



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

مسائل مقدار ویژه معکوس و تخصیص در نظریه کنترل

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

پژوهشگر

نسیم رمودی

۹۲/۹/۲۳

نام خانوادگی دانشجو: رمودی

نام: نسیم

عنوان: مسائل مقدار ویژه معکوس و تخصیص در نظریه کنترل

استاد راهنما: دکتر حجت احسنی طهرانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ التحصیلی: ۹۲/۹/۲۳

تعداد صفحات: ۹۲

واژگان کلیدی: مسئله‌ی مقدار ویژه معکوس، تخصیص مقادیر ویژه، کنترل‌پذیری، سیستم خطی با پس‌خورد خروجی، سیستم توسعه‌یافته، سیستم با تأخیر زمانی، سیستم دوبعدی راسر، سیستم مرتبه بالا

چکیده

مسئله‌ی مقدار ویژه معکوس در بسیاری از علوم مثل طراحی کنترل، ژئوفیزیک، نظریه مدار، طیف‌سنج مولکولی کاربرد دارد. یکی از مهمترین کاربردهای این مسئله، استفاده از آن در مبحث تخصیص مقدار ویژه در نظریه کنترل است. به دلیل اهمیت این مبحث در علوم مهندسی، در این پایان‌نامه ارتباط مسئله تخصیص مقدار ویژه با مسئله‌ی مقدار ویژه معکوس ماتریسی مورد بررسی قرار گرفته است و سپس با ارائه روشی جدید برای حل مسئله‌ی تخصیص مقادیر ویژه، آن را روی سیستم‌های دینامیکی خطی توسعه‌یافته، تأخیر زمانی، دو بعدی راسر و مرتبه بالا بررسی می‌کنیم. در این روش، با در نظر گرفتن مقادیر ویژه در ناحیه پایداری و با استفاده از قضایای ارائه شده در روش مسئله مقدار ویژه معکوس، ماتریس حلقه بسته با پس‌خورد خروجی را به‌گونه‌ای می‌یابیم که دارای همان مقادیر ویژه‌ی از قبل تعیین شده در ناحیه پایداری باشد. همچنین این روش را با روش ارایه شده توسط دکتر کرباسی و سعادتجو که در آن از تبدیلات تشابهی استفاده می‌شود مقایسه می‌کنیم. مهمترین مزیت این روش حذف معادلات غیر خطی است. در پایان، نتایج این روش جدید به‌صورت مثال‌های عددی و نمودارهای پایداری ارائه گردیده است.

تقدیم به همه‌ی کسانی که

می‌خوانند، بیشتر بدانند.

خرد هر کجا کنجی آر دپید
ز نام خدا سازد آن را کلید
رہائی ده بسگان سخن
توانا کن ناتوانان کن
نہان و آشکارا درون و برون
خرد را بہ درگاہ اور ہنمون
بہ حکم آشکارا بہ حکمت نہفت
ستائندہ حیران ازو، وقت گفت^۱

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی راز یور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر حجت
احسنی طهرانی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه
به انجام نمی رسید.
در پایان، بوسه می زنم بردستان خداوندگار ان مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا،
ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و
کرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگار ان، بهترین پشتیبان من بودند.

تقدیم به ارزشمندترین و زیباترین نعمت خداوند در زندگیم، مادرم،
 تاج از فرق فلک برداشتن
 جاودان آن تاج بر سرداشتن
 در بهشت آرزو ره یافتن
 هر نفس شهدی به ساغرداشتن
 روز در انواع نعمت ها و ناز
 شب بتی چون ماه در برداشتن
 صبح از بام جهان چون آفتاب
 روی کیتی را منورداشتن
 سالکده چون ماه رویا آفرین
 ناز بر افلاک اخترداشتن
 چون صبا در مزرع سبز فلک
 بال در بال کبوترداشتن
 خشم و جاه سلیمانی یافتن
 شوکت و فرسکندرداشتن
 تاب در اوج قدرت زیستن
 ملک هستی را مسخرداشتن
 بر تو ارزانی که ما را خوش تر است... لذت یک لحظه "مادر" داشتن^۲

1. N. Ramroodi and H. Ahsani Tehrani, *Eigenvalue Assignment In Descriptor Systems*, 5th Iranian Conference on Applied Mathematics, Bu-Ali Sina University, September 8 -10, 2013, pp 786-789.
2. N. Ramroodi and H. Ahsani Tehrani, *Eigenvalue Assignment For Time Delay Systems*, 5th Iranian Conference on Applied Mathematics, Bu-Ali Sina University, September 8 -10, 2013, pp 173-176.
3. N. Ramroodi and H. Ahsani Tehrani, *Eigenvalue Assignment For High-order Systems*, The 10th Seminar on Differential Equations and Dynamic Systems, University of Mazandaran, 6-7 November 2013, pp 507-510.
4. N. Ramroodi, H. Ahsani Tehrani and F. Enjili, *Eigenvalue Assignment for Two-Dimensional Roesser models*, The 10th Seminar on Differential Equations and Dynamic Systems, University of Mazandaran, 6-7 November 2013, pp 460-463.
5. N. Ramroodi and H. Ahsani Tehrani, *A New Approach for Eigenvalue Assignment by State Feedback*.

فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۱	۱.۱ تاریخچه	۱
۳	۲.۱ انواع مسائل مقدار ویژه معکوس	۳
۴	۳.۱ کاربردها	۴
۸	۲ تعاریف و پیش‌نیازها	۸
۱۶	۳ مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس و تخصیص در نظریه‌ی کنترل	۱۶
۱۶	۱.۳ ارتباط بین مسأله مقدار ویژه معکوس و مسأله تخصیص مقادیر ویژه	۱۶
۱۹	۲.۳ روش جدید	۱۹
۲۳	۱.۲.۳ الگوریتم تکرار	۲۳
۲۵	۲.۲.۳ الگوریتم روش جدید	۲۵
۳۳	۳.۳ یک فرمول ساختاری برای محاسبه A	۳۳
۳۶	۴.۳ روش پارامتری برای تخصیص مقادیر ویژه به وسیله‌ی پس‌خورد خروجی	۳۶
۳۶	۱.۴.۳ تخصیص مقادیر ویژه به وسیله‌ی ماتریس پس‌خورد حالت	۳۶
۳۹	۲.۴.۳ طرح مسأله	۳۹
۴۴	۵.۳ نتیجه‌گیری و مقایسه‌ی روش‌ها	۴۴
۴۶	۴ محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت با استفاده از پس‌خورد خروجی	۴۶
۴۶	۱.۴ معرفی	۴۶
۴۷	۲.۴ طرح مسئله	۴۷
۴۸	۱.۲.۴ مقدار ویژه‌ی معکوس	۴۸
۴۸	۲.۲.۴ الگوریتم	۴۸

۵	تخصیص مقادیر ویژه سیستم‌های توسیع‌یافته	۵۱
۱۰۵	معرفی	۵۱
۲۰۵	پس‌خورد خروجی مشتق	۵۲
۳۰۵	پس‌خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای	۵۴
۱۰۳۰۵	مقدار ویژه معکوس	۵۷
۲۰۳۰۵	الگوریتم	۵۷
۶	تخصیص مقادیر ویژه سیستم‌های با تأخیر زمانی	۶۲
۱۰۶	معرفی	۶۲
۲۰۶	سیستم با تأخیر زمانی روی بردار حالت	۶۳
۳۰۶	سیستم با تأخیر روی بردار ورودی	۶۴
۴۰۶	سیستم با تأخیر روی بردار حالت و ورودی	۶۵
۱۰۴۰۶	مقدار ویژه معکوس	۶۷
۲۰۴۰۶	الگوریتم	۶۸
۷	تخصیص مقادیر ویژه سیستم‌های دوبعدی مدل راسر	۷۲
۱۰۷	معرفی	۷۲
۲۰۷	طرح مسأله	۷۳
۱۰۲۰۷	مقدار ویژه معکوس	۷۴
۲۰۲۰۷	الگوریتم	۷۴
۸	تخصیص مقادیر ویژه سیستم‌های مرتبه-بالا	۷۸
۱۰۸	معرفی	۷۸
۲۰۸	طرح مسئله	۷۹
۱۰۲۰۸	مقدار ویژه معکوس	۸۰
۲۰۲۰۸	الگوریتم	۸۱
۹	نتیجه‌گیری	۸۴
۱۰	پیوست آ	۸۶

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ تاریخچه

مسائل معکوس برای اولین بار توسط فیزیکدان ارمنی - شوروی به نام ویکتور امبارتسومیان^۱ کشف و معرفی شد. در حالی که او فقط یک دانش‌آموز بود، نظریه ساختار اتم، تشکیل سطوح انرژی، معادله‌ی شرودینگر و خواص آن را به طور کامل مطالعه کرده بود و زمانی که روی نظریه مقادیر ویژه‌ی معادلات دیفرانسیل تسلط پیدا کرد، به شباهت ظاهری بین سطوح گسسته‌ی انرژی و مقادیر ویژه‌ی معادلات دیفرانسیل اشاره کرد. او این سؤال را مطرح کرد، ”یک مجموعه از مقادیر ویژه داده شده است، آیا ممکن است یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل یافت شود که مقادیر ویژه‌ی آن‌ها همان مقادیر ویژه‌ی داده شده است، باشد؟“

در واقع، امبارتسومیان به یک مسأله‌ی معکوس اشتورم-لیوویل^۲ که مربوط به تعیین معادلات ارتعاشات ریسمان است، پرداخته است. این مقاله در سال ۱۹۲۹ در یک مجله‌ی فیزیکی^۳ منتشر شد و طی یک زمان طولانی به فراموشی سپرده شد. امبارتسومیان پس از چندین دهه در توصیف این فراموشی گفت، ”اگر یک ستاره شناس، یک مقاله‌ی ریاضی را در یک مجله‌ی فیزیک منتشر کند، اتفاقی جز فراموشی برای آن نخواهد افتاد.“ با این حال، در اواخر جنگ جهانی دوم، این مقاله‌ی ویکتور بیست ساله، توسط ریاضیدانان سوئدی یافت شد و به نقطه‌ی شروعی برای مطالعه روی مسائل معکوس تبدیل شد.

در سال ۱۹۹۸ پارلت^۴ گفت: ”ارتعاشات و مقادیر ویژه‌ی مرتبط با آن‌ها، در همه جا هستند.“ این دیدگاه جالب در مورد مقادیر ویژه، خبر از نقش مهم مقادیر ویژه در تحقیقات آینده می‌داد. به همین دلیل تلاش‌های قابل توجهی در محاسبه‌ی مقادیر ویژه، به‌خصوص در زمینه‌ی ماتریسی انجام شد.

^۱Viktor Ambartsumian

^۲Sturm-Liouville Inverse Problem

^۳Zeschrift Fur

^۴Parlett

یک مسأله‌ی مستقیم، در واقع فرآیند تجزیه و تحلیل و استخراج اطلاعات طیفی از یک سیستم و در نتیجه تعیین رفتار دینامیکی یک سیستم از پارامترهای فیزیکی معلوم قبلی است، مانند جرم، طول، کشش، خازن و ... مسأله‌ی معکوس، تعیین، تخمین و کنترل کردن درستی عناصر یک سیستم با توجه به رفتار از قبل تعیین شده‌ی آن سیستم است. به‌خصوص در بحث ماتریسی، یک مسأله‌ی معکوس ماتریسی، ساخت یک ماتریس با ویژگی‌های از پیش تعیین شده می‌باشد.

یک مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس^۵، ساخت یک ماتریس با اطلاعات طیفی از قبل تعیین شده می‌باشد. این داده‌های طیفی ممکن است شامل اطلاعات کامل و یا جزئی از مقادیر ویژه یا بردارهای ویژه ماتریس باشند. هر مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس با دو سؤال اساسی همراه است، یکی مسأله‌ی نظری روی حل‌پذیری و دیگری مسأله‌ی عملی روی محاسبه‌پذیری می‌باشد. حل‌پذیری، وجود یک شرط لازم یا یک شرط کافی است که تحت آن مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس یک جواب داشته باشد و محاسبه‌پذیری، توسعه‌ی فرآیند ساخت ماتریس به صورت عددی، با دانش به اینکه مسأله‌ی مورد نظر حل‌پذیر است، می‌باشد.

واضح است که اگر ماتریس، ساختار و شروط معینی نداشته باشد، مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس به راحتی حل‌پذیر است. برای ایجاد مسأله‌ی معنی دارتری هم از لحاظ ریاضی و هم از لحاظ فیزیکی، گاهی ایجاد شروط رده‌ی خاصی از ماتریس‌ها ضروری است. به همین دلیل، یک مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس در واقع یک مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس ساختاری^۶ است.

با ایجاد شروط متفاوت و فرمول‌سازی مختلف، مطالعات روی این مسأله برای دستیابی به یک راه حل عملی برای دنیای واقعی، بسیار پراکنده می‌باشد و با وجود تلاش‌های زیاد، فقط قسمتی از مسائل مطرح شده در مبحث مقدار ویژه‌ی معکوس به طور کامل تشریح و حل شده است. هدف این فصل این است که به‌طور خلاصه اقدامات انجام شده در هر دو زمینه‌ی نظریه و الگوریتم‌های عددی این مسأله را بیان کنیم.

مطالعات اولیه در این زمینه عبارتند از کتاب گلدول^۷ در سال ۱۹۸۶، که در آن تأکید بر یک مکانیسم کاربردی است. کتاب بولی و گلوب^۸ در سال ۱۹۸۷ تأکید بر محاسبات عددی کرده‌است، در کتاب ژو و دای^۹ در سال ۱۹۹۱ به نشریات زیادی به زبان چینی اشاره شده است که برای سایر ملل ناشناخته بود. مقاله‌ی گلدول در ۱۹۹۶ به فعالیت‌ها و تحقیقات بین سال‌های ۱۹۸۵ تا ۱۹۹۵ پرداخته است. در مقاله‌ی چو^{۱۰} در ۱۹۹۸ یک طبقه‌بندی از سی و نه مسأله مقدار ویژه معکوس انجام شده است. این مسائل با توجه به ویژگی‌های خود به سه

^۵Inverse Eigenvalue Problem

^۶SIEP

^۷Gladwell

^۸Boley And Golub

^۹Zhou And DAi

^{۱۰}Chu

نوع تقسیم می‌شوند: پارامتری^{۱۱}، ساختاری^{۱۲} و توصیفی جزئی^{۱۳}. از آن زمان به بعد، بسیاری از مسائل قدیمی‌تر حل شد و مقالات جدید شروع به پیدایش کرد؛ به عنوان نمونه: در کتاب یو در سال ۱۹۹۸ بسیاری از نتایج روی حساسیت این مسأله، برای نخستین بار از زبان چینی به انگلیسی ترجمه شد. رساله‌ی ای‌کراموف و چوگونف^{۱۴} در ۲۰۰۰ که ترجمه شده از زبان روسی است، بر حل مسائل مقدار ویژه معکوس متناهی و الگوریتم‌های مربوطه تأکید کرده است.

۲.۱ انواع مسائل مقدار ویژه معکوس

با توجه به کاربرد مسائل مقدار ویژه‌ی معکوس، این مسأله ممکن است به اشکال متفاوتی بیان شود. به بیان دیگر، برای اینکه مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس، منجر به ساخت انواع متفاوتی از ماتریس‌ها شود لازم است که در هر مورد شکل‌های متفاوتی بگیرد. یک مسأله بدون هیچ‌گونه شرط روی ساخت ماتریس خلاقیت کمی خواهد داشت.

جواب یک مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس باید در دو شرط صدق کند، شرط اول محدودیت به مجموعه مقادیر ویژه‌ی از قبل تعیین شده، و شرط دوم محدودیت ساختار ماتریس، با توجه به ساختار مطلوب. تفاوت در این شروط، منجر به ایجاد انواع متفاوتی از مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس می‌شود. در عمل گاهی می‌توان یکی از این شروط را نادیده گرفت، مثلاً در حالتی که هیچ راه دقیقی و یا هیچ وسیله‌ی اندازه‌گیری برای به دست آوردن تمام مقادیر ویژه‌ی ماتریس وجود نداشته باشد، شرط اول را اعمال نمی‌کنند.

مسائل مقدار ویژه‌ی معکوس معمولاً شامل ویژگی‌هایی هستند که با هم تداخل دارند و این گاهی در تعیین اینکه کدام ویژگی با اهمیت‌تر است، مشکل‌ساز می‌شود. در این قسمت، برای درک بهتر مسائل و خلاصه نویسی از کلمات اختصاری استفاده کرده و انواع این مسأله را به صورت زیر طبقه‌بندی می‌کنیم: [۶]

• MVIEP: مسأله مقدار ویژه معکوس چند متغیره^{۱۵}

• LSIEP: مسأله مقدار ویژه معکوس کمترین مربعات^{۱۶}

• PIEP: مسأله مقدار ویژه معکوس پارامتری^{۱۷}

• SIEP: مسأله مقدار ویژه معکوس ساختاری^{۱۸}

^{۱۱} Parameterized IEP

^{۱۲} Structured IEP

^{۱۳} Partially Described IEP

^{۱۴} Ikramov and Chugunov

^{۱۵} Multi Variate Inverse Eigenvalue Problem

^{۱۶} Least Square Inverse Eigenvalue Problem

^{۱۷} Parameterized Inverse Eigenvalue Problem

^{۱۸} Structured Inverse Eigenvalue Problem

- AIEP: مسأله مقدارویژه معکوس افزوده^{۱۹}
- MIEP: مسأله مقدارویژه معکوس ضربی^{۲۰}
- MIEP: مسأله مقدارویژه معکوس ماتریسی^{۲۱}

۳.۱ کاربردها

مسائل مقدار ویژه معکوس در بسیاری از برنامه‌های کاربردی وجود دارد. کاربردهای این مسائل در مباحثی مثل، طراحی کنترل، سیستم شناسایی، پرتونگاری لرزه‌ای، آنالیز مؤلفه‌های اصلی، اکتشاف و سنجش از راه دور، پردازش گیرنده، ژئوفیزیک، طیف‌سنج مولکولی، فیزیک ذرات، آنالیز ساختار، نظریه‌ی مدار، شبیه‌سازی سیستم‌های مکانیکی و ... می‌باشد.

مسائل معکوس اشتورم-لیوویل باعث ایجاد بخش عمده‌ای از مطالعات درباره‌ی مسائل معکوس شده است. مسائل معکوس مربوط به ساخت یک مدل مناسب، با استفاده از اطلاعات دلخواه و از پیش تعیین شده است، بنابراین مسائل مقدار ویژه معکوس دارای ارزش عملی برای مکانیک کاربردی و طراحی ساختار می‌باشد. بحث راجع به مسائل با ابعاد بزرگتر، کاربرد در انواع دیگری از مسائل مهندسی، مثال‌هایی از کاربرد در ژئوفیزیک و فیزیک را می‌توان در [۶] دید. حتی در زمینه‌ی آنالیز عددی که در آن یک الگوریتم خاص طراحی می‌شود، ممکن است یک مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس به وجود آید.

یک پدیده‌ی مهم و مشترک در همه‌ی این کاربردها، بازسازی پارامترهای فیزیکی یک سیستم مشخص، از اطلاعات رفتار دینامیکی آن به ویژه فرکانس‌های طبیعی و یا حالت‌های طبیعی می‌باشد. قابل ذکر است که به منظور ایجاد یک مدل فیزیکی قابل درک، گاهی باید شروط اضافی بر ماتریس اعمال شود.

یک نکته‌ی مهم این است که باید بین تعیین دقیق و تخمین در ماهیت یک مسأله‌ی معکوس، تفاوت قائل شویم. گلدول در این باره می‌گوید، ”زمانی که اطلاعات داده‌شده دقیق و کامل باشد، به‌طوری که سیستم بتواند به طور دقیق مشخص شود، یک مسأله‌ی ریاضی مطرح است و زمانی که اطلاعات، تقریبی و اغلب ناقص باشد و در نتیجه رفتار سیستم به طور تقریبی با اطلاعات تعیین شده مطابقت کند، یک مسأله‌ی مهندسی ضرورت می‌یابد.“ بدیهی است که مسائل تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد حالت و خروجی، در سیستم‌های شناسایی و نظریه کنترل از اهمیت زیادی برخوردارند. یکی دیگر از کاربردهای مقدار ویژه معکوس در مبحث تخصیص مقادیر ویژه در نظریه کنترل است. تعداد قابل توجهی تحقیق و پژوهش فقط در این زمینه انجام شده است. یکی از بهترین

^{۱۹}Additive Inverse Eigenvalue Problem

^{۲۰}Multiplicative Inverse Eigenvalue Problem

^{۲۱}Matrix Inverse Eigenvalue Problem

مقالات در این زمینه، مقاله‌ی بایرنز^{۲۲} [۲] است و در آن مسائل تخصیص مقادیر ویژه یک حالت خاص از مسائل مقدار ویژه معکوس است.

معادله‌ی خطی دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (۱.۱)$$

که در آن $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ حالت یک سیستم فیزیکی معین را توسط ورودی $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ مشخص می‌کند. دو ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ مستقل از زمان هستند.

یک مسأله‌ی کلاسیک در نظریه کنترل، انتخاب ورودی $\mathbf{u}(t)$ است، که با استفاده از دو قانون کنترل حالت یا خروجی تعریف می‌شود. در حالت کلی، دو نوع کنترل وجود دارد که هر دوی آن‌ها به‌طور گسترده در تحقیقات بررسی شده‌اند. در کنترل پس‌خورده حالت، ورودی $\mathbf{u}(t)$ به عنوان یک تابع خطی حالت $\mathbf{x}(t)$ انتخاب شده است. یعنی

$$\mathbf{u}(t) = F\mathbf{x}(t) \quad (۲.۱)$$

به این ترتیب سیستم (۱.۱) به سیستم حلقه بسته‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (A + BF)\mathbf{x}(t) \quad (۳.۱)$$

هدف اصلی در کنترل، انتخاب ماتریس $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ برای رسیدن به ثبات و سرعت بخشیدن به پاسخ سیستم است. برای رسیدن به این هدف مسأله می‌تواند به انتخاب F برای تخصیص مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A + BF$ تبدیل شود. این مسائل را، مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه^{۲۳} می‌نامند. نکته قابل ذکر این است که برخلاف آنچه در قبل در مورد شرط ساختاری در مسائل مقدار ویژه معکوس گفته شد، ماتریس F در مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه هیچ فرم ساختاری خاصی ندارد. در صورتی که ماتریس F محدودیت ساختاری خاصی داشته باشد، مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه بسیار سخت خواهد شد.

در بعضی موارد، بردار حالت $\mathbf{x}(t)$ به‌طور مستقیم قابل مشاهده نیست، و فقط خروجی $\mathbf{y}(t)$ در دسترس است که با قانون زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) \quad (۴.۱)$$

که در آن $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ یک ماتریس معلوم است. ورودی $\mathbf{u}(t)$ باید به‌عنوان یک تابع خطی از خروجی $\mathbf{y}(t)$ انتخاب شود:

$$\mathbf{u}(t) = K\mathbf{y}(t) \quad (۵.۱)$$

^{۲۲}Byrnes

^{۲۳}Pole Assignment Problem

سیستم دینامیکی حلقه بسته به فرم زیر، تبدیل می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (A + BKC)\mathbf{x}(t) \quad (۶.۱)$$

حال هدف، انتخاب ماتریس پس‌خورد خروجی K ، با ابعاد $(m \times r)$ است، به‌طوری‌که مقادیر ویژه دلخواه و از قبل تعیین شده، به ماتریس $A + BKC$ تخصیص پیدا کند.

این مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی^{۲۴} یک نوع خاصی از مسائل مقدار ویژه‌ی معکوس (بدون محدودیت روی فرم ساختاری ماتریس K) است. تحقیقات و مقالات زیادی روی موضوع تخصیص مقادیر ویژه وجود دارد. مقاله‌ی بایرنز^{۲۵} در سال ۱۹۸۹ و کواسکی، نیکولز و وندورف^{۲۶} در سال ۱۹۸۵ منابعی عالی به عنوان نقطه‌ی شروع برای تحقیقات بیشتر در این زمینه می‌باشد.

نکته‌ی مهم دیگر این است که مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه مانند دیگر انواع مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس راه‌حل‌های گوناگونی دارد. به عنوان نمونه، یکی از این روش‌ها، کمترین حساسیت در آشفتگی داده‌ها می‌باشد. این روش که در مقالات و تحقیقات، روش ستر^{۲۷} نامیده می‌شود، با به حداقل رساندن عدد شرطی، همگرایی روش را بهبود می‌بخشد.

نمونه‌های مختلفی از ساختار K ، در مسأله‌ی پس‌خورد خروجی وجود دارد. یکی از آن‌ها سیستم دینامیکی غیر متمرکز است که در آن ماتریس پس‌خورد K ، قطری است. بعضی اطلاعات اولیه راجع به این مسأله را در مقاله‌ی راوی، روستال و ونگ^{۲۸}، که در آن الگوریتم‌های لازم برای این نوع از مسائل وجود دارد، می‌توان یافت.

در ادامه مباحث این بخش، خلاصه‌ای از سایر فصل‌های پایان‌نامه را ارائه می‌کنیم:
فصل دوم پایان‌نامه را به بیان تعاریف و پیش‌نیازهایی که در فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند اختصاص می‌دهیم.

در فصل سوم، ابتدا قضیه‌ی وجود در تخصیص مقادیر ویژه بیان می‌شود، سپس با استفاده از تعاریف و قضایای موجود در مسئله مقدار ویژه معکوس و مسئله تخصیص مقادیر ویژه، به بیان ارتباط بین این دو مسئله می‌پردازیم و سپس یک روش جدید برای تخصیص مقادیر ویژه سیستم‌های خطی با پس‌خورد خروجی ارائه می‌دهیم و به مقایسه با روش‌های دیگر می‌پردازیم.

در فصل چهارم، روشی جدید جهت کنترل بهینه سیستم‌های دیفرانسیل خطی با استفاده از مسئله‌ی مقدار ویژه معکوس ارائه شده است. در این روش ابتدا ماتریس پس‌خورد حالت، با استفاده از تبدیلات تشابه‌ی، طراحی شده

^{۲۴}Output Feedback Assignment Problem

^{۲۵}Byrnes

^{۲۶}Kautsky, Nichols and Van Dooren

^{۲۷}Least Sensitive to Perturbations of Problem Data

^{۲۸}Ravi, Rosenthal and Wang

و سپس با در نظر گرفتن مقادیر ویژه در ناحیه‌ی پایداری و قضایای ارائه شده در روش مقدار ویژه معکوس، ماتریس حلقه بسته با پس‌خورد خروجی، به‌گونه‌ای محاسبه می‌شود که مقادیر ویژه‌ی آن دلخواه و در ناحیه‌ی پایداری باشند. در فصل پنجم، روشی جدید جهت کنترل پایدار سیستم‌های توسیع‌یافته با استفاده از مقدار ویژه‌ی معکوس ارائه شده‌است. در این روش ابتدا سیستم توسیع‌یافته با تعریف قانون کنترل به‌صورت پس‌خورد خروجی مشتق و یا پس‌خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای، به یک سیستم استاندارد تبدیل می‌شود و سپس با در نظر گرفتن مقادیر ویژه در ناحیه‌ی پایداری و قضایای ارائه شده در روش حل مسأله مقدار ویژه معکوس، ماتریس پس‌خورد خروجی به‌گونه‌ای محاسبه می‌گردد که مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه بسته، مقادیر ویژه‌ی دلخواه و از قبل تعیین شده باشد. در فصل ششم، روشی جدید ارائه شده در این پایان‌نامه جهت کنترل پایدار سیستم‌های با تأخیر زمانی، ارائه شده‌است. در این روش ابتدا سیستم با تأخیر زمانی با تعریف بردار حالت افزوده، به یک سیستم استاندارد تبدیل می‌شود و سپس ماتریس پس‌خورد حالت خروجی K محاسبه می‌گردد. این روش روی انواع سیستم‌های گسسته با تأخیر زمانی بررسی شده است.

