

الله اعلم
بالحق



دانشکده ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

تخمین ضریب انتقال حرارت هدایتی به روش انتقال حرارت معکوس

پژوهشگر

نصیبه آساگل سرخی

اساتید راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

دکتر محسن نظری

استاد مشاور

دکتر علی عباس نژاد

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تیر ۱۳۹۲



دانشکده ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم نصیبه آساگلسرخ
تحت عنوان: تخمین ضریب انتقال حرارت هدایتی به روش انتقال حرارت معکوس

در تاریخ ۱۳۹۲/۰۴/۲۵ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با
درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر حجت احسنی طهرانی	استادیار	
۲- استاد راهنما	دکتر محسن نظری	استادیار	
۲- استاد مشاور	دکتر علی عباس نژاد	استادیار	
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	سید رضا موسوی	مربی	
۴- استاد ممتحن	دکتر پوریا اکبرزاده	استادیار	
۵- استاد ممتحن	دکتر مهدی قوتمند	استادیار	

رئیس دانشکده :

خدایا...^۱

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگی‌ش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شغفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

^۱مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استادان راهنمای خود، آقایان دکتر محسن نظری و دکتر حجت احسنی طهرانی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر علی عباس‌نژاد که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده‌سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را.

نصیه آسیا گل‌سرخ
تیر ۱۳۹۲

تعهد نامه

اینجانب نصیبه آساگلسرخي دانشجوي دوره کارشناسي ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده

پایان نامه تخمین ضریب انتقال حرارت هدایتی به روش انتقال حرارت معکوس تحت راهنمایی آقایان دکتر احسنی طهرانی و دکتر

محسن نظری، متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا Shahrood University of Technology به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ ۹۸,۴,۲۵

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این رساله، ضریب هدایت حرارتی متغیر با مکان در یک تیغه فلزی به روش معکوس حرارتی تخمین زده شده است. ماده مورد بحث می‌تواند یک ماده ناهمگن باشد. بنابراین ضریب هدایت حرارتی تابع مکان بوده و تغییرات مکانی ضریب هدایت حرارتی در معادلات حاکم لحاظ شده است. معادلات حاکم بر مسئله، معادله انتقال حرارت هدایتی ناپایا (یک بعدی - دو بعدی) می‌باشد. در روش حرارتی معکوس، با استفاده از اندازه‌گیری‌های زمانی دما در محل حسگرها، و محاسبه تابع حساسیت، به تخمین تابع هدف (ضریب هدایت حرارتی محلی) پرداخته شده است. حسگرها می‌توانند روی دیواره فعال و یا دیواره غیر فعال قرار داده شود. خطای جذر میانگین مربعات و خطای مجموع حداقل مربعات نیز در محاسبات لحاظ شده است. این مساله دارای کاربرد صنعتی فراوان، از جمله تخمین نقاط دارای ایراد (به دلیل پروسه ساخت) در ماده است. همچنین اهمیت زیادی در عیب‌یابی قطعات ریخته‌گری شده دارد. فرض بر این است که دما با استفاده از عکس‌برداری حرارتی قابل دسترس و اندازه‌گیری بوده و از مقادیر دمای اندازه‌گیری شده برای تخمین ضریب هدایت حرارتی استفاده می‌شود. روش گرادیان مزدوج به عنوان یک روش معکوس حرارتی برای بهینه‌سازی تابع هدف به کار گرفته شده است. این روش برای بهینه‌سازی بسیاری از مسائل مهندسی مورد استفاده قرار گرفته و دارای دقت قابل قبولی می‌باشد. برای سنجش کارایی روش معکوس، ضریب هدایت حرارتی به صورت توابع درجه دو و مثلثی تخمین زده شده است. روش معکوس نظیر به صورت یک برنامه کامپیوتری پیاده‌سازی شده است. نتایج به دست آمده از روش معکوس با مقادیر واقعی نیز مقایسه شده و در مورد صحت نتایج بحث شده است. . باتوجه به بررسی مقالات و گزارشات موجود، تخمین ضریب هدایت حرارتی به عنوان یک تابع محلی و در یک صفحه غیر همگن دو بعدی، کار جدیدی در مباحث انتقال حرارت معکوس است.

کلمات کلیدی: انتقال حرارت هدایتی معکوس، ضریب هدایت حرارتی، روش گرادیان مزدوج، عکس‌برداری حرارتی

لیست مقالات مستخرج

۱. بهینه سازی تابع هدف با استفاده از الگوریتم گرادیان مزدوج در تخمین ضریب هدایت حرارتی یک تیغه فلزی، ششمین کنفرانس بین المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات
Accepted Az Oral

2. The Estimation of The Thermal Conductivity In A Slab Using Numerical Methods, 4th Conference on Mathematical Analysis and its Applications, Accepted Az Poster.

3. Estimation Of Time-Dependent Source Function Using the Levenberg-Marquardt method, The 44th Annual Iranian Mathematics Conference, Accepted Az Poster.

4. Inverse Estimation Of Heat Source Using The Conjugate Gradient Method With Adjoint Problem, 5th Iranian Conference And Applied Mathematics, Accepted Az Poster.

فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۸	تعاریف و مفاهیم اولیه	۲
۹	۱-۲ گرما چیست و چگونه انتقال می‌یابد؟	۹
۹	۲-۲ مفاهیم فیزیکی و معادلات نرخ انتقال حرارت	۹
۹	۱-۲-۲ انتقال گرما به روش هدایت	۹
۱۴	۳-۲ دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای	۱۴
۱۵	۴-۲ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی و غیر خطی	۱۵
۱۵	۵-۲ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم	۱۵
۱۶	۶-۲ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی	۱۶
۱۶	۱-۶-۲ فرمول‌بندی تفاضل محدود	۱۶
۱۹	۲-۶-۲ روشهای صریح	۱۹
۲۰	۳-۶-۲ روشهای ضمنی	۲۰
۲۲	۷-۲ معادلات سهموی دو بعدی	۲۲
۲۵	مفاهیم بنیادی	۳
۲۶	۱-۳ مفهوم مسئله انتقال معکوس گرما	۲۶
۲۸	۲-۳ زمینه‌های کاربردی انتقال معکوس گرما	۲۸
۳۰	۳-۳ یک نگاه کلی از روش‌های حل برای مسائل انتقال معکوس گرما	۳۰

۳۴	۴	روش‌های حل مسائل انتقال معکوس گرما
۳۷	۱-۴	روش ۱: روش لونبرگ برای تخمین پارامتر
۳۸	۱-۱-۴	مسئله مستقیم:
۳۸	۲-۱-۴	مسئله معکوس:
۳۹	۳-۱-۴	روش تکراری برای روش لونبرگ-مارکات
۴۲	۴-۱-۴	معیار توقف برای روش ۱
۴۳	۵-۱-۴	الگوریتم محاسباتی برای روش ۱
۴۴	۲-۴	مفهوم مؤلفه حساسیت
۴۵	۱-۲-۴	استفاده از حسگرهای چندگانه
۴۷	۳-۴	روش ۲: روش گرادیان مزدوج برای تخمین پارامتر
۴۸	۱-۳-۴	مسئله مستقیم
۴۸	۲-۳-۴	مسئله معکوس
۴۸	۳-۳-۴	روش تکراری برای روش گرادیان مزدوج
۵۰	۴-۳-۴	معیار توقف برای روش ۲
۵۱	۵-۳-۴	الگوریتم محاسباتی برای روش ۲
۵۲	۶-۳-۴	استفاده از حسگرهای چندگانه
۵۳	۷-۳-۴	اندازه‌گیری پیوسته
	۴-۴	روش ۳: روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته به همراه مسئله الحاقی برای تخمین پارامتر
۵۴		تخمین پارامتر
۵۵	۱-۴-۴	مسئله مستقیم
۵۵	۲-۴-۴	مسئله معکوس
۵۶	۳-۴-۴	مسئله حساسیت
۵۶	۴-۴-۴	مسئله الحاقی
۵۹	۵-۴-۴	معادله گرادیان

۶-۴-۴	روش تکراری برای روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته برای	۶۰
۶۰	تخمین پارامتر	۶۰
۷-۴-۴	معیار توقف روش ۳	۶۰
۸-۴-۴	الگوریتم محاسباتی برای روش ۳	۶۱
۹-۴-۴	استفاده از حسگرهای چندگانه	۶۲
۵-۴	روش ۴: روش گرادیان تعمیم یافته به همراه مسئله الحاقی برای تخمین	
۶۳	تابع	۶۳
۱-۵-۴	مسئله مستقیم	۶۴
۲-۵-۴	مسئله معکوس	۶۴
۳-۵-۴	مسئله حساسیت	۶۴
۴-۵-۴	مسئله الحاقی	۶۵
۵-۵-۴	معادله گرادیان	۶۶
۶-۵-۴	روش تکراری برای روش گرادیان مزدوج برای تخمین تابع	۶۶
۷-۵-۴	معیار توقف برای روش ۴	۶۸
۸-۵-۴	الگوریتم محاسباتی برای روش ۴	۶۸

