم هرگاه تابع $R\times M\to M$ با ضابطه $(r,m)\to rm$ وجود داشته باشد بقسمی که برای هر $r,s\in R$ و هر $m,n\in M$،

۱- $r(m+n)=rm+rn$

۲- $(rs)m=r(sm)$

۳- $1m=m$.

نشان می دهیم اگر M_R یک R-مدول راست باشد آنگاه $M[x]$ یک شبه مدول روی $R[x]$ است. حال فرض کنیم M یک شبه مدول روی شبه حلقه R باشد. فرض کنیم $\phi\neq S\subseteq M$.

۱-گوییم $M\in\beta_{\ell_1}$، هرگاه $\ell_R(S)=\mathrm{R}e$، که e یک خودتوان از R است.

۲- گوییم $M\in\beta_{\ell_2}$، هرگاه $\ell_R(S)=\ell_R(e)$، که e یک خودتوان از R است.

رابطه بین پوچ ساز های شبه مدول $M[x]$ روی $R[x]$ و شبه مدول M روی R را بررسی می کنیم (توجه داریم که $R[x]$ همراه با دو عمل جمع معمولی چندجمله ایها و ترکیب معمولی توابع یک شبه حلقه است). همچنین نشان می دهیم $M[x]$ روی $R.[x]$ تقلیل یافته است اگر و تنها اگر M روی R تقلیل یافته باشد. بسیاری از نتایج بیرکنمیر و هوانگ [۳] از نتایج این طرح بدست می آیند.

کلید واژه فارسی: صفرسازها- شبه حلقه ها- حلقه های بئر- مدولهای تقلیل یافته

فهرست

۱. مثالهایی از مدولهای تقلیل یافته... **۱**

۲ . مدولهای بئر و مدولهای $p.p$ **۱۴**

۳. بررسی صفر سازهای چندجمله ایها روی مدولها... **۲۷**

کتابنامه.. **۳۸**

حوزه معاونت پژوهشی و فناوری

گزارش پایانی طرح پژوهشی

بررسی پوچ سازهای چندجمله ایها روی مدولها

با کد ۲۳۰۵۹

مجری: ابراهیم هاشمی

عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی شاهرود

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است و تاریخ های تصویب و خاتمه آن به ترتیب ۱۳۸۹/۴/۱۳ و ۱۳۸۹/۸/۹ می باشد.

شناسنامه طرح پژوهشی

این طرح با مشخصات ذیل با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است.

الف) عنوان طرح:

۱- فارسی: **بررسی پوچ سازهای چندجمله ایها روی مدولها**

۲- لاتین: Annihilator conditions on polynomials over modules

۳- کد طرح:

ب) نام مجری: ابراهیم هاشمی عضو هیات علمی دانشکده: ریاضی

ج) همکاران:

- مصوب شورای پژوهشی در جلسه شماره ۲۰۰ مورخ ۱۳۸۹/۴/۱۳
- تایید اختتام در شورای پژوهشی در جلسه شماره ۲۰۳ مورخ ۱۳۸۹/۸/۹
- **مدت زمان اجرا** ۴ ماه
- **کل مبلغ اعتبار طرح** ۲۷۷۰۰۰۰ ریال

مقاله/ مقالات مستخرج از طرح با عناوین:(که پیوست گزارش می باشد)

1- Annihilator conditions on polynomials over modules

نام ونام خانوادگی مجری طرح **امضاء** **مدیر امور پژوهشی** **امضاء**

فرم اطلاعات اجمالی

ردیف		
عنوان طرح		**بررسی پوچ سازهای چندجمله ایها روی مدولها**
عنوان لاتین		Annihilator conditions on polynomials over modules
محل نگهداری گزارش (اصلی یا کپی) طرح(سازمان از کل به جزء)	نام سازمان	دانشگاه صنعتی شاهرود
	آدرس پستی	شاهرود- میدان هفتم تیر- بلوار دانشگاه- صندوق پستی۳۱۶-کدپستی ۳۶۱۹۹۹۵۱۶۱
	کشور	ایران
	تلفن	
	فاکس	۰۲۷۳۳۳۳۲۰۱۲
	E-mail	eb_hashemi@shahroodut.ac.ir
رشته های اصلی		ریاضی محض
بعدی....		جبر ناجابجایی
مسئول		ابراهیم هاشمی
مجری(سازمان)		ابراهیم هاشمی (دانشگاه صنعتی شاهرود)
همکاران		
تاریخ شروع		۱۳۸۹/۴/۸
تاریخ خاتمه		۱۳۸۹/۸/۹
اعتبار مصوب به عدد(ریال)		**۲۷۷۰۰۰۰۰**
میزان پیشرفت کار		صد درصد
نوع طرح		بنیادی
چکیده		در این طرح ابتدا شبه مدولها را به عنوان تعمیمی از مدولها معرفی می کنیم. این خانواده بسیار وسیعتر از خانواده مدولها روی حلقه ها است. فرض کنیم M یک گروه جمعی آبلی، و R یک شبه حلقه یکدار باشد. M را یک شبه مدول روی R نامیم هرگاه تابع $R\times M\rightarrow M$ با ضابطه $(r,m)\rightarrow rm$ وجود داشته باشد بقسمی که برای هر $r,s\in R$ و هر $m,n\in M$، ۱- $r(m+n)=rm+rn$ ۲- $(rs)m=r(sm)$ ۳- $1m=m$. نشان می دهیم اگر M_R یک R-مدول راست باشد آنگاه $M[x]$ یک شبه مدول روی $R[x]$ است. حال فرض کنیم M یک شبه مدول روی شبه حلقه R باشد. فرض کنیم $\phi\neq S\subseteq M$. ۱-گوییم $M\in\beta_{\ell_1}$، هرگاه $\ell_R(S)=Re$، که e یک خودتوان از R است. ۲- گوییم $M\in\beta_{\ell_2}$، هرگاه $\ell_R(S)=\ell_R(e)$، که e یک خودتوان از R است. رابطه بین پوچ ساز های شبه مدول $M[x]$ روی $R[x]$ و شبه مدول M روی R را بررسی می کنیم (توجه داریم که $R[x]$ همراه با دو عمل جمع معمولی چندجمله ایها و ترکیب معمولی توابع یک شبه حلقه است). همچنین نشان می دهیم $M[x]$ روی $R.[x]$ تقلیل یافته است اگر و تنها اگر M روی R تقلیل یافته باشد. بسیاری از نتایج بیرکنمیر و هوانگ [۳] از نتایج این طرح بدست می آیند.
کلید واژه فارسی		صفرسازها- شبه حلقه ها- حلقه های بئر- مدولهای تقلیل یافته
کلید واژه لاتین		Annihilator conditions; Nearrings; Baer rings; Reduced Modules

بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

در این طرح ابتدا شبه مدولها را به عنوان تعمیمی از مدولها معرفی می کنیم. این خانواده بسیار وسیعتر از خانواده مدولها روی حلقه ها است. فرض کنیم M یک گروه جمعی آبلی، و R یک شبه حلقه یکدار باشد. M را یک شبه مدول روی R نامیم هرگاه تابع $R\times M\to M$ با ضابطه $(r,m)\to rm$ وجود داشته باشد بقسمی که برای هر $r,s\in R$ و هر $m,n\in M$،

۱- $r(m+n)=rm+rn$

۲- $(rs)m=r(sm)$

۳- $1m=m$.

نشان می دهیم اگر M_R یک R-مدول راست باشد آنگاه $M[x]$ یک شبه مدول روی $R[x]$ است. حال فرض کنیم M یک شبه مدول روی شبه حلقه R باشد. فرض کنیم $\phi\neq S\subseteq M$.

۱-گوییم $M\in\beta_{\ell_1}$، هرگاه $\ell_R(S)=\mathrm{R}e$، که e یک خودتوان از R است.

۲- گوییم $M\in\beta_{\ell_2}$، هرگاه $\ell_R(S)=\ell_R(e)$، که e یک خودتوان از R است.

رابطه بین پوچ ساز های شبه مدول $M[x]$ روی $R[x]$ و شبه مدول M روی R را بررسی می کنیم (توجه داریم که $R[x]$ همراه با دو عمل جمع معمولی چندجمله ایها و ترکیب معمولی توابع یک شبه حلقه است). همچنین نشان می دهیم $M[x]$ روی $R.[x]$ تقلیل یافته است اگر و تنها اگر M روی R تقلیل یافته باشد. بسیاری از نتایج بیرکنمیر و هوانگ [۳] از نتایج این طرح بدست می آیند.

کلید واژه فارسی: صفرسازها- شبه حلقه ها- حلقه های بئر- مدولهای تقلیل یافته

O’5ƸHʉə

۱. مثالهایی از مدولهای تقلیل یافته... **۱**

۲ . مدولهای بئر و مدولهای $p.p$ **۱۴**

۳. بررسی صفر سازهای چندجمله ایها روی مدولها... **۲۷**

کتابنامه.. **۳۸**

۱- مثالهایی از مدولهای تقلیل یافته

در این طرح R نمایانگر یک حلقه یکدار و مدولها یکانی در نظر گرفته می شوند. حلقه R را تقلیل یافته می نامیم هرگاه هیچ عنصر پوچ توان ناصفر نداشته باشد. ثابت شده است که R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر $R[x]$ تقلیل یافته باشد اگر و تنها اگر $R[[x]]$ تقلیل یافته باشد. همچنین R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر یک زیرحاصلضرب مستقیم از دامنه ها باشد.

اندرسون و کمیلو نشان داده اند که R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر حلقه $\frac{R[x]}{\langle x^n \rangle}$ آرمنداریز باشد. حلقه R را آرمنداریز نامیم هرگاه $\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) = 0$، نتیجه دهد برای هر i و j، $a_i b_j = 0$. حلقه R را بئر نامیم هرگاه صفرساز راست هر زیرمجموعه آن به عنوان یک ایده آل راست توسط یک خودتوان تولید گردد. حلقه R را $p.p$ راست نامیم هرگاه صفرساز راست هر عنصر آن به عنوان یک ایده آل راست توسط یک خودتوان تولید گردد. آرمنداریز نشان داد که اگر R یک حلقه تقلیل یافته باشد آنگاه R بئر ($p.p$ راست) است اگر و تنها اگر $R[x]$ بئر ($p.p$ راست) باشد. همچنین او نشان داد شرط « R یک حلقه تقلیل یافته باشد» را نمی توان حذف نمود.

حال مدولهای تقلیل یافته را به عنوان تعمیمی از حلقه های تقلیل یافته معرفی می کنیم.

تعریف ۱-۱: فرض کنیم R یک حلقه و $\alpha : R \to R$ یک درونریختی باشد. R-مدول M را α-تقلیل یافته نامیم هرگاه برای هر $m \in M$ و هر $a \in R$،

۱) اگر $ma = ۰$، آنگاه $mR \bigcap Ma = ۰$،

۲) $ma = ۰$ اگر و تنها اگر $m\alpha(a) = ۰$.

مدول M را تقلیل یافته نامیم هرگاه I-تقلیل یافته باشد (I همان نگاشت همانی است).

لم ۱-۲: گزاره های زیر معادلند:

۱) M_R یک مدول α-تقلیل یافته است؛

۲) شرایط زیر برقرارند: برای هر $m \in M$ و هر $a \in R$،

(a) اگر $ma = ۰$، آنگاه $mRa = mR\alpha(a) = ۰$

(b) اگر $ma\alpha(a) = ۰$، آنگاه $ma = ۰$

(c) اگر $ma^۲ = ۰$، آنگاه $ma = ۰$.

اثبات: از تعریف نتیجه می شود.

مثال ۱-۳:

۱) R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر R_R تقلیل یافته باشد.

۲) هر زیرمدول از یک مدول تقلیل یافته، تقلیل یافته است. به ویژه، اگر I یک ایده آل راست از حلقه تقلیل یافته R باشد، آنگاه I_R یک مدول تقلیل یافته است.

۳) فرض کنیم p یک عدد اول باشد و $n > ۱$. دراین صورت $p^{n-۱}\mathrm{Z}_{p^n}$ یک Z_{p^n} مدول تقلیل یافته است.

۴) هر حاصلضرب مستقیم از R-مدولهای تقلیل یافته همچنان تقلیل یافته است.

۵) اگر برای هر $t \in T$، M_t یک R_t مدول تقلیل یافته باشد، آنگاه $\prod_t M_t$ یک $\prod_t R_t$ مدول تقلیل یافته است.

۶) Z-مدول M تقلیل یافته است اگر و تنها اگر برای هر $m \in M$، یا m فارغ از تاب باشد و یا مرتبه m فارغ از مربع باشد. به ویژه، برای $n > ۱$، Z_n تقلیل یافته است اگر و تنها اگر n فارغ از مربع باشد.

تذکر ۱-۴: فرض کنیم R یک زیرحلقه از S باشد که $1_S \in R$. فرض کنیم $\alpha \in \mathrm{End}(S)$، بطوری که $\alpha(R) \subseteq R$ و $M_R \subseteq L_S$. اگر L_S یک مدول α-تقلیل یافته باشد آنگاه M_R نیز α-تقلیل یافته است.

حلقه چندجمله ایها، حلقه سریهای توانی، حلقه چندجمله ایهای لوران و حلقه سریهای توانی لوران را بترتیب با $R[x]$، $R[[x]]$، $R[x,x^{-۱}]$ و $R[[x,x^{-۱}]]$ نمایش می دهیم. فرض کنیم M_R یک R -مدول باشد. قرار می دهیم:

$$M[[x;\alpha]] := \left\{ \sum_{i=۰}^{\infty} m_i x^i : m_i \in M \right\}$$

$$M[x;\alpha] := \left\{ \sum_{i=۰}^{s} m_i x^i : s \geq ۰, m_i \in M \right\}$$

$$M[[x,x^{-۱};\alpha]] := \left\{ \sum_{i=-s}^{\infty} m_i x^i : s \geq ۰, m_i \in M \right\}$$

$$M[x,x^{-۱};\alpha] := \left\{ \sum_{i=-s}^{t} m_i x^i : s \geq ۰, t \geq ۰, m_i \in M \right\}$$

هرکدام از مجموعه های فوق با عمل جمع معمولی چندجمله ایها و سریهای توانی یک گروه آبلی تشکیل می دهند. برای هر $m(x) = \sum_i m_i x^i \in M[[x;\alpha]]$ و $f(x) = \sum_i a_i x^i \in R[[x;\alpha]]$، تعریف می کنیم:

$$m(x)f(x) := \sum_{k}\left(\sum_{i+j=k} m_i\alpha^i(a_j)\right)x^k$$

می توان نشان داد با عمل ضرب اسکالر تعریف شده در بالا، $M[[x;\alpha]]$ یک $R[[x;\alpha]]$ مدول است.

به همین نحو می توان $M[x;\alpha]$ را به $R[x;\alpha]$ مدول تبدیل نمود. $M[x;\alpha]$ و $M[[x;\alpha]]$ را بترتیب توسیع چندجمله ایهای اریب و توسیع سریهای توانی اریب مدول M نامیم. اگر $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$، به طور مشابه می توان $M[[x,x^{-1};\alpha]]$ را به $R[[x,x^{-1};\alpha]]$ مدول و $M[x,x^{-1};\alpha]$ را به $R[x,x^{-1};\alpha]$ مدول تبدیل نمود. $M[x,x^{-1};\alpha]$ و $M[[x,x^{-1};\alpha]]$ را بترتیب توسیع چندجمله ایهای اریب لوران و توسیع سریهای توانی اریب لوران مدول M گوییم.

حال شرایطی را که تحت آن توسیع های ذکر شده در بالا، تقلیل یافته هستند را بیان می کنیم.

لم ۱-۵: فرض کنیم M یک R-مدول باشد به طوری که برای هر $m \in M$ و $a \in R$، اگر $ma = 0$، آنگاه $mR\alpha(a) = 0$، و اگر $ma^2 = 0$، آنگاه $ma = 0$. فرض کنیم $m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i \in M[[x;\alpha]]$ و $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x;\alpha]]$. اگر $m(x)f(x) = 0$، آنگاه برای هر i و j، $m_i\alpha^i(a_j) = 0$.