در فصل هفتم، این روش جدید، برای کنترل پایدار سیستم‌های دوبعدی مدل راسر، بیان شده است. در این روش، ابتدا سیستم دوبعدی توسط مدل راسر تبدیل به یک سیستم خطی استاندارد شده و با توجه به این که پایداری در سیستم‌های دوبعدی، هم‌اثر پایداری سیستم‌های یک‌بعدی است، ماتریس پس‌خورد خروجی K محاسبه شده است.

در فصل هشتم، این روش را روی سیستم‌های خطی مرتبه بالا، بررسی کرده ایم. به این ترتیب که ابتدا با استفاده از تکنیک ماتریس‌های افزوده، سیستم خطی مرتبه بالا، تبدیل به یک سیستم خطی استاندارد شده، سپس ماتریس پس‌خورد خروجی K را محاسبه می‌کنیم.

لازم به ذکر است که در پایان هر فصل، یک الگوریتم و چند مثال عددی برای نشان دادن نتایج به دست آمده، ارائه شده است. همچنین کد برنامه‌های این روش، با استفاده از نرم‌افزار MATLAB نوشته و در قسمت پیوست، آورده شده است.

فصل ۲

تعاریف و پیش‌نیازها

در این فصل، تعاریف و پیش‌نیازهای موردنیاز برای فصول بعد را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۰۲. معادله حالت [۱۸]

بسیاری از سیستم‌های فیزیکی را می‌توان با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت زیر توصیف نمود:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{cases} \quad (۱.۰۲)$$

برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۰۲)، اگر تعریف کنیم:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

آنگاه آن را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (۲.۰۲)$$

که در آن t متغیر زمان، $\mathbf{x}(t)$ یک بردار ستونی n بعدی موسوم به بردار حالت و $\mathbf{u}(t)$ یک بردار ستونی m بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغیر کنترل می‌باشد. معادله دیفرانسیل فوق را معادله حالت سیستم می‌نامند.

تعریف ۲.۰۲. بردار خروجی [۱۸]

فرض کنیم که $\mathbf{y}(t)$ یک بردار r بعدی باشد که با زمان تغییر می‌کند و به صورت زیر به $\mathbf{x}(t)$ و $\mathbf{u}(t)$ و t وابسته است:

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ y_r(t) = g_r(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{bmatrix} = g(x(t), u(t), t) \quad (3.2)$$

به $y(t)$ بردار خروجی می‌گویند.

تعریف ۳.۲. معادلات سیستم [۱۸]

معادلات (۴.۲) را معادلات سیستم گویند و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (4.2)$$

تعریف ۴.۲. سیستم خطی [۱۸]

اگر در معادلات (۴.۲) توابع f و g خطی باشند، سیستم را خطی گوئیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + \dots + b_{11}(t)u_1(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t) \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + \dots + b_{n1}(t)u_1(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t) \\ y_1(t) = c_{11}(t)x_1(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) + \dots + d_{11}(t)u_1(t) + \dots + d_{1m}(t)u_m(t) \\ y_r(t) = c_{r1}(t)x_1(t) + \dots + c_{rn}(t)x_n(t) + \dots + d_{r1}(t)u_1(t) + \dots + d_{rm}(t)u_m(t) \end{cases}$$

که در آن a_{ij} ، b_{ij} توابع حقیقی از f هستند.
حال اگر تعریف کنیم:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}(t) & \dots & c_{nm}(t) \end{bmatrix} \quad D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \dots & d_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1}(t) & \dots & d_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

اگر A ، B ، C و D مستقل از زمان باشند یا به عبارتی ثابت باشند، در این صورت معادلات خطی مستقل از زمان، عبارتند از:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (5.2)$$

تعریف ۵.۲. سیستم خطی گسسته زمانی [۱۸]

در این پایان‌نامه، برای یک سیستم گسسته‌ی خطی، معادلات حالت و خروجی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k) \quad (۶.۲)$$

$$\mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \quad (۷.۲)$$

تعریف ۶.۲. سیستم خطی پیوسته زمانی [۱۸]

در این پایان‌نامه، برای یک سیستم پیوسته‌ی خطی، معادلات حالت و خروجی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (۸.۲)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) \quad (۹.۲)$$

تعریف ۷.۲. رتبه ماتریس [۱۲]

تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل خطی ماتریس A را رتبه‌ی A گوئیم و آن را به صورت $\text{rank}(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۲. ماتریس رتبه کامل [۱۲]

وقتی که همه‌ی سطرها یا ستون‌های ماتریس A مستقل خطی باشند، ماتریس را رتبه کامل می‌گویند.

تعریف ۹.۲. طیف ماتریس [۲۶]

به مجموعه‌ی مقادیر ویژه ماتریس A ، طیف ماتریس A می‌گویند و آن را با نماد $\sigma(A)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۰.۲. کاملاً مشاهده‌پذیر [۲۱]

ماتریس $A_{n \times n}$ و ماتریس رتبه کامل $C_{r \times n}$ ، $r \leq n$ را در نظر بگیرید؛ به جفت (A, C) کاملاً مشاهده‌پذیر گویند اگر ماتریس مشاهده‌پذیری

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (۱۰.۲)$$

رتبه کامل باشد که این معادل است با اینکه ماتریس

$$\begin{bmatrix} A - SI_n \\ C \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

برای هر $S \in \sigma(A)$ رتبه کامل باشد. به ماتریس (۱۱.۲) نیز ماتریس مشاهده پذیری می‌گوییم.

تعریف ۱۱.۲. ماتریس کنترل پذیری [۷]

برای سیستم توصیف شده با معادله (۵.۲) ماتریس کنترل پذیری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$Q = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

تعریف ۱۲.۲. سیستم کنترل پذیر [۷]

سیستم تولید شده با معادلات (۴.۲) را کنترل پذیر گویند، اگر بتوان حالت سیستم را از بردار دلخواه $x(0)$ (حالت اولیه در لحظه t_0) در زمان متناهی، به بردار دلخواه دیگری مانند $x(V)$ (حالت تعادل در لحظه t_V) رساند. معمولاً $x(V)$ را بردار صفر در نظر می‌گیریم.

به عبارت دیگر، سیستم معادلات (۴.۲) را کنترل پذیر گویند اگر و فقط اگر ستون‌های ماتریس کنترل پذیری سیستم فضای $\mathbb{R}^n$ را تولید کند. $(\text{Rank}(Q) = n)$

تعریف ۱۳.۲. تخصیص مقدار ویژه‌ی سیستم‌های خطی گسسته با پس‌خورد حالت [۱۸]

در سیستم گسسته‌ی خطی (۶.۲) متغیر ورودی را متناسب با متغیر حالت سیستم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{u}(k) = Fx(k) \quad (12.2)$$

که در آن $F_{m \times n}$ ماتریس حقیقی با درایه‌های ثابت است و ماتریس پس‌خورد حالت^۱ نامیده می‌شود. با جایگذاری معادله (۱۲.۲) در معادله حالت (۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\mathbf{u}(k) = Ax(k) + BFx(k) \\ &= (A + BF)x(k) \end{aligned}$$

به این ترتیب سیستم حلقه بسته با پس‌خورد حالت برابر است با:

$$x(k+1) = (A + BF)x(k) \quad (13.2)$$

^۱State feedback

مسئله‌ی تخصیص مقدار ویژه سیستم‌های خطی گسسته با پس‌خورد حالت، یافتن ماتریس پس‌خورد F است، به‌گونه‌ای است که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته مجموعه‌ای از پیش‌تعیین شده در ناحیه پایداری باشد.

تعریف ۱۴.۲. تخصیص مقدار ویژه‌ی سیستم‌های خطی گسسته زمانی با پس‌خورد خروجی [۱۸] در سیستم گسسته‌ی خطی (۶.۲) با معادله خروجی (۸.۲)، متغیر ورودی را متناسب با متغیر خروجی سیستم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u(k) = Cy(k) \quad (14.2)$$

که در آن $C_{r \times n}$ ماتریس حقیقی با درایه‌های ثابت است و ماتریس پس‌خورد خروجی^۲ نامیده می‌شود. با جایگذاری قانون کنترل خروجی در معادله (۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ &= Ax(k) + BKCx(k) \\ &= (A + BKC)x(k) \end{aligned}$$

به این ترتیب سیستم حلقه بسته با پس‌خورد خروجی برابر است با:

$$x(k+1) = (A + BKC)x(k) \quad (15.2)$$

مسئله‌ی تخصیص مقدار ویژه‌ی سیستم‌های خطی گسسته با پس‌خورد خروجی، یافتن ماتریس K است، به‌طوری‌که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته (۱۵.۲) مجموعه‌ای از قبل تعیین شده در ناحیه پایداری باشند. در شکل (۱۰.۲) سیستم با پس‌خورد خروجی نمایش داده شده است.

تعریف ۱۵.۲. فرم همدم برداری [۷]

فرم کلی همدم برداری ماتریس‌های A و B که به ترتیب با $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ نمایش داده می‌شوند به صورت زیر می‌باشد.

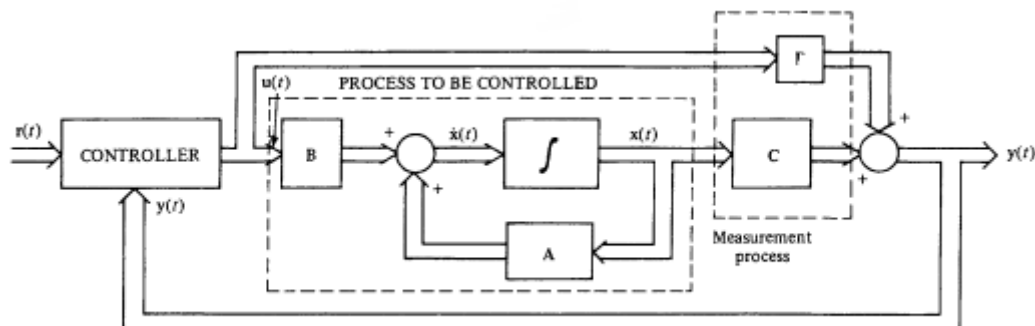
$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{\circ m \times m} \\ \circ \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} G_{\circ m \times n} \\ I_{(n-m) \times (n-m)} \quad O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}$$

که در آن $B_{\circ}$ یک ماتریس $m \times m$ بالامثلثی و معکوس‌پذیر است و $G_{\circ}$ یک ماتریس $m \times n$ است.

تعریف ۱۶.۲. ماتریس متقارن [۱۲]

یک ماتریس A متقارن نامیده می‌شود اگر $A^T = A$.

^۲Output feedback



شکل ۱۰.۲: سیستم خطی با پس خورد خروجی

تعریف ۱۷.۲. ماتریس وارون پذیر [۱۲]

یک ماتریس مربعی $n \times n$ را وارون پذیر (نامنفرد) گوئیم، اگر ماتریس B با ابعاد $(n \times n)$ موجود باشد به طوریکه

$$AB = BA = I_n$$

تعریف ۱۸.۲. ماتریس متعامد [۱۲]

ماتریس Q متعامد است اگر و تنها اگر ترانزاده‌ی آن با وارونش برابر باشد.

$$Q^T = Q^{-1}$$

$$QQ^T = Q^T Q = I$$

که در آن I_n ماتریس همانی است.

تعریف ۱۹.۲. ماتریس قطری بلوکی [۱۲]

یک ماتریس قطری بلوکی، یک ماتریس قطری مربعی است که عناصر قطری آن ماتریس‌هایی مربعی با اندازه‌های متفاوت هستند و سایر عناصر آن صفر می‌باشند.

تعریف ۲۰.۲. ماتریس شدنی [۱۲]

ماتریس مربعی A را قطری شدنی گویند هرگاه متشابه یک ماتریس قطری باشد. به بیان دیگر، اگر یک ماتریس معکوس پذیر P موجود باشد به طوریکه ماتریس $P^{-1}AP$ ، یک ماتریس قطری باشد.

تعریف ۲۱.۲. فضای پوچی ماتریس A [۱۲]

فرض کنید A ماتریس $m \times n$ روی میدان $\mathcal{F}$ باشد، در این صورت، فضای جواب دستگاه $AX = 0$ در $\mathcal{F}$ را فضای پوچی A می‌نامیم و بعد فضای پوچی A را با $\text{null}(A)$ نمایش می‌دهیم. همچنین رابطه‌ی زیر را داریم:

$$\text{rank}(A) + \text{null}(A) = n \quad (۱۶.۲)$$

تعریف ۲۲.۲. شرط لازم

در یک عبارت شرطی، نتیجه‌ی N یک شرط لازم برای مقدم S است. در واقع ” N اگر S “، ” N از S نتیجه می‌شود“ یا ” $S \Rightarrow N$ “ همچنین می‌توان گفت ” N ضعیف‌تر از S است“ یا ” S بدون N نمیتواند اتفاق بیفتد“.

تعریف ۲۳.۲. شرط کافی

در یک عبارت شرطی، یک مقدم S یک شرط کافی برای نتیجه‌ی N است. در واقع ”اگر S آنگاه N “، ” S نتیجه می‌دهد N را“، ” $S \Rightarrow N$ “، ” S قوی‌تر از N است“، ” S ، N را تضمین می‌کند“.

S	N	$S \Rightarrow N$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

تعریف ۲۴.۲. تجزیه QR [۲۶]

تجزیه QR یک ماتریس، تجزیه ماتریس A به حاصلضرب دو ماتریس $A = QR$ است که در آن Q یک ماتریس متعامد و R یک ماتریس بالا مثلثی است. اگر A معکوس‌پذیر باشد آنگاه این تجزیه منحصر به فرد است.

تعریف ۲۵.۲. شبه معکوس مور-پنروز^۳ [۲۶]

برای ماتریس $A_{m \times n}$ ، شبه معکوس مور-پنروز، ماتریس منحصر به فرد $A_{n \times m}^\dagger$ ، است به طوری که در همه‌ی شرایط زیر صدق می‌کند:

$$AA^\dagger A = A$$

$$A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$$

$$(AA^\dagger)^H = AA^\dagger$$

$$(A^\dagger A)^H = A^\dagger A$$

^۳Moore–Penrose Pseudoinverse

تعریف ۲۶.۲. دستگاه معادلات خطی [۲۶]

صورت کلی یک دستگاه معادلات خطی با m معادله و n مجهول به صورت $AX = b$ در نظر گرفته می‌شود. که در آن A یک ماتریس $m \times n$ ، b یک بردار $m \times 1$ و x یک بردار $n \times 1$ است. در فرآیند حل این دستگاه معادلات امکان رخ دادن حالت‌های زیر وجود دارد.

الف- حالتی که دستگاه بدون جواب یا ناسازگار است.

ب- حالتی که دستگاه سازگار است و جواب دارد که در این صورت امکان دارد فقط یک جواب منحصر بفرد داشته باشد یا اینکه بیشمار جواب داشته باشد.

با توجه به مقادیر m و n ، حالت‌های زیر را می‌توان در نظر گرفت.

۱- حالت $m = n$: در این حالت دستگاه را همواره معین گویند.

اگر $|A| \neq 0$ باشد، دستگاه معادلات سازگار است و یک جواب منحصر بفرد دارد.

اگر $|A| = 0$ و دستگاه سازگار باشد، بیشمار جواب دارد.

اگر $|A| = 0$ و دستگاه ناسازگار باشد، اصلاً جواب ندارد.

۲- حالت $m < n$: در این حالت دستگاه را فرومعیین گویند و بیشمار جواب دارد.

۳- حالت $m > n$: در این حالت دستگاه را فرامعیین گویند و در صورت سازگار بودن یک جواب منحصر

بفرد و در صورت ناسازگار بودن جواب ندارد.

فصل ۳

مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس و تخصیص در نظریه‌ی کنترل

در این فصل، ابتدا قضیه‌ی وجود در مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه بیان می‌شود، سپس با استفاده از این قضیه ارتباط بین مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه و مسأله مقدار ویژه معکوس را بررسی می‌کنیم. به این منظور با آوردن یک قضیه و اثبات آن، یک مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس را به مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه تبدیل می‌کنیم و در ادامه برعکس این مطلب، یعنی تبدیل مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه به مسأله مقدار ویژه معکوس را توضیح می‌دهیم. سپس روشی جدید برای تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از روش مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس ماتریسی را ارائه می‌دهیم. پس از آن، با بیان روش‌های دیگر حل مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه، به مقایسه آن‌ها با روش ارائه شده در این پایان‌نامه می‌پردازیم.

۱.۳ ارتباط بین مسأله مقدار ویژه معکوس و مسأله تخصیص مقادیر ویژه

قضیه ۱.۳. قضیه وجود [۲۱]

برای هر مجموعه‌ی $\mathcal{L}$ داده شده، اگر یک جفت از ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ کاملاً کنترل‌پذیر باشند، آنگاه یک ماتریس حقیقی $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\sigma(A + BK) = \mathcal{L}.$$

همچنین اگر جفت $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ کاملاً مشاهده‌پذیر باشند، آنگاه یک ماتریس حقیقی $K \in \mathbb{R}^{n \times r}$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\sigma(A + KC) = \mathcal{L}.$$

تعریف ۱.۳. مسأله مقدار ویژه معکوس ماتریسی [۲۱]

دو مجموعه مستقل خطی از بردارهای n -بعدی حقیقی $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ و $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ که در آن $p \leq n$ است و مجموعه داده شده $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ را در نظر بگیرید؛ مسأله مقدار ویژه معکوس ماتریسی، یافتن ماتریس A است به طوریکه:

$$Ax_i = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (1.3)$$

و طیف مقادیر ویژه ماتریس A برابر با مجموعه داده شده $\mathcal{L}$ باشد:

$$\sigma(A) = \mathcal{L}$$

و در آن فرض می‌کنیم که مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ مستقل خطی و $\mathcal{L}$ تحت اعداد مختلط بسته است

$$\lambda \in \mathcal{L} \iff \bar{\lambda} \in \mathcal{L}.$$

با استفاده از قضیه زیر [۲۱]، یک مسأله مقدار ویژه معکوس را به یک مسأله تخصیص مقادیر ویژه تبدیل می‌کنیم:

قضیه ۲.۳. فرض کنید $X = [x_1, \dots, x_n]$ ، $Y = [y_1, \dots, y_n]$ و X ماتریس رتبه کامل باشد، آنگاه مسأله معکوس مقادیر ویژه ماتریس قابل حل است، اگر ماتریس $Y - SX$ برای $S \in \sigma(YX^t)$ رتبه کامل باشد. [۲۱]

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم مسأله معکوس مقدار ویژه قابل حل است، یعنی ای موجود است که:

$$AX = Y \quad (2.3)$$

سپس فرض می‌کنیم تساوی زیر را داریم:

$$A = YX^t + W \quad (3.3)$$

که در آن W ماتریس دلخواه $(n \times n)$ و $WX = 0$ است.

برای ساختن W ابتدا با تجزیه QR داریم:

$$X = [Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

قرار می‌دهیم $W = ZQ_2^t$ ، در نتیجه داریم:

$$A = YX^t + ZQ_2^t \quad (5.3)$$

حال اگر ثابت کنیم جفت ماتریس‌های YX^t و Q_2^t کاملاً مشاهده پذیر هستند، بنابه قضیه (۱۰.۳)، ماتریس $K = Z$ موجود است، به طوری‌که:

$$\sigma(YX^t + ZQ_2^t) = \sigma(A) = \mathcal{L} \quad (6.3)$$

و در نتیجه ماتریس A پیدا شده و مسأله مقدار ویژه معکوس حل می‌شود. ماتریس مشاهده‌پذیر (۷.۳) را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} YX^t - SI_n \\ Q_2^t \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} Y - SX & * \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} YX^t - SI_n \\ Q_2^t \end{bmatrix} [X \quad Q_2] \quad (8.3)$$

حال با توجه به اینکه $[X \quad Q_2]$ رتبه کامل است، می‌دانیم رتبه کامل بودن ماتریس (۷.۳) بستگی به رتبه کامل بودن $Y - SX$ دارد، پس اگر $Y - SX$ رتبه کامل باشد، آنگاه جفت ماتریس‌های YX^t و Q_2^t کاملاً مشاهده‌پذیر است و در نتیجه مقدار ویژه‌ی معکوس قابل حل است. $\square$

در قضیه قبل، ابتدا مسأله مقدار ویژه معکوس به یک مسأله تخصیص مقدار ویژه تبدیل شده و سپس یک شرط برای حل‌پذیر بودن مسأله مقدار ویژه معکوس بیان کردیم. قابل توجه است که یک مسأله تخصیص مقدار ویژه نیز می‌تواند به یک مسأله مقدار ویژه معکوس تبدیل شود. فرض کنید جفت ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ کاملاً کنترل پذیر و B رتبه کامل باشد. با تجزیه QR ماتریس B داریم:

$$B = [U_0 \quad U_1] \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

که در آن $[U_0, U_1]$ ماتریس‌هایی متعامد و R ماتریس بالا مثلثی نامنفرد است. معادله زیر را داریم:

$$\begin{bmatrix} * & A^t U_1 - S U_1 \\ I_m & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^t - S I_n \\ B^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & U_1 \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

چون $[B \ U_1]$ رتبه کامل و ماتریس مشاهده‌پذیر A و B نیز رتبه کامل است، در نتیجه $A^t U_1 - S U_1$ نیز رتبه کامل است. بنابه قضیه (۲.۳) مسأله مقدار ویژه معکوس برای ماتریس $A^t U_1$ و ماتریس رتبه کامل U_1 و مقادیر ویژه $S \in \sigma(A^t U_1 U_1^t) = \sigma(A^t)$ قابل حل است. یعنی ماتریس $\tilde{A}$ موجود است به طوری که:

$$\begin{cases} \tilde{A} U_1 = A^t U_1 \\ \sigma(\tilde{A}) = \mathcal{L} \end{cases} \quad (11.3)$$

حال با قراردادن $\tilde{A} = A + B K$ که در آن ماتریس A و B کاملاً کنترل پذیر اند، ماتریس پس‌خورد حالت برای سیستم حلقه بسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K = B^\dagger (\tilde{A} - A) \quad (12.3)$$

که در آن $B^\dagger$ معکوس مور-پنروز ماتریس B است. محاسبات مستقیم زیر نشان می‌دهد که K همان ماتریس مورد نیاز است.

$$\begin{aligned} A + B K &= A + B B^\dagger (\tilde{A} - A) \\ &= A + U_1 U_1^t (\tilde{A} - A) \\ &= A + \tilde{A} - A \\ &= \tilde{A} \end{aligned} \quad (13.3)$$

که در آن $B = U_1 R$ ، $B^\dagger = R^{-1} U_1^t$ و رابطه $U_1 U_1^t = I$ برقرار می‌باشد. در بخش بعدی، ابتدا مسأله تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی و مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس برای چهار مجموعه مستقل خطی را تعریف می‌کنیم، سپس به بیان روش جدید ارایه شده در این بخش می‌پردازیم.

۲.۳ روش جدید

تعریف ۲.۳. مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی [۲۲]
سیستم کنترل‌پذیر خطی مستقل از زمان با پس‌خورد خروجی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{x}(i+1) = A\mathbf{x}(i) + B\mathbf{u}(i) \quad (14.3)$$

$$\mathbf{y}(i) = C\mathbf{x}(i) \quad (15.3)$$

به‌طوریکه $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت و $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی و $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ بردار خروجی هستند. با فرض $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $1 \leq m \leq n$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ به‌ترتیب ماتریس حالت، ورودی و خروجی هستند. مسئله‌ی تخصیص مقادیر ویژه، یافتن ماتریس پس‌خورد خروجی K است، به‌طوریکه سیستم حلقه بسته

$$\mathbf{x}(i+1) = (A + BKC)\mathbf{x}(i) \quad (۱۶.۳)$$

دارای قطب‌های از پیش تعیین شده (یا ماتریس حلقه بسته $A + BKC$ ، دارای مقادیر ویژه‌ی از پیش تعیین شده) در مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد.

تعریف ۳.۳. مسأله مقدار ویژه معکوس ماتریسی برای چهار مجموعه از بردارها [۲۲] چهار مجموعه‌ی مستقل خطی از بردارهای n -بعدی حقیقی

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p\}, \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_p\} \\ \{\mathbf{x}_{p+1}, \mathbf{x}_{p+2}, \dots, \mathbf{x}_{p+q}\}, \{\mathbf{y}_{p+1}, \mathbf{y}_{p+2}, \dots, \mathbf{y}_{p+q}\}$$

که در آن $p + q \leq n$ است و مجموعه‌ی داده شده‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ را در نظر بگیرید، مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس ماتریسی یافتن ماتریس A است به‌طوریکه:

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (۱۷.۳)$$

$$A^t \mathbf{x}_j = \mathbf{y}_j, \quad j = p+1, \dots, p+q. \quad (۱۸.۳)$$

و طیف مقادیر ویژه‌ی ماتریس A برابر با مجموعه‌ی داده شده‌ی $\mathcal{L}$ باشد:

$$\sigma(A) = \mathcal{L}. \quad (۱۹.۳)$$

و در آن فرض می‌کنیم که $\mathcal{L}$ تحت اعداد مختلط بسته است:

$$\lambda \in \mathcal{L} \iff \bar{\lambda} \in \mathcal{L}.$$

اگر قرار دهیم

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_r &= [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p], \\ \mathbf{X}_l &= [\mathbf{x}_{p+1}, \mathbf{x}_{p+2}, \dots, \mathbf{x}_{p+q}], \\ \mathbf{Y}_r &= [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_p], \\ \mathbf{Y}_l &= [\mathbf{y}_{p+1}, \mathbf{y}_{p+2}, \dots, \mathbf{y}_{p+q}].\end{aligned}$$

با توجه به (۱۷.۳) و (۱۸.۳)، اگر ماتریس A موجود باشد، آنگاه شرط سازگاری زیر باید برقرار باشد:

$$\mathbf{X}_l^t \mathbf{Y}_r = \mathbf{Y}_l^t \mathbf{X}_r. \quad (20.3)$$

قضیه زیر یک شرط لازم و کافی برای وجود ماتریس A می‌دهد: [۲۲]

قضیه ۳.۳. اگر شرط (۲۰.۳) برقرار باشد، آنگاه شرط لازم و کافی برای وجود ماتریس A این است که بردارهای $\mathbf{u}_i \in \mathcal{S}_u^i$ و $\mathbf{v}_i \in \mathcal{S}_v^i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ موجود باشند، به‌طوری‌که

$$\mathbf{u}_i^t \mathbf{v}_j = \sigma_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (21.3)$$

که در آن $\mathcal{S}_u^i$ و $\mathcal{S}_v^i$ به ترتیب فضای پوچ $(\lambda_i \mathbf{X}_l^t - \mathbf{Y}_l^t)$ و $(\lambda_i \mathbf{X}_r^t - \mathbf{Y}_r^t)$ است. اگر $\mathbf{u}_i$ موجود باشد آنگاه ماتریس A می‌تواند از معادله زیر به‌دست آید:

$$A = T \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} T^{-1} \quad (22.3)$$

$$T = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] \quad (23.3)$$

$$T^{-1} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] \quad (24.3)$$

اگر بردارهای پایه $\mathcal{S}_u^i$ و $\mathcal{S}_v^i$ را به ترتیب ماتریس $\mathbf{S}_u^i$ و $\mathbf{S}_v^i$ بنامیم، آنگاه بردار $\mathbf{u}_i$ از معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{S}_u^i \mathbf{x}_i \quad (25.3)$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{S}_v^i \mathbf{y}_i \quad (26.3)$$

از معادله (۲۱.۳) داریم

$$\mathbf{x}_i^t (\mathbf{S}_u^i)^t \mathbf{S}_v^j \mathbf{y}_j = \sigma_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (27.3)$$

به این ترتیب، مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس تبدیل به یک سیستم با n^2 معادله‌ی غیرخطی می‌شود. با استفاده از الگوریتم تکرار که در ادامه توضیح می‌دهیم، این سیستم به n^2 معادله‌ی خطی تبدیل و حل می‌شود. از آنجایی که بعد ماتریس $\mathbf{S}_u^i$ برابر با $(n - q)$ است و بعد ماتریس $\mathbf{S}_v^i$ برابر با $(n - p)$ می‌باشد، تعداد اسکالره‌ای مجهول در (۲۷.۳) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$n(n - q) + n(n - p) = 2n^2 - n(q + p) \quad (28.3)$$