۵ تخمین ضریب هدایت حرارت یک بعدی متغیر با مکان با استفاده از روش

۷۰	گرادیان مزدوج
۷۱	۱-۵ مقدمه
۷۱	۲-۵ معادلات حاکم
۷۲	۱-۲-۵ حل عددی معادلات هدایت حرارت یک بعدی
۷۴	۲-۲-۵ حل تحلیلی معادلات هدایت حرارت یک بعدی

۶ نتایج عددی حل معکوس مسئله هدایت حرارت یک بعدی

۷ تخمین ضریب هدایت حرارت دو بعدی متغیر با مکان با استفاده از روش

۸۷	گرایان مزدوج
۸۸	۱-۷ مقدمه
۸۸	۲-۷ حل عددی
۸۹	۱-۲-۷ حل عددی معادلات هدایت حرارتی دو بعدی
۹۲	۳-۷ حل تحلیلی معادلات هدایت حرارت دو بعدی
۹۵	۸ نتایج عددی حل معکوس مسئله هدایت حرارت دو بعدی
۱۰۰	۹ نتیجه گیری و پیشنهاداتی برای کارهای آتی
۱۰۳	مراجع

فصل ۱

مقدمه

در سال‌های اخیر علاقه‌مندی‌های زیادی در زمینه نظریه و کاربرد مسائل انتقال معکوس گرما^۱ (IHTP) ایجاد شده است. این مسئله و علاقه‌مندی تقریباً در تمام شاخه‌های علوم پایه و مهندسی نظیر مهندسی مکانیک، هوافضا، شیمی، هسته‌ای، ریاضی‌دان‌ها، فیزیکدان‌ها و آماردان‌ها ایجاد شده است به‌طوری که هر گروه کاربردهای متفاوتی از آن در ذهن دارند. بسیاری از مسائل مهندسی شامل مسائل انتقال حرارت می‌باشند که با معادلات دیفرانسیل پاره‌ای یا معمولی تعریف می‌شوند. در مسائل انتقال حرارت مستقیم هندسه، شرایط مرزی، شرط اولیه و خواص ترموفیزیکی معلوم می‌باشند و هدف محاسبه، توزیع دما در داخل ناحیه حل می‌باشد که با حل معادلات به شکل تحلیلی یا عددی حاصل می‌شود. در مسائل انتقال حرارت معکوس یکی یا تعدادی از این اطلاعات نامعلوم بوده و هدف، تخمین آن‌ها با استفاده از اطلاعات اضافی دیگر مثل دماهای اندازه‌گیری شده در داخل ناحیه حل می‌باشد [۱]. این مسائل در علوم مهندسی مکانیک و ترموفیزیک در زمینه‌های تعیین و شناخت، طراحی و کنترل ظاهر می‌شوند. یک مزیت مسأله معکوس نزدیک کردن تعامل بین تحقیقات تئوری و عملی به منظور به‌دست آوردن اطلاعات بیشتر در مورد مسأله می‌باشد.

مسائل معکوس را می‌توان برحسب طبیعت انتقال حرارت انجام شده بسته به اینکه از نوع هدایت، جابجایی، تشعشع و یا ترکیبی از آن‌ها و یا همراه با تغییر فاز باشد دسته‌بندی نمود [۲]. همچنین، بر اساس نوع علت، مجهول مسأله معکوس می‌تواند معکوس مرزی، خواص ترموفیزیکی، شرط اولیه یا پسرو، هندسه ناحیه حل و یا عبارت منبع باشد.

هون^۲ و وی^۳ با استفاده از روش حل‌های اولیه یک مسأله معکوس را حل کردند. آن‌ها معادله انتقال حرارت هدایت را در نظر گرفتند و یک شرط مرزی را به‌عنوان شرط مجهول فرض کردند. نتایج آن‌ها حکایت از دقت بالای این روش داشت [۳]. در مرجع [۴] تخمین ظرفیت گرمایی در یک بافت زنده به‌عنوان یک مسأله خواص ترموفیزیکی با استفاده از روش لونبرگ-مارکات^۴ بررسی شده است. در تحقیقی دیگر مرا^۵ همان مسأله هون و وی را حل کرد با این تفاوت

^۱Inverse Heat Transfer Problem

^۲Hon

^۳Wei

^۴Levenberg-Marquardt

^۵Mera

که شرط اولیه را به عنوان مجهول مسأله معکوس در نظر گرفت. به دست آوردن خط انجماد در یک مذب در حال انجماد از طریق اندازه گیری دما به عنوان یک نمونه از مسائل معکوس از نوع هندسه ناحیه حل محسوب می شود [۵].

مسأله معکوس انتقال حرارت جزو مسائل بدوضع^۶ به حساب می آید و هر تغییر کوچکی در ورودی می تواند منجر به تغییر فاحشی در جواب شود و به همین دلیل حل مسأله معکوس بسیار مشکل تر از مسأله مستقیم مشابه است. در حالی که مسئله انتقال حرارت استاندارد جزء کلاس مسائل خوش وضع^۷ می باشد. برای حل یک مسئله خوش وضع که اولین بار توسط هادامارد^۸ [۶] معرفی شده است، باید سه شرط زیر را بر آورده شود:

* جواب مسئله باید وجود داشته باشد.

* جواب مسئله باید یکتا باشد.

* جواب مسئله باید تحت تغییرات کوچک داده های ورودی پایدار باشد (یعنی شرایط پایداری). اغلب، مسائل معکوس به خطاهای تصادفی در اندازه گیری داده های ورودی بسیار حساس است. بنابراین تکنیک های خاصی برای حل این مسائل به منظور بر آورده کردن شرط پایداری مورد نیاز خواهد بود.

اولین مقاله مشهور در حل مسأله معکوس در سال ۱۹۶۰ توسط استولز^۹ نوشته شد [۷]. از آنجا که مسأله معکوس ماهیت های متفاوتی دارد، حل آن نیز راهبردهای متفاوتی را می طلبد. در دهه گذشته روش های زیادی برای حل مسائل معکوس هدایتی ارائه شده اند. در این بین روش تفاضل محدود و المان محدود جزو ابزارهای اصلی محسوب می شوند.

اندازه گیری مستقیم شار حرارتی گذرنده از سطح یک دیوار که در معرض آتش قرار گرفته، با استفاده از روش های سنتی و معمول موضوع بسیار دشواری است، اما این موضوع می تواند به آسانی از طریق به کارگیری آنالیز معکوس با استفاده از ثبت دما در یک موقعیت معین پایین تر از سطح حرارت تخمین زده شود. در سال ۲۰۰۴ جانکی و همکارانش از مسئله هدایت حرارتی

^۶Ill- posed

^۷Well-Posed

^۸Hadamard

^۹Stolz

معکوس در تجزیه و تحلیل حرارتی مدارهای میکروالکترونیکی استفاده کردند و فرآیند ایجاد مدل حرارتی مدار میکروالکترونیکی و کاربردهای ممکن برای حل مسائل معکوس مختلف را مورد بحث قرار دادند [۸]. در سال ۲۰۰۹ چاوین و همکارانش روش معکوسی به منظور حل مشکل انتقال حرارت در دیوارها و برآورد ویژگی‌های حرارتی آن‌ها معرفی و تشریح کردند. روشی که در آن سعی می‌شود ویژگی‌های حرارتی دیوارها و پوشش بیرونی ساختمان به طور دقیق و با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی ارزیابی شود. نتایج به دست آمده از آزمایش‌های انجام شده روی یک دیوار بتنی سنگین نشان می‌دهد که داده‌های به دست آمده در روش معکوس با روش مستقیم مطابقت دارد. مطالعات به خوبی نشان می‌دهد که از طریق اجرای این روش، تشخیص تغییرات رخ داده در اجزای دیوار و نیز زمان وقوع این تغییرات امکان‌پذیر است [۹]. در سال ۲۰۱۰ کای و همکارانش رسانایی حرارتی و ظرفیت گرمایی ویژه دانه چریش^{۱۰} را با استفاده از روش معکوس تخمین زدند که نتایج به دست آمده در فرآیند شستشو و خشک کردن دانه چریش مفید می‌باشد [۱۰]. در سال ۲۰۱۱ لینان و همکاران از روش گرادیان مزدوج برای برآورد پایدار مسئله هدایت حرارت چند متغیره به جهت تخمین توزیع دمای مرزی و ضریب انتقال حرارت همرفتی یک سیستم هدایت حرارت دو بعدی استفاده کردند. نتایج آزمایشات آن‌ها نشان می‌دهد که روش گرادیان مزدوج ارائه شده می‌تواند به حل مسئله هدایت حرارتی معکوس چند متغیره با دقتی بالاتر کمک کند و هنگامی که تعداد نقاط اندازه‌گیری دما کاهش مناسبی می‌یابد و دماهای اندازه‌گیری شده شامل خطاهای محاسباتی می‌باشند، نتایج رضایت بخشی از این روش به دست می‌آید [۱۱]. در سال ۲۰۱۲ رحیمی و محمدیون، از روش گرادیان مزدوج همراه با مسئله الحاقی جهت حل مسئله انتقال حرارت هدایت معکوس استفاده کردند و قدرت یک منبع حرارتی تابع زمان را در داخل یک ناحیه غیر منظم هندسی تخمین زدند. این ناحیه غیر منظم هندسی به داخل یک مستطیل انتقال داده شده به طوری که می‌تواند برای حل مسائل هدایت حرارتی معکوس در داخل هر ناحیه‌ای که قابل انتقال پیدا کردن به یک مستطیل باشد مورد استفاده قرار گیرد [۱۲]. معمولاً در شرایطی که روش‌های کلاسیکی نمی‌تواند با دقت قابل قبولی خواص مورد نظر را