اثبات: از $m(x)f(x) = 0$ نتیجه می گیریم برای هر $k = 0,1,\ldots$، $\sum_{i+j=k} m_i\alpha^i(a_j) = 0$. پس $m_0 a_0 = 0$. فرض کنیم $s \geq 0$، و برای هر i و j، اگر $i + j \leq s$، آنگاه $m_i\alpha^i(a_j) = 0$. توجه داریم که

$$m_0 a_{s+1} + m_1\alpha(a_s) + \cdots + m_s\alpha^s(a_1) + m_{s+1}\alpha^{s+1}(a_0) = 0 \qquad (1,2)$$

اگر عنصر $\alpha^{s+1}(a_0)$ را از راست در (۱,۲) ضرب کنیم خواهیم داشت،

$$m_0 a_{s+1}\alpha^{s+1}(a_0) + \cdots + m_s\alpha^s(a_1)\alpha^{s+1}(a_0) + m_{s+1}\alpha^{s+1}(a_0)\alpha^{s+1}(a_0) = 0 \qquad (1,3)$$

بنابه فرض استقرا، برای $i=0,\dots,s$، $m_i\alpha^i(a_0)=0$، و لذا برای هر $0\le i\le s$، $m_iR\alpha^{s+1}(a_0)=0$. بنابراین $m_0a_{s+1}\alpha^{s+1}(a_0)=\dots=m_s\alpha^s(a_1)\alpha^{s+1}(a_0)=0$، و لذا از (۱,۳) نتیجه می گیریم $m_{s+1}\left(\alpha^{s+1}(a_0)\right)^2=0$. پس $m_{s+1}\alpha^{s+1}(a_0)=0$. درنتیجه (۱,۲) به

$$m_0a_{s+1}+m_1\alpha(a_s)+\cdots+m_s\alpha^s(a_1)=0 \qquad (1,4)$$

تبدیل می شود. اگر عنصر $\alpha^s(a_1)$ را از راست در (۱,۴) ضرب کنیم و از فرضیات استفاده کنیم آنگاه $m_s\left(\alpha^s(a_1)\right)^2=0$، و لذا $m_s\alpha^s(a_1)=0$. با ادامه این روند می توان نشان داد $m_{s+1}\alpha^{s+1}(a_0)=m_s\alpha^s(a_1)=\dots=m_0a_{s+1}=0$. پس برای هر i و j، اگر $i+j\le s+1$، آنگاه $m_i\alpha^i(a_j)$. بنابراین بنابه استقرای قوی، برای هر i و j، $m_i\alpha^i(a_j)$.

قضیه ۱-۶: برای R-مدول M گزاره های زیر معادلند:

۱- M_R یک مدول α-تقلیل یافته است؛

۲- $M[x;\alpha]$ یک $R[x;\alpha]$-مدول تقلیل یافته است؛

۳- $M[[x;\alpha]]$ یک $R[[x;\alpha]]$-مدول تقلیل یافته است؛

اگر $t\in \mathrm{Aut}(R)$، آنگاه گزاره های فوق با گزاره های (۴) و (۵) معادلند:

۴- $M[x,x^{-1};\alpha]$ یک $R[x,x^{-1};\alpha]$-مدول تقلیل یافته است؛

۵- $M[[x,x^{-1};\alpha]]$ یک $R[[x,x^{-1};\alpha]]$-مدول تقلیل یافته است.

برهان: با استفاده از تذکر ۱-۴، اثبات ۲ ← ۳ ← ۵ و ۲ ← ۴ ← ۵ بدیهی است.

۲←۱: واضح است که M_R تقلیل یافته است. اگر $a\in R$، $m\in M$ و $ma=0$، آنگاه بنابر لم ۱-۲، $mR[x;\alpha]a=0$. پس $m\alpha(a)x=0$، و لذا $m\alpha(a)=0$. اگر $m\in M$، $a\in R$ و $m\alpha(a)=0$، آنگاه

$ma\alpha(a)=0$. پس $max(ax)=ma\alpha(a)x^2=0$. بنابر (۲)، $max=0$، و لذا $ma=0$. بنابراین M یک مدول α-تقلیل یافته است.

۱ ← ۳: فرض کنیم $m(x)=\sum_{i=0}^{\infty}m_ix^i\in M[[x;\alpha]]$، $l(x)=\sum_{i=0}^{\infty}l_ix^i$، $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\in R[[x;\alpha]]$ و $g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i$. فرض کنیم $m(x)f(x)=0$ و $m(x)g(x)=l(x)f(x)$. کافی است نشان دهیم $l(x)f(x)=0$. بنابر لم ۱-۵، برای هر i و j، $m_i\alpha^i(a_j)=0$، و لذا بنابر لم ۱-۲، برای هر i، j و s، $m_iR\alpha^{i+s}(a_j)=0$. درنتیجه

$$\begin{aligned}
m(x)g(x)f(x) &= \\
&=\left(\sum_{i=0}^{\infty}m_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\right)\\
&=\sum_i\sum_j\sum_k\left(m_ix^i\right)\left(b_jx^j\right)\left(a_kx^k\right)\\
&=\sum_i\sum_j\sum_k m_i\alpha^i(b_j)\alpha^{i+j}(a_k)x^{i+j+k}=0
\end{aligned}$$

پس $[l(x)f(x)]f(x)=m(x)g(x)f(x)=0$. بنابر لم ۱-۵، برای هر $k=0,1,\ldots$،

$$l(x)\left[\sum_{i=0}^{\infty}a_i\alpha^i(a_k)x^i\right]=l(x)\left(f(x)a_k\right)=\left(l(x)f(x)\right)a_k=0$$

و درنتیجه برای هر i، j و k، $l_i\alpha^i\left(a_j\alpha^j(a_k)\right)=0$. درنتیجه $l_i\alpha^i\left(a_k\alpha^k(a_k)\right)=l_i\alpha^i(a_k)\alpha^{i+k}(a_k)=0$. بنابر لم ۱-۲، برای هر i و k، $l_i\alpha^i(a_k)=0$، و لذا $l(x)f(x)=0$.

۳ ← ۵: فرض کنیم $l(x),m(x)\in M[[x,x^{-1};\alpha]]$، و $f(x),g(x)\in R[[x,x^{-1};\alpha]]$. فرض کنیم $m(x)f(x)=0$ و $m(x)g(x)=l(x)f(x)$. عدد صحیح نامنفی k وجود دارد به طوری که $m(x)x^k,l(x)x^k\in M[[x;\alpha]]$ و $f(x)x^k,g(x)x^k\in R[[x;\alpha]]$. قرار می دهیم $f(x)=\sum_{i=-k}^{\infty}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{i=-k}^{\infty}b_ix^i$. درنتیجه

$$\left[m(x)x^k\right]\left[\left(\sum_{i=-k}^{\infty}\alpha^{-k}(a_i)x^i\right)x^k\right]=m(x)f(x)x^{2k}=0$$

$$\left[m(x)x^k\right]\left[\left(\sum_{i=-k}^{\infty}\alpha^{-k}(b_i)x^i\right)x^k\right]=\left[l(x)x^k\right]\left[\left(\sum_{i=-k}^{\infty}\alpha^{-k}(a_i)x^i\right)x^k\right]$$

که $\left(\sum_{i=-k}^{\infty}\alpha^{-k}(b_i)x^i\right)x^k,\ \left(\sum_{i=-k}^{\infty}\alpha^{-k}(a_i)x^i\right)x^k \in R[[x;\alpha]]$. بنابر (۳)، $\left[m(x)x^k\right]\left[\left(\sum_{i=-k}^{\infty}\alpha^{-k}(b_i)x^i\right)x^k\right]=0$.

بنابراین $m(x)g(x)x^{2k}=0$، و لذا $m(x)g(x)=0$.

نتیجه ۱-۷: مدول M_R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر $M[[x,x^{-1}]]_{R[[x,x^{-1}]]}$ تقلیل یافته باشد.

تعریف: فرض کنیم $\alpha: R\to R$ یک درونریختی باشد. حلقه R را α-صلب نامیم هرگاه $a\alpha(a)=0$ نتیجه دهد $a=0$. می توان نشان داد R یک حلقه α-صلب است اگر و تنها اگر R_R یک مدول α-تقلیل یافته باشد.

نتیجه ۱-۸: R یک حلقه α-صلب است اگر و تنها اگر $R[x;\alpha]$ تقلیل یافته باشد اگر و تنها اگر $R[[x;\alpha]]$ تقلیل یافته باشد.

حلقه ماتریسهای $n\times n$ روی R را با علامت $M_n(R)$ نمایش می دهیم. فرض کنیم M یک R-مدول باشد و $A=(a_{ij})\in M_n(R)$. قرار می دهیم $MA=\{(ma_{ij}): m\in M\}$. برای $n\geq 2$، قرار می دهیم $V=\sum_{i=1}^{n-1}E_{i,i+1}$ که $\{E_{i,j}: 1\leq i,j\leq n\}$ مجموعه تمام ماتریسهای یکانی است، همچنین

$$V_n(R)=RI_n+RV+\cdots+RV^{n-1}$$ و

$$V_n(M)=MI_n+MV+\cdots+MV^{n-1}.$$

واضح است که $V_n(R)$ یک حلقه است و $V_n(M)$ یک $V_n(R)$-مدول است که عمل ضرب اسکالر همان ضرب معمولی ماتریسها می باشد. نگاشت $\theta: V_n(R)\to R[x]/(x^n)$ با ضابطه

$$\theta\left(r_0I_n+r_1V+\cdots+r_{n-1}V^{n-1}\right)=\left(r_0+r_1x+\cdots+r_{n-1}x^{n-1}\right)+(x^n)$$

یکریختی حلقه ای است. همچنین نگاشت $\phi : V_n(M) \to M[x]/M[x](x^n)$ با ضابطه

$$\phi\left(m_0 I_n + m_1 V + \cdots + m_{n-1} V^{n-1}\right) = \left(m_0 + m_1 x + \cdots + m_{n-1} x^{n-1}\right) + M[x](x^n)$$

یک یکریختی از گروههای آبلی است که برای هر $A \in V_n(R)$ و هر $W \in V_n(M)$، $\phi(WA) = \phi(W)\theta(A)$،

مدول M را آرمنداریز نامیم هرگاه $m(x) = \sum_{i=0}^{s} m_i x^i \in M[x]$، $f(x) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^i \in R[x]$ و $m(x)f(x) = 0$، آنگاه برای هر i و j، $m_i a_j = 0$. بنابر لم ۱-۵، هر مدول تقلیل یافته، آرمنداریز است.

قضیه ۱-۹: فرض کنیم $n \geq 2$. دراین صورت M_R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر $M[x]/M[x](x^n)$ یک $R[x]/(x^n)$-مدول آرمنداریز باشد.

برهان: با استفاده از تذکر بالا کافی است نشان دهیم M_R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر $V_n(M)_{V_n(R)}$ آرمنداریز باشد. فرض کنیم $ma = 0$، اما $mr = m'a \neq 0$، که $m, m' \in M$ و $a, r \in R$. درنتیجه $(mI_n) - (m'E_{1,n})x \in V_n(M)[x]$، $(aI_n) + (rE_{1,n})x \in V_n(R)[x]$، $\left[(mI_n) - (m'E_{1,n})x\right]\left[(aI_n) - (rE_{1,n})x\right] = 0$، اما $(mI_n)(rE_{1,n}) = (mr)E_{1,n} \neq 0$. پس $V_n(M)_{V_n(R)}$ آرمنداریز نیست.

حال فرض کنیم $W(x)A(x) = 0$، که $W(x) = \sum_{i=0}^{s} W_i x^i \in V_n(M)[x]$ و $A(x) = \sum_{i=0}^{s} A_i x^i \in V_n(R)[x]$. برای $i = 0,1,\ldots,s$، قرار می دهیم $W_i = m_0^{(i)} I_n + m_1^{(i)} V + \cdots + m_{n-1}^{(i)} V^{n-1}$ و $A_i = a_0^{(i)} I_n + a_1^{(i)} V + \cdots + a_{n-1}^{(i)} V^{n-1}$. از اینکه $W(x)A(x) = 0$، نتیجه می گیریم

$$\left[m_0(x) I_n + m_1(x) V + \cdots + m_{n-1}(x) V^{n-1}\right]\left[a_0(x) I_n + a_1(x) V + \cdots + a_{n-1}(x) V^{n-1}\right] = 0$$

که برای $i = 0,1,\ldots,n-1$،

$$m_i(x) = m_i^{(0)} + m_i^{(1)} x + \cdots + m_i^{(s)} x^s \quad \text{و}$$

$$a_i(x) = a_i^{(0)} + a_i^{(1)} x + \cdots + a_i^{(s)} x^s.$$

درنتیجه برای $k = 0,1,\dots,n-1$، $\sum_{i+j=k} m_i(x)a_j(x) = 0$.

فرض کنیم $0 < l < n-1$، و برای هر i و j، اگر $0 \le i+j \le l$، آنگاه $m_i(x)a_j(x) = 0$. توجه داریم که

$$m_0(x)a_{l+1}(x) + m_1(x)a_l(x) + \cdots + m_l(x)a_1(x) + m_{l+1}(x)a_0(x) = 0. \qquad (1,5)$$

چون M_R تقلیل یافته است، لذا بنابر نتیجه ۱-۷، $M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}$ تقلیل یافته است. پس بنابر تذکر ۱-۴، $M[x]_{R[x]}$ تقلیل یافته است و از این رو برای هر i و j، اگر $0 \le i+j \le l$، آنگاه

$$m_i(x)R[x]a_j(x) = 0. \qquad (1,6)$$

عنصر $a_0(x)$ را از راست در (۱,۵) ضرب می کنیم و با استفاده از (۱,۶)، خواهیم داشت: $m_{l+1}(x)a_0(x)^2 = 0$، و چون $M[x]_{R[x]}$ تقلیل یافته است لذا $m_{l+1}(x)a_0(x) = 0$. بنابراین (۱,۵) به

$$m_0(x)a_{l+1}(x) + m_1(x)a_l(x) + \cdots + m_l(x)a_1(x) = 0 \qquad (1,7)$$

تبدیل می شود. اگر عنصر $a_1(x)$ را از راست در (۱,۷) ضرب کنیم و از (۱,۶) استفاده کنیم آنگاه $m_l(x)a_1(x)^2 = 0$، و لذا $m_l(x)a_1(x) = 0$. با ادامه این روند نتیجه می گیریم $m_{l+1}(x)a_0(x) = m_l(x)a_1(x) = \dots = m_0(x)a_{l+1}(x) = 0$. پس برای هر i و j، اگر $0 \le i+j \le l+1$، آنگاه $m_i(x)a_j(x) = 0$. با استفاده از استقرای قوی نتیجه می گیریم برای هر i و j، اگر $0 \le i+j \le n-1$، آنگاه $m_i(x)a_j(x) = 0$. بنابر لم ۱-۵، برای هر i و j و هر u و v، $m_i^{(u)}a_j^{(v)} = 0$. به این ترتیب ثابت شد که برای هر $i,j = 0,\dots,s$، $W_iA_j = 0$. بنابراین $V_n(M)_{V_n(R)}$ آرمنداریز است.

اندرسون و کمیلو نشان دادند که حلقه R آرمنداریز است اگر و تنها اگر حلقه $R[x]$ آرمنداریز باشد. حال نتیجه ای مشابه برای مدولها ثابت می کنیم.

لم ۱-۱۰: فرض کنیم M_R یک مدول و c یک عنصر مرکزی از حلقه R باشد. در این صورت:

(۱) نگاشت $\theta_c^R : R[x] \to R$ با ضابطه $f(x) \mapsto f(c)$ یک همریختی از حلقه ها است و لذا با عمل ضرب اسکالر $m \circ f(x) = mf(c)$، R-مدول M به یک $R[x]$-مدول تبدیل می شود.

(۲) نگاشت $\theta_c^M : M[x] \to M$ با ضابطه $m(x) \mapsto m(c)$ یک $R[x]$-همریختی است.

برهان: بدیهی است.