با توجه به شرط $p + q \leq n$ ، تعداد اسکالره‌ای مجهول محاسبه شده در (۲۸.۳) از n^2 بزرگتر می‌باشند و معادله‌ی (۲۷.۳) دارای جواب خواهد بود. [۹]

حال به روش زیر، مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی را به یک مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس تبدیل می‌کنیم. اگر ماتریس $\mathbf{U}_1$ و $\mathbf{V}_1$ که به ترتیب ماتریس‌های به‌دست آمده از بردارهای پایه‌ی فضای پوچ B^t و C باشد، آنگاه با فرض $\tilde{A} = A + BKC$ که در آن ماتریس حلقه بسته است، داریم:

$$\tilde{A}\mathbf{V}_1 = (A + BKC)\mathbf{V}_1 = A\mathbf{V}_1 \quad (29.3)$$

$$\mathbf{U}_1^t \tilde{A} = \mathbf{U}_1^t (A + BKC) = \mathbf{U}_1^t A \quad (30.3)$$

با قرار دادن $\mathbf{Y}_l = A\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{Y}_l = A^t \mathbf{U}_1$ ، $\mathbf{X}_r = \mathbf{V}_1$ ، $\mathbf{X}_l = \mathbf{U}_1$ با داشتن مجموعه‌ی $\mathcal{L}$ مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی، به مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس ماتریسی تبدیل می‌شود که هدف آن، یافتن ماتریس $\tilde{A}$ است، به‌طوری‌که مقادیر ویژه‌ی ماتریس $\tilde{A}$ ، مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد. واضح است که مسأله در شرط سازگاری صدق می‌کند:

$$\mathbf{X}_l^t \mathbf{Y}_r = \mathbf{X}_l^t A \mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1^t A \mathbf{V}_1 = \mathbf{Y}_l^t \mathbf{X}_r \quad (31.3)$$

ماتریس‌های $\mathbf{U}_1$ و $\mathbf{V}_1$ در تجزیه‌ی QR ماتریس‌های B و C قابل مشاهده هستند:

$$B = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^t \\ V_2^t \end{bmatrix} \quad (32.3)$$

که در آن $[U_0 \ U_1]$ و $[V_0 \ V_1]$ ماتریس‌هایی متعامد هستند. اگر $\tilde{A}$ وجود داشته باشد، ماتریس K به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K = B^\dagger(\tilde{A} - A)C^\dagger \quad (33.3)$$

که در آن $B^\dagger$ و $C^\dagger$ به ترتیب معکوس مور-پنروز B و C هستند. از معادله‌های $B^\dagger = R^{-1}U_0^t$ و $C^\dagger = V_0 S^{-1}$ ثابت می‌شود که K همان ماتریس مورد نظر است:

$$\begin{aligned} A + BKC &= A + BB^\dagger(\tilde{A} - A)C^\dagger C \\ &= A + U_0 U_0^t(\tilde{A} - A)V_0 V_0^t \\ &= A + \tilde{A} - A \\ &= \tilde{A} \end{aligned}$$

۱۰.۲.۳ الگوریتم تکرار

همانطور که قبلاً بحث شد، جواب‌های مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس ماتریسی یا تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی، به جواب‌های دستگاه معادلات خطی زیر بستگی دارد:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^t (\mathbf{S}_u^i)^t \mathbf{S}_v^j \mathbf{y}_j &= \sigma_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n, \\ \mathbf{x}_i^t \mathbf{S}_{i,j} \mathbf{y}_j &= \sigma_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

که در آن $(\mathbf{S}_u^i)^t \mathbf{S}_v^j = \mathbf{S}_{i,j}$ است. برای حل دستگاه بالا از روش زیر استفاده می‌کنیم. در ابتدا به صورت تصادفی برای y_i ها مقادیر اولیه تعیین می‌کنیم، آنگاه دستگاه فوق به n معادله‌ی خطی با یک مجهول، تبدیل می‌شود:

$$\mathbf{x}_i^t [\mathbf{S}_{i,1} \mathbf{y}_1, \mathbf{S}_{i,2} \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{S}_{i,n} \mathbf{y}_n] = e_i^t \quad (34.3)$$

$$\mathbf{x}_i^t A_i = e_i^t \quad (35.3)$$

که در آن e_i ، i مین ستون از ماتریس همانی I_n است. اگرچه این معادلات ممکن است جواب نداشته باشد، ما همیشه می‌توانیم بهترین جواب تقریبی را، با استفاده از معکوس مور-پنروز به دست بیاوریم: [۱۱]

$$\mathbf{x}_i^t = e_i^t A_i^\dagger \quad (36.3)$$

اگر این $\mathbf{x}_i$ ها و $\mathbf{y}_i$ های به دست آمده در یک تکرار، یک جواب برای معادله‌ی (۲۷.۳) باشند، فرآیند را متوقف می‌کنیم. در غیر این صورت، $\mathbf{x}_i$ های به دست آمده به وسیله‌ی مقادیر تقریبی را در (۳۷.۳) جایگزین کرده و n سیستم از معادلات خطی زیر با $\mathbf{y}_i$ های مجهول را حل می‌کنیم:

$$[\mathbf{x}_1^t \mathbf{S}_{1,j}, \mathbf{x}_2^t \mathbf{S}_{2,j}, \dots, \mathbf{x}_n^t \mathbf{S}_{n,j}] \mathbf{y}_j = e_j \quad (37.3)$$

$$B_i \mathbf{y}_i = e_i \quad (38.3)$$

به طور مشابه، بهترین تقریب برای $\mathbf{y}_i$ ها را، به وسیله‌ی معکوس مورپنروز به دست آوریم:

$$\mathbf{y}_j = B_j^\dagger e_j \quad (39.3)$$

این فرآیند، تا جایی که مقدار خطا کمتر از خطای مورد نظر شود، تکرار می‌شود. مقدار خطا از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$\mathcal{E} = \left[\sum_i \sum_j (\mathbf{x}_i^t \mathbf{S}_{i,j} \mathbf{y}_j - \sigma_{ij})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (40.3)$$

در تبدیل یک مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی، به یک مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس، فضای پوچ B^t و C نقش مهمی دارند. یکی به این دلیل که مقدار ماتریس K مهم نیست، زیرا در معادله‌ی (۲۹.۳) و (۳۰.۳) حذف می‌شود:

$$\tilde{A}V_1 = AV_1 \quad (41.3)$$

$$\tilde{A}^t U_1 = A^t U_1 \quad (42.3)$$

دلیل دیگر این است، که اگر یک بردار ویژه‌ی A در یکی از این فضاها باشد، آنگاه مقدار ویژه‌ی مربوط به آن بردار ویژه در کنترل پس‌خورد نمی‌تواند تغییر کند. یعنی اگر $AV = \mu V$ و $V \in \text{null}(C)$ و یا $V \in \text{null}(B)$ باشد، آنگاه

$$\tilde{A}V = AV + BKCV = AV = \mu V \quad (43.3)$$

بنابراین پایدار شدن سیستم تضمین نخواهد شد. بهر حال اگر سیستم کنترل‌پذیر یا مشاهده‌پذیر باشد این اتفاق نمی‌افتد. نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت: [۲۲]

قضیه ۴.۳. سیستم (۱۴.۳) و (۱۵.۳) کنترل‌پذیر است، اگر و فقط اگر، هیچ بردار ویژه‌ی چپ ناصفر A موجود نباشد، به‌طوری‌که در فضای پوچ B^t قرار داشته باشد. به طور مشابه، سیستم (۱۴.۳) و (۱۵.۳) مشاهده‌پذیر است اگر و فقط اگر هیچ بردار ویژه‌ی راست ناصفر A موجود نباشد به‌طوری‌که در فضای پوچ C قرار داشته باشد.

برهان. اگر یک بردار ویژه‌ی ناصفر U موجود باشد، به‌طوری‌که $U^t A = \lambda U^t$ و $U^t B = 0$ آن‌گاه:

$$U^t [B, AB, \dots, A^{n-1} B] = [U^t B, \lambda U^t B, \dots, \lambda^{n-1} U^t B] = 0 \quad (۴۴.۳)$$

از آنجایی که ماتریس کنترل‌پذیر رتبه کامل است پس $U^t = 0$ ، که این متناقض با فرض است. برعکس، اگر سیستم کنترل‌پذیر نباشد، می‌توان یک بردار غیر صفر بیابیم، به‌طوری‌که:

$$U^t [B, AB, \dots, A^{n-1} B] = [U^t B, U^t AB, \dots, U^t A^{n-1} B] = 0$$

تمام U ها، یک زیرفضای خطی که تحت A^t ثابت هستند را می‌سازند. در حقیقت

$$(A^t U)^t [B, AB, \dots, A^{n-1} B] = [U^t AB, U^t A^2 B, \dots, U^t A^n B] = 0 \quad (۴۵.۳)$$

با توجه به قضیه‌ی کیلی-همیلتون:

$$A^n = a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I$$

می‌توان نتیجه گرفت که، $U^t A^n B = 0$. A^t یک تبدیل خطی در این زیر فضا بدست می‌دهد بنابراین باید یک بردار ویژه‌ی چپ A در این زیر فضا باشد که $U^t B = 0$.

□

قسمت دوم به طور متشابه اثبات می‌شود.

۲.۲.۳ الگوریتم روش جدید

هدف: حل مسئله‌ی تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی (تعیین ماتریس پس‌خورد K)

گام ۱: (ورودی داده‌ها)

ماتریس A ، B ، C و مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ را وارد کنید.

گام ۲: (آماده سازی)

ماتریس‌های X_l و X_r که به ترتیب پایه‌ی فضای پوچ B^t و C هستند را بیابید. سپس $Y_l = A^t X_l$ و $Y_r = A X_r$ را محاسبه کرده و فضای پوچ $(\lambda_i X_r - Y_r)$ و $(\lambda_i X_l - Y_l)$ را بیابید.

گام ۳: (فرآیند تکرار)

با مقدار دهی تصادفی به y_i ، فرآیند را تا جایی که خطا به اندازه‌ی مورد نظر برسد، ادامه دهید.

گام ۴: (ماتریس پس‌خورد خروجی)

از ماتریس $T = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ ، ماتریس‌های

$$\tilde{A} = T \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} T^{-1}$$

$$K = B^\dagger (\tilde{A} - A) C^\dagger$$

را بیابید.

در اینجا دو مثال عددی که در اولی ماتریس‌های B و C وارون ناپذیر و در دومی ماتریس‌های B و C وارون پذیر هستند، ارائه شده است. در مثال دوم خطای روش صفر می‌شود.

مثال ۱۰.۳. سیستم گسسته زمانی کنترل پذیر زیر را در نظر بگیرید. مقدار K را برای ماتریس‌ها و مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{-0.5, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.4\}$ داده‌شده پیدا کنید.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (46.3)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (47.3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_l = X_l = \begin{bmatrix} 0.3529 & 0.3490 & 0.3539 \\ 0.3244 & -0.3691 & -0.6108 \\ -0.1252 & -0.7759 & 0.2399 \\ -0.5985 & 0.3341 & -0.4415 \\ -0.1567 & -0.0960 & -0.3516 \\ -0.6097 & -0.1384 & 0.3543 \end{bmatrix} \quad U_l = X_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.2439 & -0.0909 & -0.0909 \\ 0.3775 & 0.3008 & 0.3008 \\ -0.6660 & -0.3404 & -0.3404 \\ -0.4210 & 0.8777 & -0.1223 \\ -0.4210 & -0.1223 & 0.8777 \end{bmatrix}$$

$$Y_l = A^t U_l = \begin{bmatrix} -0.8491 & -2.2513 & -0.4799 \\ -1.2462 & 2.6379 & -0.4503 \\ -1.7532 & -1.2722 & -2.5653 \\ -2.3254 & -2.3176 & 0.9369 \\ 3.4467 & -0.0625 & 0.2714 \\ -3.5546 & -0.4678 & 1.7291 \end{bmatrix} \quad Y_r = A V_l = \begin{bmatrix} -0.1771 & 1.7868 & -1.2132 \\ -0.1559 & 1.0430 & -1.9570 \\ -2.1071 & -0.2295 & 0.7705 \\ 0.7540 & -1.7075 & 1.2925 \\ 2.7084 & 1.4922 & 1.4922 \\ -2.2195 & -3.3650 & 1.6350 \end{bmatrix}$$

$$S_u^1 = \begin{bmatrix} 0.2847 & -0.8166 & 0.0566 \\ 0.5340 & -0.1835 & -0.2861 \\ -0.2840 & 0.1695 & -0.3101 \\ 0.6334 & 0.4884 & 0.152 \\ 0.1641 & 0.0536 & -0.7736 \\ -0.3535 & -0.1712 & -0.4691 \end{bmatrix} \quad S_u^2 = \begin{bmatrix} 0.1917 & -0.7985 & 0.2236 \\ 0.4611 & -0.3381 & -0.3259 \\ -0.2829 & 0.1548 & -0.3439 \\ 0.6203 & 0.3528 & -0.3021 \\ -0.0650 & -0.2213 & -0.7452 \\ -0.5307 & -0.2251 & -0.2809 \end{bmatrix}$$

$$S_u^3 = \begin{bmatrix} 0.1775 & -0.7861 & 0.2601 \\ 0.4365 & -0.3746 & -0.3290 \\ -0.2862 & 0.1469 & -0.3534 \\ 0.5993 & 0.3088 & -0.3683 \\ -0.1244 & -0.2749 & -0.7160 \\ -0.5669 & -0.2219 & -0.2258 \end{bmatrix} \quad S_u^4 = \begin{bmatrix} 0.1278 & -0.5804 & 0.6363 \\ 0.4687 & 0.6084 & 0.2571 \\ 0.4407 & 0.1343 & -0.2229 \\ 0.7339 & -0.3357 & -0.0125 \\ 0.0255 & 0.3562 & 0.3571 \\ -0.1746 & 0.1880 & 0.5929 \end{bmatrix}$$

$$S_u^5 = \begin{bmatrix} 0.1588 & -0.7569 & 0.3227 \\ 0.3829 & -0.4409 & -0.3270 \\ -0.2977 & 0.1279 & -0.3710 \\ 0.5402 & 0.2185 & -0.4796 \\ -0.2367 & -0.3596 & -0.6390 \\ -0.6259 & -0.1980 & -0.1140 \end{bmatrix} \quad S_u^6 = \begin{bmatrix} 0.1498 & -0.7265 & 0.3700 \\ 0.3267 & -0.4963 & -0.3159 \\ -0.3152 & 0.1067 & -0.3855 \\ 0.4642 & 0.1331 & -0.5622 \\ -0.3351 & -0.4154 & -0.5465 \\ -0.6661 & -0.1555 & -0.0062 \end{bmatrix}$$

$$S_v^1 = \begin{bmatrix} 0.1961 & -0.5554 & 0.6218 \\ 0.4462 & 0.6673 & 0.2205 \\ 0.4330 & 0.0682 & -0.4054 \\ 0.7404 & -0.3002 & -0.0093 \\ 0.1087 & 0.3063 & 0.2862 \\ -0.1223 & 0.2402 & 0.5642 \end{bmatrix} \quad S_v^2 = \begin{bmatrix} 0.1528 & -0.5769 & 0.6286 \\ 0.4616 & 0.6275 & 0.2516 \\ 0.4444 & 0.1118 & -0.2900 \\ 0.7338 & -0.3244 & -0.0134 \\ 0.0561 & 0.3371 & 0.3321 \\ -0.1563 & 0.2052 & 0.5890 \end{bmatrix}$$

$$S_v^3 = \begin{bmatrix} 0.1406 & -0.5792 & 0.6321 \\ 0.4651 & 0.6179 & 0.2552 \\ 0.4434 & 0.1229 & -0.2573 \\ 0.7336 & -0.3301 & -0.0133 \\ 0.0412 & 0.3464 & 0.3445 \\ -0.1654 & 0.1967 & 0.5918 \end{bmatrix} \quad S_v^4 = \begin{bmatrix} 0.1278 & -0.5804 & 0.6363 \\ 0.4687 & 0.6084 & 0.2571 \\ 0.4407 & 0.1343 & -0.2229 \\ 0.7339 & -0.3357 & -0.0125 \\ 0.0255 & 0.3562 & 0.3571 \\ -0.1746 & 0.1880 & 0.5929 \end{bmatrix}$$

$$S_v^5 = \begin{bmatrix} 0.1144 & -0.5805 & 0.6413 \\ 0.4724 & 0.5990 & 0.2575 \\ 0.4360 & 0.1462 & -0.1869 \\ 0.7347 & -0.3412 & -0.0110 \\ 0.0088 & 0.3666 & 0.3697 \\ -0.1836 & 0.1791 & 0.5922 \end{bmatrix} \quad S_v^6 = \begin{bmatrix} 0.0852 & -0.5773 & 0.6532 \\ 0.4809 & 0.5804 & 0.2537 \\ 0.4202 & 0.1714 & -0.1098 \\ 0.7375 & -0.3514 & -0.0047 \\ -0.0273 & 0.3890 & 0.3945 \\ -0.2008 & 0.1602 & 0.5841 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0/0319 & 0/0019 & 0/0009 & -0/0084 & -0/0568 & -0/1817 \\ -0/0490 & 0/0007 & 0/0383 & -0/0033 & 0/0744 & -0/2029 \\ -0/0824 & -0/0010 & -0/0028 & 0/0058 & 0/0551 & 0/0392 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} -24/4917 & -0/1551 & -9/0310 & 1/1466 & -11/4374 & 0/5416 \\ 19/8652 & 0/1166 & 6/9358 & -1/1728 & 7/3550 & 6/0869 \\ 19/4253 & 0/1310 & 13/3981 & -1/1799 & 24/8079 & 4/5763 \end{bmatrix}$$

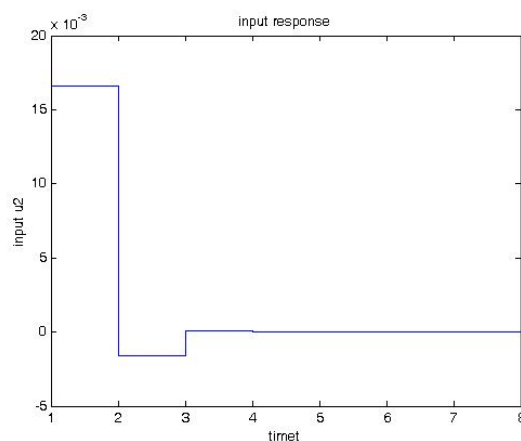
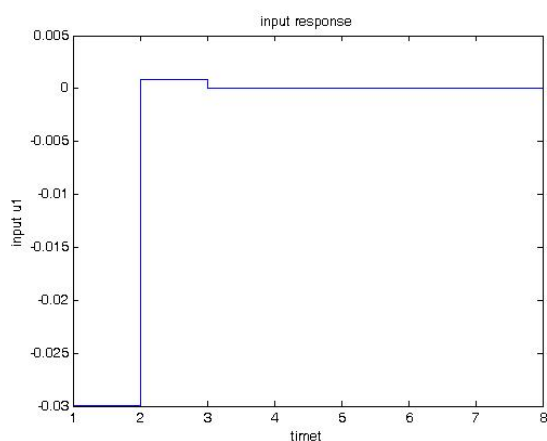
$$T = \begin{bmatrix} 0/0065 & -0/0006 & -0/0291 & 0/0038 & -0/0438 & 0/1705 \\ 0/0078 & -0/0005 & -0/0147 & 0/0024 & -0/0188 & 0/1108 \\ -0/0004 & 0/0015 & 0/0199 & -0/0061 & -0/0047 & -0/1696 \\ 0/0216 & -0/0005 & -0/0030 & 0/0009 & 0/0014 & 0/0260 \\ -0/0465 & -0/0007 & 0/0084 & 0/0028 & 0/0498 & 0/0054 \\ -0/0865 & -0/0013 & 0/0038 & 0/0071 & 0/0838 & 0/0702 \end{bmatrix}$$

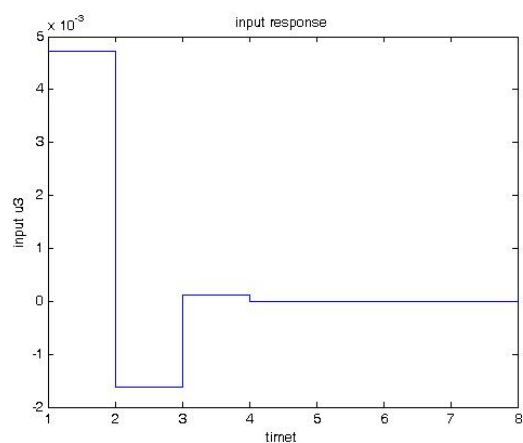
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -3/4593 & 1/9441 & -4/2009 & -6/2923 & -0/1821 & -1/5036 \\ -1/5272 & 2/0892 & -0/8667 & -2/0132 & -0/1611 & -0/2950 \\ 2/8906 & -3/6609 & 1/2467 & 2/8669 & 1/8513 & -0/3976 \\ 0/6558 & 1/1969 & 1/8181 & 1/5778 & 0/4217 & 0/4411 \\ -1/7903 & 0/5981 & -1/1521 & -0/8198 & -3/2669 & 1/2064 \\ -4/4563 & 1/9609 & -3/2757 & -3/2835 & -6/2841 & 1/9125 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0/4810 & -0/2174 & -0/0697 \\ 0/0753 & 0/0553 & 0/1359 \\ -0/7061 & -0/0786 & 0/2357 \end{bmatrix}$$

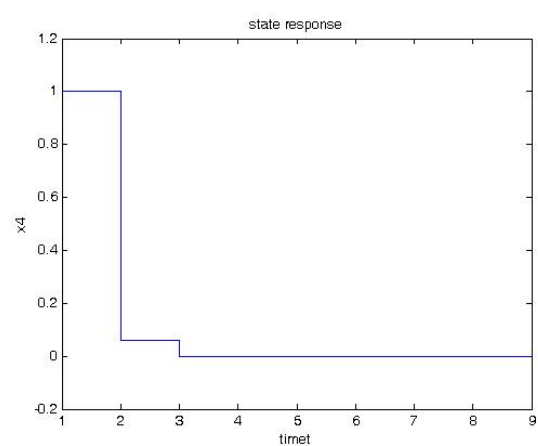
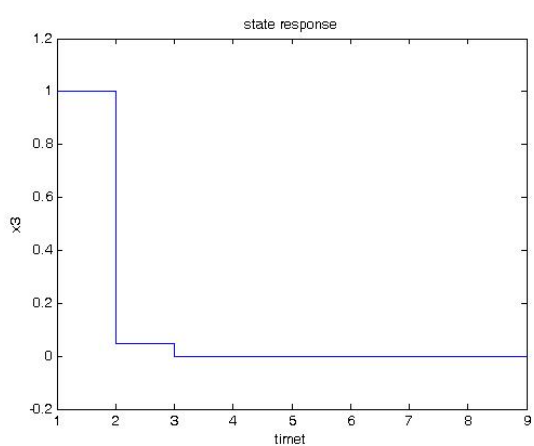
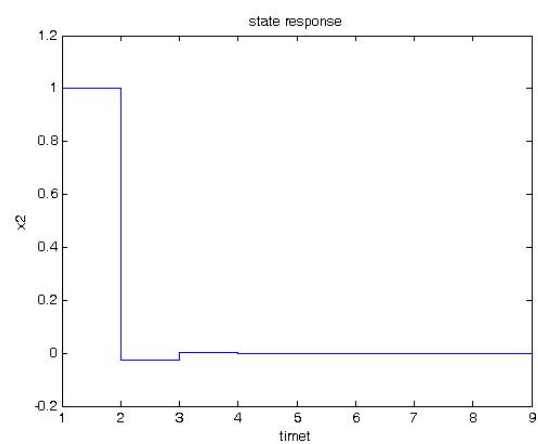
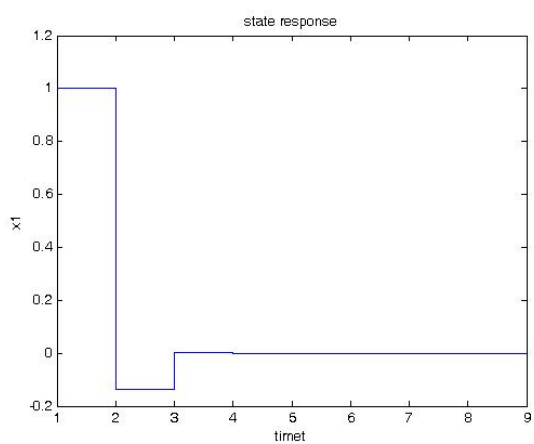
$$Error = 0/0367, Iteration = 40$$

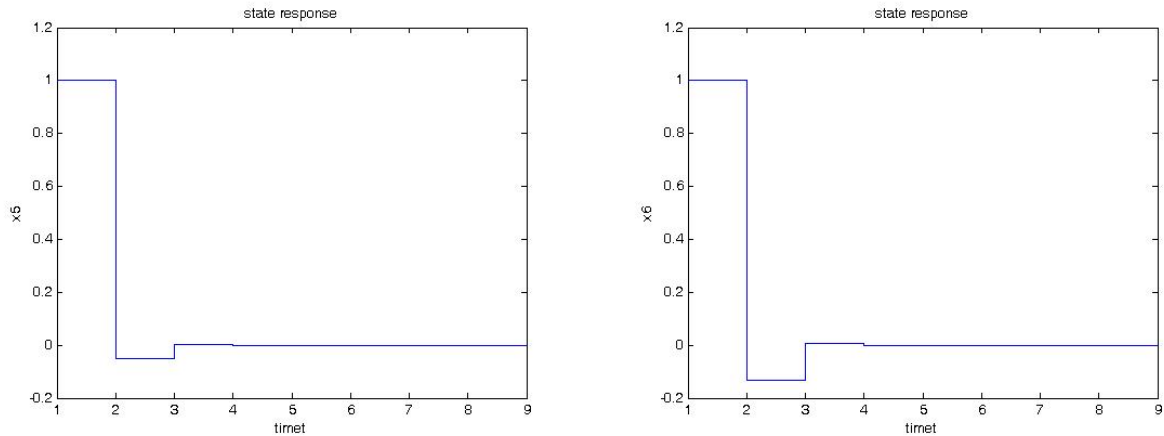
در شکل‌های (۱.۳) و (۲.۳) به ترتیب همگرایی مؤلفه‌های ورودی u_i و مؤلفه‌های حالت x_i به نقطه‌ی تعادل صفر نمایش داده شده است.





شکل ۱.۳: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.





شکل ۲.۳: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.