^{۱۰}Neem Seeds

تخمین بزند و یا آن که خواص تخمین زده شده غیر قابل استفاده باشد از تکنیک انتقال حرارت معکوس استفاده می شود. هدف این رساله تخمین ضریب هدایت حرارتی متغیر با مکان با استفاده از روش های انتقال حرارت معکوس می باشد. تعیین ضریب هدایت حرارتی در بسیاری از سیستم های مدیریت حرارتی ضروری است. به خصوص پیش بینی دقیق هدایت حرارتی برای دست یافتن به یک سیستم حرارتی مطلوب ضروری است. همچنین هدایت حرارتی تاثیر قابل توجهی در تجزیه و تحلیل میزان جریان حرارت و توزیع دما در زمانی که مواد گرم است و در تجزیه و تحلیل مسائل ناپایدار حرارتی دارد. با توجه به تغییرات مکانی در نظر گرفته شده برای ضریب هدایت حرارتی، این مسئله اهمیت زیادی در عیب یابی قطعات ریخته گری شده دارد.

این رساله شامل ۶ فصل می باشد:

فصل اول: در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه، شامل مبانی فیزیکی و معادلات نرخ انتقال حرارت، همچنین روش های گسسته سازی معادلات هدایت حرارتی در حالت یک بعدی و دو بعدی بیان شده است.

فصل دوم: در این فصل بحث کلی در مورد مسائل انتقال معکوس گرما شامل مفاهیم بنیادی، کاربردها، تقسیم بندی و نگاه کلی در مورد تکنیک های مختلف حل آن ها ارائه شده است.

فصل سوم: هدف اصلی این فصل فراهم کردن پیش زمینه ریاضیات مورد نیاز برای استفاده از برخی از تکنیک های حل مسائل انتقال حرارت معکوس می باشد. چهار روش در نظر گرفته شده در این رساله عبارتند از:

تکنیک ۱: روش لونبرگ برای تخمین پارامتر

تکنیک ۲: روش گرادیان مزدوج برای تخمین پارامتر

تکنیک ۳: روش گرادیان مزدوج به همراه مسئله الحاقی برای تخمین پارامتر

تکنیک ۴: روش گرادیان مزدوج به همراه مسئله الحاقی برای تخمین تابع

اگر چه تکنیک های دیگر نیز در دسترس هستند اما ۴ روش بالا در این رساله انتخاب شده اند، زیرا آن ها به قدر کافی عمومی، متنوع، سر راست و قدرتمند هستند تا بر مشکلات مربوط به

حل مسائل انتقال معکوس گرما غلبه کند. گام‌های اساسی هر روش، از جمله روش تکراری، معیار توقف و الگوریتم‌های محاسباتی به طور مفصل شرح داده شده است. همچنین یک روش برای تعیین ضریب حساسیت در این فصل ارائه شده است.

فصل چهارم: در این فصل یک مسئله آزمون یک بعدی در نظر گرفته شده و معادلات حاکم بر مسئله و نحوه حل آن معرفی شده است. با استفاده از روش‌های ارائه شده در فصل اول، معادلات حاکم گسسته سازی شده و توزیع دمای مسئله آزمون فرض شده، با حل مسئله مستقیم هدایت حرارتی به دست آمده است. سپس روش حل تحلیلی (دقیق) معادلات مسئله آزمون داده شده شرح داده شده است و نتایج حاصل از هر دو حل با هم مقایسه شده‌اند.

فصل پنجم: در این فصل با توجه به معادلات حاکم ارائه شده و نحوه حل آن‌ها در فصل قبل، نتایج حاصل از حل مسئله معکوس ارائه شد. روش گرادیان مزدوج به عنوان یک روش معکوس حرارتی برای بهینه‌سازی تابع هدف به کار گرفته شده است. که روش معکوس نظیر به صورت یک برنامه رایانه‌ای پیاده‌سازی شده است. به منظور ارزیابی و اطمینان از صحت روش معکوس به کار گرفته شده، ضریب هدایت حرارتی به صورت توابع درجه دو و مثلثی تخمین زده شد و نمودارهای مربوط ارائه شدند. خطای جذر میانگین مربعات و خطای مجموع حداقل مربعات نیز برای تخمین دقت نتایج حاصل محاسبه شده است.

فصل ششم: با توجه به اهمیت مسئله هدایت حرارت دو بعدی در زندگی روزانه، در این فصل مسئله هدایت حرارتی یک بعدی توصیف شده در فصل چهارم را به دو بعد تعمیم داده و معادلات حاکم و نحوه حل آن‌ها معرفی شده است. ابتدا با استفاده از یک روش کارآمد که در فصل اول شرح داده شده معادلات هدایت حرارت دوبعدی گسسته سازی شده و توزیع دمای مسئله آزمون داده شده با حل مسئله مستقیم که به صورت یک برنامه رایانه‌ای پیاده سازی شده به دست آمد. سپس روش حل تحلیلی معادلات دو بعدی شرح داده شد. و نتایج حاصل از حل عددی و حل تحلیلی با هم مقایسه شد.

در ادامه این فصل نتایج حل عددی معادلات هدایت حرارتی دو بعدی ارائه شده است. برای حالت دو بعدی نیز روش گرادیان مزدوج به عنوان یک روش معکوس حرارتی برای بهینه‌سازی

تابع هدف به کار گرفته شده است. در این روش ضریب هدایت حرارتی به صورت یک رویه درجه دو تخمین زده شد. برای برآورد کارائی روش معکوس در تخمین ضریب هدایت حرارتی دو بعدی یک آزمایش عددی انجام شد. در ادامه نتایج حاصل از تخمین ضریب هدایت حرارتی دوبعدی، به همراه نمودارهای مربوط ارائه شده است.

فصل‌های ۴-۶، اصل مطالعات این رساله به‌شمار می‌آید که نتایج حاصل از آن‌ها با نتایج مورد انتظار، سازگار است. در انتهای فصل نیز نتیجه‌گیری و پیشنهاداتی برای کارهای آتی ارائه شده است.

فصل ۲

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱-۲ گرما چیست و چگونه انتقال می‌یابد؟

تعریف ساده ولی کلی زیر پاسخ قانع کننده‌ای به سؤال « انتقال حرارت چیست » می‌باشد: « انتقال حرارت به نوعی از انرژی گفته می‌شود که به علت اختلاف درجه حرارت انتقال می‌یابد. هنگامی که اختلاف دما در یک محیط یا بین اجسام وجود داشته باشد انتقال حرارت اتفاق می‌افتد.

انواع مختلف فرآیندهای انتقال حرارت را مکانیزم‌های انتقال حرارتی می‌نامیم. هنگامی که گرادیان درجه حرارت در یک محیط ساکن که می‌تواند جامد یا سیال باشد وجود دارد، از کلمه « هدایت »^۱ برای معرفی نوع انتقال حرارت در این محیط استفاده می‌شود. از طرفی کلمه « جابجایی »^۲ هنگامی به کار می‌رود که انتقال حرارت بین یک سطح و یک سیال متحرک با دماهای مختلف وجود داشته باشد. سومین نوع انتقال حرارت عبارت است از « تشعشع حرارتی »^۳. کلیه سطوحی که دارای دمای معین باشد، انرژی را بصورت امواج الکترومغناطیس از خود صادر می‌کنند. بنابراین، اگر هیچگونه حائلی بین دو سطح نباشد، انتقال حرارت خالص بواسطه تشعشع بین دو سطح با دمای متفاوت وجود خواهد داشت.