فرض کنیم $m(x) = m_۰ + m_۱ x + \cdots + m_s x^s \in M[x]$، و $m_s \neq ۰$. در این صورت می گوییم $m(x)$ از درجه s است و با علامت $\deg(m(x)) = s$ نمایش می دهیم. اگر $m(x) = ۰$، می گوییم $\deg(m(x)) = -\infty$.

تذکر ۱-۱۱: فرض کنیم R زیرحلقه ای از حلقه S باشد، $1_S \in R$ و $M_R \subseteq L_S$. اگر L_S آرمنداریز باشد آنگاه M_R آرمنداریز است.

قضیه ۱-۱۲: M_R آرمنداریز است اگر و تنها اگر $M[x,x^{-۱}]_{R[x,x^{-۱}]}$ آرمنداریز باشد.

برهان: اگر $M[x,x^{-۱}]_{R[x,x^{-۱}]}$ آرمنداریز باشد آنگاه بنابر تذکر ۱-۱۱، M_R آرمنداریز است.

حال فرض کنیم M_R آرمنداریز باشد. فرض کنیم

$$\left[m_۰(x) + m_۱(x)y + \cdots + m_s(x)y^s\right]\left[f_۰(x) + f_۱(x)y + \cdots + f_t(x)y^t\right] = ۰$$

که برای هر $i = ۰,۱,...,s$، $m_i(x) \in M[x,x^{-۱}]$ و برای هر $j = ۰,۱,...,t$، $f_j(x) \in R[x,x^{-۱}]$. اعداد صحیح نامنفی u و v به قسمی وجود دارند که برای هر $۰ \le i \le s$ و هر $۰ \le j \le t$، $m_i(x)x^u \in M[x]$ و $f_j(x)x^v \in R[x]$. درنتیجه

$$\begin{aligned}&\left[m_۰(x)x^u + m_۱(x)x^u y + \cdots + m_s(x)x^u y^s\right]\left[f_۰(x)x^v + f_۱(x)x^v y + \cdots + f_t(x)x^v y^t\right]\\ &= \left[m_۰(x) + m_۱(x)y + \cdots + m_s(x)y^s\right]\left[f_۰(x) + f_۱(x)y + \cdots + f_t(x)y^t\right]x^{u+v} = ۰\end{aligned}$$

فرض کنیم $n = \max\{\deg(m_i(x)x^u), \deg(f_j(x)x^v) : i = ۰,...,s,\ j = ۰,...,t\}$، چون x^n یک عنصر مرکزی از حلقه $R[x]$ است لذا بنابر لم ۱-۱۰،

$$\left[m_0(x)x^u + m_1(x)x^u x^n + \cdots + m_s(x)x^u x^{su}\right]\left[f_0(x)x^v + \cdots + f_t(x)x^v x^{tn}\right] = 0$$

چون M_R آرمنداریز است لذا برای هر $i = 0,\ldots,s$ و هر $j = 0,\ldots,t$ ، $m_i(x)f_j(x) = 0$. بنابراین $M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}$ آرمنداریز است.

اگر $M_R = R_R$، آنگاه نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱-۱۳: فرض کنیم $n \geq 2$. در این صورت:

۱) R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر $R[[x,x^{-1}]]$ تقلیل یافته باشد.

۲) R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر $R[x]/(x^n)$ تقلیل یافته باشد.

۳) R آرمنداریز است اگر و تنها اگر $R[x,x^{-1}]$ آرمنداریز باشد.

ثابت شده است که هر حلقه تقلیل یافته یک زیرحاصلضرب مستقیم از دامنه ها است. فرض کنیم N یک زیرمدول از M_R باشد. تعریف می کنیم:

$$N : M := \{a \in R : Ma \subseteq N\}.$$

قضیه ۱-۱۴: فرض کنیم M_R یک مدول نامنفرد تقلیل یافته باشد. در این صورت M_R یک زیرحاصلضرب مستقیم از مدولهای $\{M_i : i \in I\}$ است که برای هر $i \in I$، $R/(O:M_i)$ یک دامنه است و M_i روی $R/(O:M_i)$ فارغ از تاب است.

برهان: ابتدا فرض کنیم R تقلیل یافته باشد. فرض کنیم $\{P_t : t \in T\}$ مجموعه تمام ایده آلهای اول مینیمال R باشد. واضح است که $\frac{R}{P_t}$ دامنه است و $\bigcap_{t\in T} P_t = 0$. برای هر $t \in T$، فرض کنیم:

$$N_t = \{m \in M : ma = 0,\ a \in R \setminus P_t \text{ برای برخی }\}$$

چون $R\setminus P_t$ یک مجموعه ضربی بسته است لذا بنابر لم ۱-۲، N_t یک زیرمدول M است. برای هر $0\neq b\in P_t$، عنصر $a\in R\setminus P_t$ وجود دارد به طوری که $ba=0$. پس $Mba=0$، و لذا $Mb\in N_t$. بنابراین $P_t\subseteq (N_t:M)$، و لذا M/N_t یک R/P_t مدول است. فرض کنیم $\overline{m}\in M/N_t$، $\overline{r}\in R/P_t$، و $\overline{m}\overline{r}=\overline{0}$. پس $mr\in N_t$، و لذا عنصر $a_t\in R\setminus P_t$ وجود دارد به طوری که $mra_t=0$. اگر $r\in R\setminus P_t$، آنگاه $ra_t\in R\setminus P_t$، و درنتیجه $m\in N_t$. بنابراین M/N_t یک مدول فارغ از تاب روی R/P_t است. حال نشان می دهیم $\bigcap_{t\in T} N_t=0$. در واقع، اگر $m\in\bigcap_{t\in T} N_t=0$، آنگاه برای هر $t\in T$، عنصر $a_t\in R\setminus P_t$ وجود دارد به طوری که $ma_t=0$. بنابر لم ۱-۲، $mRa_t=0$. پس $mK=0$، که $K=\sum_{t\in T} Ra_tR$. اگر $0\neq a\in R$ و $K\bigcap aR=0$، آنگاه از اینکه $\bigcap P_t=0$، نتیجه می گیریم $aK=0$، و $t\in T$ وجود دارد به طوری که $a\in R\setminus P_t$. پس $0=aa_t\in R\setminus P_t$، که یک تناقض است. به این ترتیب ثابت شد که K یک ایده آل راست اساسی است. چون M نامنفرد است لذا $m=0$. به این ترتیب ثابت شد که $\bigcap_{t\in T} N_t=0$، و لذا $\bigcap\{N_t:t\in T,\ N_t\neq M\}=0$. بدون ایجاد خلل در کلیت مسأله می توان فرض نمود برای هر $t\in T$، $N_t\neq M$. ابتدا نشان می دهیم برای هر $t\in T$، $(N_t:M)=P_t$. اگر $a\in (N_t:M)\setminus P_t$، آنگاه برای هر $m\in M$، $ma\in N_t$، و لذا عنصر $a_t\in R\setminus P_t$ وجود دارد به طوری که $maa_t=0$. پس $m\in N_t$، و لذا $M=N_t$، که یک تناقض است. بنابراین $(N_t:M)\subseteq P_t$. چون $P_t\subseteq (N_t:M)$، پس $(N_t:M)=P_t$. بنابراین M یک زیرحاصلضرب از خانوادهٔ $\{M/N_t:t\in T\}$ است به طوری که $(O:M/N_t)=P_t$، R/P_t دامنه است و M/N_t یک R/P_t-مدول فارغ از تاب است.

فرض کنیم M_R تقلیل یافته و فارغ از تاب باشد. فرض کنیم $\overline{R}=R/(O:M)$. درنتیجه $\overline{R}$ یک حلقه تقلیل یافته است و $M_{\overline{R}}$ تقلیل یافته و فارغ از تاب است. همانند پاراگراف قبل می توان نشان داد $M_{\overline{R}}$ یک زیرحاصلضرب مستقیم از خانوادهٔ $\overline{R}$-مدولهای $\{M_t:t\in T\}$ است که $\overline{R}/(O:M_t)_{\overline{R}}$ دامنه است و M_t یک $\overline{R}/(O:M_t)_{\overline{R}}$ مدول فارغ از تاب است. بنابراین M_R یک زیرحاصلضرب مستقیم از خانوادهٔ R-مدولهای $\{M_t:t\in M\}$ است که هر M_t یک $R/(O:M_t)_R$ مدول فارغ از تاب است و $R/(O:M_t)_R\cong \overline{R}/(O:M_t)_{\overline{R}}$ دامنه است.

۲. مدولهای بئر و مدولهای $p.p$.

مفهوم حلقه های تقلیل یافته در محاسبهٔ صفرسازهای حلقه چندجمله ایها، حلقه سریهای توانی، حلقه چندجمله ایهای لوران و حلقه سریهای توانی لوران، از جمله بئر و $p.p$ کاربرد دارد. دراین بخش بسیاری از نتایج حاصل شده روی حلقه های تقلیل یافته را به مدولهای تقلیل یافته تعمیم می دهیم. فرض کنیم X یک زیرمجموعه ناتهی از مدول M_R باشد. تعریف می کنیم:

$$r_R(X)=\{r\in R: Xr=0\}$$

تعریف ۲-۱: فرض کنیم M_R یک R-مدول راست باشد.

۱) مدول M_R را بئر نامیم هرگاه برای هر زیرمجموعه ناتهی X از M، خودتوان $e\in R$ وجود داشته باشد به قسمی که $r_R(X)=eR$.

۲) مدول M_R را شبه بئر نامیم هرگاه برای هر زیرمدول X از M، خودتوان $e\in R$ وجود داشته باشد به قسمی که $r_R(X)=eR$.

۳) مدول M_R را $p.p$ نامیم هرگاه برای هر $m\in M$، خودتوان $e\in R$ وجود داشته باشد بقسمی که $r_R(m)=eR$.

واضح است که حلقه R بئر است اگر و تنها اگر R_R بئر باشد. همچنین حلقه R شبه بئر $(p.p)$ است اگر و تنها اگر R_R شبه بئر $(p.p)$ باشد. اگر R یک حلقه بئر باشد آنگاه برای هر ایده آل راست I از R، مدول I_R بئر است.

فرض کنیم u یک زیرمجموعه ناتهی از مدول M_R باشد و $\alpha \in \mathrm{End}(R)$. مجموعه تمام چندجمله ایهای اریب، سریهای توانی اریب، چندجمله ایهای اریب لوران و سریهای توانی اریب لوران روی u را بترتیب با $u[x;\alpha]$، $u[[x;\alpha]]$، $u[x,x^{-1};\alpha]$ و $u[[x,x^{-1};\alpha]]$ نمایش می دهیم.

لم ۲-۲: فرض کنیم M_R یک R-مدول باشد و $\alpha \in \mathrm{End}(R)$. در این صورت:

۱) گزاره های زیر معادلند:

(a) برای هر $V \subseteq M[x;\alpha]$، $(r_{R[x;\alpha]}(V) \cap R)[x;\alpha] = r_{R[x;\alpha]}(V)$.

(b) برای هر $m(x) = \sum_{i=0}^{s} m_i x^i \in M[x;\alpha]$ و $f(x) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^i \in R[x;\alpha]$، اگر $m(x)f(x) = 0$، آنگاه برای هر i، j، $m_i \alpha^i (a_j) = 0$.

۲) گزاره های زیر معادلند:

(a) برای هر $V \subseteq M[[x;\alpha]]$، $(r_{R[[x;\alpha]]}(V) \cap R)[[x;\alpha]] = r_{R[[x;\alpha]]}(V)$.

(b) برای هر $m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i \in M[[x;\alpha]]$ و $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x;\alpha]]$، اگر $m(x)f(x) = 0$، آنگاه برای هر i، j، $m_i \alpha^i (a_j) = 0$.

اثبات: برهان (۱) مشابه (۲) است. بنابراین (۲) را ثابت می کنیم.

(۲). $(a) \leftarrow (b)$. فرض کنیم $m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i \in M[[x;\alpha]]$، و $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x;\alpha]]$ و $m(x)f(x) = 0$. پس $f(x) \in r_{R[[x;\alpha]]}(m(x)) = (r_{R[[x;\alpha]]}(m(x)) \cap R)[[x;\alpha]]$. درنتیجه برای هر j، $a_j \in r_{R[[x;\alpha]]}(m(x))$. بنابراین برای هر i، j، $m_i \alpha^i (a_j) = 0$.

$(b) \leftarrow (a)$. واضح است که برای هر $V \subseteq M[[x;\alpha]]$، $(r_{R[[x;\alpha]]}(V) \cap R)[[x;\alpha]] \subseteq r_{R[[x;\alpha]]}(V)$.

فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\in r_{R[[x;\alpha]]}(V)$. بنابر (b)، برای هر j ، $Va_j=0$، و لذا $a_j\in r_{R[[x;\alpha]]}(V)\bigcap R$.

بنابراین $f(x)\in\left(r_{R[[x;\alpha]]}(V)\bigcap R\right)[[x;\alpha]]$ ، و درنتیجه $r_{R[[x;\alpha]]}(V)=\left(r_{R[[x;\alpha]]}(V)\bigcap R\right)[[x;\alpha]]$.

لم ۲-۳: فرض کنیم M_R یک R-مدول باشد و $\alpha\in\mathrm{Aut}(R)$. در این صورت:

(۱) گزاره های زیر معادلند:

(a) برای هر $V\subseteq M[x,x^{-1};\alpha]$، $r_{R[x,x^{-1};\alpha]}(V)=I[x,x^{-1};\alpha]$، که $I=r_{R[x,x^{-1};\alpha]}(V)\bigcap R$.

(b) برای هر $m(x)=\sum_{i=-u}^{s}m_ix^i\in M[x,x^{-1};\alpha]$ و $f(x)=\sum_{i=-v}^{t}a_ix^i\in R[x,x^{-1};\alpha]$ ، اگر $m(x)f(x)=0$، آنگاه برای هر i، j ، $m_i\alpha^i(a_j)=0$.

(۲) گزاره های زیر معادلند:

(a) برای هر $V\subseteq M\left[[x,x^{-1};\alpha]\right]$، $r_{R\left[[x,x^{-1};\alpha]\right]}(V)=I\left[[x,x^{-1};\alpha]\right]$، که $I=r_{R\left[[x,x^{-1};\alpha]\right]}(V)\bigcap R$.

(b) برای هر $m(x)=\sum_{i=-u}^{\infty}m_ix^i\in M\left[[x,x^{-1};\alpha]\right]$ و هر $f(x)=\sum_{i=-v}^{\infty}a_ix^i\in R\left[[x,x^{-1};\alpha]\right]$ ، اگر $m(x)f(x)=0$، آنگاه برای هر i، j ، $m_i\alpha^i(a_j)=0$.

برهان: مشابه اثبات لم ۲-۲ است.

تعریف ۲-۴: مدول M_R را α-آرمنداریز نامیم هرگاه شرایط (۱) و (۲) برقرار باشند. همچنین M_R را α-آرمنداریز از نوع سریهای توانی گوییم هرگاه شرایط (۱) و (۳) برقرار باشند.

(۱) برای هر $m\in M$ و هر $a\in R$، $ma=0$ اگر و تنها اگر $m\alpha(a)=0$.

(۲) برای هر $m(x)=\sum_{i=0}^{s} m_i x^i \in M[x;\alpha]$ و هر $f(x)=\sum_{i=0}^{t} a_i x^i \in R[x;\alpha]$، اگر $m(x)f(x)=0$، آنگاه برای هر i، j، $m_i\alpha^i(a_j)=0$.

(۳) برای هر $m(x)=\sum_{i=-u}^{\infty} m_i x^i \in M[[x;\alpha]]$ و هر $f(x)=\sum_{i=-v}^{\infty} a_i x^i \in R[[x;\alpha]]$، اگر $m(x)f(x)=0$، آنگاه برای هر i، j، $m_i\alpha^i(a_j)=0$.

مدول M_R آرمنداریز است اگر و تنها اگر I-آرمنداریز باشد. مدول M_R را آرمنداریز از نوع سریهای توانی گوییم هرگاه I-آرمنداریز از نوع سریهای توانی باشد. بنابر لم ۱-۵، اگر M_R یک مدول α-تقلیل یافته باشد آنگاه α-آرمندرایز از نوع سریهای توانی است و اگر M_R یک مدول α-آرمنداریز از نوع سریهای توانی باشد آنگاه α-آرمنداریز است.