مثال ۲.۳. سیستم (۴۶.۳) را با ماتریس‌های زیر در نظر بگیرید. در این مثال همان مقادیر ویژه مثال (۱.۳) را به این سیستم که در آن ماتریس‌های B و C معکوس پذیرند، تخصیص دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 8 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 7 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 5 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & -7 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad S_u = S_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -1/2680 & 0/5442 & -0/7836 & 0/3370 & 1/5742 & -0/1645 \\ 0/5697 & -0/6244 & 0/3147 & -0/1948 & -0/8443 & 1/6342 \\ 3/0804 & 1/0033 & -1/5452 & -0/8571 & 0/6878 & -2/0971 \\ -2/0602 & 0/4544 & 0/1987 & 1/5742 & -0/4245 & 0/9110 \\ -1/7401 & 0/5942 & 2/0616 & -1/1310 & -0/1811 & -0/2541 \\ 1/9463 & -0/4039 & -0/1471 & -0/4616 & 0/7568 & -1/7576 \end{bmatrix}$$

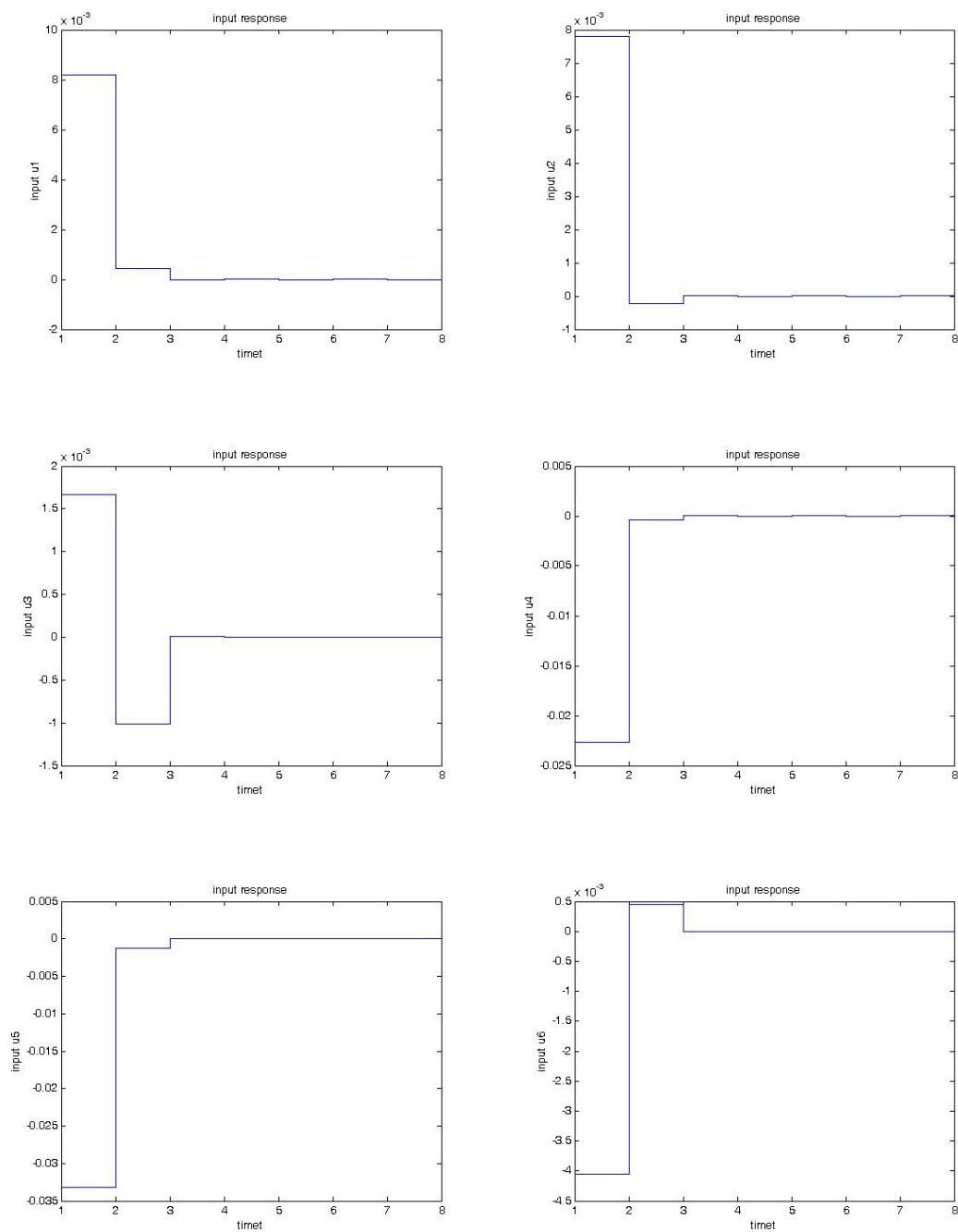
$$y = \begin{bmatrix} 0/1622 & 0/2630 & 0/2290 & 0/0782 & 0/8173 & 0/4314 \\ 0/7943 & 0/6541 & 0/9133 & 0/4427 & 0/8687 & 0/9106 \\ 0/3112 & 0/6892 & 0/1524 & 0/1067 & 0/0844 & 0/1818 \\ 0/5285 & 0/7482 & 0/8258 & 0/9619 & 0/3998 & 0/2638 \\ 0/1656 & 0/4505 & 0/5383 & 0/0046 & 0/2599 & 0/1455 \\ 0/6020 & 0/0838 & 0/9961 & 0/7749 & 0/8001 & 0/1361 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} -1/2680 & 0/5442 & -0/7836 & 0/3370 & 1/5742 & -0/1645 \\ 0/5697 & -0/6244 & 0/3147 & -0/1948 & -0/8443 & 1/6342 \\ 3/0804 & 1/0033 & -1/5452 & -0/8571 & 0/6178 & -2/0971 \\ -2/0602 & 0/4544 & 0/1987 & 1/5742 & -0/4245 & 0/9110 \\ -1/7401 & 0/5942 & 2/0616 & -1/1310 & -0/1811 & -0/2541 \\ 1/9463 & -0/4039 & -0/1471 & -0/4616 & 0/7568 & -1/7576 \end{bmatrix}$$

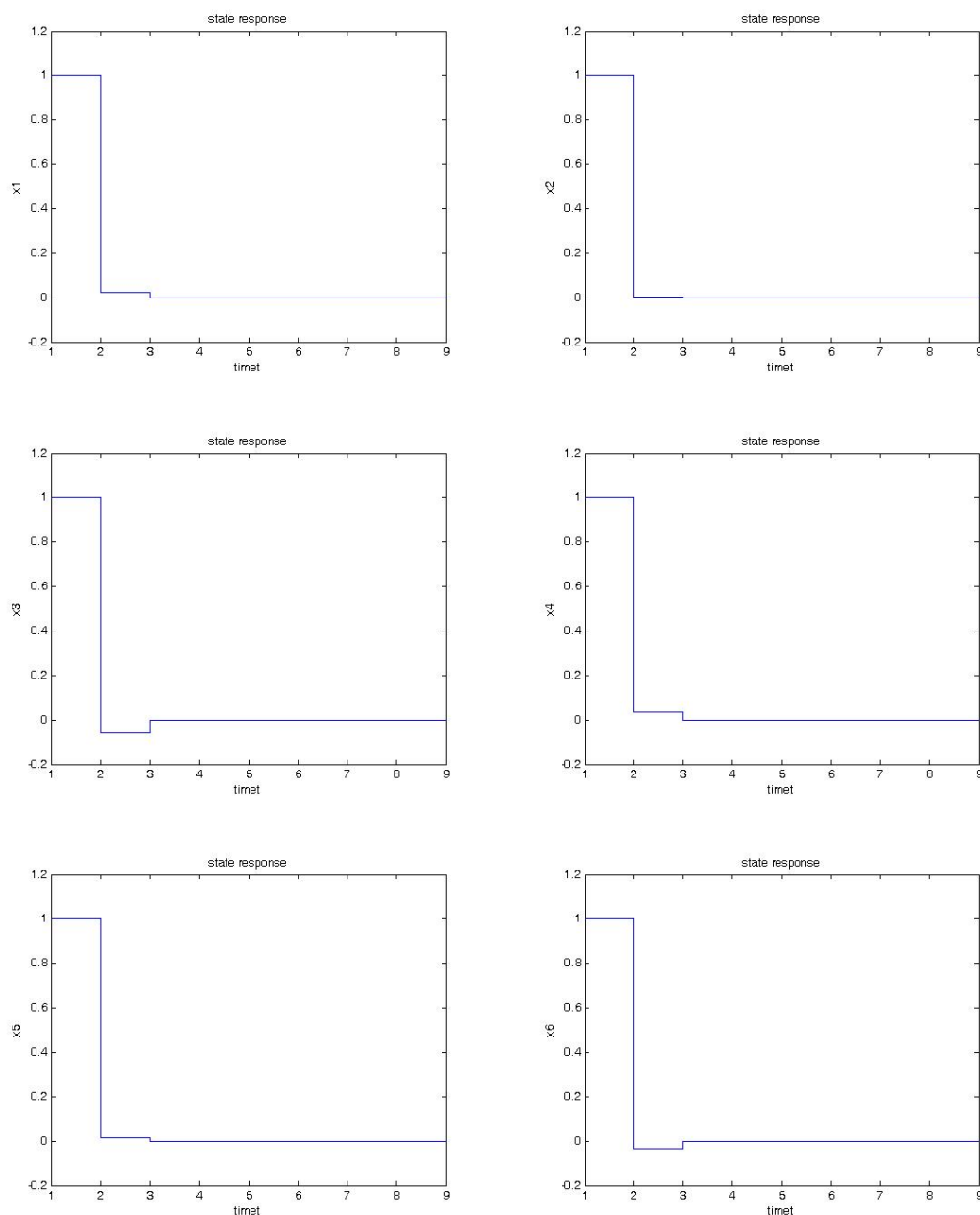
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0/3201 & 0/6965 & 0/1780 & 0/4353 & 0/1529 & 0/6461 \\ 0/1127 & 0/2545 & 0/0569 & -0/0176 & 0/0321 & -0/2275 \\ -0/5323 & -1/9713 & -0/6985 & -1/1378 & -0/3871 & -1/0061 \\ 0/2552 & 1/1163 & 0/3652 & 0/7241 & 0/1819 & 0/7200 \\ 0/0432 & 0/4781 & 0/1962 & 0/2653 & 0/0926 & 0/3883 \\ -0/3304 & -1/2757 & -0/3950 & -0/6535 & -0/2062 & -0/5928 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0/4435 & -0/5487 & 0/4523 & 0/0230 & -0/3742 & 0/0139 \\ 0/3221 & 0/7368 & -0/7241 & -0/0546 & 0/5335 & 0/1103 \\ -1/3409 & 0/2991 & -0/5975 & 0/1469 & 0/4441 & 0/1595 \\ -2/6525 & -1/0245 & 1/0845 & 0/1653 & -0/6417 & -0/1841 \\ -4/4787 & -1/5010 & 1/7116 & 0/2835 & -1/0233 & -0/3366 \\ 2/6273 & 1/3392 & -1/1441 & -0/2507 & 0/7262 & -0/0135 \end{bmatrix}$$

$$Error = 0, Iteration = 1$$



شکل ۳.۳: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.



شکل ۴.۳: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.

۳.۳ یک فرمول ساختاری برای محاسبه A

با توجه به قضیه (۲.۳)، اگر ماتریس $Y - SX$ رتبه کامل باشد، آنگاه مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس قابل حل است. یک شرط کافی برای رتبه کامل بودن $Y - SX$ این است که $2p$ بردارهای y_i و x_i ، $i = 1, \dots, p$ ، در $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی باشند یا $\text{rank}([X, Y]) = 2p$.

قضیه زیر یک فرمول ساختاری برای محاسبه ماتریس A می‌دهد: [۲۱]

قضیه ۵.۳. اگر $p \leq \frac{n}{2}$ و مجموعه بردارهای x_i و y_i ، $i = 1, \dots, p$ مستقل خطی باشند، آنگاه مسأله مقدار ویژه معکوس قابل حل است و ماتریس مورد نظر A به وسیله معادله (۵۱.۳) بدست می‌آید.

برهان. یک ماتریس بلوکی $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ به صورت زیر می‌سازیم، اگر $p \geq q$ باشد، آنگاه

$$A_d = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} \circ & -\lambda_1 \lambda_2 \\ 1 & \lambda + \lambda \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \circ & -\lambda_{2p-1} \lambda_{2p} \\ \circ & \lambda_{2p-1} + \lambda_{2p} \end{bmatrix}, \dots, \lambda_{2p+1}, \dots, \lambda_n \right\} \quad (48.3)$$

در غیر این صورت:

$$A_d = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} \circ & -\lambda_1 \lambda_2 \\ 1 & \lambda + \lambda \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \circ & -\lambda_{2q-1} \lambda_{2q} \\ \circ & \lambda_{2q-1} + \lambda_{2q} \end{bmatrix}, \dots, \lambda_{2q+1}, \dots, \lambda_n \right\} \quad (49.3)$$

که در آن مقادیر ویژه بلوک i ام برابر با λ_i و λ_{i+1} است.

$$\det(A_{d1} - \lambda I) = \circ$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda I & \lambda_i \lambda_{i+1} \\ 1 & \lambda_i + \lambda_{i+1} \end{bmatrix} = \circ$$

$$-\lambda_i \lambda - \lambda_{i+1} \lambda + \lambda_{i+1} + \lambda_i \lambda_{i+1} = \circ$$

$$(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_{i+1}) = \circ$$

$$\lambda = \lambda_i, \lambda = \lambda_{i+1}$$

بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد که هر جفت مزدوج از اعداد در مجموعه $\mathcal{L}$ ، در بلوک یکسان قرار بگیرند. در نتیجه طبق این تنظیم، ماتریس A_j حقیقی است. (زیرا ضرب و جمع در عدد مختلط مزدوج، همواره عددی حقیقی می‌باشد.) و طیف مقادیر ویژه‌ی ماتریس A_j برابر $\mathcal{L}$ خواهد بود. یعنی $\sigma(A_j) = \mathcal{L}$.

همانطور که فرض شد، مجموعه بردارهای $\{x_1, y_1, \dots, x_p, y_p\}$ مستقل خطی هستند. $n - 2p$ بردار $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-2p}\}$ در $\mathbb{R}^n$ یافت می‌شود، به طوری که مجموعه‌ی

$$\{x_1, y_1, \dots, x_p, y_p, z_1, z_2, \dots, z_{(n-2p)}\}$$

هنوز مستقل خطی باشند. واضح است که ماتریس به فرم زیر نامنفرد می‌باشد.

$$T = [x_1, y_1, \dots, x_p, y_p, z_1, z_2, \dots, z_{(n-2p)}] \quad (50.3)$$

حال ماتریس مورد نظر A را، به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = T A_d T^{-1} \quad (51.3)$$

چون A مشابه A_d است داریم:

$$\sigma(A) = \sigma(A_d) = \mathcal{L}. \quad (52.3)$$

محاسبات نشان می‌دهد که شرایط برقرار زیر است.

$$Ax_i - y_i \quad i = 1, \dots, p. \quad (53.3)$$

□

در نتیجه مسأله مقدار ویژه معکوس قابل حل است.

بدون در نظر گرفتن انتخاب Z_i ، $i = 2p + 1, \dots, n$ ، ماتریس S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \lambda_{2p} & \lambda_{2p-1} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, 1, \dots, 1 \right\} \quad p \geq q \quad (54.3)$$

و یا

$$S = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \lambda_{2q} & \lambda_{2q-1} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, 1, \dots, 1 \right\} \quad q > p \quad (55.3)$$

آنگاه قرار می‌دهیم:

$$A_d = SAS^{-1} \quad (56.3)$$

$$A = T A_d T^{-1} = T S \Lambda (TS)^{-1}$$

که در آن داریم:

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{bmatrix} \quad (57.3)$$

$$A_d = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \\ 1 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (58.3)$$

مثال ۳.۳. برای دو بردار مستقل خطی $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A را به گونه‌ای بیابید، که مقادیر ویژه‌ی آن مجموعه $\mathcal{L} = \{1, 2\}$ باشد.

$$T = [\mathbf{x} \quad \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$TS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(TS)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = TS\Lambda(TS)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

۴.۳ روش پارامتری برای تخصیص مقادیر ویژه به وسیله‌ی پس‌خورد خروجی

در این بخش، یک روش پارامتری برای محاسبه کنترل‌گر پس‌خورد خروجی ارایه شده است، که به وسیله‌ی حل مجموعه‌ای از معادلات غیر خطی به دست می‌آید. در واقع این روش نشان می‌دهد که تمام کنترل‌گرهای ممکن را می‌توان با استفاده از نرم افزارهای مناسب جهت حل مجموعه‌ای از معادلات غیر خطی، به دست آورد. منحصر به فرد نبودن ماتریس کنترل‌گر، انتخاب کنترل‌گر مناسب با کمترین نرم یا شروط دیگر را ممکن می‌سازد. در این روش به وسیله‌ی پارامترهای مفروض، کنترل‌گر پس‌خورد حالت را به دست آورده، و سپس به وسیله‌ی عملیات تشابهی مناسب ماتریس پس‌خورد خروجی محاسبه می‌شود.

۱.۴.۳ تخصیص مقادیر ویژه به وسیله‌ی ماتریس پس‌خورد حالت

معادله حالت سیستم پیوسته زمانی

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (۵۹.۳)$$

را در نظر بگیرید، برای معادلات بالا، قانون کنترل، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \quad (۶۰.۳)$$

به طور مشابه برای معادله‌ی حالت سیستم تبدیل شده به فرم همدم برداری، معادله‌ی زیر را داریم:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \quad (۶۱.۳)$$

قانون کنترل را به صورت $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{x}}(t)$ تعریف می‌کنیم، که در آن $\tilde{\mathbf{F}}$ ماتریس پس‌خورد حالت معادله‌ی سیستم تبدیل شده به فرم همدم برداری می‌باشد.

با جایگذاری $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ در رابطه‌ی (۵۹.۳) خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}^{-1} \quad (۶۲.۳)$$

ماتریس پس‌خورد حالتی که مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p$ را به صفر می‌برد، ماتریس پس‌خورد حالت اولیه می‌نامیم و با $\tilde{F}_p$ نشان می‌دهیم و به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{F}_p = -B_o^{-1}G_o \quad (۶۳.۳)$$

لذا ماتریس پس‌خورد حالت اولیه‌ی سیستم استاندارد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_p = \tilde{F}_p S^{-1} T^{-1} = -B_o^{-1}G_o S^{-1} T^{-1} \quad (۶۴.۳)$$

می‌توان نشان داد با تعریف $\tilde{F}_p$ به فرم فوق، مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه بسته سیستم همدوم برداری یعنی $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p$ همگی صفر هستند.

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} &= \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p \\ &= \begin{bmatrix} G_o & \\ I_{n-m} & O_{n-m,m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o \\ 0 \end{bmatrix} (-B_o^{-1}G_o) \\ &= \begin{bmatrix} G_o & \\ I_{n-m} & O_{n-m,m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_o \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \text{eig}(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p) = 0 \end{aligned}$$

با تعریف F_p می‌توان گفت که مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه بسته‌ی سیستم استاندارد، یعنی $\Gamma = A + BF$ نیز صفر است زیرا Γ و $\tilde{\Gamma}$ متشابه‌اند، لذا مقادیر ویژه‌ی آن‌ها با هم برابرند. دلیل متشابه بودن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} &= \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p \\ &= S^{-1}T^{-1}ATS + S^{-1}T^{-1}BFTS = (TS)^{-1}(A + BF)TS \\ &= (TS)^{-1}\Gamma(TS) \end{aligned}$$

هدف از کنترل یک سیستم، یافتن ماتریس پس‌خورد حالت F است، به گونه‌ای که مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BF$ ، در مجموعه از پیش تعریف شده $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ، موسوم به طیف مقادیر ویژه باشند. با این خاصیت که λ_i ها حقیقی و یا به صورت زوج‌های مزدوج مختلط هستند. جهت این کار ابتدا زوج (B, A) به فرم همدوم برداری $(\tilde{B}, \tilde{A})$ تبدیل می‌کنیم. سپس با تعریف

$$\tilde{F}_p = -B_o^{-1}G_o \quad (۶۵.۳)$$

ماتریس حلقه بسته اولیه به فرم زیر

$$\tilde{\Gamma}_\circ = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p = \begin{bmatrix} & \circ_{m \times n} \\ I_{n-m} & \circ_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (۶۶.۳)$$

را با ماتریس قطری $D = \text{diag}(\lambda_\circ, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ جمع کنیم. بدیهی است که مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجموع، همان مقادیر ویژه‌ی ماتریس D خواهد بود.

$$A_\lambda = \tilde{\Gamma}_\circ + D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ \circ & \ddots & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ O & & 1 & \circ & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (۶۷.۳)$$

حال اگر عملیات تشابهی ستونی و سطری نظیر را روی A_λ انجام دهیم، بطوریکه A_λ به صورت همدم برداری $\tilde{A}_\lambda$ تبدیل می‌شود:

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} G_\lambda \\ I_{n-m} & , & \circ_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (۶۸.۳)$$

واضح است که $\tilde{A}_\lambda$ متشابه A_λ می‌باشد، لذا مقادیر ویژه $\tilde{A}_\lambda$ همان مجموعه $\mathcal{L}$ است. حال ماتریس پس‌خورد حالت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{F} = B_\circ^{-1}(-G_\circ + G_\lambda) = -B_\circ^{-1}G_\circ + B_\circ^{-1}G_\lambda = \tilde{F}_p + \tilde{F}_\lambda \quad (۶۹.۳)$$

می‌توان نشان داد با تعریف فوق، ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$ برابر با ماتریس $\tilde{A}_\lambda$ است:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_c &= \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} \\ &= \begin{bmatrix} G_\circ \\ I_{n-m} & , & O_{n-m,m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\circ \\ \circ \end{bmatrix} (B_\circ^{-1}(-G_\circ + G_\lambda)) \\ &= \begin{bmatrix} G_\lambda \\ I_{n-m} & , & \circ_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} = \tilde{A}_\lambda \end{aligned}$$

همچنین رابطه‌ی $F = \tilde{F}S^{-1}T^{-1} = \tilde{F}T^{-1}$ را داریم. لذا مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BF$ نیز در مجموعه $\mathcal{L}$ قرار می‌گیرند. زوج‌های مختلط مزدوج در ماتریس قطری D ، به صورت یکی در میان قرار می‌گیرند تا تبدیلات آسانتر شوند و G_λ حقیقی به‌دست آید. [۱۵]

۲.۴.۳ طرح مسأله

سیستم خطی مستقل از زمان، کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر تعریف شده توسط معادله‌ی حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (۷۰.۳)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) \quad (۷۱.۳)$$

که در آن بردار حالت $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ و بردار ورودی $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ و $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ به ترتیب ماتریس‌های حلقه باز، ورودی و خروجی هستند. و همچنین فرض می‌کنیم $\text{rank} B = m$ ، $\text{rank} C = r$ ، $m \leq n$ و $r \leq n$ ، $mr \geq n$ ، هدف، تخصیص مقادیر ویژه با طراحی ماتریس کنترل‌گر پس‌خورد خروجی K ، برای تولید سیستم حلقه بسته با مقادیر ویژه‌ی مطلوب است. برای معادله‌ی زیر

$$\mathbf{u}(t) = K\mathbf{y}(t) \quad (۷۲.۳)$$

فرض کنید K ماتریس کنترل‌گر با ابعاد $(m \times r)$ طوری انتخاب می‌شود که ماتریس حلقه بسته‌ی

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (A + BKC)\mathbf{x}(t) = \Gamma_c\mathbf{x}(t) \quad (۷۳.۳)$$

دارای مقادیر ویژه‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد.

در تخصیص مقدار ویژه با پس‌خورد حالت داریم:

$$\mathbf{u}(t) = F\mathbf{x}(t) \quad (۷۴.۳)$$

و سیستم حلقه بسته به صورت زیر است:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (A + BF)\mathbf{x}(t) = \Gamma_c\mathbf{x}(t) \quad (۷۵.۳)$$

که مقادیر ویژه‌ی Γ_c در طیف مقادیر ویژه‌ی از پیش تعیین شده توسط مجموعه $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ قرار دارند. از مقایسه‌ی معادله‌های (۷۳.۳) و (۷۵.۳) داریم

$$F = KC \quad (۷۶.۳)$$

با توجه به این که C یک ماتریس مستطیلی است، نمی‌توان ماتریس K را از روی معکوس ماتریس C به دست آورد. در این بخش، راهکارهایی ارائه می‌شود تا به کمک آن‌ها بتوان ماتریس K را از روی ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری به دست آورد.

ابتدا فرم همدم برداری $(\tilde{B}, \tilde{A})$ را در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 & \\ I_{n-m} & \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix} \quad (77.3)$$

که در آن B_0 یک ماتریس $(m \times m)$ بالا مثلثی معکوس پذیر با عناصر قطری واحد و G_0 یک ماتریس $(m \times n)$ است، سپس ماتریس $\tilde{A}_\lambda$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} G_\lambda & \\ I_{n-m} & \end{bmatrix} \quad (78.3)$$

که در آن، G_λ یک زیر ماتریس با درایه‌های پارامتری $(m \times n)$ به صورت زیر است:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \\ g_{m1} & \dots & g_{mn} \end{bmatrix} \quad (79.3)$$

و مقادیر ویژه‌ی $\tilde{A}_\lambda$ در $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ می‌باشد.

به منظور تعیین رابطه‌ی میان g_{ij} ، چند جمله‌ای مشخصه سیستم حلقه بسته را در نظر می‌گیریم:

$$P_n(\lambda) = \det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I) = (-1)^n (\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n) = 0 \quad (80.3)$$

حال با توجه به اینکه ریشه‌های این چند جمله‌ای باید همان مقادیر ویژه $\tilde{A}_\lambda$ باشند، می‌توان نوشت:

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (81.3)$$

با مساوی قرار دادن رابطه (80.3) و (81.3) می‌توان ضرایب c_i ، برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \\
c_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n = \sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j \\
&\vdots \\
c_k &= (-1)^k \sum \lambda_i\lambda_j \dots \lambda_l
\end{aligned}$$

سپس با محاسبه‌ی $\det(\tilde{A}_\lambda - I\lambda)$ و روابط فوق، n معادله به شرح زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
f_1(g_{11}, \dots, g_{mn}) &= c_1 \\
f_2(g_{11}, \dots, g_{mn}) &= c_2 \\
&\vdots \\
f_n(g_{11}, \dots, g_{mn}) &= c_n
\end{aligned}$$

یک مجموعه n معادله‌ای با $(n \times m)$ مجهول که غیر خطی اند، به دست می‌آید. بقیه‌ی پارامترهای آزاد، امکان رسیدن به جواب‌های زیادی را به ما می‌دهند. حال باید $n(m-1)$ مجهول آن را به صورت دلخواه انتخاب کرد تا بتوان n مجهول دیگر را محاسبه کرد.

حال ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری غیر خطی را که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BF$ را در همان طیف Λ می‌برد، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = B_o^{-1}(-G_o + G_\lambda)T^{-1} \quad (۸۲.۳)$$

قضیه‌ی زیر یک الگوریتم برای به دست آوردن ماتریس پس‌خورد خروجی از پارامتری کردن ماتریس پس‌خورد حالت به ما می‌دهد.

قضیه ۶.۳. برای زوج کنترل‌پذیر (A, B) و همچنین زوج مشاهده‌پذیر (A, C) در حالتی که شرط $rm \geq n$ برقرار باشد، همواره یک ماتریس پس‌خورد خروجی وجود دارد. [۱۵]

برهان. اگر جفت (A, B) کنترل‌پذیر باشند، آنگاه یک ماتریس پس‌خورد حالت F وجود دارد به طوری که همه‌ی n مقدار ویژه‌ی سیستم حلقه بسته $\Gamma = A + BF$ می‌توانند از یک مجموعه‌ی دلخواه مثل $\mathcal{L}$ باشند [۱۷]. الگوریتم‌های زیادی برای تعیین ماتریس‌های پس‌خورد حالت وجود دارد.

برای یک سیستم قابل مشاهده یک ماتریس پس خورد خروجی K وجود دارد به طوری که همه‌ی n مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه بسته‌ی $\Gamma = A + BKC$ در مجموعه‌ی دلخواه باشند. بدیهی است که این منجر به رابطه‌ی $F = KC$ می‌شود. اگرچه از آنجایی که F ، K و C معمولاً ماتریس‌هایی مستطیلی هستند، ماتریس K نمی‌تواند از معکوس ماتریس C به دست بیاید. به این ترتیب، فرض کنید E ماتریس یک $n \times n$ باشد، بدیهی است که می‌توان نوشت $FE = KCE$. حال اگر عملیات ستونی روی ماتریس C انجام دهیم و آن‌ها را در E ذخیره کنیم، به گونه‌ای که CE تبدیل به ماتریس بلوکی یک گردد، یعنی

$$CE = [I_r, O] \quad (۸۳.۳)$$

آن‌گاه بدیهی است که همان عملیات ستونی باید روی F نیز انجام شود

$$F_e = FE = KCE = K[I_r | O] = [K | O] \quad (۸۴.۳)$$

$$\Rightarrow [F_{e1} | F_{e2}] = [K | O] \quad (۸۵.۳)$$

حال چنانچه بتوانیم با انتخاب مناسب پارامترها F_{e2} را مساوی صفر قرار دهیم ماتریس K به دست می‌آید.

□

[۱۵]

این مطلب، منجر به ایجاد الگوریتم زیر برای یافتن کنترل‌گر K از ماتریس پس خورد حالت F می‌شود.