۲-۲ مفاهیم فیزیکی و معادلات نرخ انتقال حرارت

در این فصل به بررسی مواردی می‌پردازیم که در آنها انتقال گرما به صورت هدایتی وجود دارد و چگونگی مکانیسم این حالت را به طور کیفی توضیح می‌دهیم. خواننده می‌تواند برای آشنایی با مکانیسم انتقال گرما به روش جابجایی و انتقال گرما به روش تشعشع، به مراجع [۱۳، ۱۴] مراجعه کند.

۱-۲-۲ انتقال گرما به روش هدایت

تجربه نشان داده است که وقتی گرادیان دما در جسمی وجود دارد، انرژی از ناحیه دما بالا به ناحیه دما پایین منتقل می‌شود. در این حالت می‌گوییم که انرژی از طریق رسانش منتقل

^۱ Conduction

^۲ Convection

^۳ Radiation

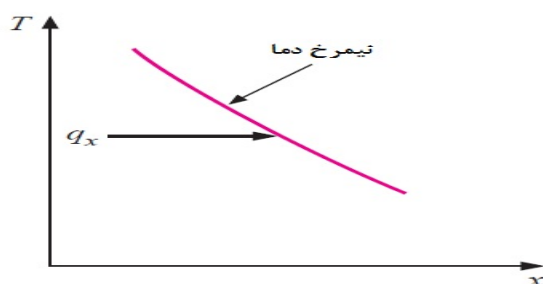
شده است و آهنگ انتقال گرما بر واحد سطح، با گرادیان دما در جهت عمود متناسب است.

$$\frac{q}{A} \sim \frac{\partial T}{\partial x}$$

با افزودن ثابت تناسب داریم:

$$q = -KA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1-2)$$

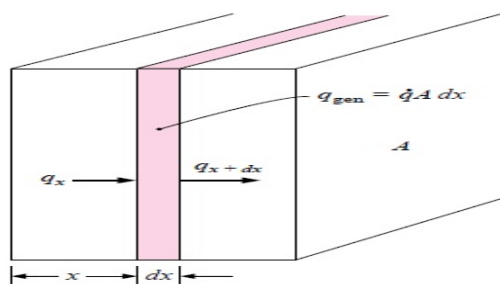
که در آن q آهنگ انتقال گرما و $\frac{\partial T}{\partial x}$ گرادیان دما در سوی جریان گرماست. ثابت مثبت K را ضریب رسانش گرمایی می‌نامیم و علامت منفی به خاطر رعایت قانون دوم ترمودینامیک انتخاب شده است، یعنی همانطور که در دستگاه مختصات شکل ۱-۲ دیده می‌شود، گرما باید نسبت به دما سیر نزولی داشته باشد (گرما در جهتی که دما کاهش می‌یابد جریان دارد). معادله (۱-۲) را به افتخار ریاضی- فیزیکدان فرانسوی ژوزف فوریه که در بررسی تحلیلی



شکل ۱-۲: نمودار طرح وار جهت جریان گرما

انتقال گرمای رسانشی سهم بزرگی داشت، قانون رسانش گرمایی فوریه می‌نامند. باید توجه کنید که معادله (۱-۲) تعریف رسانندگی گرمایی است و در دستگاهی که جریان گرما با یکای وات سنجیده می‌شود، یکای K وات بر متر بر درجه سلسیوس است.

اکنون با استفاده از معادله (۱-۲)، مسئله یافتن معادله اساسی حاکم بر انتقال گرما در جسم جامد را بررسی می‌کنیم. سیستم یک بعدی شکل ۲-۲ را در نظر بگیرید. اگر سیستم در حالت پایدار باشد، یعنی اگر دما نسبت به زمان تغییر نکند، مسئله ساده است و ما برای رسیدن به پاسخ فقط باید از معادله (۱-۲) انتگرال بگیریم و مقادیر مناسب را در آن قرار بدهیم. اما اگر دمای جسم جامد با زمان تغییر کند یا اگر در جسم چشمه یا چاهک‌هایی وجود داشته



شکل ۲-۲: عنصر حجمی مربوط به بررسی رسانش گرما در یک بعد

باشد، وضعیت پیچیده‌تر خواهد شد. حالتی عمومی را که در آن دما با زمان تغییر می‌کند و جسم چشمه‌های گرمایی دارد، در نظر می‌گیریم. برای عنصری با ضخامت dx ، موازنه انرژی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

= انرژی تولید شده در عنصر + انرژی ورودی به رویه سمت چپ

انرژی خروجی از رویه سمت راست + تغییر انرژی داخلی

این مقدار انرژی به صورت زیر داده می‌شوند:

$$q_x = -KA \frac{\partial T}{\partial x} = \text{انرژی ورودی به رویه سمت چپ}$$

$$qA dx = \text{انرژی تولید شده در عنصر}$$

$$\rho c A \frac{\partial T}{\partial \tau} dx = \text{تغییر انرژی داخلی}$$

= انرژی خروجی از رویه سمت راست

$$q_{x+dx} = -KA \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+dx} = -A \left[K \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right]$$

که در آن q انرژی تولید شده در واحد حجم بر حسب $\frac{W}{m^3}$ ، c گرمای ویژه جسم بر حسب

$\frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$ و ρ چگالی بر حسب $\frac{kg}{m^3}$ است. ترکیب روابط بالا چنین به دست می‌دهد:

$$-KA \frac{\partial T}{\partial x} + qA dx = \rho c A \frac{\partial T}{\partial \tau} dx - A \left[K \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] \quad (2-2)$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (۳-۲)$$

که معادله رسانش گرمایی در یک بعد است. برای بررسی جریان گرما در بیش از یک بعد، تنها باید رسانش گرمایی وارد شده به و خارج شده از حجم واحد را در دستگاه مختصات سه بعدی مانند شکل ۲-۳(آ) در نظر بگیریم. در این حالت رابطه موازنه انرژی به صورت زیر است:

$$q_x + q_y + q_z + q_{gen} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz} + \frac{dE}{d\tau}$$

و مقادیر انرژی به صورت زیر داده می‌شوند:

$$q_x = -K dy dz \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_{x+dx} = -\left[K \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy dz$$

$$q_y = -K dx dz \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_{y+dy} = -\left[K \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right] dx dz$$

$$q_z = -K dx dy \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$q_{z+dz} = -\left[K \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \right] dx dy$$

$$q_{gen} = q \, dx \, dy \, dz$$

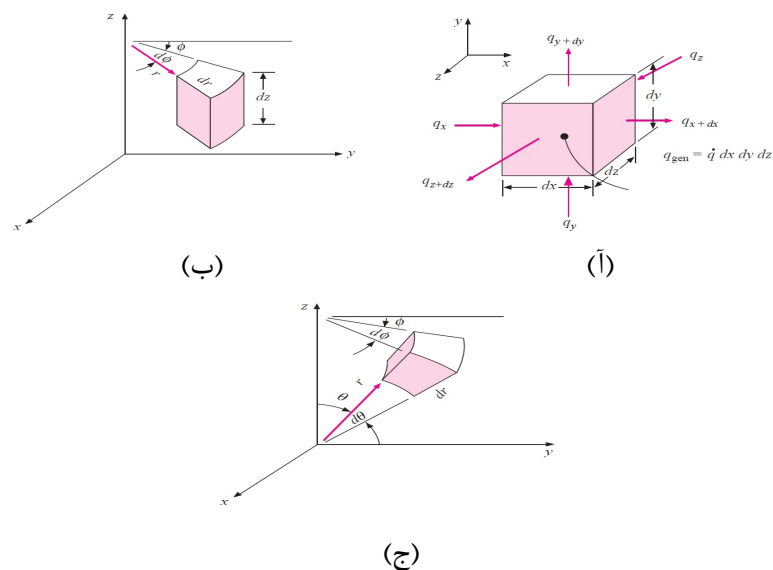
$$\frac{dE}{d\tau} = \rho c dx dy dz \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

بنابراین معادله کلی رسانش گرما در سه بعد عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (۴-۲)$$

برای رسانندگی گرمایی ثابت، معادله (۴-۲) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (۵-۲)$$



شکل ۲-۳: عنصر حجم مربوط به بررسی رسانش گرما در سه بعد: (آ) مختصات قائم (ب) مختصات استوانه‌ای (ج) مختصات کروی

که در آن مقدار $\alpha = \frac{K}{\rho c}$ را پخشندگی گرمایی ماده می‌نامیم. هرچه α بزرگتر باشد، گرما سریعتر در جسم پخش خواهد شد. این پدیده را می‌توانید با آزمودن کمیت‌های تشکیل دهنده α بررسی کنید. بزرگ بودن مقدار α هم می‌تواند ناشی از بزرگ بودن رسانندگی گرمایی باشد، که نشان دهنده آهنگ سریع انتقال انرژی است، و هم می‌تواند از کوچک بودن ظرفیت گرمایی ρc ناشی شود. کوچک بودن ظرفیت گرمایی به این معنی است که مقدار کمی از انرژی عبوری از داخل جسم جذب و صرف افزایش دمای آن می‌شود، از این رو انرژی بیشتری برای انتقال در دسترس خواهد بود. یکای پخشندگی گرمایی، α ، متر مربع بر ثانیه است.