در حالت کلی، یک مدول α-آرمنداریز از نوع سریهای توانی، α-تقلیل یافته نیست. به عنوان مثال، فرض کنیم F یک میدان باشد و $R=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a,b\in F\right\}$. در این صورت R_R تقلیل یافته نیست، اما آرمنداریز از نوع سریهای توانی است.

قضیه ۲-۵: گزاره های زیر برای مدول M_R برقرار هستند:

(۱) فرض کنیم $\alpha\in \mathrm{End}(R)$.

(a) اگر $M[x;\alpha]_{R[x;\alpha]}$ بئر باشد آنگاه M_R بئر است. عکس آن برقرار است هرگاه M_R یک مدول α-آرمنداریز باشد.

(b) اگر $M[[x;\alpha]]_{R[[x;\alpha]]}$ بئر باشد آنگاه M_R بئر است. عکس آن برقرار است هرگاه M_R یک مدول α-آرمنداریز از نوع سریهای توانی باشد.

(۲) فرض کنیم $\alpha\in \mathrm{Aut}(R)$.

(a) اگر $M[x,x^{-1};\alpha]_{R[x,x^{-1};\alpha]}$ بئر باشد آنگاه M_R بئر است. عکس آن برقرار است هرگاه M_R یک مدول α-آرمنداریز باشد.

(b) اگر $M[[x,x^{-1};\alpha]]_{R[[x,x^{-1};\alpha]]}$ بئر باشد آنگاه M_R بئر است. عکس آن برقرار است هرگاه M_R یک مدول α-آرمنداریز از نوع سریهای توانی باشد.

برهان: **(۱)** (a). فرض کنیم $M[x;\alpha]_{R[x;\alpha]}$ بئر باشد. برای هر $u \subseteq M$، خودتوان $f(x) \in R[x;\alpha]$ وجود دارد بطوری که

$$r_R(u) \subseteq r_R(u)[x;\alpha] = r_{R[x;\alpha]}(u) = f(x) \cdot R[x;\alpha].$$

فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^i$، که برای هر i، $a_i \in r_R(u)$. درنتیجه برای هر $a \in r_R(u)$، عنصر $g(x) \in R[x;\alpha]$ وجود دارد به طوری که $a = f(x)g(x)$. پس $f(x)a = f(x)f(x)g(x) = f(x)g(x) = a$. درنتیجه برای هر $a \in r_R(u)$، $a = a_0 a$. بنابراین، $r_R(u) = a_0 R$، که $a_0^2 = a_0$. به این ترتیب ثابت شد M_R بئر است.

حال فرض کنیم M_R بئر و α-آرمنداریز باشد. برای هر $V \subseteq M[x;\alpha]$، بنابر لم ۲-۲، $r_{R[x;\alpha]}(V) = I[x;\alpha]$، که $I = r_{R[x;\alpha]}(V) \cap R = r_R(V)$. چون M_R یک مدول α-آرمنداریز است لذا اگر C_V مجموعه تمام ضرایب عناصر V در M باشد آنگاه $I = r_R(C_V)$. چون M_R بئر است خودتوان $e \in R$ وجود دارد به طوری که $r_R(C_V) = eR$. پس

$$\begin{aligned} r_{R[x;\alpha]}(V) &= I[x;\alpha] = (eR)[x;\alpha] \\ &= e \cdot R[x;\alpha] \end{aligned}$$

و لذا $M[x;\alpha]_{R[x;\alpha]}$ بئر است.

(۱) (b). مشابه اثبات (۱)(a) است.

(۲). مشابه اثبات (۱) است.

نتیجه ۲-۶: فرض کنیم R_R یک مدول α-آرمنداریز از نوع سریهای توانی باشد. در این صورت:

(۱) R بئر است اگر و تنها اگر $R[x;\alpha]$ بئر باشد اگر و تنها اگر $R[[x;\alpha]]$ بئر باشد.

(۲) فرض کنیم $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف- R بئر است؛

ب- $R[x;\alpha]$ بئر است؛

ج- $R[[x;\alpha]]$ بئر است؛

د- $R[x,x^{-1};\alpha]$ بئر است؛

ه- $R[[x,x^{-1};\alpha]]$ بئر است.

نتیجه ۲-۷: **(۱)** فرض کنیم M_R یک مدول آرمنداریز باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف- M_R بئر است؛

ب- $M[x]_{R[x]}$ بئر است؛

ج- $M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}$ بئر است.

(۲) فرض کنیم M_R یک مدول آرمنداریز از نوع سریهای توانی باشد (به ویژه اگر M_R تقلیل یافته باشد) در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف- M_R بئر است؛

ب- $M[x]_{R[x]}$ بئر است؛

ج- $M[[x]]_{R[[x]]}$ بئر است؛

د- $M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}$ بئر است؛

ه- $M[[x,x^{-1}]]_{R[[x,x^{-1}]]}$ بئر است.

نتیجه ۲-۸: فرض کنیم R_R آرمنداریز از نوع سریهای توانی باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف- R بئر است؛

ب- $R[x]$ بئر است؛

ج- $R[[x]]$ بئر است؛

د- $R[x,x^{-1}]$ بئر است؛

ه- $R[[x,x^{-1}]]$ بئر است.

لم ۲-۹: فرض کنیم M_R یک مدول باشد که برای هر $m \in M$ و هر $a \in R$، اگر $ma = ۰$، آنگاه $m\alpha(a) = ۰$. در این صورت برای هر $m \in M$ و هر $e^{۲} = e \in R$، $m\alpha(e) = me$.

اثبات: از اینکه $me(e-۱) = ۰$، نتیجه می گیریم

$$۰ = me\alpha(e-۱) = me(\alpha(e)-۱) = me\alpha(e) - me،$$

و لذا $me\alpha(e) = me$. از اینکه $m(e-۱)e = ۰$، نتیجه می گیریم

$$۰ = m(e-۱)\alpha(e) = me\alpha(e) - m\alpha(e)، \text{ و لذا } m\alpha(e) = me\alpha(e) = me.$$

لم ۲-۱۰: فرض کنیم M_R یک مدول α-آرمنداریز باشد. فرض کنیم $m \in M$ و $e^{۲} = e \in R$. اگر $me = ۰$، آنگاه برای هر $f^{۲} = f \in R$، $mfe = ۰$.

اثبات: فرض کنیم خودتوان $f\in R$ وجود داشته باشد به طوری که $mfe\neq ۰$، فرض کنیم $l(x)=m(e-۱)-[m(e-۱)fe]x\in M[x;\alpha]$ و $g(x)=e+[(e-۱)fe]x\in R[x;\alpha]$. بنابر لم ۲-۹،

$$\begin{aligned} l(x)g(x) &= m(e-۱)fex-m(e-۱)fe\alpha(e)x-m(e-۱)fe\alpha((e-۱)fe)x^{۲} \\ &= m(e-۱)fex-m(e-۱)fex-m(e-۱)fe(e-۱)fex^{۲}=۰ \end{aligned}$$

اما $m(e-۱)\cdot(e-۱)fex=m(e-۱)fex=-mfex\neq ۰$. بنابراین M_R یک مدول α-آرمنداریز نیست، که یک تناقض است.

قضیه ۲-۱۱: **(۱)** فرض کنیم $\alpha\in \mathrm{End}(R)$. در این صورت گزاه های زیر معادلند:

(a) اگر $M[x;\alpha]_{R[x;\alpha]}$ یک مدول $p.p$ باشد آنگاه M_R نیز $p.p$ است. عکس برقرار است هرگاه M_R یک مدول α-آرمنداریز باشد؛

(b) اگر $M[[x;\alpha]]_{R[[x;\alpha]]}$ یک مدول $p.p$ باشد آنگاه M_R نیز $p.p$ است؛

(c) فرض کنیم M_R یک مدول α-آرمنداریز از نوع سریهای توانی باشد. در این صورت $M[[x;\alpha]]_{R[[x;\alpha]]}$ یک مدول $p.p$ است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعهٔ شمارای X از M، خودتوان $e\in R$ وجود داشته باشد بطوری که $r_R(X)=eR$.

(۲) فرض کنیم $\alpha\in \mathrm{Aut}(R)$. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

(a) اگر $M[x,x^{-۱};\alpha]_{R[x,x^{-۱};\alpha]}$ یک مدول $p.p$ باشد آنگاه M_R نیز $p.p$ است. بعکس برقرار است هرگاه M_R یک مدول α-آرمنداریز باشد؛

(b) اگر $M[[x,x^{-۱};\alpha]]_{R[[x,x^{-۱};\alpha]]}$ یک مدول $p.p$ باشد آنگاه M_R نیز $p.p$ است؛

(c) فرض کنیم M_R یک مدول α-آرمنداریز از نوع سریهای توانی باشد. در این صورت $M[[x,x^{-1};\alpha]]_{R[[x,x^{-1};\alpha]]}$ یک مدول $p.p$ است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعهٔ شمارای X از M، خودتوان $e\in R$ وجود داشته باشد به قسمی که $r_R(x)=eR$.

برهان: اثبات (۱) (b) و (۱) (c)مشابه قضیه ۲-۵ است. توجه داریم که مجموعه ضرایب هر عنصر از $M[[x;\alpha]]$ یک زیرمجموعهٔ شمارا از M است و بعکس.

(۱) (a): قسمت اول آن مشابه برهان قضیه ۲-۵ است. حال فرض کنیم M_R یک مدول $p.p$ و α-آرمنداریز باشد. برای هر $m(x)\in M[x;\alpha]$، بنابر لم ۲-۲، $r_{R[x;\alpha]}(m(x))=I[x;\alpha]$، که $I=r_{R[x;\alpha]}(m(x))\bigcap R=r_R(m(x))$. چون M_R یک مدول α-آرمنداریز است اگر $C_m=\{m_i\mid i=۰,...,s\}$ مجموعه ضرایب $m(x)$ در M باشد آنگاه $I=r_R(C_m)$. چون M_R یک مدول $p.p$ است پس برای هر i، خودتوان $e_i\in R$ وجود دارد به طوری که $r_R(m_i)=e_iR$، و لذا $r_R(C_m)=\bigcap_{i=۰}^{s}r_R(m_i)=\bigcap_{i=۰}^{s}e_iR$. ابتدا نشان می دهیم خودتوان $e\in R$ وجود دارد به طوری که $\bigcap_{i=۰}^{s}e_iR=eR$. بنابر لم ۲-۱۰، $m_۱e_۰e_۱=۰$، و لذا $e_۰e_۱\in r_R(m_۱)=e_۱$. پس $e_۱e_۰e_۱=e_۰e_۱$. فرض کنیم $f_۱=e_۰e_۱$. درنتیجه $f_۱^۲=f_۱$ و $e_۰R\bigcap e_۱R=f_۱R$. مجدداً بنابر لم ۲-۱۰، $m_۲f_۱e_۲=۰$. پس $f_۱e_۲\in e_۲R$، و لذا $e_۲f_۱e_۲=f_۱e_۲$. قرار دهید $f_۲=f_۱e_۲$. دراین صورت $f_۲^۲=f_۲$ و $f_۱R\bigcap e_۲R=f_۲R$. با ادامه این روند می توان نشان داد $f_s^۲=f_s$ و $\bigcap_{i=۰}^{s}e_iR=f_sR$. بنابراین $r_{R[x;\alpha]}(m(x))=I[x;\alpha]=(f_sR)[x;\alpha]=f_s\cdot R[x;\alpha]$. پس $M[x;\alpha]_{R[x;\alpha]}$ یک مدول $p.p$ است.

اثبات (۲) مشابه اثبات (۱) است.

نتیجه ۲-۱۲: (۱) فرض کنیم M_R یک مدول آرمنداریز باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف- M_R یک مدول $p.p$ است؛

ب- $M[x]_{R[x]}$ یک مدول $p.p$است؛

ج- $M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}$ یک مدول $p.p$ است.

(۲) فرض کنیم M_R یک مدول آرمنداریز از نوع سریهای توانی باشد (به ویژه، اگر M_R یک مدول تقلیل یافته باشد). دراین صورت گزاره های زیر معادلند:

الف- $M[[x]]_{R[[x]]}$ یک مدول $p.p$ است؛

ب- $M[[x,x^{-1}]]_{R[[x,x^{-1}]]}$ یک مدول $p.p$ است؛

ج-برای هر زیرمجموعهٔ شمارای X از M، خودتوان $e\in R$ وجود داشته باشد به قسمی که $r_R(X)=eR$.

قضیه ۲-۱۳: فرض کنیم M_R یک مدول باشد به طوری که برای هر $m\in M$ و هر $a\in R$، $ma=0 \Leftrightarrow m\alpha(a)=0$. دراین صورت گزاره های زیر برقرارند:

(۱) M_R شبه بئر است اگر و تنها اگر $M[x;\alpha]_{R[x;\alpha]}$ شبه بئر باشد اگر و تنها اگر $M[[x;\alpha]]_{R[[x;\alpha]]}$ شبه بئر باشد.

(۲) علاوه بر آن اگر $\alpha\in \mathrm{Aut}(R)$، آنگاه M_R شبه بئر است اگر و تنها اگر $M[x,x^{-1};\alpha]_{R[x,x^{-1};\alpha]}$ شبه بئر باشد اگر و تنها اگر $M[[x,x^{-1};\alpha]]_{R[[x,x^{-1};\alpha]]}$ شبه بئر باشد.

اثبات: **(۱)**. ثابت می کنیم M_R شبه بئر است اگر و تنها اگر $M[[x;\alpha]]_{R[[x;\alpha]]}$ شبه بئر باشد، و به طور مشابه می توان نشان داد M_R شبه بئر است اگر و تنها اگر $M[x;\alpha]_{R[x;\alpha]}$ شبه بئر باشد. فرض کنیم $M[[x;\alpha]]_{R[[x;\alpha]]}$ شبه بئر باشد. اگر U یک زیرمدول از M_R باشد آنگاه $U[[x;\alpha]]$ زیرمدولی از $M[[x;\alpha]]_{R[[x;\alpha]]}$ است و لذا خودتوان $f(x)\in R[[x;\alpha]]$ وجود دارد به طوری که

$$r_{R[[x;\alpha]]}(U[[x;\alpha]])=f(x)\cdot R[[x;\alpha]].$$

پس

$$.f(x)\cdot R[[x;\alpha]]\subseteq r_{R[[x;\alpha]]}(U)=r_R(U)[[x;\alpha]]$$

اگر $g(x)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j\in r_R(U)[[x;\alpha]]$، آنگاه برای هر $j\geq 0$، $Ub_j=0$، و لذا برای هر $0\leq k$ و هر $0\leq j$، $U\alpha^k(b_j)=0$. برای هر $u(x)=\sum_{i=0}^{\infty}u_ix^i\in U[[x;\alpha]]$، چون $u(x)g(x)=\sum_i\sum_j u_i\alpha^i(b_j)x^{i+j}=0$، پس $g(x)\in r_{R[[x;\alpha]]}(U[[x;\alpha]])$، بنابراین $r_R(U)[[x;\alpha]]=f(x)\cdot R[[x;\alpha]]$. قرار دهید $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$، که برای هر i، $a_i\in r_R(U)$. همان طور که قبلاً ثابت شد برای هر $a\in r_R(U)$، $a=a_0a$. پس $r_R(U)=a_0R$ و $a_0^2=a_0$. بنابراین M_R شبه بئر است.