الگوریتم

هدف: یافتن پارامترهای g_{ij} . (عناصر G_λ ، برای محاسبه‌ی ماتریس پس خورد خروجی K)، به طوری که مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه بسته Γ در مجموعه‌ی از پیش تعیین شده‌ی $\mathcal{L}$ باشد. ورودی: ماتریس‌های سیستم مشاهده‌پذیر و کنترل‌پذیر (A, B, C) و مقادیر ویژه‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ که روی اعداد مختلط بسته است.

خروجی: ماتریس پس خورد خروجی K ، که مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه بسته را تخصیص می‌دهد.

گام ۱: ابتدا B^{-1} و G^{-1} و T^{-1} را می‌یابیم.

گام ۲: ضرایب چندجمله‌ای مشخصه‌ای که ریشه‌ی آن‌ها برابر با مقادیر ویژه‌ی مجموعه‌ی Λ باشد را تعیین کنید.

گام ۳: چندجمله‌ای مشخصه‌ی P_λ را محاسبه کنید.

گام ۴: سیستم غیرخطی پارامترهای g_{ij} را به وسیله‌ی معادل قرار دادن ضرایب چندجمله‌ای مشخصه به دست آمده در گام ۲ و ۳ به دست آورید.

گام ۵: ماتریس E را به وسیله‌ی عملیات ستونی مقدماتی روی C به‌طوریکه

$$CE = [I_r, O_{r,n-r}]$$

را مشخص کنید، سپس داریم

$$FE = KCE = B_o^{-1}(-G_o + G_\lambda)T^{-1}E = [K, O_{r,n-r}] \quad (۸۶.۳)$$

گام ۶: بقیه‌ی $m(n-r)$ مجموعه از معادلات به‌وسیله‌ی معادل قرار دادن آخرین $(n-r)$ ستون حاصل ضرب $B_o^{-1}(-G_o + G_\lambda)T^{-1}$ تا صفر را بیابید.

گام ۷: حال $n + m(n-r) \leq nm$ مجموعه معادلات غیر خطی به‌وسیله‌ی الگوریتم تکرار نیوتن را حل کنید.

گام ۸: این پارامترها را در G_λ قرار داده و K را حساب کنید.

مثال ۴.۳. سیستم کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر زیر با پس‌خورد خروجی را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ -۲ & -۲ & -۳ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای ماتریس C فرض شده

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۵ \\ ۰ & -۳ & ۸ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{T}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰/۱۲۵ & ۰/۵ & ۰/۳۷۵ \\ ۰/۵ & -۰/۵ & ۰ \\ ۰/۱۲۵ & ۰ & -۰/۱۲۵ \end{bmatrix}$$

به‌وضوح ماتریس‌های زیر را داریم:

$$B_o^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad G_o = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & -۵ \\ ۰ & ۳ & -۸ \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم مقادیر ویژه‌ی $\mathcal{L} = \{-۱, -۲, -۳\}$ را به سیستم حلقه بسته تخصیص بدهیم.

ضرایب چند جمله‌ای مشخصه با مقادیر ویژه‌ی داده شده، ۶، ۱۱ و ۶ است. به منظور یافتن G_λ ، معادله‌ی مشخصه‌ی فرم همدم برداری $\tilde{A}_\lambda$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I) = \begin{vmatrix} g_{11} - \lambda & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} - \lambda & g_{23} & g_{24} \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

سیستم غیر خطی زیر را داریم:

$$-g_{11} - g_{22} = 6$$

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} - g_{13} = 11$$

$$g_{13}g_{22} - g_{12}g_{23} = 6$$

با قرار دادن $g_{11} = -2$ ، $g_{22} = -4$ داریم:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} -2 & g_{12} & -3 - g_{12}g_{23} \\ g_{21} & -4 & \frac{6+4g_{12}g_{23}}{g_{12}} \end{bmatrix}$$

با قرار دادن $g_{12} = -1/75$ ، $g_{23} = -1/14$ داریم:

$$F = \begin{bmatrix} -0.875 & 0.875 & 0 \\ -3/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.875 & 0.875 \\ -3/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

۵.۳ نتیجه‌گیری و مقایسه‌ی روش‌ها

اگرچه روش (۳.۳) یک روش ساده برای ساخت ماتریس A و حل مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس فراهم می‌کند، اما متأسفانه به فرض رتبه $2p$ برای ماتریس $[X \ Y]$ نیاز دارد. همچنین اگر دو مقدار ویژه در بلوک یکسان، یعنی λ_1 ، λ_2 خیلی به هم نزدیک باشند، آنگاه مقدار ویژه ماتریس بلوکی زیر، نسبت به آشفتگی داده‌ها حساسیت بالایی خواهد داشت. در این روش داریم:

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1\lambda_2 \\ 1 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}$$

فرض کنید

$$\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\} = p^{-1} A_{d_1} p$$

که در آن

$$p = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

حال با محاسبه‌ی عدد شرطی فروبنیوس ماتریس p داریم:

$$K_F(p) = \frac{2 + |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2}{|\lambda_1 - \lambda_2|} \quad (۸۷.۳)$$

که در صورت نزدیک بودن λ_1 و λ_2 بسیار بزرگ خواهد بود.

در روش (۴.۳)، یک چهار چوب کلی برای کنترل‌گر پس‌خورد خروجی در تخصیص مقادیر ویژه‌ی دلخواه، برای سیستم خطی کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر، برپایه‌ی ساختار فرم هدم برداری پارامتری، به‌دست آمده‌است که در واقع یک گسترش روی ماتریس پس‌خورد حالت می باشد. این روش نشان می‌دهد که ماتریس پس‌خورد خروجی همواره می‌تواند از

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

محاسبه شود. همچنین نیاز به دانستن اطلاعات قبلی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه باز ندارد و هیچ محدودیتی روی مکان، نوع و تعداد مقادیر ویژه نیست. این روش برای سیستم‌های کوچک ($n \leq 5$) به‌خوبی جواب می‌دهد و همه‌ی صورت‌های پارامتری که ممکن است به‌دست آید را ارائه می‌دهد. این روش به دلیل رابطه‌ی بین پارامترهای غیر خطی، به آشفتگی‌های کوچک بسیار حساس است. مثال‌های ارائه شده نشان می‌دهد که با توجه به انتخاب طیف مقادیر ویژه، کنترل‌گر ممکن است خیلی حساس، قوی و یا وجود نداشته باشد.

در روش (۴.۳) ماتریس‌های B و C باید رتبه کامل باشند، در حالی که روش اصلی پایان‌نامه ارائه شده در بخش (۲.۳) این شرط را ندارد. همچنین ساخت سیستم غیر خطی کمی دشوار است، مخصوصاً در ابعاد ($n \times m$). علاوه بر این حل معادلات غیر خطی برای سیستم‌های بزرگ بسیار پرهزینه می‌باشد در حالی که روش اصلی پایان‌نامه نیاز به حل سیستم غیر خطی ندارد.

فصل ۴

محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت با استفاده از پس‌خورد خروجی

۱.۴ معرفی

مسئله‌ی تخصیص مقدار ویژه سیستم‌های خطی با پس‌خورد حالت پارامتری، در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است [۱۵]. در مقاله‌ی کرباسی و طهرانی^۱ در سال ۲۰۰۲ روش بیان شده در مقاله‌ی کرباسی و بل^۲ در سال ۱۹۹۳ توسعه یافته و یک روش جدید برای پارامتر سازی ماتریس پس‌خورد حالت در تخصیص مقادیر ویژه معرفی شده است، و نشان می‌دهد که یک سیستم از معادلات غیر خطی می‌تواند از برابر قرار دادن چند جمله‌ای مشخصه فرم همدم برداری ماتریس حلقه بسته سیستم با چند جمله‌ای ساخته شده توسط مقادیر ویژه دلخواه، به وجود بیاید. در مقاله‌ی کرباسی [۱۵] همان ایده برای پارامتری کردن ماتریس پس‌خورد خروجی که مقادیر ویژه دلخواه را به ماتریس حلقه بسته تخصیص می‌دهد، پیشنهاد شده است. این روش قبلاً در مقاله‌ی ایچیکاوا و کاتایاما^۳ بیان شده است، و در آن ماتریس پس‌خورد خروجی را تحت شروط معینی از ماتریس پس‌خورد حالت به دست می‌آورند. این فرمول فقط در حالات خاصی کاربرد دارد و در عمل بسیار محدود است. در مقاله کرباسی این محدودیت‌ها برداشته شده است.

ما در این فصل، سیستم خطی مستقل از زمان کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر تعریف شده توسط معادله‌ی خروجی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{x}(i+1) = A\mathbf{x}(i) + B\mathbf{u}(i) \quad (1.4)$$

^۱Karbassi and Tehrani

^۲Karbassi and Bell

^۳Ichikawa and Katayama

$$\mathbf{y}(i) = C\mathbf{x}(i) \quad (2.4)$$

که در آن بردار حالت، $\mathbf{x}(i) \in \mathbb{R}^n$ بردار ورودی و $\mathbf{u}(i) \in \mathbb{R}^m$ بردار خروجی. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ به ترتیب ماتریس‌های حلقه باز، ورودی و خروجی هستند، و همچنین فرض می‌کنیم $\text{rank} C = r$ ، $\text{rank} B = m$ و $m \leq n$ و $mr \geq n$.

هدف این روش، طراحی ماتریس کنترل‌گر پس‌خورد حالت F ، برای تولید یک سیستم حلقه بسته با مقادیر ویژه‌ی مطلوب است. به این منظور، ابتدا با استفاده از تبدیلات تشابهی بیان شده در [۱۵]، ماتریس پس‌خورد حالت F را فرمول‌بندی کرده سپس با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی، ماتریس حلقه بسته با پس‌خورد خروجی سیستم را به گونه‌ای محاسبه می‌کنیم که دارای مقادیر ویژه دلخواه و از قبل تعیین شده باشد. در واقع روش بیان شده در [۱۵] بهبود یافته است و نتیجه‌ی آن حذف معادلات غیر خطی است. به این ترتیب، این روش برای مسائل با ابعاد بزرگ مفید است. در آخر یک الگوریتم برای نمایش ترتیب مراحل، و یک مثال عددی برای نمایش نتایج این روش ارائه گردیده است.

۲۰۴ طرح مسئله

سیستم خطی مستقل از زمان کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر تعریف شده توسط معادله‌ی حالت و خروجی (۱۰۴) را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{x}(i+1) = A\mathbf{x}(i) + B\mathbf{u}(i)$$

$$\mathbf{y}(i) = C\mathbf{x}(i)$$

هدف، یافتن ماتریس کنترل‌گر پس‌خورد حالت F ، برای تولید یک سیستم حلقه بسته با مقادیر ویژه‌ی مطلوب است. فرض کنید

$$\mathbf{u}(i) = K\mathbf{y}(i) \quad (3.4)$$

که در آن، ماتریس کنترل‌گر K با ابعاد $(m \times r)$ طوری انتخاب می‌شود، که ماتریس حلقه بسته‌ی Γ_c

$$\mathbf{x}(i+1) = (A + BKC)\mathbf{x}(i) = \Gamma_c\mathbf{x}(i) \quad (4.4)$$

دارای مقادیر ویژه‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد.

ابتدا فرم همدم برداری $(\tilde{B}, \tilde{A})$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_o & \\ I_{n-m} & , \quad O_{n-m,m} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_o \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

که در آن B_o یک ماتریس $(m \times m)$ بالامتثلی و معکوس‌پذیر با عناصر قطری واحد و G_o یک ماتریس $(m \times n)$ است. همانطور که در [۱۵] نشان داده شده است، ماتریس پس‌خورد حالت به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F = B_o^{-1}(-G_o + G_\lambda)T^{-1} \quad (6.4)$$

که در آن، G_λ یک زیر ماتریس پارامتری $(m \times n)$ از ماتریس زیر است:

$$\tilde{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} G_\lambda & \\ I_{n-m} & , \quad O_{n-m,m} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

و مقادیر ویژه‌ی $\tilde{\Gamma}_c$ در $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ می‌باشد. حال باید ماتریس حلقه بسته‌ی $\tilde{\Gamma}_c$ را طوری پیدا کنیم، که دارای مقادیر ویژه‌ی از پیش تعیین شده $\mathcal{L}$ باشد. اگر $\tilde{\Gamma}_c$ موجود باشد، می‌توان ماتریس G_λ را به‌دست آورد. در بخش بعدی، چگونگی استفاده از روش مقدار ویژه‌ی معکوس برای یافتن ماتریس حلقه بسته‌ی $\tilde{\Gamma}_c$ را توضیح می‌دهیم.

۱.۲.۴ مقدار ویژه‌ی معکوس

حال اگر U_1 و V_1 به‌ترتیب ماتریس‌های تشکیل شده از بردارهای پایه‌ی فضای پوچ $\tilde{B}^t$ و $\tilde{C}$ باشند، با فرض $\tilde{\Gamma}_c = \tilde{A} + \tilde{B}K\tilde{C}$ ، داریم:

$$\tilde{\Gamma}_c V_1 = (\tilde{A} + \tilde{B}K\tilde{C})V_1 = \tilde{A}V_1 \quad (8.4)$$

$$U_1^t \tilde{\Gamma}_c = U_1^t (\tilde{A} + \tilde{B}K\tilde{C}) = U_1^t \tilde{A} \quad (9.4)$$

حال با توجه به قضیه (۳.۳)، با قرار دادن $X_r = V_1$ ، $X_l = U_1$ و $Y_r = \tilde{A}V_1$ و $Y_l = \tilde{A}^t U_1$ ، با داشتن مجموعه‌ی $\mathcal{L}$ ، می‌توان ماتریس $\tilde{\Gamma}$ را طوری یافت که طیف مقادیر ویژه‌ی آن مجموعه‌ی $\mathcal{L}$ باشد.

۲.۲.۴ الگوریتم

هدف: یافتن ماتریس پس‌خورد حالت F

گام ۱: ماتریس A ، B و مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ را وارد کنید.

گام ۲: ماتریس‌های $\tilde{A}$ ، $\tilde{B}$ ، $\tilde{C}$ و T را بیابید.

گام ۳: فضای پوچ $\tilde{B}^t$ و $\tilde{C}$ که به ترتیب، X_l و X_r است و $Y_l = \tilde{A}^t X_l$ و $Y_r = A X_r$ و سپس فضای پوچ $(\lambda_i X_l - Y_l)$ و $(\lambda_i X_r - Y_r)$ را بیابید.

گام ۴: بردارهای x_i و y_i و سپس ماتریس T و $\tilde{\Gamma}_c = T \text{diag}\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\} T^{-1}$ را محاسبه کنید.

گام ۵: ماتریس G_λ را به دست آورید.

گام ۶: ماتریس پس خورد حالت را از رابطه‌ی (۶.۴) محاسبه کنید.

مثال ۱۰۴. سیستم کنترل پذیر و مشاهده پذیر زیر را در نظر بگیرید، می خواهیم ماتریس پس خورد F را طوری تعیین کنیم که مقادیر $\mathcal{L} = \{-0.3, 0, 0.1\}$ به ماتریس حلقه بسته تخصیص داده شود.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 9 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 35.72 & 73.22 & -545.7 \\ 0 & -12.72 & 91.24 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1.77 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} -0.44 & 1.08 & -0.93 \\ -0.35 & 0.50 & -0.33 \end{bmatrix}$$

$$X_l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y_l = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y_r = \begin{bmatrix} 35.72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_v^1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.278 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.9996 \end{bmatrix} \quad S_v^2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.280 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.9996 \end{bmatrix} \quad S_v^3 = \begin{bmatrix} 0 & -0.281 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.9996 \end{bmatrix}$$

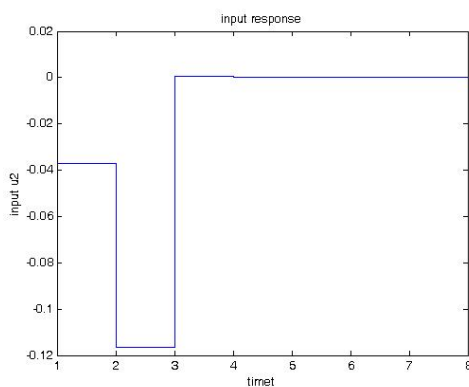
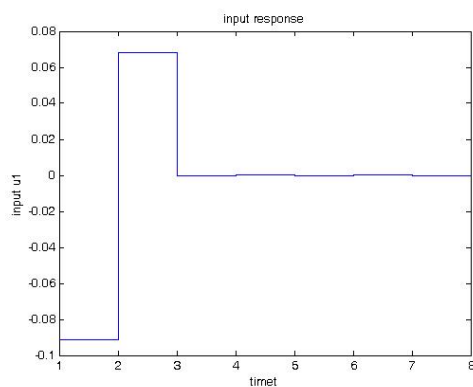
$$S_u^1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.2873 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.9578 \end{bmatrix} \quad S_u^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_u^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.995 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.9950 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -0.6147 & -0.7541 & 0.3933 \\ -0.1055 & -0.5445 & 1.2335 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0.9443 & 0.8081 & 0.4505 \\ 0.4583 & 0.1428 & 0.9304 \end{bmatrix}$$

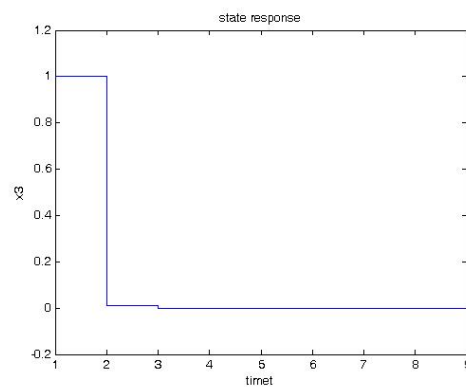
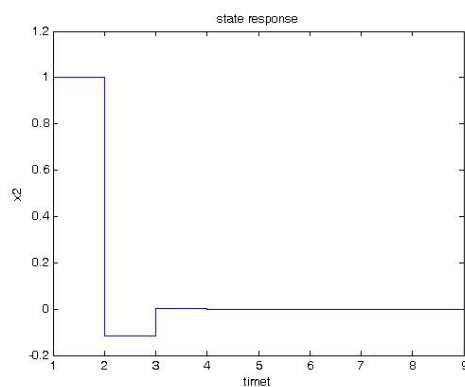
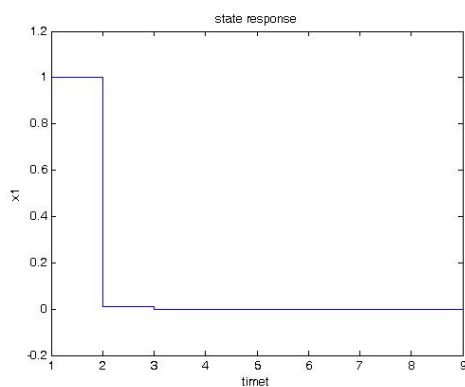
$$T = \begin{bmatrix} 0.303 & 0 & 0.1227 \\ -0.6147 & -0.7541 & 0.3933 \\ -0.1010 & -0.5445 & 1.2274 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0.9482 & 0.797 & -0.1103 \\ -11.9029 & -1.1482 & 1.5902 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0/14 & 0/52 & -4/71 \\ -0/02 & -0/06 & 0/62 \end{bmatrix}$$



شکل ۱.۴: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.



شکل ۲.۴: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.

فصل ۵

تخصیص مقادیر ویژه سیستم‌های توسیع‌یافته

۱.۵ معرفی

سیستم‌های توسیع‌یافته، بیش از مدل‌های دیگر سیستم‌های خطی، یک سیستم فیزیکی را توصیف می‌کند. کاربرد سیستم‌های توسیع‌یافته را در زمینه‌های متفاوتی مانند رباتیک، شبکه مدار الکتریکی، شیمی، اقتصاد و ... می‌توان یافت. کارهای اولیه در مبحث تخصیص مقدار ویژه در سیستم‌های توسیع‌یافته، از سال ۱۹۸۱ توسط تعدادی از محققان مانند کوب^۱ در سال ۱۹۸۱، آرمنتانو^۲ در سال ۱۹۸۴ و ... آغاز شد. در سال‌های اخیر تلاش‌های قابل ملاحظه‌ای برای آنالیز پایداری، توسعه تکنیک‌های پایداری و مطالعه‌ی ستری سیستم‌های توسیع‌یافته صورت گرفته است. به عنوان مثال، دان، لم و لیو^۳ در سال ۲۰۰۴ یک تخصیص مقدار ویژه ستر در سیستم‌های توسیع‌یافته با پس‌خورد خروجی، بر اساس روش تخصیص ساختار ویژه را بررسی کردند، در مقاله آراجو^۴ در ۲۰۱۰ ماتریس پس‌خورد ثابت و کنترل شده‌ی چندوجهی به‌وسیله‌ی یک مجموعه‌ی ثابت کنترل شده و یک مجموعه‌ی ثابت شرطی، و همچنین به‌وسیله‌ی تعریف یک سیستم افزوده متشکل از سیستم اصلی ساخته می‌شود. در این فصل، سیستم توسیع‌یافته کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.5)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.5)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ و $y(t) \in \mathbb{R}^r$ به ترتیب بردار حالت، ورودی و خروجی هستند. با فرض $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ماتریس‌های حقیقی و $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریسی مربعی و همواره منفرد، $1 \leq m \leq n$

^۱Cobb

^۲Armentano

^۳Duan, Lam and Liu

^۴Araujo

می‌باشد.

هدف این فصل، ارائه‌ی یک روش جدید جهت یافتن ماتریس پس‌خورد خروجی K است، به‌طوری‌که ماتریس حلقه بسته سیستم (۱۰۵) دارای مقادیر از پیش تعیین شده باشد. به این منظور ابتدا با استفاده از پس‌خورد خروجی مشتق، سیستم توسیع یافته را به سیستم استاندارد تبدیل می‌کنیم. پس‌خورد خروجی مشتق می‌تواند خیلی مفید و حتی در برخی موارد برای رسیدن به یک عملکرد مورد نظر ضروری باشد. به‌علاوه برخی برنامه‌های عملی وجود دارند که با استفاده از پس‌خورد خروجی مشتق به‌جای پس‌خورد حالت آسانتر به جواب می‌رسند. برای نمونه در کنترل سیستم توقف چرخ ماشین، کنترل ارتعاش طناب پل، کنترل ارتعاش قطعات ارباه فرود و

استفاده از پس‌خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای در تبدیل سیستم توسیع یافته، که ما بعد از پس‌خورد خروجی مشتق، به آن پرداخته‌ایم، شرط رتبه کامل بودن ماتریس A را حذف می‌کند. به این ترتیب، در این فصل دو حالت از سیستم توسیع یافته بررسی شده‌است. حالت اول سیستم توسیع یافته که در آن ماتریس A رتبه کامل است و حالت دوم سیستم توسیع یافته که در آن ماتریس A رتبه کامل نیست. در نهایت با توجه به سیستم استاندارد به‌دست آمده و روش مقدار ویژه‌ی معکوس ماتریسی، ماتریس پس‌خورد خروجی محاسبه می‌شود.

۲.۵ پس‌خورد خروجی مشتق

در این بخش، طرح کنترل با استفاده از پس‌خورد خروجی مشتق برای سیستم خطی توسیع یافته ارائه می‌شود. ابتدا ورودی را به صورت پس‌خورد خروجی مشتق تعریف می‌کنیم و سپس سیستم توسیع یافته را به یک سیستم استاندارد با پس‌خورد خروجی، تبدیل می‌کنیم.

سیستم خطی توسیع یافته‌ی کنترل پذیر و مشاهده‌پذیر (۱۰۵) را در نظر می‌گیریم:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t)$$

به‌طوری‌که $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ، $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ ، $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ هستند. با فرض $1 \leq m \leq n$ ،

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ می‌باشند.

فرض می‌کنیم:

$$(A) \quad \text{rank}[A] = n$$

$$(B) \quad \text{rank}[E|B] = n$$

$$(C) \quad \text{rank}[B] = m$$

حال قانون کنترل را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{u}(t) = K C \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (۳.۵)$$

که در آن K ماتریس پس‌خورد خروجی است. مشخص است که اگر پیش فرض (B) برقرار باشد، آنگاه K وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\text{rank}[E - BKC] = n$$

برای K صادق در رابطه فوق و با جایگذاری قانون کنترل تعریف شده در سیستم (۱.۵)، معادله استاندارد زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} E \dot{\mathbf{x}}(t) &= A \mathbf{x}(t) + B \mathbf{u}(t) \\ E \dot{\mathbf{x}}(t) &= A \mathbf{x}(t) + B K C \dot{\mathbf{x}}(t) \\ (E - B K C) \dot{\mathbf{x}}(t) &= A \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= (E - B K C)^{-1} A \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (۴.۵)$$

لم ۱.۵. ماتریس $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را با $\text{rank}(Z) = n$ و مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ در نظر بگیرید. آنگاه مقادیر ویژه Z^{-1} برابرند با $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$.

برهان. برای هر مقدار ویژه $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ از Z ، یک بردار ویژه ν وجود دارد به‌طوری‌که:

$$Z \nu = \lambda \nu$$

فرض شده که $\text{rank}(Z) = n$ پس $\lambda \neq 0$ ، بنابراین داریم:

$$\nu = Z^{-1} \lambda \nu \rightarrow \lambda^{-1} \nu = Z^{-1} \nu$$

□

بنابراین λ^{-1} یک مقدار ویژه Z^{-1} است.

ملاحظه ۱.۵. $\lambda = a + jb$ را یک مقدار ویژه ماتریس Z در نظر بگیرید، آنگاه از لم (۱.۵)

$$\lambda^{-1} = (a + jb)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2}$$

یک مقدار ویژه Z^{-1} است. بنابراین توجه کنید که قسمت حقیقی λ و λ^{-1} هم‌علامتند. پس اگر Z هرویتز باشد (قسمت حقیقی تمامی مقادیر ویژه آن صفر باشد)، آنگاه Z^{-1} نیز هرویتز است.

قضیه ۱.۵. با قرار دادن

$$A_n = A^{-1}E, \quad B_n = -A^{-1}B, \quad \mathbf{u}(t) = KC\mathbf{x}_n(t). \quad (۵.۵)$$

سیستم زیر را خواهیم داشت:

$$\dot{\mathbf{x}}_n(t) = A_n\mathbf{x}_n(t) + B_n\mathbf{u}_n(t) \quad (۶.۵)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}_n(t) \quad (۷.۵)$$

فرض می‌کنیم زوج (A_n, B_n) کنترل پذیر باشند و K پس خورد خروجی که مجموعه $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ به‌طوریکه $\lambda_i \in \mathbb{C}$ و $\lambda_i \neq 0$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ را به سیستم حلقه بسته (۶.۵) تخصیص می‌دهد. آنگاه برای پس خورد K ، مجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته سیستم کنترل‌پذیر (۶.۵) هستند. برهان. فرض کنید زوج (A_n, B_n) کنترل پذیر باشند، آنگاه پس خورد حالت K وجود دارد که سیستم (۶.۵) با پس خورد خروجی (۷.۵) کنترل پذیر باقی بماند، از (۵.۵) داریم

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_n(t) &= A_n\mathbf{x}_n(t) + B_n\mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_n(t) &= A^{-1}E\mathbf{x}_n(t) - A^{-1}BKC\dot{\mathbf{x}}_n(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_n(t) &= A^{-1}(E - BKC)\mathbf{x}_n(t) \end{aligned} \quad (۸.۵)$$

از (۸.۵) و لم (۱.۵) نتیجه می‌شود $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ای از $(E - BKC)^{-1}A$ هستند. بنابراین این مقادیر ویژه، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته سیستم (۱.۵) و پس خورد حالت مشتق (۳.۵) می‌باشد. $\square$

۳.۵ پس خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای

در این بخش، طرح کنترل با استفاده از پس خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای برای سیستم خطی توسیع‌یافته ارائه می‌شود. ابتدا بردار ورودی را به‌صورت مجموعی از پس خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای تعریف می‌کنیم و سپس سیستم توسیع‌یافته را به یک سیستم معمولی با پس خورد خروجی تبدیل می‌کنیم. سیستم توسیع‌یافته‌ی خطی کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر (۱.۵) را در نظر بگیرید:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t)$$

به‌طوری‌که $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ، $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ و $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ هستند. با فرض $1 \leq m \leq n$ ، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ می‌باشند.