در مشتق‌های بالا، جمله $x + dx$ را به صورت سری تیلور نوشته و فقط دو جمله اول آن را در نظر گرفته ایم.

با توجه به روش‌های استاندارد ریاضی، می‌توانیم معادله (۲-۵) را به صورت استوانه‌ای یا کروی بنویسیم. در نتیجه داریم:

مختصات استوانه‌ای

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (۲-۶)$$

مختصات کروی

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{q}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (7-2)$$

دستگاه مختصات مربوط به معادله‌های (۶-۲) و (۷-۲) را به ترتیب در قسمت (۲-۳) (ب) و (۲-۳) (ج) از شکل ۳-۲ نشان داده‌ایم.

بسیاری از مسایل کاربردی تنها حالت‌های ویژه‌ای از معادله‌های کلی گفته شده در بالا هستند. برای راهنمایی بیشتر در اینجا نمایش شکل ساده‌ای از چند کاربرد معادله‌های کلی را می‌آوریم [۱۵، ۱۶، ۱۷].

جریان گرما در یک بعد و در حالت پایدار (بدون تولید گرما)

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (8-2)$$

توجه کنید که این معادله همان معادله (۱-۲) با مقدار ثابت q است.

جریان گرما در یک بعد و در حالت پایدار در مختصات استوانه‌ای (بدون تولید گرما)

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (9-2)$$

جریان گرما در یک بعد و در حالت پایدار با چشمه‌های گرمایی

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q}{K} = 0 \quad (10-2)$$

جریان گرما در دو بعد و در حالت پایدار بدون چشمه‌های گرمایی

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (11-2)$$

۳-۲ دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

حل معادلات حاکم در مکانیک سیالات یکی از مطرح ترین مسائل در علوم مهندسی است. در اغلب موارد فرمول‌بندی قوانین پایه مکانیک سیالات به صورت معادله دیفرانسیل پاره‌ای (پی دی ای)^۴ درمی‌آید. بیشتر معادلات به صورت معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم ظاهر

^۴ Partial Differential Equation

می‌شوند و بنابراین در مکانیک سیالات و انتقال حرارت از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. عموماً، معادلات حاکم در مکانیک سیالات یک مجموعه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی و وابسته را ایجاد می‌کنند که باید در یک قلمرو ناهموار با شرایط اولیه و مرزی مختلف حل شوند. در بیشتر موارد، حل تحلیلی معادلات مکانیک سیالات بسیار محدود است. با اعمال شرایط مرزی، این محدودیت‌ها تنگ‌تر می‌شوند. به‌عنوان مثال یک معادلات دیفرانسیل پاره‌ای با شرایط مرزی دیریشله (یعنی شرطی که در آن مقادیر متغیر وابسته در مرزها داده شده‌اند) ممکن است دارای حل تحلیلی باشد. در حالی که همان معادله دیفرانسیل پاره‌ای با شرایط مرزی نیومن (که در آن گرادیان عمودی متغیر وابسته در مرزها داده می‌شود) ممکن است حل تحلیلی نداشته باشد. از آن‌جا که روش حل یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای به نوع معادله بستگی دارد، انواع مختلف آن‌ها را باید مشخص کرد. اعمال شرایط اولیه و شرایط مرزی نیز به نوع معادله بستگی دارد [۱۸، ۱۹]. بیشتر معادلات حاکم در دینامیک سیالات و انتقال حرارت به صورت معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم بیان می‌شوند و از این رو دسته بندی آن‌ها را در این فصل بررسی می‌کنیم.

۴-۲ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی و غیر خطی

در یک معادله دیفرانسیل خطی، متغیر وابسته و مشتق‌های آن به صورت خطی وارد معادله می‌شوند. در صورتی که در معادلات دیفرانسیل غیر خطی حاصل ضرب متغیرهای وابسته و یا حاصل ضرب مشتق‌های آن دیده می‌شود. برای مطالعه جزئیات این دسته معادلات خواننده می‌تواند به منبع [۲۰] مراجعه کند.

۵-۲ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم

برای دسته بندی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم، معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi + G = 0$$

در حالت کلی، ضرایب A, B, C, D, E, F, G توابعی از متغیرهای مستقل x و y و متغیر وابسته ϕ هستند. فرض کنید $\phi = \phi(x, y)$ یکی از جواب‌های معادله دیفرانسیل باشد. این جواب، نشان‌دهنده سطحی در فضا است که منحنی‌های فضایی را می‌توان روی آن رسم کرد. این منحنی‌ها جواب‌های مختلف معادله دیفرانسیل را به هم مربوط می‌سازند و به نام منحنی‌های مشخصه معروفند.

معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دومی که پیشتر به آن اشاره شد بسته به علامت عبارت $B^2 - 4AC$ به صورت زیر دسته بندی میشود:

$$B^2 - 4AC < 0 \quad \text{الف) بیضوی}$$

$$B^2 - 4AC = 0 \quad \text{ب) سهموی}$$

$$B^2 - 4AC > 0 \quad \text{ج) هذلولوی}$$

۶-۲ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی

معادلات حرکت در مکانیک سیالات اغلب به صورت معادلات سهموی نوشته می‌شوند. که در ادامه این دسته معادلات را بررسی می‌کنیم. معادله غیردائم هدایت حرارت نمونه‌ای از این نوع فرمول بندی است.

۶-۲-۱ فرمول بندی تفاضل محدود

معادله غیر دائم هدایت حرارت نمونه‌ای از معادله دیفرانسیل پاره‌ای سهموی مرتبه دوم است که آن را در حالت یک بعدی بررسی می‌کنیم [۱۴]. معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (۱۲-۲)$$

در این معادله α مقدار ثابتی است.

از تقریبهای تفاضل محدود مختلفی برای نشان دادن مشتق‌های معادله (۱۲-۲) می‌توان استفاده کرد. اگر $\frac{\partial u}{\partial t}$ را با تقریب تفاضل پیشروی مرتبه Δt نشان دهیم داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (۱۳-۲)$$

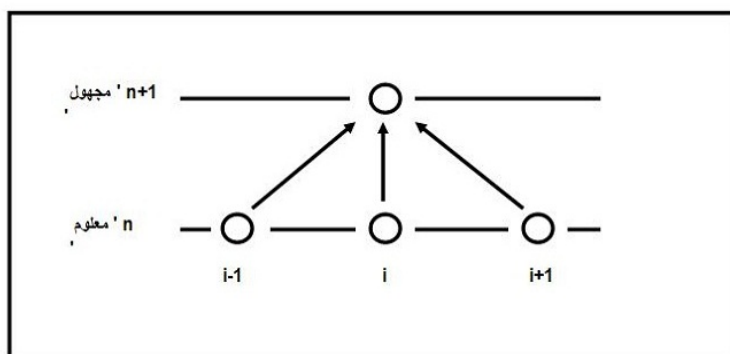
با استفاده از تقریب تفاضل مرکزی مرتبه $(\Delta x)^2$ برای جمله انتشار، معادله (۲-۱۲) را به صورت زیر تقریب می‌زنیم.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (2-14)$$

در این معادله تنها مجهول معادله است و آن را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (2-15)$$

در نتیجه معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم به صورت یک معادله جبری درآمده است. نمایش تصویری نقاط شبکه به کار رفته در معادله (۲-۱۵) را در شکل ۲-۴ می‌بینید. مقادیر

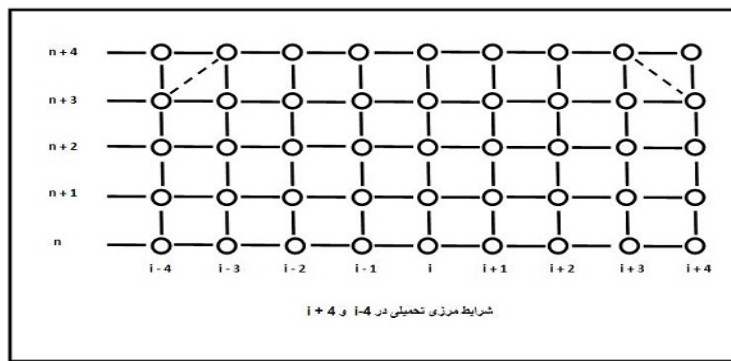


شکل ۲-۴: شبکه نقاط فرمولبندی صریح

متغیر وابسته در مقطع زمانی n از نتایج حل گام قبلی یا شرایط اولیه معلوم است. یعنی مقادیر محاسبه شده در مقطع زمانی $n+1$ تنها به مرحله قبلی وابسته‌اند. برای شروع حل، شرایط اولیه و دو شرط مرزی باید مشخص شوند. به فرمول‌بندی معادله پیوسته‌ای که به صورت معادله تفاضل محدودی درآمد (مانند معادله (۲-۱۵)) و تنها یک مجهول را بر حسب مقادیر معلوم بیان می‌کند، **روش صریح**^۵ می‌گویند.