حال فرض کنیم M_R شبه بئر باشد و V زیرمدولی از $M[[x;\alpha]]_{R[[x;\alpha]]}$ باشد. قرار دهید

$$U=\left\{u\in M : u\neq 0 \text{ and there exists some } \sum_{i\geq k}^{\infty}a_ix^i\in V \text{ with } a_k=u\right\}$$

چون M_R شبه بئر است خودتوان $e\in R$ وجود دارد به طوری که $r_R(UR)=eR$. ادعا می کنیم $r_{R[[x;\alpha]]}(V)=e\cdot R[[x;\alpha]]$. ابتدا فرض کنیم $m(x)=\sum_{i=0}^{\infty}m_ix^i\in V$. اگر $m(x)e\neq 0$، آنگاه بنابر لم ۲-۹، $k\geq 0$ وجود دارد به طوری که $m_ke\neq 0$، و لذا

$$.m(x)e=\sum_{i=0}^{\infty}m_i\alpha^i(e)x^i=\sum_{i=0}^{\infty}m_iex^i=\sum_{i\geq k}m_iex^i$$

چون $m(x)e\in V$، لذا $m_ke\in U$، و درنتیجه $m_ke=(m_ke)e=0$، که یک تناقض است. بنابراین $m(x)e=0$ و لذا $e\cdot R[[x;\alpha]]\subseteq r_{R[[x;\alpha]]}(V)$. حال فرض کنیم $f(x)=\sum_{i\geq k}a_ix^i\in r_{R[[x;\alpha]]}(V)$، که $a_k\neq 0$. برای هر $l\in U$ و هر $r\in R$، سری توانی $h(x)=\sum_{i\geq s}l_ix^i\in V$ وجود دارد به طوری که $l_s=l$. درنتیجه $h(x)r\in V$، و لذا

$$\begin{aligned}0&=[h(x)r]f(x)=\left[\sum_{i\geq s}l_i\alpha^i(r)x^i\right]f(x)\\&=l\alpha^s(r)\alpha^s(a_k)x^{s+k}+\left[l\alpha^s(r)\alpha^s(a_{k+1})+l_{s+1}\alpha^{s+1}(r)\alpha^{s+1}(a_k)\right]x^{s+k+1}+\cdots\end{aligned}$$

که نشان می دهد $l\alpha^s(r)\alpha^s(a_k)=0$. پس $lra_k=0$. بنابراین $a_k\in r_R(UR)=eR$، که نتیجه می دهد $a_k=ea_k$. درنتیجه

$$.f(x)-a_kx^k=\sum_{i\geq k+1}a_ix^i\in r_{R[[x;\alpha]]}(V)$$

اگر بحث بالا را برای $f(x)-a_kx^k$ تکرار کنیم آنگاه $a_{k+1}=ea_{k+1}$. با استفاده از استقرا، نتیجه می گیریم برای هر $k\leq i$، $a_i=ea_i$. بنابراین $f(x)=ef(x)\in f(x)\cdot R[[x;\alpha]]$، و لذا $r_{R[[x;\alpha]]}(V)=e\cdot R[[x;\alpha]]$.

(۲). با استدلالی مشابه (۱) می توان آن را ثابت نمود.

نتیجه ۲-۱۴: گزاره های زیر معادلند:

الف- M_R شبه بئر است؛

ب- $M[x]_{R[x]}$ شبه بئر است؛

ج- $M[[x]]_{R[[x]]}$ شبه بئر است؛

د- $M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}$ شبه بئر است؛

ه- $M[[x,x^{-1}]]_{R[[x,x^{-1}]]}$ شبه بئر است.

نتیجه ۲-۱۵: فرض کنیم $\alpha\in\mathrm{End}(R)$، به طوری که برای هر $a,b\in R$، $ab=0\Leftrightarrow a\alpha(b)=0$. دراین صورت R شبه بئر است اگر و تنها اگر $R[x;\alpha]$ شبه بئر باشد اگر و تنها اگر $R[[x;\alpha]]$ شبه بئر باشد.

اگر علاوه بر آن، $\alpha\in\mathrm{Aut}(R)$، آنگاه R شبه بئر است اگر و تنها اگر $R[x,x^{-1};\alpha]$ شبه بئر باشد اگر و تنها اگر $R[[x,x^{-1};\alpha]]$ شبه بئر باشد.

نتیجه ۲-۱۶: گزاره های زیر معادلند:

الف- حلقه R شبه بئر است؛

ب- $R[x]$ شبه بئر است؛

ج- $R[[x]]$ شبه بئر است؛

د- $R[x,x^{-1}]$ شبه بئر است؛

ه- $R[[x,x^{-1}]]$ شبه بئر است.

۳. بررسی صفر سازهای چندجمله ایها روی مدولها

در سرتاسر این فصل تمام حلقه ها شرکت پذیر یکدار هستند و تمام شبه حلقه ها، شبه حلقه چپ هستند. R و N بترتیب نمایانگر یک حلقه و یک شبه حلقه هستند. حلقه یکدار R را بئر نامیم هرگاه صفرساز راست هر زیرمجموعه ناتهی از آن توسط یک خودتوان تولید گردد. کاپلانسکی نشان داد که تعریف حلقه بئر نسبت به راست و چپ متقارن است. کلاس حلقه های بئر شامل حلقه های نوتری راست که $p.p.$ هستند، حلقه های کامل راست نامنفرد که CS هستند و تمام حلقه های فون نیومن منظم که شبکه ایده آلهای راست آنها کامل است می باشد. مطالعه حلقه های بئر ریشه در آنالیز تابعی دارد. به عنوان مثال، هر حلقه فون نیومن منظم، بئر است. در سال ۱۹۷۴ آرمنداریز ثابت کرد که اگر R یک حلقه تقلیل یافته (حلقه ای که هیچ عنصر پوچ توان ناصفر نداشته باشد) باشد آنگاه R بئر است اگر و تنها اگر $R[x]$ بئر باشد. تعمیمهایی از نتیجه آرمنداریز توسط نویسندگان متفاوتی بدست آمده است.

تعریف ۳-۱: فرض کنیم N یک شبه حلقه چپ یکدار باشد. فرض کنیم $(M,+)$ یک گروه آبلی باشد و تابع $N\times M\to M$ با ضابطهٔ $(n,m)\to nm$ وجود داشته باشد (به آن ضرب اسکالر گوییم) به طوری که برای هر $r,s\in N$ و هر $m,n\in M$،

۱) $r(m+n)=rm+rn$،

۲) $(rs)m=r(sm)$،

۳) $1m=m$.

دراین صورت می گوییم M یک شبه N-مدول چپ است.

به طور مشابه می توان شبه N-مدول راست را تعریف نمود. به عنوان مثال، اگر M یک R-مدول چپ باشد آنگاه M یک شبه R-مدول چپ است. همچنین، اگر N یک شبه حلقه چپ باشد آنگاه N یک شبه N-مدول چپ است.

فرض کنیم $(G,+)$ یک گروه آبلی باشد. در این صورت $M(G)=\{f:G\to G\}$ و $M_0(G)=\{f:G\to G \mid (0)f=0\}$ همراه با دو عمل جمع معمولی توابع و ترکیب معمولی توابع شبه حلقه چپ هستند (ترکیب از چپ انجام می شود). فرض کنیم M یک R-مدول راست و $M[x]$ مجموعه تمام چندجمله ایها با ضرایب از M باشد. واضح است که $M[x]$ همراه با عمل جمع معمولی توابع یک گروه آبلی است. مجموعه $R[x]$ همراه با دو عمل جمع و ترکیب معمولی یک شبه حلقه چپ است که آن را با علامت $(R[x],+,\circ)$ نمایش می دهیم. همچنین $R_0[x]=\{f\in R[x] \mid$ جمله ثابت f صفر باشد $\}$ یک زیرشبه حلقه o-متقارن از $R[x]$ است (شبه حلقه N را o-متقارن نامیم هرگاه برای هر $n\in N$، $0n=0$). فرض کنیم $(x)m=m_0+m_1x+\cdots+m_kx^k\in M[x]$ و $(x)f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in R[x]$. تعریف می کنیم:

$$(x)f\circ(x)m := m_0+m_1\big((x)f\big)+m_2\big((x)f\big)^2+\cdots+m_k\big((x)f\big)^k$$

می توان نشان داد $M[x]$ یک شبه $R[x]$-مدول چپ است.

برکینمیر و هوانگ[1] شرط های صفرساز از نوع بئر را در کلاس شبه حلقه ها معرفی کردند.

فرض کنیم $S\subseteq N$. تعریف می کنیم:

$$r_N(S)=\{a\in N \mid Sa=0\}$$ و

$$l_N(S)=\{a\in N \mid aS=0\}.$$

گوئیم:

(۱) $N\in\beta_{r1}$، هرگاه برای هر $\phi\neq S\subseteq N$، خودتوان $e\in R$ وجود داشته باشد بطوری که $r_N(S)=eR$.

(۲) $N\in\beta_{r2}$، هرگاه برای هر $\phi\neq S\subseteq N$، خودتوان $e\in R$ وجود داشته باشد بطوری که $r_N(S)=r_N(e)$.

---

[1] Birkenmeier and Huang

(۳) $N \in \beta_{l_1}$، هرگاه برای هر $\phi \neq S \subseteq N$، خودتوان $e \in R$ وجود داشته باشد بطوری که $l_N(S) = Re$.

(۴) $N \in \beta_{l_2}$، هرگاه برای هر $\phi \neq S \subseteq N$، خودتوان $e \in R$ وجود داشته باشد بطوری که $l_N(S) = l_N(e)$.

اگر R یک حلقه یکدار باشد آنگاه $N \in \beta_{r_1} \cup \beta_{r_2} \cup \beta_{l_1} \cup \beta_{l_2}$ اگر و تنها اگر N یک حلقه بئر باشد.

اگر در تعریف فوق S یک مجموعه تک عضوی باشد شرط های صفرساز از نوع ریکارت بدست می آید و بجای β از R استفاده می شود. کرویل[2]، شبه حلقه یکدار o-متقارن N را بئر نامید هرگاه $N \in \beta_{r_1} \cap \beta_{l_1}$. برکینمیر و هوانگ در [۳]، شرایط صفرسازها از نوع بئر را روی شبه حلقه چندجمله ایهای $R[x]$ و روی شبه حلقه سریهای توانی o-متقارن $R_o[[x]]$ بررسی نمودند. در واقع آنها نشان دادند که اگر R یک حلقه تقلیل یافته باشد آنگاه

۱- اگر R بئر باشد آنگاه $R_o[x]$ و $R_o[[x]]$ در تمام شرط های صفرساز از نوع بئر صدق می کنند.

۲- اگر $R_o[x]$ یا $R_o[[x]]$ در یکی از شرط های صفرساز از نوع بئر صدق کند آنگاه R بئر است.

یادآوری می کنیم مدول M را تقلیل یافته نامیم هرگاه برای هر $m \in M$ و هر $a \in R$، $ma = 0$ نتیجه دهد $mR \cap Ma = 0$. مدول M را بئر نامیم هرگاه صفرساز راست هر زیرمجموعه ناتهی از M به عنوان یک ایده آل راست توسط یک خودتوان تولید گردد. فرض کنیم N یک شبه حلقه و M یک شبه N-مدول چپ باشد. گوییم

۱- $M \in \beta_{l_1}$، هرگاه برای هر زیرمجموعه ناتهی S از M، خودتوان $e \in R$ وجود داشته باشد بطوری که $l_N(S) = Ne$.

۲- $M \in \beta_{l_2}$، هرگاه برای هر زیرمجموعه ناتهی S از M، خودتوان $e \in R$ وجود داشته باشد بطوری که $l_N(S) = l_N(e)$.

واضح است که اگر M یک R-مدول چپ باشد آنگاه $M \in \beta_{l_1}$، اگر و تنها اگر M بئر باشد. در این فصل شرط های صفرساز از نوع بئر را روی شبه مدول چپ چندجمله ایها روی یک مدول بررسی می کنیم. همچنین نشان می دهیم

---

[2] Courville

R-مدول M تقلیل یافته است اگر و تنها اگر $M[x]$ به عنوان شبه $R_{\circ}[x]$-مدول تقلیل یافته باشد اگر و تنها اگر $M_{\circ}[x]$ به عنوان شبه $R_{\circ}[x]$-مدول تقلیل یافته باشد.

تعریف ۳-۲: حلقه R را آبلی نامیم هرگاه هر خودتوان آن در مرکز قرار داشته باشد.

گزاره ۳-۳: فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

(۱) M_R تقلیل یافته است؛

(۲) $M[x]$ به عنوان شبه $R_{\circ}[x]$-مدول تقلیل یافته است؛

(۳) $M_{\circ}[x]$ به عنوان شبه $R_{\circ}[x]$-مدول تقلیل یافته است.

برهان: ۱ $\leftarrow$ ۲: فرض کنیم $(x)m = m_0 + m_1x + \cdots + m_kx^k \in M[x]$، $(x)f = a_1x + \cdots + a_nx^n \in R_{\circ}[x]$ و $(x)f \circ (x)m = 0$. درنتیجه $m_ka_n^k = 0$، و لذا بنابر لم ۳-۱، $m_ka_n = 0$. اگر a_n را از راست در $(x)f \circ (x)m$ ضرب کنیم آنگاه با استفاده از لم ۳-۱،

$$m_0a_n + m_1\big((x)f\big)a_n + \cdots + m_{k-1}\big((x)f\big)^{k-1}a_n = 0.$$

درنتیجه $m_{k-1}a_n^k$، و لذا $m_{k-1}a_n = 0$. با ادامه این روند نتیجه می گیریم $m_0a_n = m_1a_n = \ldots = m_ka_n = 0$. درنتیجه بنابر لم ۳-۱،

$$(x)f \circ (x)m = m_0 + m_1\left(a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}\right) + \cdots + m_k\left(a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}\right)^k = 0$$

حال با استفاده از استقرا روی درجهٔ $(x)f$، نتیجه می گیریم برای هر i و j، $m_ia_j = 0$.

فرض کنیم $(x)m' = m'_0 + m'_1x + \cdots + m'_rx^r \in M[x]$، $(x)g = b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_sx^s \in R_{\circ}[x]$ و $(x)f \circ (x)m' = (x)g \circ (x)m$. درنتیجه

$$m'_0 + m'_1\big((x)f\big) + \cdots + m'_r\big((x)f\big)^r = m_0 + m_1\big((x)g\big) + \cdots + m_k\big((x)g\big)^k \qquad (*)$$

اگر a_n را از راست در (⁎) ضرب کنیم آنگاه با استفاده از لم ۳-۱، برای هر $i=0,1,\dots,r$، $m'_i a_n = 0$. حال اگر a_{n-1} را از راست در (⁎) ضرب کنیم با استفاده از لم ۳-۱، نتیجه می گیریم برای هر $i=0,1,\dots,r$، $m'_i a_{n-1} = 0$. با ادامه این روند می توان نشان داد برای هر i و j، $m'_i a_j = 0$. بنابراین $m'(x) \circ f(x) = 0$.

۲ ← ۳: بدیهی است.

۳ ← ۱: فرض کنیم $a \in R$، $m \in M$ و $ma = 0$. پس $ax \circ mx = 0$. فرض کنیم $b \in R$ و $m' \in M$، به طوری که $m'a = mb$. درنتیجه $ax \circ m'x = bx \circ mx$. چون $M_\circ[x]$ به عنوان شبه $R_\circ[x]$-مدول چپ تقلیل یافته است. لذا $ax \circ m'x = m'ax$. پس $m'a = 0$. حال فرض کنیم $ma^2 = 0$. درنتیجه $ax \circ (ax \circ mx) = ma^2 x = 0$، و چون $M_\circ[x]$ به عنوان شبه $R_\circ[x]$-مدول چپ تقلیل یافته است نتیجه می گیریم $ax \circ mx = 0$. بنابراین $ma = 0$، و لذا M یک R-مدول تقلیل یافته است.

گزاره ۳-۴: فرض کنیم M_R یک مدول تقلیل یافته باشد و $\phi \neq S \subseteq M_\circ[x]$.

۱- اگر خودتوان $E(x) = e_\circ + e_1 x + \cdots + e_n x^n \in R[x]$ وجود داشته باشد بطوری که $l_{R[x]}(S) = R[x] \circ E(x)$، آنگاه $e_1^2 = e_1$ و $l_{R[x]}(S) = R[x] \circ e_1 x$.

۲- فرض کنیم R یک حلقه آبلی باشد و خودتوان $E(x) = e_\circ + e_1 x + \cdots + e_n x^n \in R[x]$ وجود داشته باشد بطوری که $l_{R[x]}(S) = l_{R[x]}\big(E(x)\big)$. در این صورت $e_1^2 = e_1$ و $l_{R[x]}(S) = l_{R[x]}\big(e_1 x\big)$.