حال کنترل پس خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{u}(t) = KC\dot{\mathbf{x}}(t) + K'C\mathbf{x}(t) \quad (9.5)$$

که در آن K' ماتریس پس خورد خروجی است، که مقادیر ویژه‌ی غیر صفر و پایدار را به سیستم حلقه بسته‌ی سیستم

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (10.5)$$

$$\mathbf{u}(t) = K'\mathbf{x}(t) \quad (11.5)$$

اختصاص می‌دهد. پس هدف برنامه، به دست آوردن ماتریس پس خورد خروجی K است، به طوری که مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه بسته‌ی سیستم کنترل شده‌ی (۱۰.۵)، از مجموعه‌ی داده شده‌ی $\mathcal{L} = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ انتخاب شود.

مزیت استفاده از پس خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای نسبت به پس خورد خروجی مشتق در این است که شرط رتبه کامل بودن ماتریس A حذف می‌شود، به این ترتیب مفروضات زیر را داریم:

$$(A) \quad \text{rank}[E|B] = n$$

$$(B) \quad \text{rank}[B] = m$$

ملاحظه ۲.۵. بدیهی است که اگر پیش فرض (A) برقرار باشد آنگاه K و C وجود دارند که :

$$\text{rank}[E - BKC] = n \quad (12.5)$$

برای K صادق در (۱۲.۵) از (۹.۵) نتیجه می‌گیریم که سیستم (۱۰.۵) را می‌تواند به صورت سیستم خطی استاندارد زیر بازنویسی شود:

$$\begin{aligned} E\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ E\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + BK C\dot{\mathbf{x}}(t) + BK' C\mathbf{x}(t) \\ (E - BKC)\dot{\mathbf{x}}(t) &= (A + BK' C)\mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= (E - BKC)^{-1}(A + BK' C)\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (13.5)$$

قضیه ۲.۵. ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A_n = (A + BK' C)^{-1} E, \quad B_n = -(A + BK' C)^{-1} B \quad (14.5)$$

$$\mathbf{u}_n(t) = KC\mathbf{x}_n(t) \quad (15.5)$$

و که در آن زوج (A_n, B_n) کنترل پذیر هستند، فرض کنید K پس خورد حالتی باشد که مجموعه $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ قطب‌های سیستم حلقه بسته‌ی زیر باشند

$$\dot{\mathbf{x}}_n(t) = A_n\mathbf{x}_n(t) + B_n\mathbf{u}_n(t) \quad (16.5)$$

$$\mathbf{y}_n(t) = C\mathbf{x}_n(t) \quad (17.5)$$

به طوری که $\lambda_i \in \mathbb{C}$ و $\lambda_i \neq 0$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، آنگاه برای پس خورد K مجموعه‌ی $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ قطب‌هایی از سیستم کنترل پذیر (۱۰.۵) با پس خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای (۳.۵) هستند و همچنین شرط (۱۲.۵) برقرار است.

برهان. فرض کنید زوج (A_n, B_n) کنترل پذیر باشند، آنگاه پس خورد خروجی K وجود دارد که سیستم (۱۶.۵) با پس خورد خروجی (۱۵.۵) کنترل پذیر باقی بماند. طبق فرض توسط (۱۶.۵) مقادیر ویژه برابرند با $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$. حال از (۱۴.۵) و (۱۶.۵) داریم

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_n(t) &= (A + BK' C)^{-1} E\mathbf{x}_n(t) - (A + BK' C)^{-1} BKC\mathbf{x}_n(t) \\ &= (A + BK' C)^{-1} (E - BKC)\mathbf{x}_n(t) \end{aligned} \quad (18.5)$$

از (۱۸.۵) و لم (۱۰.۵) نتیجه می‌شود $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ای از $(E - BKC)(A + BK' C)^{-1}$ هستند. بنابراین این قطب‌ها، قطب‌هایی از سیستم (۱۰.۵) و پس خورد خروجی مشتق (۳.۵) می‌باشد. $\square$

این نتایج تعمیمی از روش‌های پیشنهاد شده در [۱] و [۵] می‌باشد.

۱.۳.۵ مقدار ویژه‌ی معکوس

حال با در نظر گرفتن معادله‌ی سیستم حلقه بسته‌ی $\tilde{A} = A_n + B_n K C$ و ماتریس U_1 و V_1 که به ترتیب ماتریس‌های به دست آمده از بردارهای پایه‌ی فضای پوچ B_n^t و C هستند همچنین فرمول‌های (۵.۵) و (۱۴.۵) داریم:

$$\tilde{A}V_1 = (A_n + B_n K C)V_1 = A_n V_1 \quad (۱۹.۵)$$

$$U_1^t \tilde{A} = U_1^t (A_n + B_n K C) = U_1^t A_n \quad (۲۰.۵)$$

با توجه به قضیه (۳.۳) با قرار دادن $Y_r = A_n V_1$ و $Y_l = A_n^t U_1$ ، $Y_l = V_1$ ، $X_l = U_1$ با قرار دادن $\mathcal{L}' = \{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ باشد، تبدیل می‌شود. به این ترتیب، $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ به سیستم توسیع یافته‌ی (۱.۵) تخصیص داده می‌شود.

اگر $\tilde{A}$ موجود باشد آنگاه ماتریس پس‌خورد خروجی K از معادله زیر به دست می‌آید

$$K = B_n^\dagger (\tilde{A} - A_n) C^\dagger \quad (۲۱.۵)$$

که در آن $B_n^\dagger$ و $C^\dagger$ به ترتیب معکوس مور-پنروز B_n و C هستند.

این روش عموماً به جواب می‌رسد و با فرض اینکه B_n و C رتبه کامل باشند و $rank(B_n) + rank(C) \geq$ و $rank(A_n)$ یک جواب با احتمال ۱، برای مجموعه‌ی $\mathcal{L}$ خواهیم داشت.

ملاحظه ۳.۵. در حالتی که ماتریس‌های B_n و C معکوس پذیر باشند، خطای روش صفر خواهد بود.

۲.۳.۵ الگوریتم

در این بخش، یک الگوریتم ساده برای روش ارائه شده شامل چهار گام را آورده‌ایم. این الگوریتم برای سیستم توسیع یافته، هم در حالتی که ماتریس A رتبه کامل باشد و هم در حالتی که رتبه کامل نباشد، قابل استفاده می‌باشد. ابتدا با توجه به اینکه ماتریس A در سیستم مورد نظر رتبه کامل است یا نه، با توجه به قضایای گفته شده، آن را به سیستم استاندارد شامل ماتریس‌های A_n ، B_n و C تبدیل کرده و از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم.

هدف: تخصیص مقدار ویژه‌ی سیستم توسیع یافته

گام اول: ماتریس A و B و C و مقادیر ویژه‌ی $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ را وارد کنید.

گام دوم: با توجه به رتبه کامل بودن ماتریس A ، ماتریس‌های A_n و B_n و C و مجموعه‌ی $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ را محاسبه کنید.

گام سوم: فضای پوچ B_n^t و C به ترتیب با نام‌های X_l و X_r را یافته سپس $Y_l = A_n^t X_l$ و $Y_r = A_n X_r$ را بیابید. فضای پوچ $(\lambda_i X_l - Y_l)$ و $(\lambda_i X_r - Y_r)$ را محاسبه کنید.

گام چهارم: بردارهای x و y را از روش تکرار بیابید. سپس ماتریس T و $\tilde{A} = T \text{diag}\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\} T^{-1}$ همچنین K را از فرمول

$$K = B_n^\dagger (\tilde{A} - A_n) C^\dagger \quad (22.5)$$

محاسبه کنید.

مثال ۱۰.۵. سیستم توسیع یافته خطی پیوسته زمانی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & \circ \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \circ & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

با در نظر گرفتن $u(t) = KC\dot{x}(t)$ با توجه به قضیه (۱۰.۵)، مقادیر A_n و B_n را به دست آورده و سیستم توسیع یافته را به فرم استاندارد بازنویسی می‌کنیم؛ سپس با در نظر گرفتن $\mathcal{L}^{-1} = \{-0.5, -1\}$ با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی، ماتریس پس‌خورد خروجی K را به دست می‌آوریم

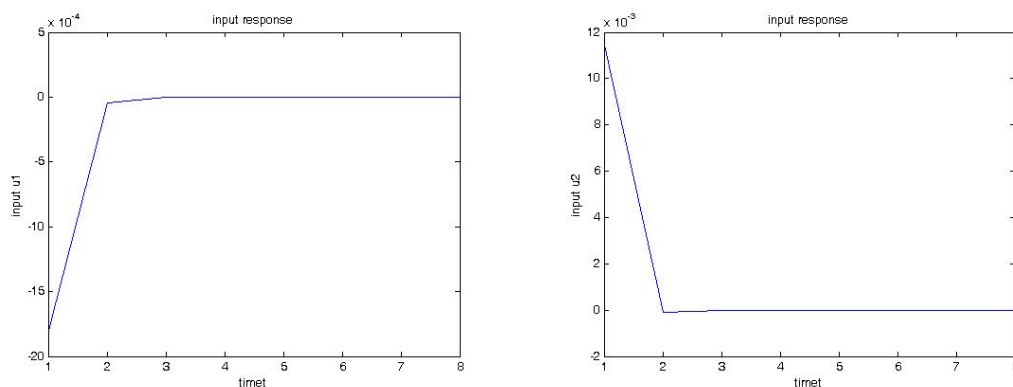
$$A_n = \begin{bmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \quad B_n = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & \circ \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \circ & 3 \end{bmatrix}$$

$$S_u = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix} \quad S_v = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}$$

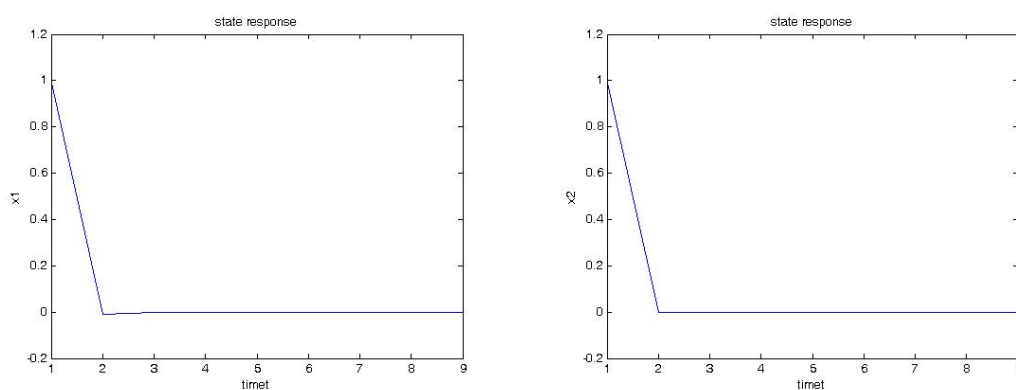
$$x = \begin{bmatrix} 1/7162 & -0.3061 \\ -0.8740 & 1/9844 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0.6324 & 0.2785 \\ 0.0975 & 0.5469 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1/7162 & -0.3061 \\ -0.8740 & 1/9844 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.0426 & -0.0837 \\ 0.2763 & -0.4574 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.2763 & 0.318 \\ 0.3831 & 0.5123 \end{bmatrix}$$



شکل ۱.۵: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.



شکل ۲.۵: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.

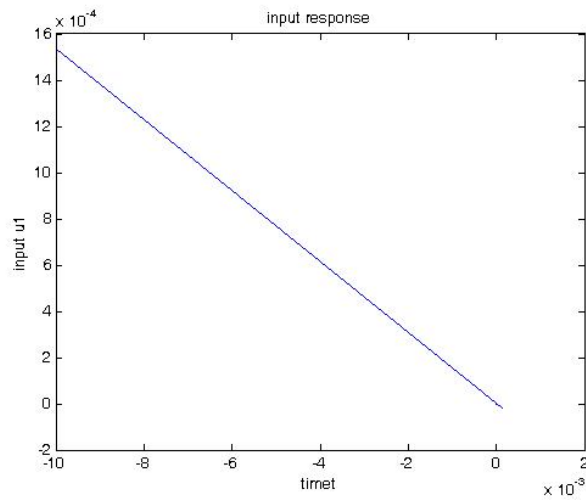
مثال ۲.۵. سیستم توسیع یافته خطی پیوسته زمانی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

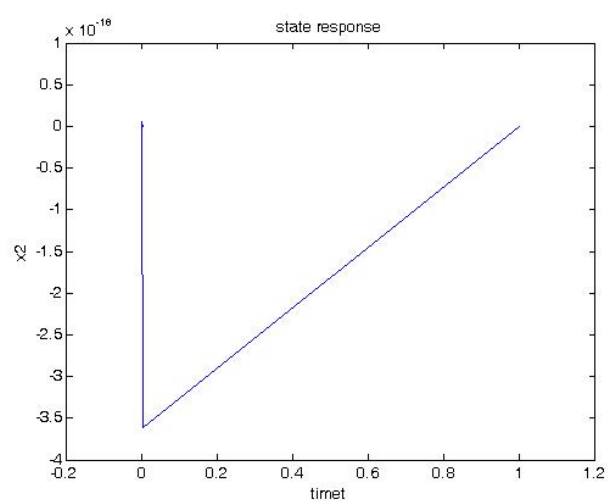
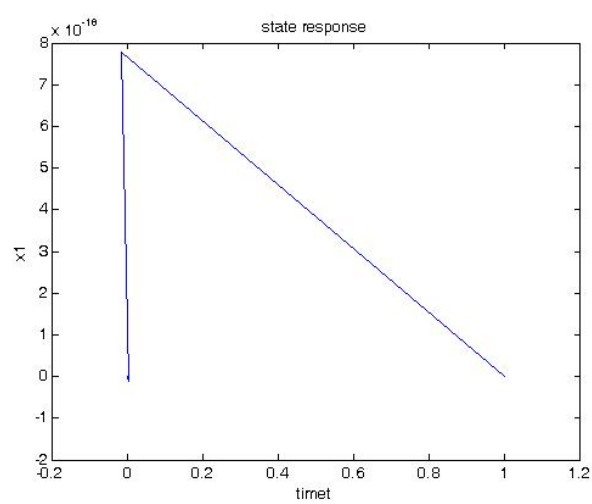
$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} x(t)$$

می‌خواهیم مقادیر $\mathcal{L} = \{-2 + 1i, -2 - 1i\}$ را به سیستم حلقه بسته تخصیص دهیم، چون ماتریس A رتبه کامل نیست، با توجه به قضیه (۲.۵)، مقادیر A_n و B_n را به دست آورده و سیستم توسیع یافته را به فرم استاندارد بازنویسی می‌کنیم؛ سپس با در نظر گرفتن $\mathcal{L}^{-1} = \{-0.4 - 0.2i, -0.4 + 0.2i\}$ با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی، ماتریس پس‌خورد خروجی K را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
 A_n &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.5 - 0.5i \end{bmatrix} & B_n &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 - 0.5i \end{bmatrix} & C &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \\
 X_l &= \begin{bmatrix} 0.7071 + 0.7071i \\ 0 \end{bmatrix} & X_r &= \begin{bmatrix} 0.8321 \\ -0.5547 \end{bmatrix} \\
 Y_l &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7071 + 0.7071i \end{bmatrix} & Y_r &= \begin{bmatrix} -0.5547 \\ -0.2774 + 0.2774i \end{bmatrix} \\
 S_v^1 &= \begin{bmatrix} 0.3524 + 0.8114i \\ -0.410 - 0.4645i \end{bmatrix} & S_v^2 &= \begin{bmatrix} 0.9156 - 0.195i \\ -0.974 + 0.3896i \end{bmatrix} \\
 S_u^1 &= \begin{bmatrix} -0.9058 + 0.1134i \\ 0.3396 - 0.2265i \end{bmatrix} & S_u^2 &= \begin{bmatrix} -0.7535 + 0.5153i \\ 0.4045 - 0.554i \end{bmatrix} \\
 T &= \begin{bmatrix} 0.132 - 0.7021i & 0 \\ 0.1352 + 0.2835i & 0 \end{bmatrix} & \tilde{A} &= \begin{bmatrix} -0.8 & -1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix} \\
 K &= [-0.2 + 0.308i]
 \end{aligned}$$



شکل ۳.۵: مؤلفه بردار ورودی به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شود.



شکل ۴.۵: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.

فصل ۶

تخصیص مقادیر ویژه سیستم‌های با تأخیر زمانی

۱.۶ معرفی

تأخیر زمانی در سیستم‌های دینامیکی، معمولاً در اندازه‌گیری، حمل و نقل، محاسبات و ... رخ می‌دهد، و به‌عنوان منبع اصلی بی‌ثباتی و عملکرد ضعیف سیستم به حساب می‌آید. در مباحث مهندسی، می‌توان تأخیر زمانی در سیستم‌های دینامیکی را در اندازه‌گیری، حمل و نقل و یا در محاسبات دید. به همین دلیل در سال‌های اخیر مطالعه و تحقیق زیادی در این زمینه، برای پیش‌بینی صحیح رفتار دینامیکی، انجام شده است.

اولین تحقیقات در زمینه کنترل سیستم‌های با تأخیر زمانی توسط کورزویل^۱ در سال ۱۹۶۳ انجام شد. بعد از آن کوپک^۲ در سال ۱۹۶۵، روش بردار افزوده‌ی حالت برای سیستم‌های با تأخیر زمانی را ارائه کرد و پس از آن شماری از محققان از ایده‌ی کوپک برای کنترل سیستم‌های با تأخیر زمانی استفاده کردند. به عنوان مثال، شرایط پایداری جدید توسط دینگ و یانگ^۳ بیان شد، در مقاله‌ی کابامبا و لانگمن^۴ در سال ۱۹۸۹ و مقاله‌ی سیرموس و لویز^۵ تکنیک‌هایی جهت تخصیص مقدار ویژه ارائه شده است. بررسی ستبری در یافتن ماتریس پس‌خورد توسط پارک^۶ در ۲۰۰۱ و هو، چن، لین و چو^۷ در ۲۰۱۰ انجام شد. مقاله‌ی وی و دانگ^۸ در ۲۰۱۲ ثبات و تعیین پس‌خورد خروجی سیستم‌های گسسته خطی و غیر خطی با تأخیر زمانی را بررسی کرده است.

^۱Kurzweil

^۲Koepecke

^۳Ding and Yang

^۴Kabamba and Longman

^۵Syrmos and Lewis

^۶Park

^۷Ho, Chen, Lin and Chou

^۸Wei and Dong

سیستم‌های گسسته زمانی، با تأخیر زمانی به سه دسته تقسیم می‌شوند، دسته اول سیستم‌های با تأخیر زمانی روی بردار ورودی، که در [۱۹] به طور کامل بررسی شده است. دسته دوم سیستم با تأخیر زمانی روی بردار حالت و دسته سوم سیستم با تأخیر زمانی روی بردار ورودی و حالت است. هدف از این روش، ساخت ماتریس پس‌خورد خروجی برای سیستم‌های افزوده برای هر سه نوع سیستم با تأخیر زمانی است، به طوری که سیستم حلقه بسته دارای مقادیر ویژه در ناحیه پایدار باشد.

۲.۶ سیستم با تأخیر زمانی روی بردار حالت

در این بخش، سیستم کنترل پذیر با تأخیر زمانی روی بردار حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{x}(i+1) = A_0 \mathbf{x}(i) + \sum_{j=1}^r A_j \mathbf{x}(i-j) + B \mathbf{u}(i) \quad (1.6)$$

$$\mathbf{y}(i) = C_0 \mathbf{x}(i) + \sum_{j=1}^r C_j \mathbf{x}(i-j) \quad (2.6)$$

به طوری که $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی و $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ بردار خروجی، $A_0, A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ با فرض $1 \leq m \leq n$ ، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ به ترتیب ماتریس حالت و ورودی هستند.

هدف این فصل، یافتن ماتریس پس‌خورد خروجی K است به طوری که ماتریس حلقه بسته سیستم (۱.۶) دارای مقادیر از پیش تعیین شده باشد. به این منظور ابتدا با استفاده از بردار حالت افزوده، سیستم با تأخیر زمانی روی بردار حالت را به سیستم استاندارد تبدیل می‌کنیم. در نهایت با توجه به سیستم به دست آمده و روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی، ماتریس پس‌خورد خروجی محاسبه می‌شود. حال بردار حالت افزوده را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{x}_1(i+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(i+1) \\ \mathbf{x}(i) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(i-(r-1)) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

با جایگذاری (۳.۶) در سیستم (۱.۶)، معادله استاندارد زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{x}_1(i+1) = \bar{A} \mathbf{x}_1(i) + \bar{B} \mathbf{u}(i) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{y}(i) = \bar{C} \mathbf{x}_1(i) \quad (5.6)$$

که در آن

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_r \\ I_n & & & \circ \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \circ & \dots & I_n & \circ \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [C_0 \quad C_1 \quad \dots \quad C_r]$$

می‌باشد. حال با قرار دادن مقادیر $\bar{A}$ و $\bar{B}$ و $\bar{C}$ می‌توان ماتریس پس‌خورد خروجی K را به‌گونه‌ای محاسبه می‌نماییم که ماتریس حلقه بسته $(\bar{A} + \bar{B}K\bar{C})$ دارای مقادیر ویژه‌ی غیر صفر و از پیش تعیین شده در فضای پایداری باشد.

۳.۶ سیستم با تأخیر روی بردار ورودی

در این بخش، سیستم کنترل پذیر با تأخیر زمانی روی بردار ورودی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{x}(i+1) = A\mathbf{x}(i) + \sum_{\nu=1}^l B_\nu \mathbf{u}(i-\nu) \quad (6.6)$$

$$\mathbf{y}(i) = C\mathbf{x}(i) \quad (7.6)$$

که در آن $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ و $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ و $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$. با فرض $1 \leq m \leq n$ و $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B_\nu \in \mathbb{R}^{n \times m}$ به‌ترتیب ماتریس حالت و ورودی هستند، همچنین فرض می‌کنیم $m = n$.

هدف، یافتن ماتریس پس‌خورد خروجی K است به‌طوری‌که ماتریس حلقه بسته سیستم (۱.۶) دارای مقادیر از پیش تعیین شده باشد. به این منظور ابتدا با استفاده از بردار حالت افزوده، سیستم با تأخیر زمانی روی بردار ورودی را به سیستم استاندارد تبدیل می‌کنیم. در نهایت با توجه به سیستم به‌دست آمده و روش مقدار ویژه‌ی معکوس ماتریسی، ماتریس پس‌خورد خروجی محاسبه می‌شود. حال بردار حالت افزوده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{x}_1(i+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(i+1) \\ \mathbf{u}(i) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(i-(l-1)) \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

با جایگذاری (۸.۶) در سیستم (۱۰.۶)، معادله استاندارد زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{x}_1(i) = \bar{A}\mathbf{x}_1(k) + \bar{B}\mathbf{u}(k) \quad (9.6)$$

$$\mathbf{y}(i) = \bar{C}\mathbf{x}_1(i) \quad (10.6)$$

که در آن

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{l-1} & B_l \\ 0 & & \dots & & & 0 \\ & I_n & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & I_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ I_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [C \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

حال با قرار دادن مقادیر $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ ، $\bar{C}$ می‌توان ماتریس پس‌خورد خروجی K را به گونه ای محاسبه می‌نماییم که ماتریس حلقه بسته $(\bar{A} + \bar{B}K\bar{C})$ دارای مقادیر ویژه‌ی غیر صفر و از پیش تعیین شده در فضای پایداری باشد.

۴.۶ سیستم با تأخیر روی بردار حالت و ورودی

در این بخش، سیستم کنترل پذیر با تأخیر زمانی روی بردار حالت و ورودی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{x}(i+1) = A_0\mathbf{x}(i) + \sum_{j=1}^r A_j\mathbf{x}(i-j) + \sum_{\nu=1}^l B_\nu\mathbf{u}(i-\nu) \quad (11.6)$$

$$\mathbf{y}(i) = C_0\mathbf{x}(i) + \sum_{j=1}^r C_j\mathbf{x}(i-j) \quad (12.6)$$

به طوریکه $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار ورودی و $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ بردار خروجی. با فرض $1 \leq m \leq n$ ، $A_0, A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B_\nu \in \mathbb{R}^{n \times m}$ به ترتیب ماتریس حالت و ورودی هستند. همچنین فرض می‌کنیم $m = n$.

هدف، یافتن ماتریس پس‌خورد خروجی K است به‌طوری‌که ماتریس حلقه بسته سیستم (۱۰.۶) دارای مقادیر از پیش تعیین شده باشد. به این منظور ابتدا با استفاده از بردار حالت افزوده، سیستم با تأخیر زمانی روی بردار حالت و ورودی را به سیستم استاندارد تبدیل می‌کنیم. در نهایت با توجه به سیستم به‌دست آمده و روش مقدار ویژه‌ی معکوس ماتریسی، ماتریس پس‌خورد خروجی محاسبه می‌شود.

حال بردار حالت افزوده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{x}_1(i+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(i+1) \\ \mathbf{x}(i) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(i-(r-1)) \\ \mathbf{u}(i) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(i-(l-1)) \end{bmatrix} \quad (13.6)$$

با جایگذاری (۱۳.۶) در سیستم (۱۰.۶)، معادله استاندارد زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{x}_1(i+1) = \bar{A}\mathbf{x}_1(i) + \bar{B}\mathbf{u}(i) \quad (14.6)$$

$$\mathbf{y}(i) = \bar{C}\mathbf{x}_1(i) \quad (15.6)$$

که در آن

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{r-1} & A_r & B_1 & B_2 & \dots & B_{l-1} & B_l \\ I_n & 0 & \dots & & & & & & & 0 \\ 0 & I_n & 0 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & I_n & & & & & & \\ 0 & & & & \dots & & & & & 0 \\ & & & & & I_n & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & I_n & & \\ 0 & & & & \dots & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \\ I_m \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [C_0 \quad C_1 \quad \dots \quad C_r]$$

اکنون با قرار دادن مقادیر $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ ، $\bar{C}$ می‌توان ماتریس پس‌خورد خروجی K را به‌گونه‌ای محاسبه می‌نماییم که ماتریس حلقه بسته $(\bar{A} + \bar{B}K\bar{C})$ دارای مقادیر ویژه‌ی غیر صفر و از پیش تعیین شده در فضای پایداری باشد.

۱.۴.۶ مقدار ویژه‌ی معکوس

در این فصل، با در نظر گرفتن معادله‌ی $\tilde{A} = (\bar{A} + \bar{B}K\bar{C})$ و ماتریس U_1 و V_1 که به‌ترتیب ماتریس‌های به‌دست آمده از بردارهای پایه‌ی فضای پوچ $\bar{B}^t$ و $\bar{C}$ است، مسئله‌ی تخصیص قطبی، به مسئله‌ی مقدار ویژه معکوس که در آن هدف یافتن ماتریس $\tilde{A}$ است، تبدیل می‌شود. داریم

$$\tilde{A}V_1 = (\bar{A} + \bar{B}K\bar{C})V_1 = \bar{A}V_1 \quad (۱۶.۶)$$

$$U_1^t \tilde{A} = U_1^t (\bar{A} + \bar{B}K\bar{C}) = U_1^t \bar{A} \quad (۱۷.۶)$$

حال با توجه به قضیه (۳.۳) با قرار دادن $X_r = V_1$ ، $X_l = U_1$ ، $Y_r = \bar{A}V_1$ و $Y_l = \bar{A}^t U_1$ ، می‌توان ماتریس $\tilde{A}$ را محاسبه کرد. اگر $\tilde{A}$ موجود باشد آنگاه ماتریس پس‌خورد خروجی K از معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$K = \bar{B}^\dagger (\tilde{A} - \bar{A}) \bar{C}^\dagger \quad (۱۸.۶)$$

که در آن $\bar{B}^\dagger$ و $\bar{C}^\dagger$ به‌ترتیب معکوس مور-پنروز $\bar{B}$ و $\bar{C}$ هستند. این روش عموماً به جواب می‌رسد و با فرض اینکه B و C رتبه کامل باشند و $rank(\bar{B}) + rank(\bar{C}) \geq rank(\bar{A})$ یک جواب با احتمال ۱، برای مجموعه‌ی $\mathcal{L}$ خواهیم داشت. در صورتی که ماتریس‌های $\bar{B}$ و $\bar{C}$ معکوس‌پذیر باشند، خطای روش صفر خواهد بود.