از آنجا که هر معادله تفاضل محدود تنها یک مجهول دارد، معادلات حاصل را در مقطع زمانی $n+1$ جداگانه حل می‌کنیم تا مقادیر مجهول به‌دست آیند. حال فرض کنید که جواب یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای از یک روش تفاضل محدود صریح در زمان پیش رفته و مقادیر مجهول در زمان $n+4$ بدست آمده باشد. (شکل ۲-۵ را ببینید). شایان ذکر است که در

^۵Explicit method



شکل ۲-۵: اثر شرایط مرزی در فرمولبندی صریح

محاسبه مجهول در زمان $n + 4$ اطلاعات مربوط به شرایط مرزی مرحله $n + 4$ در محاسبات منظور نمی‌شود. بنابراین در یک فرمولبندی صریح، شرایط مرزی به اندازه یک گام زمانی نسبت به محاسبات تاخیر دارند. در مرحله بعد روشی را بررسی می‌کنیم که در فرمولبندی آن شرایط مرزی هر گام زمانی در محاسبات منظور می‌شود. هرگاه از تقریب تفاضل محدود پسروی مرتبه اول برای مشتق زمانی و تقریب تفاضل محدود مرکزی مرتبه دوم برای مشتق مکانی استفاده شود، معادله به صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (۱۶-۲)$$

در این معادله سه مجهول u_{i+1}^{n+1} ، u_i^{n+1} ، u_{i-1}^{n+1} وجود دارد. در شکل ۲-۶ نقاط شبکه به کار رفته در معادله (۱۶-۲) را می‌بینید.

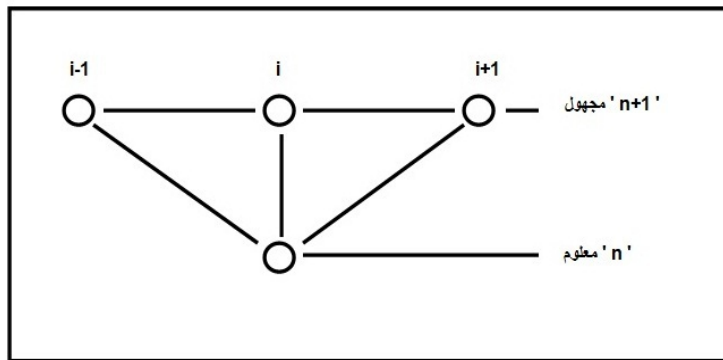
برای محاسبه مجهول‌ها به یک دسته معادلات تفاضل محدود مرتبط^۶ نیاز است. این معادلات را با نوشتن معادلات تفاضل محدود برای همه نقاط شبکه بدست می‌آوریم. برای آنکه معادله (۱۶-۲) را به روش استاندارد حل کنیم، آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} u_{i-1}^{n+1} - [1 + 2 \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}] u_i^{n+1} + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} u_{i+1}^{n+1} = -u_i^n \quad (۱۷-۲)$$

اینگونه فرمولبندی را که شامل بیش از یک مجهول در هر معادله تفاضل محدود است روش ضمنی^۷ می‌نامند.

^۶Coupled

^۷Implicit method



شکل ۲-۶: شبکه نقاط فرمولبندی ضمنی

معادله (۲-۱۷) را با تعریف ضرائب جمله‌های $u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^{n+1}$ به صورت a_i^n, b_i^n, c_i^n و همچنین تعریف سمت راست آن به صورت D_i^n به شکل کلی زیر می‌نویسیم:

$$a_i^n u_{i-1}^{n+1} + b_i^n u_i^{n+1} + c_i^n u_{i+1}^{n+1} = D_i^n \quad (2-18)$$

این معادله تفاضل محدود را برای تمام نقاط شبکه در مقطع زمانی جلوتر می‌نویسیم و در نتیجه مجموعه‌ای از معادلات جبری بدست می‌آید. هرگاه این معادلات را به صورت ماتریسی بنویسیم، ماتریس ضرائب آن سه قطری^۸ خواهد بود.

پس از آشنایی با دو روش گسسته‌سازی^۹ یک معادله پیوسته، نکته مهم این است که در یک مساله خاص ببینیم کدام روش مناسب‌تر است. و اما در رابطه با گام زمانی Δt و گام مکانی Δx چه باید کرد؟ تاثیر انتخاب گام مکانی در حل چیست؟ آیا روش حل پایدار خواهد بود و میزان دقت آن چقدر است؟

۲-۶-۲ روشهای صریح

در این بخش یکی از روش‌های صریح مورد استفاده در حل معادلات سهموی معرفی می‌شود.

^۸Tridiagonal

^۹Discretization

روش پیشرو نسبت به زمان و تفاضل مرکزی نسبت به مکان

همان گونه که پیشتر بحث شد، از تقریب تفاضل پیشرو برای مشتق‌های زمانی و تقریب تفاضل مرکزی برای مشتق‌های مکانی در معادله (۱۲-۲) نتیجه می‌شود:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (19-2)$$

که از مرتبه $[(\Delta t), (\Delta x)^2]$ است. می‌توان نشان داد که حل این معادله در صورتی پایدار است که $\frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{4}$ باشد [۲۰]. نقاط شبکه مورد استفاده در معادله (۱۹-۲) در شکل ۴-۲ نشان داده شده است.

۳-۶-۲ روشهای ضمنی

وقتی که معادله مدل (۱۲-۲) به صورت زیر گسسته‌سازی شد،

$$\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (20-2)$$

آن را معادله ضمنی نامیدیم زیرا بیش از یک مجهول در معادله تفاضل محدود ظاهر شد. در نتیجه مجموعه‌ای از معادلات را به طور همزمان باید حل کرد که باعث افزایش زمان محاسبه در هر گام زمانی می‌شود. روش‌های ضمنی دارای فایده مهم پایداری معادلات تفاضل محدودند، زیرا بیشتر آن‌ها بی‌قید و شرط پایدارند [۲۰]. بنابراین گام‌های زمانی بزرگتر در این روش مجاز است. به هر حال انتخاب گام زمانی بزرگتر با توجه به دقت مساله محدود می‌شود، زیرا افزایش گام زمانی منجر به افزایش خطای گرد کردن معادله تفاضل محدود می‌شود. در این بخش یکی از فرمول‌بندی‌های متداول در روشهای ضمنی را شرح می‌دهیم.

روش کرانک-نیکولسون^{۱۰}

اگر عبارت انتشار در معادله (۱۲-۲) را با مقدار متوسط تفاضل‌های مرکزی در مقطع زمانی n و $n+1$ جایگزین کنیم، معادله منفصل حاصل به صورت زیر است:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{1}{4} \right) \left[\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad (21-2)$$

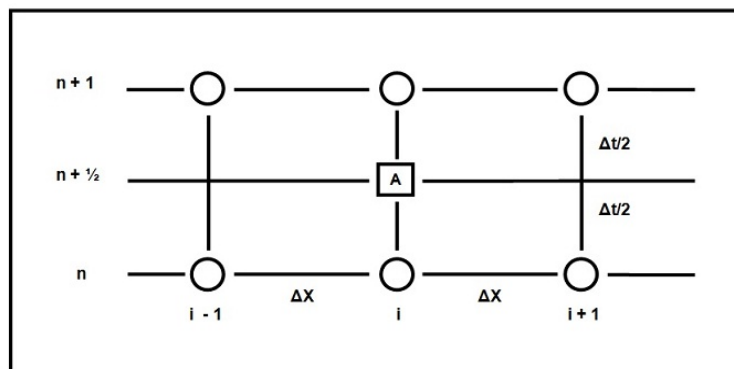
^{۱۰}The Crank-Nicolson Method

باید دانست که سمت چپ معادله، تقریب تفاضل مرکزی با گام زمانی $\frac{\Delta t}{2}$ است. یعنی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{2(\frac{\Delta t}{2})} \quad (22-2)$$

که از مرتبه $(\Delta t)^2$ است. از دیدگاه نقاط شبکه، شکل ۷-۲ سمت چپ معادله تقریب مرکزی $\frac{\partial u}{\partial t}$ در نقطه A است، در حالی که سمت راست متوسط جمله انتشار در همان نقطه است.