برهان: (۱). فرض کنیم $m_1 x + \dots + m_k x^k \in S$. در این صورت با استدلالی مشابه گزاره ۳-۳ می توان نشان داد که برای هر $i = 1,\dots,k$ و هر $j = 1,\dots,n$، $m_i e_j = 0$. پس برای هر $i = 1,\dots,n$، $e_i x \in l_{R[x]}(S)$. درنتیجه برای هر $i = 1,2,\dots,n$،

$$e_i x = e_i x \circ \left(e_\circ + e_1 x + \cdots + e_n x^n\right) = e_\circ + e_1 e_i x + \cdots + e_n e_i^n x^n$$

بنابراین $e_\circ = 0$، $e_1^2 = e_1$ و برای هر $i = 2,\dots,n$، $e_i = e_1 e_i$. پس $E(x) = E(x) \circ e_1 x$ و $R[x] \circ E(x) \subseteq R[x] \circ e_1 x$. واضح است که $R[x] \circ e_1 x \subseteq R[x] \circ E(x)$. بنابراین $l_{R[x]}(S) = R[x] \circ e_1 x$.

(۲) بنابر گزاره ۳-۳، اگر $(x)f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in l_{R[x]}(S)$ و $(x)m = m_1x + \cdots + m_tx^t \in S$، آنگاه برای هر $1 \leq i \leq t$ و هر $1 \leq j \leq n$، $m_ia_j = 0$. چون $(x)E \circ (x)E = (x)E$، لذا برای هر $2 \leq n$، $e_n^{n+1} = 0$. پس برای هر $(x)m = m_1x + \cdots + m_tx^t \in S$، $m_ie_n^{n+1} = 0$، و چون M_R تقلیل یافته است پس $m_ie_n = 0$. درنتیجه $e_nx \in l_{R[x]}(S) = l_{R[x]}\big((x)E\big)$. بنابراین $e_nx \circ (x)E = 0$، و لذا

$$0 = e_0 = e_1e_n = e_2e_n^2 = \ldots = e_{n-1}e_n^{n-1}.$$

چون $(x)E \circ (x)E = (x)E$ و $e_0 = 0$، پس

$$e_1x + e_2x^2 + \cdots + e_nx^n = e_1\big((x)E\big) + \cdots + e_n\big((x)E\big)^n \qquad (*)$$

فرض کنیم m یکی از ضرایب عناصر S باشد. اگر عنصر m را از چپ در (*) ضرب کنیم آنگاه از اینکه M_R تقلیل یافته است نتیجه می گیریم برای هر $n-1 \geq 2$، $me_{n-1} = 0$. بنابراین $e_{n-1}x \in l_{R[x]}(S) = l_{R[x]}\big((x)E\big)$، و لذا $e_{n-1}x \circ (x)E = 0$ و $e_1e_{n-1} = 0$. با ادامه این روند می توان نشان داد $e_1e_n = e_1e_3 = \ldots = e_1e_n = 0$. چون $(x)E = (x)E \circ (x)E$ و $e_1e_2 = e_1e_3 = \ldots = e_1e_n = 0$، لذا با مقایسه ضرایب x^2 در طرفین تساوی، خواهیم داشت $e_2 = e_2e_1$. درنتیجه $e_2 = 0$، زیرا $e_1^2 = e_1$ و R آبلی است. با مقایسه ضرایب x^3 در طرفین تساوی $(x)E = (x)E \circ (x)E$ خواهیم داشت $e_3 = e_3e_1$. با ادامه این روند نتیجه می گیریم $e_n = e_{n-1} = \ldots = e_2 = 0$. بنابراین $l_{R[x]}(S) = l_{R[x]}(e_1x)$.

گزاره ۳-۵: فرض کنیم R یک حلقه آبلی باشد و M_R یک مدول تقلیل یافته باشد. اگر $M[x] \in \beta_{l2}$، آنگاه $M \in \beta_{r2}$.

برهان: فرض کنیم S یک زیرمجموعه ناتهی از M باشد و $S_x := \{mx | m \in S\} \subseteq M[x]$. درنتیجه بنابر گزاره ۳-۴، خودتوان $e \in R$ وجود دارد بطوری که $l_{R[x]}(S_x) = l_{R[x]}(ex)$. ادعا می کنیم $r_R(S) = r_R(e)$. فرض کنیم $a \in r_R(e)$. درنتیجه $ea = 0$ و $ax \circ ex = 0$. پس $ax \in l_{R[x]}(ex) = l_{R[x]}(S_x)$، و لذا برای هر $m \in S$، $ax \circ mx = m\,a\,x = 0$.

درنتیجه $a\in r_R(S)$. حال فرض کنیم $b\in r_R(S)$. درنتیجه برای هر $m\in S$، $bx\circ mx=mbx=0$. پس $bx\in l_{R[x]}(S_x)=l_{R[x]}(ex)$، و لذا $bx\circ ex=ebx=0$. بنابراین $b\in r_R(e)$، و $r_R(S)=r_R(e)$.

عکس گزاره ۳-۵ در حالت کلی درست نیست. مثال بعد نشان می دهد که مدول متناهی M روی حلقه آبلی R وجود دارد بطوری که $M\in\beta_{r1}\bigcup\beta_{r2}$ و $M[x]\notin\beta_{l2}$.

مثال ۳-۶: فرض کنیم $R=M=Z_6$ و $S=\{2x^2+4x\}$. بنابر گزاره ۳-۴، x، $4x$ و $3x$ تنها خودتوانهایی از $R[x]$ هستند که می توانند در شرط $l_{Z_6[x]}(S)=l_{Z_6[x]}((x)E)$ صدق کنند. توجه داریم که $3x\in l_{Z_6[x]}(S)$، اما $3x\notin l_{Z_6[x]}(3x)$. همچنین $1\in l_{Z_6[x]}(S)$، 1، $1\notin l_{Z_6[x]}(4x)$ و $1\notin l_{Z_6[x]}(x)$. پس خودتوان $(x)E\in R[x]$ وجود ندارد بطوری که $l_{Z_6[x]}(S)=l_{Z_6[x]}((x)E)$. بنابراین $Z_6[x]\notin\beta_{l2}$.

فرض کنیم $(x)m=\sum_{i=0}^{n}m_ix^i\in M[x]$. قرار می دهیم $S_m^*=\{m_1,...,m_n\}$. حال به مسأله توسیع شرط های صفرساز از نوع بئر از M به $M.[x]$ می پردازیم.

گزاره ۳-۷: فرض کنیم M_R یک مدول تقلیل یافته باشد. در این صورت:

۱- $M\in\beta_{r1}$ اگر و تنها اگر $M.[x]\in\beta_{l1}$، به عنوان یک شبه $R.[x]$ مدول چپ.

۲- اگر $M\in\beta_{r2}$، آنگاه $M.[x]\in\beta_{l2}$، به عنوان شبه $R.[x]$-مدول چپ. اگر R آبلی باشد عکس آن برقرار است.

برهان:(۱). فرض کنیم $M\in\beta_{r1}$، و $\phi\neq S\subseteq M.[x]$. در این صورت $\bigcup_{f\in S}S_f^*=T$ یک زیرمجموعه ناتهی از M است. پس خودتوان $e\in R$ وجود دارد بقسمی که $r_R(T)=eR$. نشان می دهیم $l_{R.[x]}(S)=R.[x]\circ ex$. فرض کنیم $(x)m=\sum_{i=1}^{n}m_ix^i\in S$. پس $ex\circ(x)m=\sum_{i=1}m_iex^i=0$، و لذا $R.[x]\circ ex\subseteq l_{R.[x]}(S)$. حال فرض کنیم $(x)f=\sum_{j=1}^{t}a_jx^j\in l_{R.[x]}(S)$. با استدلالی مشابه برهان گزاره ۳-۳ می توان نشان داد برای هر $1\leq j\leq t$، $a_j\in r_R(T)$. بنابراین برای هر $1\leq j\leq t$، $a_j=ea_j$. پس

$$.(x)f=\sum_{j=1}^{t}a_jx^j=\sum_{j=1}^{t}ea_jx^j=\sum_{j=1}^{t}a_jx^j\circ ex\in R_{\cdot}[x]\circ ex$$

به این ترتیب ثابت شد $M_{\cdot}[x]\in\beta_{l1}$، به عنوان یک شبه $R_{\cdot}[x]$-مدول چپ. حال فرض کنیم $M_{\cdot}[x]\in\beta_{l1}$، به عنوان یک شبه $R_{\cdot}[x]$-مدول چپ. فرض کنیم S یک زیرمجموعه ناتهی از M باشد و تعریف می کنیم $S_x:=\{mx|m\in S\}$. بنابر گزاره ۳-۴، خودتوان $e\in R$ وجود دارد بطوری که $l_{R_{\cdot}[x]}(S_x)=R_{\cdot}[x]\circ ex$. چون برای هر $mx\in S_x$، $mex=ex\circ mx=0$، پس $e\in r_R(S)$. حال فرض کنیم $a\in r_R(S)$. پس برای هر $mx\in S_x$، $ax\circ mx=max=0$. بنابراین $ax\in l_{R_{\cdot}[x]}(S_x)=R_{\cdot}[x]\circ ex$، و لذا $ax=ax\circ ex$. درنتیجه $a=ea\in eR$، و لذا $r_R(S)=eR$. به این ترتیب نشان دادیم که $M\in\beta_{r1}$.

(۲) فرض کنیم $M\in\beta_{r2}$ و $\phi\neq S\subseteq M_{\cdot}[x]$. با استدلالی مشابه برهان (۱) می توان نشان داد خودتوان $e\in R$ وجود دارد بطوری که $r_R(T)=r_R(e)$. نشان می دهیم $l_{R_{\cdot}[x]}(S)=l_{R_{\cdot}[x]}(ex)$. فرض کنیم $(x)f=\sum_{j=1}^{t}a_jx^j\in l_{R_{\cdot}[x]}(ex)$. پس $(x)f\circ ex=e\cdot(x)f=0$. درنتیجه برای هر i، $ea_i=0$. بنابراین $l_{R_{\cdot}[x]}(ex)\subseteq l_{R_{\cdot}[x]}(S)$. حال فرض کنیم $(x)g=\sum_{j=1}^{n}b_jx^j\in l_{R_{\cdot}[x]}(S)$. بنابر گزاره ۳-۳، برای هر $1\leq j\leq n$، $b_j\in r_R(T)=r_R(e)$. بنابراین $(x)g\circ ex=e\circ(x)g=0$، و لذا $l_{R_{\cdot}[x]}(S)=l_{R_{\cdot}[x]}(ex)$. به این ترتیب ثابت شد که $M_{\cdot}[x]\in\beta_{l2}$، به عنوان شبه $R_{\cdot}[x]$-مدول چپ. حال فرض کنیم $M_{\cdot}[x]\in\beta_{l2}$، و R یک حلقه آبلی باشد. فرض کنیم S یک زیرمجموعه ناتهی از M باشد و $S_x=\{mx|m\in S\}$. بنابر گزاره ۳-۴، خودتوان $e\in R$ وجود دارد بطوری که $l_{R_{\cdot}[x]}(S_x)=l_{R_{\cdot}[x]}(ex)$. نشان می دهیم $r_R(S)=r_R(e)$. فرض کنیم $a\in r_R(S)$. پس برای هر $mx\in S_x$، $ax\circ mx=max=0$. درنتیجه $ax\in l_{R_{\cdot}[x]}(S_x)=l_{R_{\cdot}[x]}(ex)$، و لذا $ax\circ ex=eax=0$ و $a\in r_R(e)$. بنابراین $r_R(S)\subseteq r_R(e)$. حال فرض کنیم $b\in r_R(e)$. درنتیجه برای هر $bx\in l_{R_{\cdot}[x]}(S_x)$، $bx\circ ex=ebx=0$. پس برای هر $m\in S$، $bx\circ mx=mbx=0$، و لذا $b\in r_R(S)$. به این ترتیب ثابت شد که $M\in\beta_{r2}$.

قضیه ۳-۸: فرض کنیم M_R یک مدول تقلیل یافته باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

۱- M_R یک مدول بئر است؛

۲- مدول $(M[x],+,\cdot)$ بئر است؛

۳- $M_{\cdot}[x]\in\beta_{l۲}$، به عنوان شبه $R_{\cdot}[x]$-مدول چپ.

برهان: (۱) $\Leftrightarrow$ (۲). از [11] نتیجه می شود.

(۲) $\Leftrightarrow$ (۳). از گزاره ۳-۷ نتیجه می شود.

نتیجه ۳-۹: فرض کنیم R یک حلقه تقلیل یافته باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

(۱) R بئر است؛

(۲) $(R[x],+,\cdot)$ بئر است؛

(۳) $(R_{\cdot}[x],+,\circ)\in\beta_{l۱}$.

گزاره ۳-۱۰: فرض کنیم M یک شبه N-مدول راست باشد. فرض کنیم $N_۱$ زیر شبه حلقه ای از N شامل تمام خودتوانهای N باشد. فرض کنیم $M_۱$ یک زیر $N_۱$-شبه مدول از M باشد. اگر به عنوان یک شبه N-مدول راست، $M\in\beta_{r۲}$، آنگاه به عنوان یک شبه $N_۱$-مدول راست، $M_۱\in\beta_{r۱}$. چنین نتیجه ای برای شرط صفرساز $\beta_{r۲}$ نیز درست است.

اثبات: فرض کنیم $M\in\beta_{r۱}$، و S یک زیرمجموعه ناتهی از $M_۱$ باشد. خودتوان $e\in N$ وجود دارد بطوری که $r_N(S)=eN$. چون $eN_۱\subseteq N_۱$ و $eN_۱\subseteq eN=r_N(S)$، لذا $eN_۱\subseteq r_{N_۱}(S)$. حال فرض کنیم $a\in r_{N_۱}(S)$. درنتیجه $a\in r_N(S)=eN$، و $a=ea\in eN_۱$، و لذا $r_{N_۱}(S)=eN_۱$. پس $M_۱\in\beta_{r۱}$. فرض کنیم $M\in\beta_{r۲}$. خودتوان $e\in N$ وجود دارد بطوری که $r_N(S)=r_N(e)$. نشان می دهیم $r_{N_۱}(S)=r_{N_۱}(e)$. اگر $a\in r_{N_۱}(S)$، آنگاه $a\in r_N(S)$ و $ea=۰$. پس $a\in r_{N_۱}(e)$. حال فرض کنیم $b\in r_{N_۱}(e)$. پس $b\in r_N(e)=r_N(S)$، یعنی برای هر $m\in S$، $mb=۰$، و

لذا $b \in r_{N_۱}(S)$. درنتیجه $r_{N_۱}(S) = r_{N_۱}(e)$، و به این ترتیب ثابت شد که به عنوان یک شبه $N_۱$-مدول راست، $M_۱ \in \beta_{r۲}$.

گزاره ۳-۱۱: فرض کنیم M_R یک مدول تقلیل یافته باشد. فرض کنیم S یک زیرشبه حلقه از $R_.[x]$ باشد که توسط مجموعه $\{ex | e^۲ = e \in R\}$ تولید می شود و T یک زیرشبه حلقه از $R_.[x]$ باشد. فرض کنیم X یک زیرشبه T-مدول از $R_.[x]$ باشد و $S \subseteq T$. در این صورت:

۱- اگر به عنوان شبه $R_.[x]$-مدول چپ، $M_.[x] \in \beta_{l۱}$، آنگاه به عنوان شبه T-مدول چپ، $X \in \beta_{l۱}$.

۲- اگر R آبلی باشد و به عنوان شبه $R_.[x]$-مدول چپ، $M_.[x] \in \beta_{l۲}$، آنگاه به عنوان شبه T-مدول چپ، $X \in \beta_{l۲}$.

برهان: از گزاره های ۳-۴ و ۳-۱۰ نتیجه می شود.