۲.۴.۶ الگوریتم

در این بخش، یک الگوریتم ساده برای روش ارائه شده شامل چهار گام را آورده‌ایم. این الگوریتم قابل استفاده برای هر سه حالت سیستم با تأخیر زمانی یعنی تأخیر روی بردار حالت، تأخیر روی بردار ورودی و تأخیر روی بردار حالت و ورودی می‌باشد. با توجه به اینکه این سه حالت در بخش‌های متفاوت بررسی شد و در همه‌ی آنها ماتریس افزوده ایجاد شده برای تبدیل به سیستم استاندارد، متفاوت ولی دارای اسامی یکسان می‌باشد؛ ابتدا با توجه به اینکه سیستم مورد نظر داده شده جزو کدام نوع سیستم با تأخیر زمانی است، با ماتریس‌های افزوده‌ی مناسب، آن را به سیستم استاندارد شامل ماتریس‌های $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ و $\bar{C}$ تبدیل کرده و از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم.

هدف: یافتن ماتریس پس‌خورد خروجی K در سیستم با تأخیر زمانی.

گام اول: ماتریس A و B و C و مقادیر ویژه‌ی $\lambda_1, \dots, \lambda_{n'}$ را وارد کنید.

گام دوم: با توجه به اینکه سیستم با تأخیر زمانی روی بردار حالت، ورودی و یا هر دو (حالت و ورودی) است، ماتریس $\bar{A}$ و $\bar{B}$ و $\bar{C}$ را محاسبه کنید.

گام سوم: فضای پوچ $\bar{B}^t$ و $\bar{C}$ به ترتیب با نام‌های X_l و X_r را یافته سپس $Y_l = \bar{A}^t X_l$ و $Y_r = \bar{A} X_r$ را بیابید. فضای پوچ $(\lambda_i X_l - Y_l)$ و $(\lambda_i X_r - Y_r)$ را محاسبه کنید.

گام چهارم: بردارهای x و y را از روش تکرار بیابید. سپس ماتریس T و $\tilde{A} = T \text{diag}\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\} T^{-1}$ را از فرمول

$$K = \bar{B}^\dagger (\tilde{A} - \bar{A}) \bar{C}^\dagger \quad (19.6)$$

محاسبه کنید.

مثال ۱۰.۶. سیستم خطی گسسته با تأخیر زمانی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} x(i+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(i) + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} x(i-1) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u(i) \\ y(i) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} x(i) + \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} x(i-1) \end{aligned}$$

می‌خواهیم مقادیر $\mathcal{L} = \{-0.3, -0.1, 0, 0.1, 0.3, 0.5\}$ را به سیستم حلقه بسته تخصیص دهیم، داریم:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 X_l &= \begin{bmatrix} 0.8944 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4472 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & X_r &= \begin{bmatrix} -0.2517 & 0.2353 & -0.9087 & 0.0408 \\ -0.4414 & 0.1177 & 0.1769 & 0.8094 \\ 0.6369 & 0.1469 & -0.1551 & 0.5405 \\ 0.1517 & 0.9095 & 0.2398 & -0.1530 \\ -0.1842 & 0.2495 & -0.1285 & -0.1632 \\ 0.5284 & -0.1408 & -0.2118 & 0.0311 \end{bmatrix} \\
 Y_l &= \begin{bmatrix} 0.8944 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.7889 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3416 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8944 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & Y_r &= \begin{bmatrix} 1.2171 & 2.0603 & -0.7960 & 0.3065 \\ -1.0269 & 0.0412 & -0.1934 & -0.5357 \\ 2.8347 & 0.4789 & -1.5426 & 0.7161 \\ -0.2517 & 0.2353 & -0.9087 & 0.0408 \\ -0.4414 & 0.1177 & 0.1769 & 0.8094 \\ 0.6369 & 0.1469 & -0.1551 & 0.5405 \end{bmatrix} \\
 S_u^1 &= \begin{bmatrix} 0.0309 & 0.2108 \\ -0.1291 & 0.1834 \\ 0.2549 & 0.0673 \\ -0.1030 & -0.7025 \\ 0.4303 & -0.6112 \\ -0.8495 & -0.2244 \end{bmatrix} & S_u^2 &= \begin{bmatrix} 0.0413 & 0.0548 \\ -0.0078 & 0.0811 \\ 0.0902 & -0.0181 \\ -0.4131 & -0.5479 \\ 0.0777 & -0.8106 \\ -0.9019 & 0.1812 \end{bmatrix} & S_u^3 &= \begin{bmatrix} -0.0635 & -0.0136 \\ -0.0499 & -0.0669 \\ -0.0581 & 0.0723 \\ -0.6349 & -0.1361 \\ -0.4991 & -0.6695 \\ -0.5813 & 0.7235 \end{bmatrix} \\
 S_u^4 &= \begin{bmatrix} -0.0635 & -0.0136 \\ -0.0499 & -0.0669 \\ -0.0581 & 0.0723 \\ -0.6349 & -0.1361 \\ -0.4991 & -0.6695 \\ -0.5813 & 0.7235 \end{bmatrix} & S_u^5 &= \begin{bmatrix} -0.1547 & 0.0924 \\ -0.2413 & -0.0357 \\ 0.0211 & 0.2698 \\ -0.5155 & 0.3079 \\ -0.8042 & -0.1189 \\ 0.0702 & 0.8992 \end{bmatrix} & S_u^6 &= \begin{bmatrix} -0.1191 & 0.2459 \\ -0.2361 & 0.1771 \\ 0.2700 & 0.3289 \\ -0.2381 & 0.4919 \\ -0.6721 & 0.3541 \\ 0.5399 & 0.6578 \end{bmatrix} \\
 S_v^1 &= \begin{bmatrix} -0.0694 & 0.0072 \\ -0.7538 & 0.1083 \\ -0.2033 & -0.2410 \\ 0.6183 & 0.1419 \\ 0.0173 & -0.3294 \\ -0.0547 & 0.8953 \end{bmatrix} & S_v^2 &= \begin{bmatrix} 0.0061 & -0.0035 \\ -0.7751 & 0.0365 \\ -0.2199 & -0.2384 \\ 0.5488 & 0.1733 \\ -0.1242 & -0.3584 \\ -0.1850 & 0.8850 \end{bmatrix} & S_v^3 &= \begin{bmatrix} 0.0623 & -0.0095 \\ -0.7522 & -0.0310 \\ -0.2211 & -0.2325 \\ 0.4798 & 0.1883 \\ -0.2415 & -0.4072 \\ -0.3048 & 0.8623 \end{bmatrix} \\
 S_v^4 &= \begin{bmatrix} 0.0623 & -0.0095 \\ -0.7522 & -0.0310 \\ -0.2211 & -0.2325 \\ 0.4798 & 0.1883 \\ -0.2415 & -0.4072 \\ -0.3048 & 0.8623 \end{bmatrix} & S_v^5 &= \begin{bmatrix} 0.1030 & -0.0162 \\ -0.7039 & -0.0961 \\ -0.2136 & -0.2215 \\ 0.4160 & 0.1903 \\ -0.3211 & -0.4698 \\ -0.4149 & 0.8273 \end{bmatrix} & S_v^6 &= \begin{bmatrix} 0.1338 & -0.0285 \\ -0.6428 & -0.1573 \\ -0.2050 & -0.2028 \\ 0.3627 & 0.1775 \\ -0.3650 & -0.5393 \\ -0.5119 & 0.7816 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

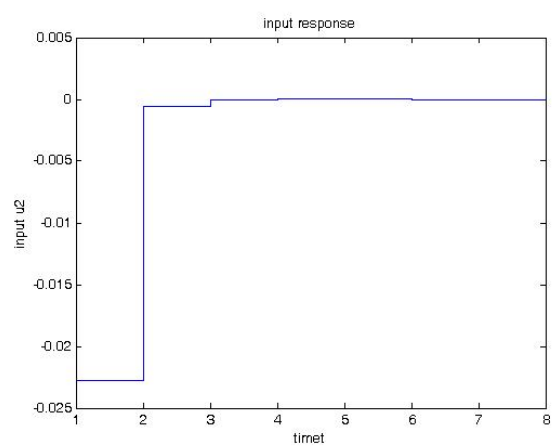
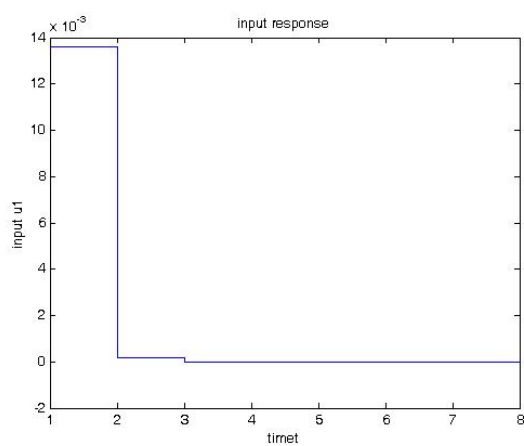
$$x = \begin{bmatrix} -0.0448 & 0 & 0 & 0 & 4.3395 & -5.1400 \\ -2.8456 & 0 & 0 & 0 & -2.5907 & 6.1160 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.3667 & 0 & 0 & 0 & 0.1556 & 0.1188 \\ -0.4071 & 0 & 0 & 0 & -0.2186 & 0.0644 \end{bmatrix}$$

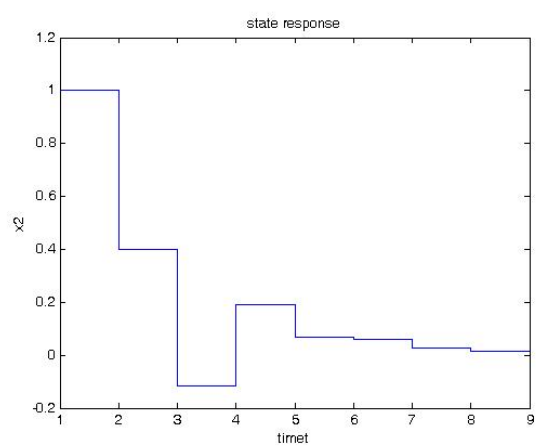
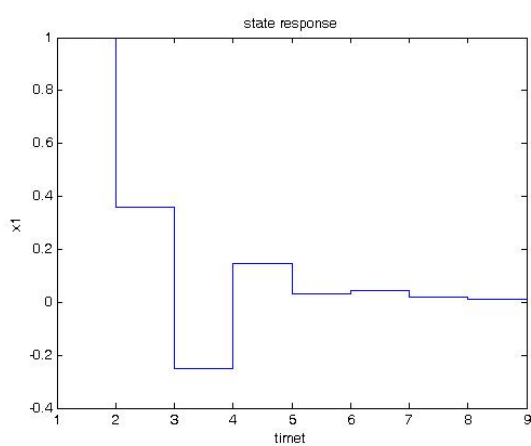
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -۱/۵۷۰۲ & ۱/۴۹۹۸ & ۰/۷۱۱۰ & ۰/۴۲۴۸ & -۰/۳۲۲۹ & -۰/۲۰۸۷ \\ ۰/۳۳۴۷ & ۰/۶۴۸۲ & ۰/۱۲۲۸ & ۱/۹۲۶۴ & -۱/۴۵۱۸ & -۰/۹۵۷۱ \\ -۵/۱۴۰۴ & ۲/۹۹۹۵ & ۱/۴۲۲۰ & -۳/۱۵۰۵ & ۲/۳۵۴۲ & ۱/۵۸۲۷ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

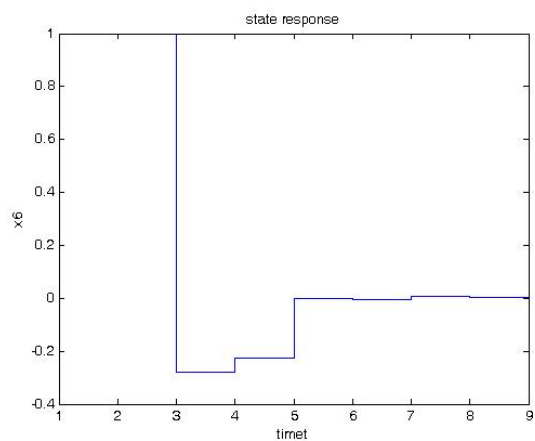
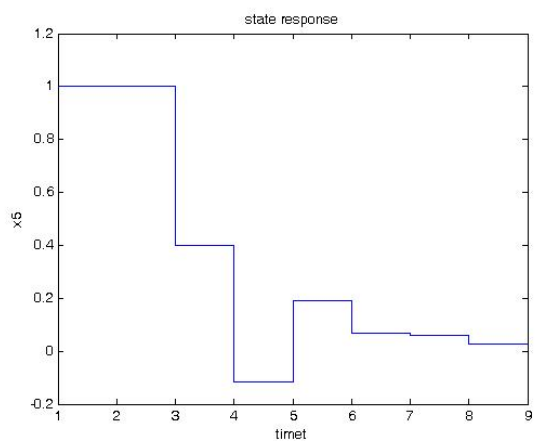
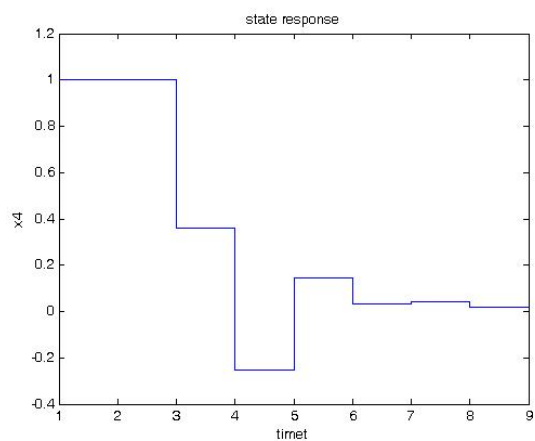
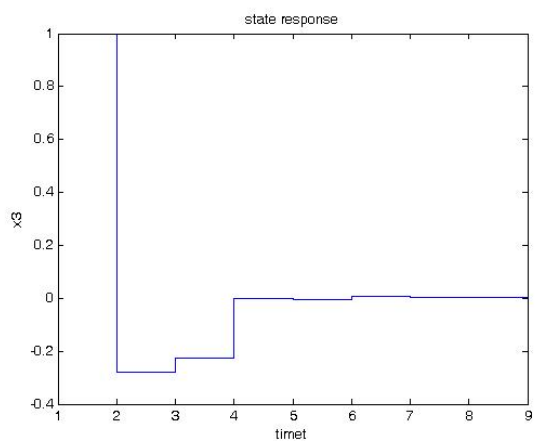
$$K = \begin{bmatrix} ۰/۸۶۰۱ & ۰/۴۰۰۷ \\ -۰/۱۱۷۳ & -۰/۰۸۴۲ \end{bmatrix}$$

$$\text{error} = ۰/۰۹, \text{iteration} = ۳۲$$



شکل ۱۰۶: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.





شکل ۲.۶: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.

فصل ۷

تخصیص مقادیر ویژه سیستم‌های دوبعدی مدل راسر

۱.۷ معرفی

سیستم خطی دو بعدی، با دو پارامتر زمانی به جای یک پارامتر معمول، در سال‌های گذشته علاقه مندان زیادی را به خود جلب کرده است. کاربرد سیستم‌های دو بعدی را در زمینه‌های مختلف مهندسی مانند، پردازش و تبدیل داده‌های تصویر، فرآیند های حرارتی، حرارت جریان آب و ... می‌توان دید. تئوری فضای حالت دو بعدی توسط راسر^۱ در سال ۱۹۷۵ معرفی شد. بر پایه‌ی این مدل چندین ویژگی مربوط به سیستم‌های دو بعدی مثل مباحثی همچون کنترل‌پذیری، مشاهده‌پذیری و قابل دسترس بودن توسط ایسینگ^۲ در سال‌های ۱۹۷۸ و ۱۹۷۹، کانگ^۳ در سال ۱۹۸۰ و مورف^۴ در سال ۱۹۷۷ بررسی شده است.

تخصیص مقدار ویژه‌ی سیستم‌های دو بعدی، توسط پاراسکوپولوس^۵ در سال ۱۹۷۹ و ۱۹۸۰ و کاسمیدو^۶ در سال ۱۹۸۰ مورد بررسی قرار گرفت. در مقاله‌ی کازورک^۷ در سال ۱۹۸۳، تخصیص مقادیر ویژه سیستم‌های دو بعدی برای یک گروه خاص از سیستم‌های دو بعدی، با فرم

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

حل و یک مجموعه از شروط لازم برای وجود یک جواب آورده شده است. الگوریتم‌های بیشتر در مقاله

^۱Roesser

^۲Eising

^۳Kung et.al

^۴Morf et.al

^۵Paraskevopoulos

^۶Paraskevopoulos and Kosmidou

^۷Kaczorek

مرزیوس^۸ در ۱۹۸۴ و یک شرط بهبود یافته در کازورک^۹ در ۱۹۸۵ ارائه شده است. در مقاله چو^{۱۰} در ۱۹۸۶، یک الگوریتم عددی پایدار برای تخصیص قطبی سیستم دو بعدی پیشنهاد شده است.

۲.۷ طرح مسأله

مدل استاندارد دو بعدی راسر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(i+1, j) \\ \mathbf{x}^\nu(i, j+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(i, j) \\ \mathbf{x}^\nu(i, j) \end{bmatrix} + B \mathbf{u}_{i,j} \quad (۱.۷)$$

$$\mathbf{y}(i, j) = C \begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(i, j) \\ \mathbf{x}^\nu(i, j) \end{bmatrix} \quad (۲.۷)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = [C_1 \quad C_2] \quad (۳.۷)$$

که در آن $\mathbf{x}^\nu(i, j) \in \mathbb{R}^{n_2}$ و $\mathbf{x}^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_1}$ ، $i, j \in \mathbb{Z}_+$ بردارهای حالت افقی و عمودی هستند و $\mathbf{u}_{i,j} \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی، $\mathbf{y}_{i,j} \in \mathbb{R}^r$ بردار خروجی، $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ، $A_2 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ، $A_3 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ ، $A_4 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ، $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ و $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ ماتریس‌هایی ثابت با ابعاد مناسب هستند. [۲۴]

حال قانون پس‌خورد خروجی برای سیستم (۱.۷) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{u}(i, j) = K \mathbf{y}(i, j) \quad (۴.۷)$$

که در آن $K \in \mathbb{R}^{m \times r}$ ماتریس پس‌خورد خروجی می‌باشد. با استفاده از قانون کنترل (۴.۷) و سیستم دو بعدی مدل راسر (۱.۷)، سیستم حلقه بسته‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(i+1, j) \\ \mathbf{x}^\nu(i, j+1) \end{bmatrix} = (A + BKC) \begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(i, j) \\ \mathbf{x}^\nu(i, j) \end{bmatrix} \quad (۵.۷)$$

هدف این بخش، یافتن ماتریس پس‌خورد خروجی K است به‌طوری‌که سیستم حلقه بسته $(A + BKC)$ به طور مجانبی پایدار باشد.

در بخش بعدی، چگونگی استفاده از مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس برای طراحی ماتریس پس‌خورد خروجی، به طوری که ماتریس حلقه بسته $(A + BKC)$ دارای مقادیر ویژه‌ی دلخواه و از پیش تعیین شده باشد را توضیح می‌دهیم.

^۸Mertzios

^۹Kaczorek

^{۱۰}Chu

۱.۲.۷ مقدار ویژه معکوس

حال با در نظر گرفتن معادله‌ی سیستم حلقه بسته ی $\tilde{A} = (A + BKC)$ و ماتریس U_1 و V_1 که به ترتیب ماتریس‌های به دست آمده از بردارهای پایه‌ی فضای پوچ B^t و C است، داریم:

$$\tilde{A}V_1 = (A + BKC)V_1 = AV_1 \quad (۶.۷)$$

$$U_1^t \tilde{A} = U_1^t (A + BKC) = U_1^t A \quad (۷.۷)$$

با توجه به قضیه (۳.۳) با قرار دادن $X_r = V_1$ ، $X_l = U_1$ و $Y_r = AV_1$ و $Y_l = A^t U_1$ مسأله‌ی تخصیص قطبی به مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس برای یافتن ماتریس $\tilde{A}$ ، به طوریکه مقادیر ویژه‌ی آن مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد، تبدیل می‌شود.

اگر $\tilde{A}$ موجود باشد، آنگاه ماتریس پس‌خورد خروجی K از معادله زیر به دست می‌آید:

$$K = B^\dagger (\tilde{A} - A) C^\dagger \quad (۸.۷)$$

که در آن $B^\dagger$ و $C^\dagger$ به ترتیب معکوس مور-پنروز B و C هستند.

این روش عموماً به جواب می‌رسد و با فرض اینکه B و C رتبه کامل و $\text{rank}(B) + \text{rank}(C) \geq \text{rank}(A)$ باشند، یک جواب با احتمال ۱، برای مجموعه‌ی $\mathcal{L}$ خواهیم داشت.

ملاحظه ۱.۷. در حالتی که ماتریس B و C معکوس پذیر باشند، خطای روش صفر خواهد بود.

۲.۲.۷ الگوریتم

در این بخش، یک الگوریتم ساده برای روش ارائه شده شامل چهار گام را آورده‌ایم. ابتدا با توجه به مدل راسر برای سیستم‌های دو بعدی، آن را به سیستم استاندارد شامل ماتریس‌های A ، B و C تبدیل کرده و از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم.

هدف: یافتن ماتریس پس‌خورد خروجی K سیستم دو بعدی مدل راسر.

گام اول: ماتریس‌های A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، B_1 ، B_2 ، C_1 و C_2 و مقادیر ویژه‌ی $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ را وارد کنید.

گام دوم: با توجه به مدل راسر، ماتریس A و B و C را بیابید.

گام سوم: فضای پوچ B^t و C به ترتیب با نام‌های X_r و X_l را یافته سپس و $Y_r = AX_r$ و $Y_l = A^t X_l$ را محاسبه کنید. فضای پوچ $(\lambda_i X_r - Y_r)$ و $(\lambda_i X_l - Y_l)$ را بیابید.

گام چهارم: بردارهای x و y را از روش تکرار بیابید.

گام پنجم: ماتریس T و $\tilde{A}$ همچنین K را محاسبه کنید.

مثال ۱۰۷. مدل دو بعدی راسر (۱۰۷) با ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 8 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در این مثال، هدف یافتن ماتریس پس‌خورد خروجی K است، به طوری که سیستم حلقه بسته به طور مجانبی پایدار باشد. مقادیر ویژه $\{-0.5, -0.3, 0, 0.1, 0.22, 0.4\}$ را به سیستم حلقه بسته تخصیص می‌دهیم.

$$X_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.8321 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5547 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

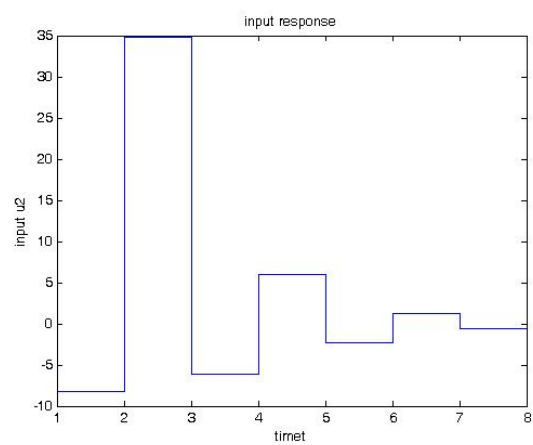
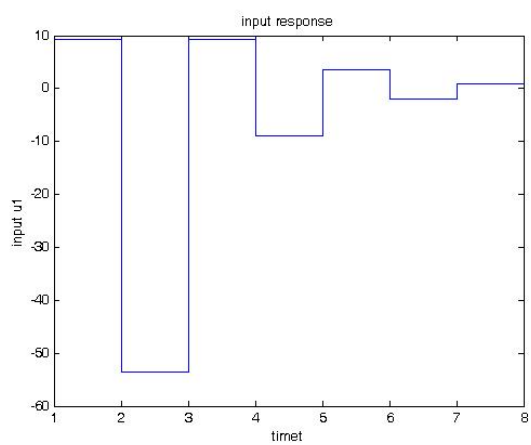
$$Y_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.8244 & 0 \\ 0 & 1 & -1.6641 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5547 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9415 & 0 \\ 0 & 0 & -1.6641 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5547 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_r = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 6 \\ 8 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -0.3192 & 0.2768 & 0.4239 & 0.6585 & 0.1953 & -0.5954 \\ -0.8801 & -0.9876 & -0.4237 & -0.7805 & -0.3379 & 1.2503 \end{bmatrix}$$

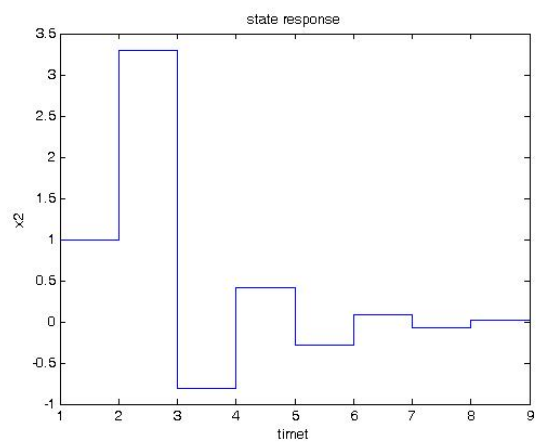
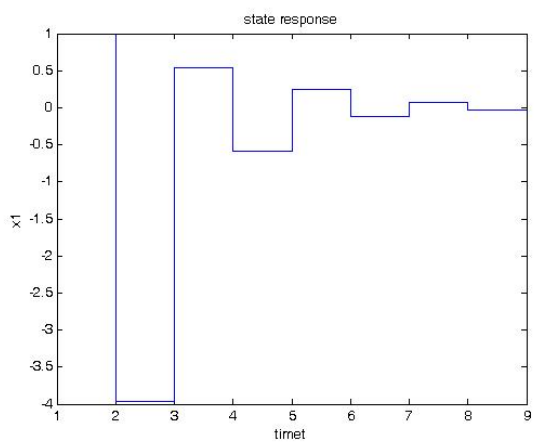
$$y = \begin{bmatrix} 0.4290 & 0.2257 & 0.3512 & 0.6528 & 0.0608 & 0.2204 \\ 0.2143 & 0.4733 & 0.6674 & 0.8842 & -0.1376 & 1.1546 \end{bmatrix}$$

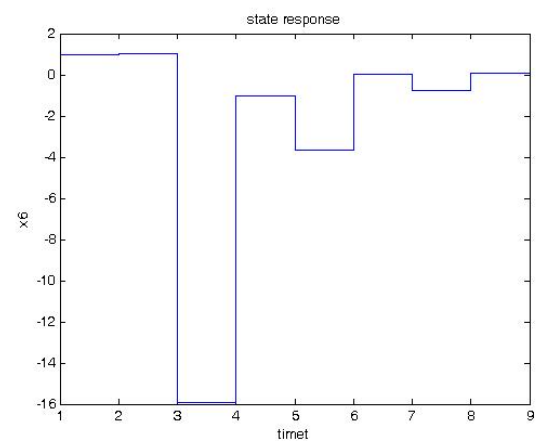
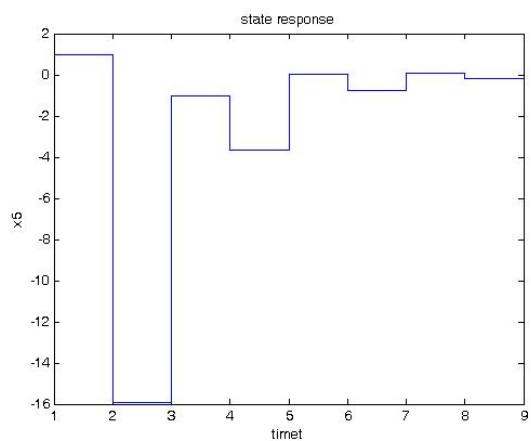
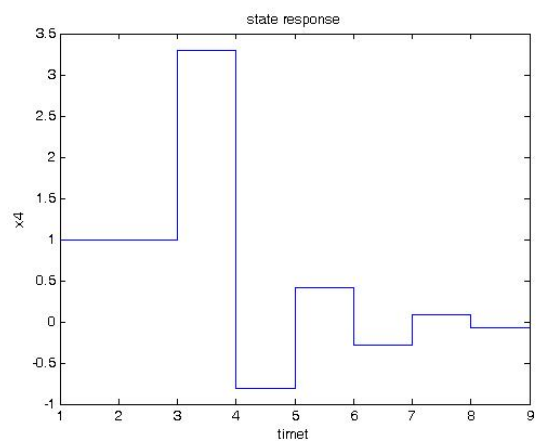
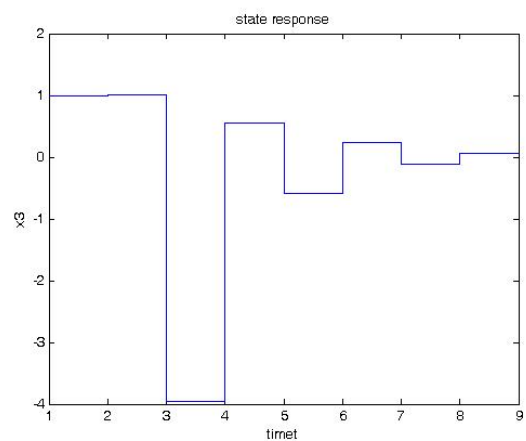
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -18.2368 & 4.0102 & -1.7786 & -5.9741 & 4.8977 & -1.7974 \\ -32.3280 & 7.8102 & -3.2257 & -10.6555 & 9.0002 & -3.2733 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -37.8551 & 9.0153 & -3.6679 & -12.4612 & 10.3465 & -3.6961 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 5.2242 & -11.2536 \\ -8.9213 & 18.2477 \end{bmatrix}$$



شکل ۱۰.۷: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.