این روش حاصل جمع محاسبات در دو گام زمانی به صورت زیر است. با استفاده از روش صریح داریم:



شکل ۷-۲: شبکه نقاط روش ضمنی کرانک-نیکولسون

$$\frac{u_i^{n+\frac{1}{2}} - u_i^n}{\frac{\Delta t}{2}} = \alpha \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (23-2)$$

در حالی که با استفاده از روش ضمنی

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} = \alpha \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (24-2)$$

از جمع معادلات (۲۳-۲) و (۲۴-۲) داریم:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad (25-2)$$

گفتنی است که با این تحلیل امکان تشخیص مرتبه $(\Delta t)^2$ برای مشتق زمانی دشوار است.

این روش ضمنی بی قید و شرط پایدار و از مرتبه $[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$ است. یعنی این روش از مرتبه دوم است.

۷-۲ معادلات سهموی دو بعدی

تا این مرحله، فرمول‌بندی‌های تفاضل محدود مختلفی را برای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی با در نظر گرفتن معادله مدل غیر دائم و یک بعدی، بررسی کردیم. در این بخش مسئله را به دو بعد مکانی تعمیم و روش حل مفیدی را برای آن نشان می‌دهیم. معادله مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2-26)$$

که در آن α مقدار ثابتی است.

فرمول‌بندی ضمنی را با معادله تفاضل محدود زیر در نظر بگیرید که در آن از تفاضل پیشرو برای مشتق زمان و تفاضل مرکزی برای مشتق‌های مکان استفاده می‌شود.

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right] \quad (2-27)$$

که از آن داریم:

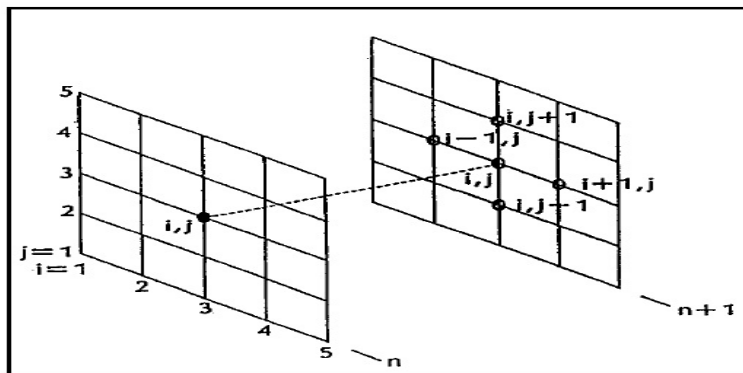
$$d_x u_{i+1,j}^{n+1} + d_x u_{i-1,j}^{n+1} - (2d_x + 2d_y + 1)u_{i,j}^{n+1} + d_y u_{i,j-1}^{n+1} + d_y u_{i,j+1}^{n+1} = -u_{i,j}^n \quad (2-28)$$

با تعریف ضرائب جمله‌های مجهول با a, b, c, d, e و همچنین طرف راست با f معادله (2-28) را به شکل زیر می‌نویسیم.

$$a_{i,j} u_{i+1,j}^{n+1} + b_{i,j} u_{i-1,j}^{n+1} + c_{i,j} u_{i,j}^{n+1} + d_{i,j} u_{i,j-1}^{n+1} + e_{i,j} u_{i,j+1}^{n+1} = f_{i,j} \quad (2-29)$$

که اگر مجموعه معادلات فوق را به شکل ماتریسی بنویسیم، ماتریس ضرائب آن پنج قطری خواهد بود. این روش در شکل ۲-۸ نشان داده شده است. که روش حل یک دستگاه پنج قطری زمان زیادی لازم دارد. یک روش برای برطرف کردن کاستیها و عدم کارایی آن، روش جدا کردن است. نام این روش، **روش ضمنی با جهت متغیر (ADI)**^{۱۱} است. در این روش دو دسته معادلات سه قطری همزمان ایجاد می‌شود که باید به ترتیب حل شوند. معادلات تفاضل محدود مدل (۲-۱۸) با فرمول‌بندی ADI به صورت زیر است [۲۱]:

^{۱۱} Alternating Direction Implicit



شکل ۲-۸: شبکه ۵ در ۵ برای معادله (۲۸-۲)

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} = \alpha \left[\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] \quad (30-2)$$

و

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} = \alpha \left[\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta y)^2} \right] \quad (31-2)$$

این روش از مرتبه $[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$ و بی قید و شرط پایدار است. معادلات (۳۰-۲) و (۳۱-۲) به شکل سه قطری زیر نوشته می شوند.

$$-d_1 u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2d_1) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - d_1 u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = d_2 u_{i,j+1}^n + (1 - 2d_2) u_{i,j}^n + d_2 u_{i,j-1}^n \quad (32-2)$$

و

$$-d_2 u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2d_2) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - d_2 u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} = d_1 u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - 2d_1) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + d_1 u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (33-2)$$

که در آن

$$d_1 = \frac{1}{2} d_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

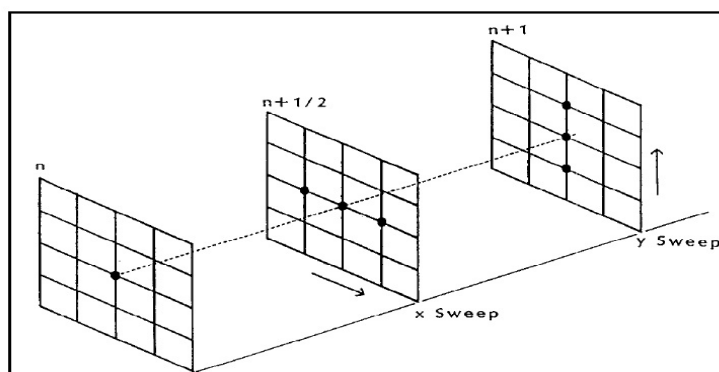
$$d_2 = \frac{1}{2} d_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2}$$

روش حل با حل دستگاه (۳۲-۲) آغاز می شود. فرمول بندی معادله (۳۲-۲) در جهت x ضمنی و در جهت y صریح است. بنابراین حل در این مرحله را روبیدن^{۱۲} در جهت x می گویند. جواب معادله سه قطری (۳۲-۲) داده های مورد نیاز برای سمت راست معادله (۳۳-۲) را فراهم می کند

^{۱۲}Sweep

تا بتوان معادله سه قطری (۳۳-۲) را حل کرد.

این معادله تفاضل محدود در جهت y ضمنی و در جهت x صریح است و به روبیدن در جهت y معروف است. این روش در شکل ۹-۲ نشان داده شده است.



شکل ۹-۲: شبکه در روش ADI

فصل ۳

مفاهیم بنیادی

در این فصل بحث کلی در مورد مسائل انتقال معکوس گرما شامل مفاهیم بنیادی، کاربردها، تقسیم بندی و نگاه کلی در مورد تکنیک های مختلف حل آن ها را ارائه خواهیم کرد.

۱-۳ مفهوم مسئله انتقال معکوس گرما

اهمیت فیزیکی مفهوم $IHTP$ با در نظر گرفتن و پیروی از مسئله استاندارد و تک بعدی رسانش گرما در یک قطعه به ضخامت L بهتر دیده می شود. در ابتدا توزیع گرما در این قطعه برابر $F(x)$ خواهد بود. بعد از زمان $t > 0$ ، شار گرمای $F(t)$ روی مرز $X = 0$ اعمال می شود در حالی که مرز $X = L$ در دمای ثابت T_L نگه داشته می شود. فرمول ریاضی این مسئله به صورت زیر داده می شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left(k \frac{\partial T}{\partial X} \right) &= \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} & 0 < X < L, t > 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial X} &= F(t) & X = 0, t > 0 \\ T &= T_L & X = L, t > 0 \\ T &= F(x) & t = 0, 0 < X < L \end{aligned} \quad (1-3)$$

برای حالتی که شرایط مرزی $F(t)$ و T_L ، شرایط اولیه $F(x)$ و خواص ترموفیزیکی ρc_p و K همگی معین هستند، مسئله داده شده با معادلات (۱-۳) از طریق تعیین توزیع دما $T(x, t)$ در ناحیه داخلی قطعه به عنوان تابعی از دما و مکان در نظر گرفته می شود. این مسئله، مسئله مستقیم نامیده می شود.