مثال ۳-۱۲: اگر M_R یک مدول تقلیل یافته باشد آنگاه با استفاده از گزاره ۳-۱۱، شبه مدولهای زیر در شرط $\beta_{l۱}$ صدق می کنند. همچنین اگر R آبلی و M_R تقلیل یافته باشد آنگاه شبه مدولهای زیر در شرط $\beta_{l۲}$ صدق می کنند:

۱- $\{mx | m \in M\}$ به عنوان $\{ax | a \in R\}$-شبه مدول چپ.

۲- $M_.[x]$ به عنوان $\{ax | a \in R\}$-شبه مدول چپ.

۳- $M_.[x]$ به عنوان $\left\{(x)f = \sum_{i=۱}^{n} a_{۲i-۱}x^{۲i-۱} \in R_.[x] \middle| a_{۲i-۱} \in R, n \in \mathrm{N}\right\}$ شبه مدول چپ.

۴- $\left\{(x)m = \sum_{i=۱}^{n} m_{۲i}x^{۲i-۱} \in M_.[x] \middle| m_{۲i-۱} \in M, n \in \mathrm{N}\right\}$ به عنوان $\left\{(x)f = \sum_{i=۱}^{n} a_{۲i-۱}x^{۲i-۱} \in R_.[x] \middle| a_{۲i-۱} \in R, n \in \mathrm{N}\right\}$ شبه مدول چپ.

۵- $\left\{(x)m = \sum_{i=۱}^{n} m_{۲i-۱}x^{۲i-۱} \in M_.[x] \middle| m_{۲i-۱} \in M, n \in \mathrm{N}\right\}$ به عنوان $\{ax | a \in R\}$ شبه مدول چپ.

۶- $M_{.}[x]$ به عنوان $E_{.}[x]$-شبه مدول چپ، که E زیرحلقه ای از R شامل تمام خودتوانهای R است.

References

[1] E.P. Armendariz, A note on extensions of Baer and p.p.-rings, J. Austral. Math. Soc. 18 (1974), 470-473.

[2] S.K. Berberian, Baer $*$-rings, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[3] G.F. Birkenmeier and F.K. Huang, Annihilator conditions on polynomials, Comm. Algebra 29(5) (2001), 2097-2112.

[4] G.F. Birkenmeier and F.K. Huang, Annihilator conditions on formal power series, Algebra Colloq. 9(1) (2002), 29-37.

[5] G.F. Birkenmeier and F.K. Huang, Annihilator conditions on polynomials II, Monatsh. Fur Math. 141(4) (2002), 265-276.

[6] J.R. Courville, On Idempotents and Subsystems Generated by Idempotents in Nearrings; Dissertation, University of Southwestern Louisiana: Lafayette, Louisiana, 1976.

[7] I. Kaplansky, Rings of Operators, Benjamin, New York, 1965.

[8] J. Krempa, Some examples of reduced rings, Algebra Colloq. 3(4) (1996), 289-300.

[9] G. Pilz, Near-Rings, 2nd revised ed; North Holland: Amsterdam, 1983.

[10] T.K. Lee and Y. Zhou, Armendariz and reduced rings, Comm. Algebra 32(6) (2004), 2287-2299.

[11] T.K. Lee and Y. Zhou, Reduced modules, Rings, Modules, Algebras, and Abelian Groups, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 236, Marcel Dekker, New York (2004), 365-377.

Annihilator conditions on polynomials over modules

Ebrahim Hashemi

Abstract. Let R be a ring with unity and M be a right R-module. The system $M[x]$ forms a left near $R[x]$-module under addition and substitution operations. In this paper we extend the study of annihilator conditions on nearring of polynomials to left near $R[x]$-module $M[x]$, when M is a reduced Baer module. Also, we give a characterization of reduced modules. As a corollary we obtain some results of Birkenmeier and Huang [3].

Mathematics Subject Classification (2010). 16Y30; 16S36.

Keywords. Annihilator conditions; Nearrings; Baer rings; Reduced modules.

1. Introduction

Throughout this paper all rings are associative with unity and all nearrings are left nearrings. We use R and N to denote a ring and a nearring respectively. Recall from [7] that a ring R is *Baer* if R has a unity and the right annihilator of every nonempty subset of R is generated, as a right ideal, by an idempotent. Kaplansky [7] shows that the definition of a Baer ring is left-right symmetric. The class of Baer rings includes all right (left) Noetherian right (left) PP rings (hence all hereditary Noetherian rings), all right (left) perfect right (left) nonsingular right (left) CS rings, and all von Neuman regular rings whose lattice of principal right (left) ideals is complete (hence all von Neumann regular right (left) self-injective rings). The study of Baer rings has its roots in functional analysis ([2] and [7]). For example, every von Neumann algebra (e.g., the algebra of all bounded linear operators on a Hilbert space) is a Baer ring. In 1974, Armendariz obtained the following result ([1], Theorem B): Let R be a reduced ring. Then $R[x]$ is a Baer ring if and only if R is a Baer ring. Recall a ring or a nearring is said to be *reduced* if it has no nonzero nilpotent elements. A generalization of Armendariz's result for several types of polynomial extensions over Baer rings, are obtained by various authors.

Definition 1.1. Let N be a left nearring with identity. A *left near N-module* is an abelian group $(M, +)$ together with a mapping $N \times M \longrightarrow M$ called (left) scaler multiplication (the image of $(r, m) \in N \times M$ will be denoted by rm), such that for all $r, s \in N$ and $m, n \in M$, it satisfies the following axioms:

This research is supported by the Shahrood University of Technology at Iran.

1. $r(m+n) = rm + rn$;
2. $(rs)m = r(sm)$;
3. $1m = m$.

Similarly we can define right near N-module. Clearly, if M is a left module over a ring R, then M is left near R-module. Also, if N is an abelian left nearring, then N is a left near N-module. Recall that for a (not necessarily abelian) additive group $(G, +)$, $M(G) = \{f : G \to G\}$ and $M_0(G) = \{f : G \to G | 0f = 0\}$ are left nearring under addition and function composition (domain elements are written on the left side of the function).

Let M be a right R-module and $M[x]$ be the abelian group of polynomials over M. It is well-known that $R[x]$ is an abelian nearring under addition and substitution. Unless specifically indicated otherwise, $R[x]$ denotes the left nearring of polynomials $(R[x], +, \circ)$ with coefficients from R and $R_0[x] = \{f \in R[x] | f$ has zero constant term$\}$ is the 0-symmetric left nearring of polynomials with coefficients in R. Let $(x)m = m_0 + m_1x + \cdots + m_kx^k \in M[x]$ and $(x)f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$. Define $(x)f \circ (x)m := m_0 + m_1((x)f) + \cdots + m_k((x)f)^k$. Clearly $M[x]$ is a left near $R[x]$-module.

Birkenmeier and Huang in [3], defined the *Baer-type annihilator conditions* in the class of nearrings as follows (for a nonempty $S \subseteq N$, let $r_N(S) = \{a \in N \mid Sa = 0\}$ and $\ell_N(S) = \{a \in N \mid aS = 0\}$):

1. $N \in \mathcal{B}_{r1}$ if $r_N(S) = eN$ for some idempotent $e \in N$ for every $\phi \neq S \subseteq N$;
2. $N \in \mathcal{B}_{r2}$ if $r_N(S) = r_N(e)$ for some idempotent $e \in N$ for every $\phi \neq S \subseteq N$;
3. $N \in \mathcal{B}_{\ell 1}$ if $\ell_N(S) = Ne$ for some idempotent $e \in N$ for every $\phi \neq S \subseteq N$;
4. $N \in \mathcal{B}_{\ell 2}$ if $\ell_N(S) = \ell_N(e)$ for some idempotent $e \in N$ for every $\phi \neq S \subseteq N$.

If N is a ring with unity then $N \in \mathcal{B}_{r1} \cup \mathcal{B}_{r2} \cup \mathcal{B}_{\ell 1} \cup \mathcal{B}_{\ell 2}$ is equivalent to N being a Baer ring. When S is a singleton, the *Rickart-type annihilator conditions* on nearrings are also defined similarly except replacing $\mathcal{B}$ by $\mathcal{R}$. Courville in [6] has defined a Baer nearring N to be a 0-symmetric nearring with unity such that $N \in \mathcal{B}_{r1} \cap \mathcal{B}_{\ell 1}$. In ([2], p. 28), the $\mathcal{R}_{r2}$ condition is considered for rings with involution. In [3, 4, 5] Birkenmeier and Huang, studied Baer-type annihilator conditions in the class of nearrings. In particular they studied Baer-type annihilator conditions on the nearring of polynomials $R[x]$ (with the operations of addition and substitution) and formal power series. They obtained the following results: Let R be a reduced ring. (1) If R is Baer, then $R_0[x]$ (resp. $R_0[[x]]$) satisfies all the Baer-type annihilator conditions. (2) If $R_0[x]$ (resp. $R_0[[x]]$) satisfies any one of the Baer-type annihilator conditions, then R is Baer.

Recall from [11], that a module M is called *reduced* if for any $m \in M$ and any $a \in R$, $ma = 0$ implies $mR \cap Ma = 0$. Also, a module is called Baer, if the annihilator of any non-empty subset of M is generated by an idempotent. Lee and Zhou [11], used these modules to obtain a result on certain annihilator conditions of the polynomial extension and the power series extension of a module.

Let N be a nearring and M be a left near N-module. We say (for a nonempty $S \subseteq M$):

1. $M \in \mathcal{B}_{\ell 1}$ if $\ell_N(S) = Ne$ for some idempotent $e \in N$;
2. $M \in \mathcal{B}_{\ell 2}$ if $\ell_N(S) = \ell_N(e)$ for some idempotent $e \in N$.

Clearly, if M is a left R-module, then $M \in \mathcal{B}_{\ell 1}$ if and only if M is a Baer module.

In this paper we extend the study of various annihilator conditions on the nearring of polynomials to the near module of polynomials in which addition and substitutions are used as operations. A result of Birkenmeier and Huang on the nearring of polynomials is extended to Baer conditions in a near module of polynomials. Also, it is shown that a right R-module M is reduced if and only if $M[x]$ is reduced as a left near $R_0[x]$-module if and only if $M_0[x]$ is reduced as a left near $R_0[x]$-module.

2. Near module of polynomials over reduced modules

Lemma 2.1. *([11], Lemma 1.2) Let M be a right R-module. Then the following are equivalent:*

1. *M_R is reduced;*
2. *For any $m \in M$ and $a \in R$,*
   (a) *$ma^2 = 0$ implies $ma = 0$;*
   (b) *$ma = 0$ implies $mRa = 0$.*

Example 2.2. *([11], Example 1.3) The following are examples of reduced modules:*

1. *R is a reduced ring if and only if R_R is a reduced module.*
2. *Every submodule of a reduced module is reduced. In particular, if I is a right ideal of a reduced ring R, then I_R is a reduced module.*
3. *Let p be a prime number and $n > 1$. Then $p^{n-1}\mathbb{Z}_{p^n}$ is a reduced module over $\mathbb{Z}_{p^n}$.*
4. *Every direct product of reduced R-modules is a reduced R-module.*
5. *If M_t is a reduced R_t-module for each $t \in \Gamma$, then $\Pi_t M_t$ is a reduced $\Pi_t R_t$-module.*
6. *A module M over $\mathbb{Z}$ is reduced if and only if, for any $m \in M$, either m is torsion-free or the order of m is square-free. In particular, for $n > 1$, $\mathbb{Z}_n$ is a reduced module over $\mathbb{Z}$ if and only if n is square-free.*

Proposition 2.3. *Let R be a ring and M be a right R-module. Then the following are equivalent:*

1. *M_R is reduced;*
2. *$M[x]$ is reduced as a left near $R_0[x]$-module;*
3. *$M_0[x]$ is reduced as a left near $R_0[x]$-module.*

Proof. (1) → (2) Let $(x)m = m_0 + m_1x + \cdots + m_kx^k \in M[x]$ and $(x)f = a_1x + \cdots + a_nx^n \in R_0[x]$ such that $(x)f \circ (x)m = 0$. Then $m_ka_n^k = 0$, and $m_ka_n = 0$, by Lemma 2.1. By multiplying $(x)f \circ (x)m$ on the right by a_n and using Lemma 2.1, we have $m_0a_n + m_1((x)f)a_n + \cdots + m_{k-1}((x)f)^{k-1}a_n = 0$. Then $m_{k-1}a_k^k = 0$ and $m_{k-1}a_n = 0$. By continuing this process, we have $m_0a_n = m_1a_n = \cdots = m_ka_n = 0$. Then by using Lemma 2.1, $(x)f \circ (x)m = m_0 + m_1(a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + \cdots + m_k(a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})^k = 0$. Hence by using induction on $deg((x)f)$, we have $m_ia_j = 0$ for all i, j. Now let $(x)m' = m_0' + \cdots + m_r'x^r \in M[x]$ and $(x)g = b_1x + \cdots + b_sx^s \in R_0[x]$ such that $(x)f \circ (x)m' = (x)g \circ (x)m$. Then

$$m_0' + m_1'((x)f) + \cdots + m_r'((x)f)^r = m_0 + m_1((x)g) + \cdots + m_k((x)g)^k. \qquad (2.1)$$

By multiplying Eq.(2.1) on the right by a_n and using Lemma 2.1, we have $m_i'a_n = 0$ for $i = 0, \cdots, r$. Now, multiplying Eq.(2.1) on the right by a_{n-1} and using Lemma

2.1, we have $m_i^{'}a_{n-1} = 0$ for $i = 0, \cdots, r$. Continuing this process yields $m_i^{'}a_j = 0$ for all i, j. Thus $(x)f \circ (x)m^{'} = 0$.

(2) $\rightarrow$ (3) It is clear.

(3) $\rightarrow$ (1) Let $a \in R$ and $m \in M$ such that $ma = 0$. Hence $ax \circ mx = 0$. Let $b \in R$ and $m^{'} \in M$ such that $m^{'}a = mb$. Hence $ax \circ m^{'}x = bx \circ mx$. Since $M_0[x]$ is reduced as a left near $R_0[x]$-module, we have $ax \circ m^{'}x = m^{'}ax = 0$. Thus $m^{'}a = 0$. Now suppose that $ma^2 = 0$. Then $ax \circ (ax \circ mx) = ma^2x = 0$. Hence $ax \circ mx = 0$, since $M_0[x]$ is reduced as a left near $R_0[x]$-module. Thus $ma = 0$. Therefore M is a reduced R-module. □

By using Proposition 2.3, one can construct examples of reduced near modules.

Proposition 2.4. *Let M_R be a reduced module and S be a non-empty subset of $M_0[x]$.*

1. *Let $\ell_{R[x]}(S) = R[x] \circ (x)E$ for an idempotent $(x)E = e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n \in R[x]$. Then $e_1^2 = e_1$ and $\ell_{R[x]}(S) = R[x] \circ e_1x$.*
2. *Let R be a commutative ring and $\ell_{R[x]}(S) = \ell_{R[x]}((x)E)$ for an idempotent $(x)E = e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n \in R[x]$. Then $e_1^2 = e_1$ and $\ell_{R[x]}(S) = \ell_{R[x]}(e_1x)$.*

Proof. (1) Let $m_1x + \cdots + m_kx^k \in S$. Then $m_ie_j = 0$ for $i = 1, \cdots, k, j = 1, \cdots, n$, by the same proof as in Proposition 2.3. Thus $e_ix \in \ell_{R[x]}(S)$ for $i = 1, \cdots, n$. Hence $e_ix = e_ix \circ (e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n) = e_0 + e_1e_ix + \cdots + e_ne_i^nx^n$ for $i = 1, 2, \cdots, n$. Then $e_0 = 0$, $e_1^2 = e_1$ and $e_i = e_1e_i$ for $i = 2, \cdots, n$. Thus $(x)E = (x)E \circ e_1x$, and $R[x] \circ (x)E \subseteq R[x] \circ e_1x$. Clearly $R[x] \circ e_1x \subseteq R[x] \circ (x)E$. Therefore $\ell_{R[x]}(S) = R[x] \circ e_1x$.