شکل ۲.۷: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.

فصل ۸

تخصیص مقادیر ویژه سیستم‌های مرتبه-بالا

۱.۸ معرفی

روش‌های زیادی برای تخصیص مقادیر ویژه سیستم‌های خطی مرتبه اول (استاندارد) ارائه شده است. حالت خاص سیستم مرتبه بالا، سیستم خطی مرتبه دو می‌باشد که در زمینه‌های زیادی کاربرد دارد. مثل، آنالیز لرزه و سازه، کنترل فضاییما، کنترل رباتیک و... . از این رو مطالعه روی کنترل این سیستم‌ها بسیار مورد توجه قرار گرفته است. [۸]

بعضی از نتایج تحقیقات برای تخصیص مقدار ویژه سیستم‌های مرتبه دو را می‌توانید در مقالات چانگ و مقامی^۱ در سال ۱۹۹۲ و چو و داتا^۲ در سال ۱۹۹۶ ببینید. در مقاله کیم و کیم^۳ در سال ۱۹۹۹، یک الگوریتم برای تخصیص مقدار ویژه سیستم خطی مرتبه دو با ماتریس ضرایب متقارن مثبت معین پیشنهاد شده است. از آنجایی که این الگوریتم فقط به داده‌های سیستم اصلی نیاز دارد بسیار کاربردی است. در مقاله داتا و همکارانش^۴ در سال ۲۰۰۰، یک روش مؤثر برای تخصیص مقدار ویژه سیستم خطی مرتبه دو با ماتریس ضرایب متقارن ارائه شده است. در مقاله نیکول و کاوسکی^۵ در سال ۲۰۰۱، مسئله تخصیص مقدار ویژه سیستم‌های خطی درجه دو بحث شده است.

در این بخش، سیستم خطی مستقل از زمان مرتبه بالای کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A_m \mathbf{x}^{(m)}(t) + A_{m-1} \mathbf{x}^{(m-1)}(t) + \dots + A_1 \dot{\mathbf{x}}(t) + A_0 \mathbf{x}(t) = B \mathbf{u}(t) \quad (1.8)$$

^۱J. Juang and P. G. Maghami

^۲E. K. Chu and B. N. Datta

^۳Y. Kim and H. S. Kim

^۴B. N. Datta, S. Elhay, Y. Ram, and D. Sarkissian

^۵N. K. Nichols and J. Kautsky

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) \quad (2.8)$$

به طوریکه در آن $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ و $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ ، به ترتیب بردار حالت، ورودی و خروجی هستند. با فرض $1 \leq m \leq n$ ، $A_0, A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ به ترتیب ماتریس‌های حالت و ورودی هستند. همچنین فرض می‌کنیم $\det(A_m) \neq 0$ و $\text{rank}(B) = r$ باشد.

هدف این فصل، یافتن ماتریس پس خورد خروجی K است، به طوری که ماتریس حلقه بسته سیستم دارای مقادیر ویژه دلخواه و از قبل تعیین شده باشد. به این منظور ابتدا سیستم خطی مرتبه بالا را با استفاده از ماتریس‌های افزوده، به یک سیستم خطی استاندارد مرتبه اول تبدیل کرده، سپس با استفاده از روش مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی، ماتریس حلقه بسته را طوری می‌یابیم که دارای مقادیر ویژه از قبل تعیین شده باشد، در نهایت ماتریس پس خورد خروجی را به دست می‌آوریم.

۲۰۸ طرح مسئله

سیستم خطی مرتبه بالای کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر (۱۰۸) را در نظر بگیرید:

$$A_m \mathbf{x}^{(m)}(t) + A_{m-1} \mathbf{x}^{(m-1)}(t) + \dots + A_1 \dot{\mathbf{x}}(t) + A_0 \mathbf{x}(t) = B \mathbf{u}(t)$$

واضح است که اگر $m = 1$ و $m = 2$ باشد، سیستم بالا، به ترتیب به سیستم استاندارد مرتبه یک و مرتبه دو تبدیل می‌شود.

با قرار دادن ماتریس افزوده زیر:

$$Z^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \dot{\mathbf{x}}^T & \dots & (\mathbf{x}^{(m-1)})^T \end{bmatrix}$$

سیستم بالا تبدیل به سیستم استاندارد زیر می‌شود:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A_e \mathbf{z}(t) + B_e \mathbf{u}(t) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{y}(t) = C_e \mathbf{x}(t) \quad (4.8)$$

که در آن

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & I_n & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & I_n \\ -A_m^{-1} A_0 & -A_m^{-1} A_1 & \dots & -A_m^{-1} A_{m-1} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

یک ماتریس $mn \times mn$

$$B_e = \begin{bmatrix} \circ & \dots & \circ & (A_m^- B)^T \end{bmatrix}^T \quad (6.8)$$

یک ماتریس $mn \times n$

$$C_e = [C \quad \circ \quad \dots \quad \circ] \quad (7.8)$$

یک ماتریس $r \times mn$ می‌باشد. [۸]

حال با استفاده از مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس که در بخش بعدی توضیح داده می‌شود، می‌توان ماتریس پس‌خورد خروجی K را طوری تعیین کرد، که ماتریس حلقه بسته سیستم (۳.۸) دارای مقادیر ویژه در ناحیه پایداری باشد.

۱.۲.۸ مقدار ویژه معکوس

حال با در نظر گرفتن معادله‌ی سیستم حلقه بسته‌ی $\tilde{A} = (A_e + B_e K C_e)$ و ماتریس U_1 و V_1 که به ترتیب ماتریس‌های به دست آمده از بردارهای پایه‌ی فضای پوچ B_e^t و C_e است، داریم:

$$\tilde{A} V_1 = (A_e + B_e K C_e) V_1 = A_e V_1 \quad (8.8)$$

$$U_1^t \tilde{A} = U_1^t (A_e + B_e K C_e) = U_1^t A_e \quad (9.8)$$

با توجه به قضیه (۳.۳) با قرار دادن $X_r = V_1$ ، $X_l = U_1$ ، $Y_r = A V_1$ و $Y_l = A^t U_1$ مسئله‌ی تخصیص مقدار ویژه به مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس برای یافتن ماتریس $\tilde{A}$ تبدیل می‌شود، به طوریکه مقادیر ویژه‌ی ماتریس $\tilde{A}$ برابر با مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد.

اگر $\tilde{A}$ موجود باشد، آنگاه ماتریس پس‌خورد خروجی K از معادله زیر به دست می‌آید:

$$K = B_e^\dagger (\tilde{A} - A_e) C_e^\dagger \quad (10.8)$$

که در آن $B_e^\dagger$ و $C_e^\dagger$ به ترتیب معکوس مور-پنروز B_e و C_e هستند.

این روش عموماً به جواب می‌رسد و با فرض اینکه B_e و C_e رتبه کامل و $\text{rank}(B_e) + \text{rank}(C_e) \geq$ باشند، یک جواب با احتمال ۱، برای مجموعه‌ی $\mathcal{L}$ خواهیم داشت.

ملاحظه ۱.۸. در حالتی که ماتریس B_e و C_e معکوس پذیر باشد، خطای روش صفر خواهد بود.

۲.۲.۸ الگوریتم

در این بخش، یک الگوریتم ساده برای روش ارائه شده شامل چهار گام را آورده‌ایم. ابتدا با توجه به فرم ماتریس‌های افزوده تعریف شده در (۵۰۸)، (۶۰۸) و (۷۰۸)، سیستم (۱۰۱) را به سیستم استاندارد شامل ماتریس‌های B_e, A_e و C_e تبدیل کرده و از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم.

هدف: یافتن ماتریس پس‌خورد خروجی K در سیستم مرتبه بالا.

گام اول: ماتریس‌های $A_m, \dots, A_o, B, C$ و مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_{n'}$ را وارد کنید.

گام دوم: ماتریس‌های A_e, B_e و C_e را بیابید.

گام سوم: فضای پوچ B_e^t و C_e به ترتیب با نام‌های X_l و X_r را یافته سپس و $Y_l = A^t X_l$ و $Y_r = A X_r$ را محاسبه کنید. فضای پوچ $(\lambda_i X_r - Y_r)$ و $(\lambda_i X_l - Y_l)$ را بیابید.

گام چهارم: بردارهای x و y را از روش تکرار بیابید. سپس ماتریس T و $\tilde{A} = T \text{diag}\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\} T^{-1}$ همچنین K را از فرمول

$$K = B_e^\dagger (\tilde{A} - A_e) C_e^\dagger \quad (11.8)$$

محاسبه کنید.

مثال ۱۰.۸. سیستم خطی پیوسته زمانی مرتبه دوی زیر را در نظر بگیرید، می‌خواهیم مقادیر ویژه $\{-1, -2, -3, -4\}$ را به سیستم حلقه بسته تخصیص دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -1/4479 & -1/816 & 3/8077 & -3/7043 \\ 1/6793 & 1/3463 & -4/6847 & 4/9798 \end{bmatrix}$$

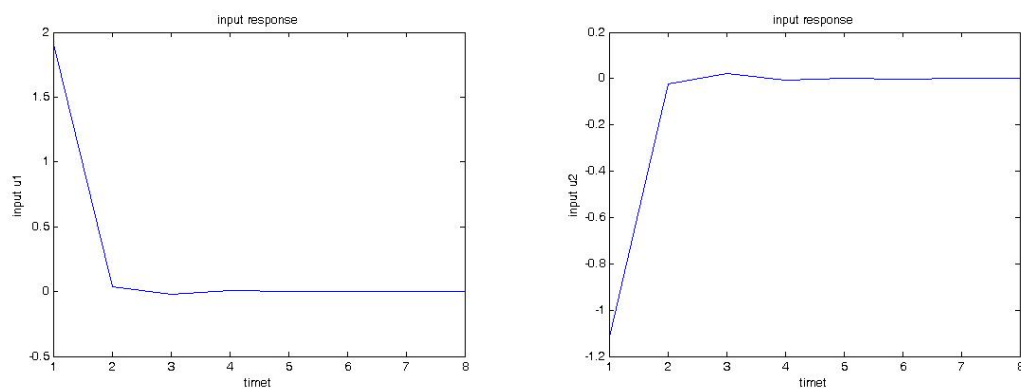
$$y = \begin{bmatrix} 2/2381 & 1/2255 & 6/5904 & 7/1709 \\ 1/9013 & 1/2592 & 5/9617 & 6/4908 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1/239 & 0/4837 & -1/2041 & 0/8984 \\ -1/1874 & -0/6021 & 1/4814 & -1/2078 \\ -1/239 & -0/9674 & 3/6123 & -3/5937 \\ 1/1874 & 1/2042 & -4/4443 & 4/8311 \end{bmatrix}$$

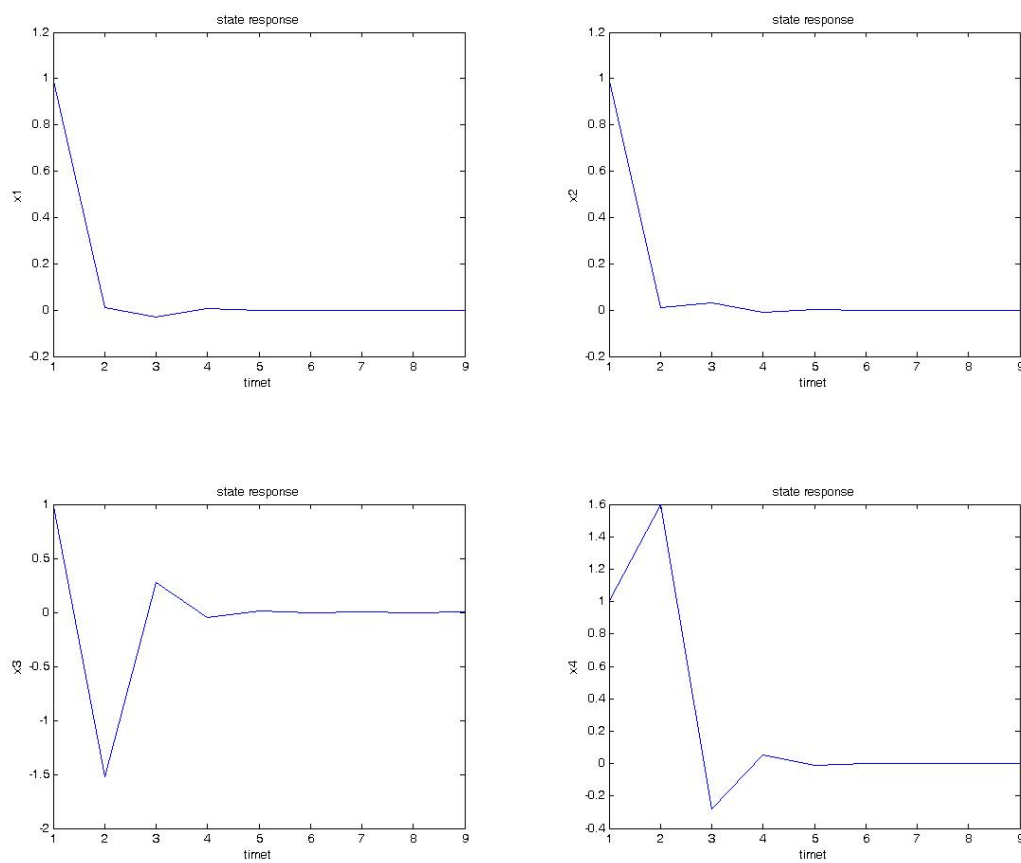
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 41/9683 & 38/6389 & 12/8115 & 14/3606 \\ -57/4321 & -52/3041 & -22/683 & -22/8115 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 211/2646 & 200/9079 \\ -56/4321 & -53/3681 \end{bmatrix}$$

$$\text{error} = 0/898, \text{iteration} = 23$$



شکل ۱.۸: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.



شکل ۲.۸: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.

فصل ۹

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، ابتدا مسئله مقدار ویژه معکوس بیان شده است و سپس ارتباط آن با مسئله تخصیص مقادیر ویژه در نظریه کنترل را بررسی کرده‌ایم. با استفاده از این ارتباط، روشی جدید برای تخصیص مقادیر ویژه ارائه کردیم و با بیان چند روش دیگر برای حل مسئله تخصیص مقادیر ویژه، به مقایسه آن‌ها با روش خود پرداختیم. روش (۳.۳) یک روش ساده برای ساخت ماتریس A و حل مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس فراهم می‌کند اما متأسفانه به فرض رتبه $2p$ برای ماتریس $[X \ Y]$ نیاز دارد، همچنین اگر دو مقدار ویژه در بلوک یکسان یعنی λ_1, λ_2 نزدیک به هم باشند، این روش نسبت به آشفتگی داده‌ها، حساسیت بالایی خواهد داشت. همچنین دلیل این حساسیت بالا به طور کامل در آخر فصل سوم بررسی شد.

در روش (۴.۳)، یک چهار چوب کلی برای کنترل‌گر پس‌خورد خروجی در تخصیص مقادیر ویژه‌ی دلخواه برای سیستم خطی کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر، برپایه‌ی ساختار فرم همدم برداری پارامتری، به‌دست آمده است. این روش نیاز به دانستن اطلاعات قبلی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه باز ندارد و هیچ محدودیتی روی مکان، نوع و تعدد مقادیر ویژه نیست. این روش برای سیستم‌های کوچک ($n \leq 5$) به خوبی جواب می‌دهد و همه‌ی فرم‌های پارامتری که ممکن است به‌دست آید را ارائه می‌کند. این روش به دلیل رابطه‌ی بین پارامترهای غیر خطی، به آشفتگی‌های کوچک بسیار حساس است. مثال‌های ارائه شده نشان می‌دهد که با توجه به انتخاب طیف مقادیر ویژه، کنترل‌گر ممکن است خیلی حساس، قوی و یا وجود نداشته باشد.

در روش (۴.۳) ماتریس‌های B و C باید رتبه کامل باشند، در حالی که روش اصلی پایان‌نامه ارائه شده در بخش (۲.۳) این شرط را ندارد. همچنین ساخت سیستم غیر خطی کمی دشوار است مخصوصاً در ابعاد $n \times m$. علاوه‌براین حل معادلات غیر خطی برای سیستم‌های بزرگ بسیار پرهزینه می‌باشد، در حالی که روش اصلی پایان‌نامه، نیاز به حل سیستم غیر خطی ندارد.

در فصل چهارم، روش بیان شده در [۱۵] بهبود یافته است و نتیجه‌ی آن حذف معادلات غیر خطی می‌باشد.

به این ترتیب، این روش برای مسائل با ابعاد بزرگ مفید است. در فصول بعدی روش جدید ارائه شده در این پایان‌نامه را برای سیستم‌های توسعه‌یافته، سیستم‌های با تأخیر زمانی، سیستم‌های دوبعدی مدل راسر و سیستم‌های مرتبه‌بالا بررسی کرده و نتایج موفقیت‌آمیز آن را در آخر هر فصل به طور مجزا، تحت مثال‌های عددی و نمودارهای پایداری، به صورت مجزا ارائه کرده‌ایم. خطای روش جدید به دلیل خطا در فرآیند شبه‌معکوس مور-پنروز در فرمول (۳۳.۳)، ایجاد می‌شود. می‌توان استفاده از تجزیه SVD برای کاهش این خطا را مورد بررسی قرار داد.

روش پیشنهاد شده توسط کرباسی و سعادتجو (۴.۳) بیان کرده است که، ماتریس پس‌خورد خروجی تحت شرایط معینی می‌تواند از ماتریس پس‌خورد حالت به‌دست آید، که مزایا و معایب این روش را قبلاً ذکر کرده‌ایم. مزایای روشی که در این پایان‌نامه ارائه کردیم، در مقایسه با روش‌های دیگر مورد مطالعه اینجانب عبارت است از:

- حذف حل معادلات غیرخطی
- حذف هرگونه محدودیت روی شکل ماتریس خروجی C و ماتریس پس‌خورد خروجی K
- کم‌هزینه بودن این روش در مسائل با ابعاد بزرگ
- عدم نیاز به دانستن مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز
- حساس نبودن به موقعیت و تعداد مقادیر ویژه و در نتیجه قابل استفاده بودن این روش برای سیستم‌های گسسته و پیوسته‌ی زمانی
- ساده بودن کدنویسی این روش

از معایب این روش می‌توان به خطای آن اشاره کرد، که در حالتی که ماتریس B و C در فرمول (۳۳.۳) معکوس‌پذیر باشند، خطای روش صفر خواهد بود.

فصل ۱۰

پیوست آ

```
clc
close all
clear all
A=input('please enter matrix A :')
B=input('please enter matrix B:');
C=input('please enter matrix C:');
P=input('please enter matrix P:');
Bt=pinv(B);
Ct=pinv(C);
U1=null(B');
V1=null(C);
Xl=U1
Xr=V1
Yl=A'*U1
Yr=A*V1
n=length(p);
for i=1:n
SV(:,i)=null(((p(i).*Xr)-Yr)');
SU(:,i)=null(((p(i).*Xl)-Yl)');
```



```

end
[r,c]=size(SU(:,:,1));
y=rand(c,r);
x=zeros(c,r);
e=eye(n);
for ii=1:200
for i=1:n
for j=1:n
S=SU(:,:,i)'*SV(:,:,j);
a(:,j)=S*y(:,j);
end
a1=pinv(a);
x(:,i)=e(i,:)*a1;
end
for j=1:n
for i=1:n
S=SU(:,:,i)'*SV(:,:,j);
a(:,i)=S*x(:,i);
end
a1=pinv(a);
y(:,j)=a1'*e(:,j);
end
Error=0;
for j=1:n
for i=1:n
S=SU(:,:,i)'*SV(:,:,j);
Error=((((x(:,i)'*S)*y(:,j))-e(i,j))^2);
end
end
end

```

```
Error=sqrt(Error);  
if Error<0.1  
Iteration=ii  
x  
y  
Error  
break  
end  
end  
for i=1:n  
T(:,i)= SU(:,i)*x(:,i);  
end  
Atilde=(T*diag(p))*inv(T)  
K=(Bt*(Atilde-A))*Ct
```

مراجع

- [1] T. H. S. Abdelaziz and M. Valasek, (2004), *Pole-placement for SISO linear systems by state derivattive feedback*, IEE Proceedings-Control Theory Applications, Vol. 151(4), pp. 377-385.
- [2] C. I. Byrnes , (1989), *Pole placement by output feedback*, in Three Decades of Mathematical Systems Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Vol. 135, pp. 31-78.
- [3] A. Bunse-Gerstner, N. Nichols, V. Mehrmaqn,(1992) *Regularization of descriptor systems by derivattive and proportional state feedback*, in Society for Industrial and Applied Mathematics Journal of Matrix Analyse, Vol. 52, pp. 164-176.
- [4] R. Cardim, M. Teixeira, E. Assuncao and F. Faria, (2008), *Control designs for linear systems using state derivative deedback*, in Systems Structure and Control, InTech, Vienna, Austria, Vol. 98, pp. 1-28.
- [5] R. Cardim, M. Teixeira, E. Assuncao and R. Covacic, (2007), *Design of state-derivattive feedback controllers using a state feedback control design*, in 3rd IFAC Symposium on system, Structure and Control, Brazil, Vol. 1, pp. 135-141.
- [6] M. T. Chu, (1998), *Inverse eigenvalue problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics Rev, Vol. 40, pp. 1-39.
- [7] R. Dorf, R. H. Bishop, (Published 2007), *MODERN CONTROL SYSTEM*, (11th Edition), Publisher: Prentice Hall Pages: 1056.
- [8] G. R. Duan, (2005), *Parametric approaches for eigenstructure assignment in high-order linear systems*. International Journal of Control Automation and Systems, Vol. 3, no. 3, pp. 419-429.
- [9] C. B. Garcia and T. Y. Li, (1980), *On the numbers of solutions to polynomial systems of equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics Journal of Numeranal, Vol. 17, pp. 540-546.
- [10] G. M. L. Gladwell, (1989), *Inverse problems in vibration*, Mathematics of Computation, Vol. 52, No. 186, pp. 717-718.
- [11] G. H. Golub and C. F. Van Loan, (Published 2013), *MATRIX COMPUTATIONS*, (4th Edition), The Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- [12] K. Haffman and R. Kunze, (Published 1971), *LINEAR ALGEBRA*, low priced edition, New Delhi.
- [13] P. R. Halmos, (Published 1974), *FINITE DIMENSIONAL VECTOR SPACES*, (second Edition), Springer-Verlag, New York. Reprinting of the 1958 second edition, Undergraduate Texts in Mathematics.

- [14] S. M. Karbassi, and D.J. Bell, (1993), *Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-Part 1 : Regular Kronecker invariants*. International Journal of Control, Vol. 57, pp. 817-830.
- [15] S. M. Karbassi and F. Saadatjou, (2009), *A parametric approach for eigenvalue assignment by static output feedback*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 346 , pp. 289-300.
- [16] S. M. Karbassi and H. A. Tehrani, (2002), *Parameterizations of the state feedback controllers for linear multivariable systems*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 44, pp. 1057-1065.
- [17] J. Kautsky , N. K. Nichols and P. Van Dooren, (1985), *Robust pole assignment in linear feedback*, International Journal of Control, Vol. 41, pp. 1129–1155.
- [18] D. E. Kirk, *OPTIMAL CONTROL THEORY, AN INTRODUCTION*, (published 2004), Dover Publications, Mineola, New York.
- [19] F. Kurzwil, (1963), *The control of multivariable processes in the presence of the pure transport delays*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 8, pp. 27-35.
- [20] S. M. Modarres and S. M. Karbassi, (2009), *time-optimal of discrete-time linear systems with state and input time-delays : International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 5, N 9, pp. 2619-2625.
- [21] N. Li, (1997), *A matrix inverse eigenvalue problem and its application*, Linear Algebra and Its applications, Vol. 266, pp. 143-152.
- [22] N. Li, (2001), *An iterative method for pole assignment* , Linear Algebra and Its applications, Vol. 23, pp. 77-102.
- [23] N. Li, (2000), *An inverse eigenvalue problem and feedback control*, proceedings of the 4th Biennial engineering mathematics and applications conference, Melbourne, Australia 10-13 September, Vol. 124, pp. 183-186.
- [24] M. Nachidi, F. Tadeo, A. Hmamed and M. Alfidi, (2008), *Static output feedback controller design for two-dimensional roesser models*, International Journal on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering, Vol. 2, pp. 738-747.
- [25] R. Roesser, (1975), *A discrete state-space model for linear image processing*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 20, pp. 1-10.
- [26] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, (published 2000), *NUMERICAL MATHEMATICS*, pringer-Verlag, New York.

Surname: Ramroodi

Name: Nasim

Title: Inverse Eigenvalue Problems and Pole Assignment in Control Theory.

Supervisor: Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

Degree: Master of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: numerical analysis

Technology University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 14 december 2013

Number of pages: 92

Keywords: Inverse eigenvalue problem, Eigenvalue assignment problem, Controllable, Output feedback linear system, Descriptor system, Delay system, Two-dimensional system, High-order system

Abstract

Inverse eigenvalue problem has many application in science. For example, Control design, Geophysics, Molecular spectrometer, Circuit theory. One of the most important applications of this problem is in pole assignment problem in control theory. Because of its important roll in engineering, we are studied the relationship between pole assignment problem and matrix inverse eigenvalue problem, then we present a new method for solving the pole assignment using inverse eigenvalue problem. We investigate this new method in descriptor system, time-delay system, 2D system and high-order system. In this method, according to the exists theorems in inverse eigenvalue problem, output feedback matrix K is calculated such that eigenvalues of close-loop system are arbitrary and prescribed. Also we are compared this method with the method that proposed by Dr. Karbassi and Saadatjou. Removed of non-linear equation is the main advantage of this method. At the end, the results of this new method is presented as numerical examples.



Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Inverse Eigenvalue Problems and Pole Assignment in Control Theory.

Supervisor

Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

by

Nasim Ramroodi

14 december 2013