(2) By Proposition 2.3, if $(x)f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \ell_{R[x]}(S)$ and $(x)m = m_1x + \cdots + m_tx^t \in S$, then $m_ia_j = 0$ for all $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq n$. Since $(x)E \circ (x)E = (x)E$, hence $e_n^{n+1} = 0$, if $n \geq 2$. Thus for each $(x)m = m_1x + \cdots + m_tx^t \in S$, $m_ie_n^{n+1} = 0$ and so $m_ie_n = 0$, since M_R is reduced. Hence $e_nx \in \ell_{R[x]}(S) = \ell_{R[x]}((x)E)$. Thus $e_nx \circ (x)E = 0$ and that $0 = e_0 = e_1e_n = e_2e_n^2 = \cdots = e_{n-1}e_n^{n-1}$. Since $(x)E \circ (x)E = (x)E$ and $e_0 = 0$, we have

$$e_1x + e_2x^2 + \cdots + e_nx^n = e_1((x)E) + \cdots + e_n((x)E)^n. \tag{2.2}$$

Let m be a coefficient of an element of S. Multiplying Eq.(2.2) on the left by m, yields $me_{n-1} = 0$, if $n - 1 \geq 2$, since $me_n = 0$ and M_R is reduced. Thus $e_{n-1}x \in \ell_{R[x]}(S) = \ell_{R[x]}((x)E)$. Hence $e_{n-1}x \circ (x)E = 0$ and $e_1e_{n-1} = 0$. Continuing this process yields $e_1e_2 = e_1e_3 = \cdots = e_1e_n = 0$. Since $(x)E = (x)E \circ (x)E$ and $e_1e_2 = e_1e_3 = \cdots = e_1e_n = 0$, by comparing the coefficients of x^2, we have $e_2 = e_2e_1$. Hence $e_2 = 0$, since $e_1^2 = e_1$ and R is commutative. By comparing coefficients of x^3 in $(x)E = (x)E \circ (x)E$, we have $e_3 = e_3e_1 = 0$. Continuing this process yields, $e_n = e_{n-1} = \cdots = e_2 = 0$. Therefore $\ell_{R[x]}(S) = \ell_{R[x]}(e_1x)$. □

Proposition 2.5. *Let M be a reduced R-module and R be a commutative ring. If $M[x] \in \mathcal{B}_{\ell 2}$, then $M \in \mathcal{B}_{r2}$.*

Proof. Let S be a non-empty subset of M and $S_x = \{mx | m \in S\} \subseteq M[x]$. Then $\ell_{R[x]}(S_x) = \ell_{R[x]}(ex)$, for an idempotent $e \in R$, by Proposition 2.4. We claim $r_R(S) = r_R(e)$. Let $a \in r_R(e)$. Then $ea = 0$ and $ax \circ ex = 0$. Hence $ax \in \ell_{R[x]}(ex) = \ell_{R[x]}(S_x)$, and so $ax \circ mx = max = 0$ for each $m \in S$. Thus $a \in r_R(S)$. Now, let $b \in r_R(S)$. Then $bx \circ mx = mbx = 0$ for each $m \in S$. Hence $bx \in \ell_{R[x]}(S_x) = \ell_{R[x]}(ex)$, and $bx \circ ex = ebx = 0$. Thus $b \in r_R(e)$. Therefore $r_R(S) = r_R(e)$. □

The converse of Proposition 2.5, is not true in general. The following example shows that there exists a finite module M over a commutative ring R such that $M \in \mathcal{B}_{r1} \cup \mathcal{B}_{r2}$ but $M[x] \notin \mathcal{B}_{\ell 2}$.

Example 2.6. *Let $R = M = \mathbb{Z}_6$ and $S = \{2x^2 + 4x\}$. By Proposition 2.4, the possible idempotents $(x)E \in \mathbb{Z}_6[x]$ such that $\ell_{\mathbb{Z}_6[x]}(S) = \ell_{\mathbb{Z}_6[x]}((x)E)$ are either x or $4x$ or $3x$. Note that $3x \in \ell_{\mathbb{Z}_6[x]}(S)$, but $3x \notin \ell_{\mathbb{Z}_6[x]}(3x)$. Also $1 \in \ell_{\mathbb{Z}_6[x]}(S)$, but $1 \notin \ell_{\mathbb{Z}_6[x]}(4x)$ and $1 \notin \ell_{\mathbb{Z}_6[x]}(x)$. Therefore, there is no idempotent $(x)E \in \mathbb{Z}_6[x]$ such that $\ell_{\mathbb{Z}_6[x]}(S) = \ell_{\mathbb{Z}_6[x]}((x)E)$. Consequently, $\mathbb{Z}_6[x] \notin \mathcal{B}_{\ell 2}$.*

If $(x)m = \sum_{i=0}^{n} m_i x^i \in M[x]$, let $S^*_m = \{m_1, \cdots, m_n\}$.

We now turn to the problem of extending Baer-type annihilator conditions from M to $M_0[x]$.

Proposition 2.7. *Let M be a reduced module over a ring R. Then*

1. *$M \in \mathcal{B}_{r1}$ if and only if $M_0[x] \in \mathcal{B}_{\ell 1}$ as a left near $R_0[x]$-module.*
2. *if $M \in \mathcal{B}_{r2}$, then $M_0[x] \in \mathcal{B}_{\ell 2}$ as a left near $R_0[x]$-module. The converse is true, if R is commutative.*

Proof. (1) Assume $M \in \mathcal{B}_{r1}$ and S is a non-empty subset of $M_0[x]$. Then $T = \cup_{f \in S} S^*_f$ is a non-empty subset of M. Hence $r_R(T) = eR$ for some idempotent $e \in R$. We show that $\ell_{R_0[x]}(S) = R_0[x] \circ ex$. Let $(x)m = \sum_{i=1}^{n} m_i x^i \in S$. Then $ex \circ (x)m = \sum_{i=1} m_i e x^i = 0$. Thus $R_0[x] \circ ex \subseteq \ell_{R_0[x]}(S)$. Now let $(x)f = \sum_{j=1}^{t} a_j x^j \in \ell_{R_0[x]}(S)$. Then $a_j \in r_R(T)$ for all $1 \leq j \leq t$, as in the proof of Proposition 2.3. Therefore $a_j = ea_j$ for all $1 \leq j \leq t$. Hence $(x)f = \sum_{j=1}^{t} a_j x^j = \sum_{j=1}^{t} ea_j x^j = \sum_{j=1}^{t} a_j x^j \circ ex \in R_0[x] \circ ex$. Consequently, $M_0[x] \in \mathcal{B}_{\ell 1}$ as a left near $R_0[x]$-module.

Now assume $M_0[x] \in \mathcal{B}_{\ell 1}$ as a left near $R_0[x]$-module. Let S be a non-empty subset of M and define $S_x = \{mx | m \in S\}$. Then $\ell_{R_0[x]}(S_x) = R_0[x] \circ ex$ for some idempotent $e \in R$, by Proposition 2.4. For each $mx \in S_x$, $0 = ex \circ mx = mex$. Then $e \in r_R(S)$. Now assume $a \in r_R(S)$. Then $ax \circ mx = max = 0$ for each $mx \in S_x$. Thus $ax \in \ell_{R_0[x]}(S_x) = R_0[x] \circ ex$ and $ax = ax \circ ex$. Hence $a = ea \in eR$. Thus $r_R(S) = eR$ and so $M \in \mathcal{B}_{r1}$.

(2) Assume $M \in \mathcal{B}_{r2}$. Let S be a non-empty subset of $M_0[x]$. By a similar construction used in the proof of (1), we have $r_R(T) = r_R(e)$ for some idempotent $e \in R$. We show $\ell_{R_0[x]}(S) = \ell_{R_0[x]}(ex)$. Let $(x)f = \sum_{j=1}^{t} a_j x^j \in \ell_{R_0[x]}(ex)$. Then $(x)f \circ ex = e.(x)f = 0$. Hence $ea_i = 0$ for each i. Therefore $\ell_{R_0[x]}(ex) \subseteq \ell_{R_0[x]}(S)$. Now, let $(x)g = \sum_{j=1}^{n} b_j x^j \in \ell_{R_0[x]}(S)$. Then $b_j \in r_R(T) = r_R(e)$ for each $1 \leq j \leq n$, as in the proof of Proposition 2.3. Thus $(x)g \circ ex = e.(x)g = 0$. Therefore $\ell_{R_0[x]}(S) = \ell_{R_0[x]}(ex)$ and so $M_0[x] \in \mathcal{B}_{\ell 2}$.

Assume $M_0[x] \in \mathcal{B}_{\ell 2}$ and R be a commutative ring. Let S be a non-empty subset of M and define $S_x = \{mx | m \in S\}$. Then $\ell_{R_0[x]}(S_x) = \ell_{R_0[x]}(ex)$ for some idempotent $ex \in R_0[x]$, by Proposition 2.4. We show that $r_R(S) = r_R(e)$. Let $a \in r_R(S)$. Then $ax \circ mx = max = 0$, for each $mx \in S_x$. Hence $ax \in \ell_{R_0[x]}(S_x) = \ell_{R_0[x]}(ex)$. Thus $ax \circ ex = eax = 0$ and $a \in r_R(e)$. Therefore $r_R(S) \subseteq r_R(e)$. Now let $b \in r_R(e)$. Then $bx \circ ex = ebx = 0$, so $bx \in \ell_{R_0[x]}(S_x)$. Thus $bx \circ mx = mbx = 0$, for all $m \in S$. Therefore $b \in r_R(S)$ and so $M \in \mathcal{B}_{r2}$. □

Theorem 2.8. *Let M be a reduced module. Then the following are equivalent:*

1. *M_R is a Baer right R-module;*

2. $(M[x], +, .)$ *is a Baer right* $R[x]$*-module;*
3. $(M_0[x], +, \circ) \in \mathcal{B}_{\ell 1}$ *as a left near* $R_0[x]$*-module.*

Proof. (1) $\Leftrightarrow$ (2) It follows from ([11], Theorem 2.5).

(2) $\Leftrightarrow$ (3) It follows from Proposition 2.7. $\square$

Corollary 2.9. *(*[3]*, Corollary 3.9) Let* R *be a reduced ring. Then the following are equivalent:*

1. R *is Baer;*
2. $(R[x], +, .)$ *is Baer;*
3. $(R_0[x], +, \circ) \in \mathcal{B}_{\ell 1}$*.*

Proposition 2.10. *Let* M *be a right near* N*-module. Let* N_1 *be a subnearring of* N *which contains all the idempotents of* N*. Let* M_1 *be a subnear* N_1*-module of* M*. If* $M \in \mathcal{B}_{r1}(\mathcal{B}_{r2})$ *as a right near* N*-module, then* $M_1 \in \mathcal{B}_{r1}(\mathcal{B}_{r2})$ *as a right near* N_1*-module.*

Proof. Assume $M \in \mathcal{B}_{r1}$. Let S be a nonempty subset of M_1. There exists an idempotent $e \in N$ such that $r_N(S) = eN$. Note that $eN_1 \subseteq N_1$ and $eN_1 \subseteq eN = r_N(S)$, and so $eN_1 \subseteq r_{N_1}(S)$. On the other hand, let $a \in r_{N_1}(S)$. Then $a \in r_N(S) = eN$ and so $a = ea \in eN_1$, and thus $r_{N_1}(S) = eN_1$. Hence $M_1 \in \mathcal{B}_{r1}$. Assume $M \in \mathcal{B}_{r2}$. Then $r_N(S) = r_N(e)$ for some idempotent $e \in N$. We show that $r_{N_1}(S) = r_{N_1}(e)$. If $a \in r_{N_1}(S)$, then $a \in r_N(S)$ and so $ea = 0$. Therefore $a \in r_{N_1}(e)$. On the other hand, if $b \in r_{N_1}(e)$, then $b \in r_N(e) = r_N(S)$. That is $mb = 0$ for all $m \in S$, and so $b \in r_{N_1}(S)$. Hence $r_{N_1}(S) = r_{N_1}(e)$ and $M_1 \in \mathcal{B}_{r2}$ as a right near N_1-module. $\square$

Proposition 2.11. *Assume that* M *is a reduced* R*-module. Let* S *be the subnearring of* $R_0[x]$ *generated by* $\{ex | e^2 = e \in R\}$ *and* T *be a subnearring of* $R_0[x]$*. Let* X *be a subnear* T*-module of* $R_0[x]$ *and* $S \subseteq T$*.*

1. *If* $M_0[x] \in \mathcal{B}_{\ell 1}$ *as a left near* $R_0[x]$*-module, then* $X \in \mathcal{B}_{\ell 1}$ *as a left near* T*-module.*
2. *If* R *is a commutative ring and* $M_0[x] \in \mathcal{B}_{\ell 2}$ *as a left near* $R_0[x]$*-module, then* $X \in \mathcal{B}_{\ell 2}$ *as a left near* T*-module.*

Proof. Follows from Propositions 2.4 and 2.10. $\square$

Example 2.12. *By Proposition 2.11, the following near modules satisfy* $\mathcal{B}_{\ell 1}$ *when* M *is a reduced and Baer* R*-module. They also, satisfy* $\mathcal{B}_{\ell 2}$*, when* M *is a reduced* R*-module,* R *is commutative and* $M \in \mathcal{B}_{r2}$*:*

1. $\{mx \,|\, m \in M\}$ *as a left near* $\{ax | a \in R\}$*-module;*
2. $M_0[x]$ *as a left near* $\{ax | a \in R\}$*-module;*
3. $M_0[x]$ *as a left near* $\{(x)f = \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1}x^{2i-1} \in R_0[x] \,|\, a_{2i-1} \in R, n \in \mathbb{N}\}$*-module;*
4. $\{(x)m = \sum_{i=1}^{n} m_{2i-1}x^{2i-1} \in M_0[x] \,|\, m_{2i-1} \in M, n \in \mathbb{N}\}$ *as a left near* $\{(x)f = \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1}x^{2i-1} \in R_0[x] \,|\, a_{2i-1} \in R, n \in \mathbb{N}\}$*-module;*
5. $\{(x)m = \sum_{i=1}^{n} m_{2i-1}x^{2i-1} \in M_0[x] \,|\, m_{2i-1} \in M, n \in \mathbb{N}\}$ *as a left near* $\{ax | a \in R\}$*-module;*
6. $M_0[x]$ *as a left near* $E_0[x]$*-module where* E *is a subring containing all idempotents of* R*.*

Acknowledgment

The author thanks the referee for his/her valuable comments and suggestions. This research is supported by the Shahrood University of Technology at Iran.

References

[1] E.P. Armendariz, *A note on extensions of Baer and p.p.-rings*, J. Austral. Math. Soc. **18** (1974), 470-473.

[2] S.K. Berberian, *Baer $*$-rings*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[3] G.F. Birkenmeier and F.K. Huang, *Annihilator conditions on polynomials*, Comm. Algebra **29**(5) (2001), 2097-2112.

[4] G.F. Birkenmeier and F.K. Huang, *Annihilator conditions on formal power series*, Algebra Colloq. **9**(1) (2002), 29-37.

[5] G.F. Birkenmeier and F.K. Huang, *Annihilator conditions on polynomials II*, Monatsh. Fur Math. **141**(4) (2002), 265-276.

[6] J.R. Courville, *On Idempotents and Subsystems Generated by Idempotents in Near-rings*; Dissertation, University of Southwestern Louisiana: Lafayette, Louisiana, 1976.

[7] I. Kaplansky, *Rings of Operators, Benjamin*, New York, 1965.

[8] J. Krempa, *Some examples of reduced rings*, Algebra Colloq. **3**(4) (1996), 289-300.

[9] G. Pilz, *Near-Rings*, 2nd revised ed; North Holland: Amsterdam, 1983.

[10] T.K. Lee and Y. Zhou, *Armendariz and reduced rings*, Comm. Algebra **32**(6) (2004), 2287-2299.

[11] T.K. Lee and Y. Zhou, *Reduced modules, Rings, Modules, Algebras, and Abelian Groups*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. **236**, Marcel Dekker, New York (2004), 365-377.

Ebrahim Hashemi
Department of Mathematics Shahrood University of Thechnology
P.O.Box: 316-3619995161
Shahrood, Iran
e-mail: eb_hashemi@yahoo.com and eb_hashemi@shahroodut.ac.ir