اکنون ما یک مسئله مشابه با مسئله داده شده با معادلات (۱-۳) را در نظر می گیریم با این تفاوت که تابع شرط مرزی $F(t)$ در سطح $X = 0$ نامعلوم است اما تمامی کمیت های دیگر در معادله (۱-۳) نظیر ρ ، c_p ، K ، T_L و $F(x)$ معلوم می باشد. هدف ما تعیین تابع $F(t)$ خواهد بود. به منظور جبران کمبود اطلاعات در مورد شرایط مرزی، دماهای $T(X_{meas}, t_i)$ در یک نقطه داخلی X_{meas} در زمان های مختلف t_i ، $i = 1, \dots, I$ بر روی بازه زمانی معین $0 < t \leq t_f$ که t_f زمان نهایی است، اندازه گیری می شود. این یک مسئله معکوس است زیرا با تخمین تابع سطحی نامعلوم $F(t)$ همراه خواهد بود. در این جا واژه تخمین به این دلیل استفاده می شود

که داده‌های دمایی اندازه‌گیری شده در آنالیز معکوس شامل خطاهای اندازه‌گیری خواهد بود. به عنوان نتیجه گیری، کمیتی که از طریق آنالیز معکوس به دست می‌آید (یعنی $F(t)$ شرط مرزی در مثال بالا) دقیق نیست اما یک تخمینی با خطاهای اندازه‌گیری را شامل می‌شود. سپس، فرمول‌نویسی ریاضی این مسئله معکوس با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left(k \frac{\partial T}{\partial X} \right) &= \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} & 0 < X < L, 0 < t \leq t_f \\ -k \frac{\partial T}{\partial X} &= F(t) = ? & X = 0, 0 < t \leq t_f \\ T &= T_L & X = L, 0 < t \leq t_f \\ T &= F(x) & t = 0, 0 < X < L \end{aligned} \quad (2-3)$$

و اندازه‌گیری‌های دما در یک مکان داخلی X_{meas} در زمان‌های مختلف t_i با رابطه زیر داده می‌شود:

$$T(X_{meas}, t_i) = Y_i \quad X = X_{meas} \quad t = t_i (i = 1, 2, \dots, I)$$

هدف اصلی مسئله مستقیم به دست آوردن میدان دمایی $T(x, t)$ در جسم جامد است هنگامی که همه خصوصیات دیگر (شامل شرایط مرزی و پارامترهای آن، شرط اولیه، خواص ترموفیزیکی محیط و تولید انرژی به شرط اینکه وجود داشته باشد) معین باشد. به عبارت دیگر، هدف مسئله معکوس تخمین یک یا چند خصوصیت نامعلوم از طریق دانستن دمای اندازه‌گیری شده در برخی از قسمت‌های معین محیط می‌باشد. در مسئله مستقیم معلول‌ها داده می‌شوند و علت تعیین می‌شود در حالی که در مسئله معکوس علت داده می‌شود و معلول (یا معلول‌ها) تخمین زده می‌شوند.

در مسئله معکوس داده شده در قسمت بالا، تابع سطحی مرزی $F(t)$ نامعلوم است. از این رو مسئله مورد نظر یک مسئله انتقال حرارت معکوس مرزی خواهد بود. به طور مشابه، مسائل انتقال حرارت معکوس را می‌توان با شرط اولیه تولید انرژی، خواص ترموفیزیکی غیر معلوم و غیر آن می‌توان تصور کرد. تاکنون ما یک مسئله انتقال حرارت معکوس مربوط به رسانش را در نظر گرفته‌ایم. به طور مشابه می‌توانیم مسائل معکوس را برای همرفت، تابش از سطح یا جسم و حالت‌های آمیخته از انتقال گرما و دیگر موارد داشته باشیم [۱].

مسائل معکوس می‌تواند به‌عنوان یک تخمین پارامتر یا به‌عنوان یک تقریب تخمین تابع حل شود. اگر برخی از اطلاعات از شکل تابعی کمیت نامعلوم در دسترس باشد، مسئله معکوس به تخمین پارامترهای نامعلوم می‌انجامد. بیایید مسئله معکوس مرزی داده شده با معادلات (۱-۳) و (۲-۳) را در نظر بگیریم و فرض کنیم که تابع نامعلوم $F(t)$ با یک چند جمله‌ای زمانی به‌صورت زیر داده شود:

$$F(t) = P_1 + P_2 t + P_3 t^2 + \dots + P_N t^{N-1}$$

یا شکل خطی عمومی‌تر به صورت

$$F(t) = \sum_{j=1}^N P_j C_j(t) \quad (3-3)$$

که در آن P_j ، $(j = 1, 2, \dots, N)$ ثابت‌های نامعلوم‌اند و $C_j(t)$ به عنوان تابع زمانی نامعلوم در نظر گرفته می‌شود. بنابراین مسئله معکوس تخمین زدن تابع نامعلوم $F(t)$ به مسئله تخمین زدن یک تعداد محدودی از پارامترهای P_j کاهش می‌یابد که در آن فرض بر آن است که N پارامتر انتخاب شود. مثال دیگری از تخمین زدن پارامترها به دست آوردن خواص ترموفیزیکی ثابت‌های نامعلوم می‌باشد نظیر رسانندگی گرمایی K یا ظرفیت گرمایی حجمی ρc_p نمایان شده در معادلات (۲-۳). اگر هیچ‌گونه اطلاعاتی در مورد فرم تابعی کمیت نامعلوم در دسترس نباشد، مسئله معکوس به عنوان یک تقریب تخمین زدن تابع در یک فضای بی‌نهایت بعدی در نظر گرفته می‌شود. روش‌های حل مسئله‌های معکوس نظیر تخمین زدن یک پارامتر و تقریب تخمین تابع در فصل آینده ارائه خواهند شد.

۲-۳ زمینه‌های کاربردی انتقال معکوس گرما

با ظهور مواد مرکب مدرن دارای خواص ترموفیزیکی وابسته به دما و مکان، استفاده از روش‌های سنتی برای تعیین خواص ترموفیزیکی مواد رضایت بخش نخواهد بود. به طور مشابه، عملکرد صنایع مدرن بیش از پیش پیشرفته شده است، به همین دلیل دقت در تخمین وضعیت خواص ترموفیزیکی تحت شرایط عملکرد واقعی ضروری شده است. تقریب مسئله انتقال معکوس گرما جواب‌های قانع کننده‌ای را برای چنین وضعیت‌هایی می‌تواند ارائه کند.

اصول و مبنای پیشرفت *IHTP* به صورتی است که آن را قادر می سازد تا تجربه ها و آزمایش ها را تا حد امکان به شرایط واقعی نزدیک کند. کاربردهای عملی روش های *IHTP* شامل نواحی مشخص زیر خواهد بود:

* تخمین خواص ترموفیزیکی مواد [۲، ۲۴، ۴۷، ۶۵، ۹۱، ۱۰۷]، [۲۶-۲۹]. مثلاً خواص مواد محافظ گرما حین بازگشتشان به جو زمین و تخمین وابستگی دمایی رسانندگی گرمایی شمش فلزی خنک شده در حین آب دادن آن.

* تخمین خواص تابش کپه ای و شرایط مرزی در جذب کردن، انتشار و پراکندگی مواد نیمه-شفاف [۹۷-۱۰۳].

* کنترل حرکت سطح جامد-مایع در حین انجماد [۸۴-۸۶].

* تخمین شرایط ورودی و شار گرمای مرزی در جریان همرفت اجباری، درون مجرای لوله آب [۶۸، ۷۶، ۷۷، ۱۰۶].

* تخمین رسانش نامعلوم متغییر با زمان ما بین سطح مشترک انجماد فلز و قالب فلزی در حین ریخته گری.

* تخمین رسانش سطح مشترک ما بین سطوح، در تماس دوره ای [۷۱].

* نظارت و کنترل خواص تابشی منعکس شده از سطح پانل های گرمازا و برودتی [۲۵].

* تخمین تابع واکنش [۷۲].

* کنترل و بهینه سازی فرآیند بازسازی و بهبود لاستیک [۱۰۴، ۱۲۱].

* تخمین شکل های مرزی اجسام [۸۸، ۸۹، ۹۲].

تخمین زدن چنین کمیت هایی با روش های سنتی یک امر غیر ممکن یا بسیار دشوار خواهد بود. اما با کاربرد تحلیل انتقال معکوس گرما نه تنها حل چنین مسائلی انجام خواهد شد بلکه میزان اطلاعات مورد مطالعه افزایش می یابد و کارهای تجربی سرعت و شتاب بیشتری می گیرند.

۳-۳ یک نگاه کلی از روش‌های حل برای مسائل انتقال معکوس گرما

ما در زیر روش‌های مختلف استفاده شده برای حل $IHTP$ را ارائه خواهیم کرد. چنین روش‌هایی عموماً به حل مسائل مستقیم وابسته نیازمند هستند. بنابراین ارائه روش‌هایی برای حل مسائل معکوس بدون در نظر گرفتن حل مسائل مستقیم وابسته به آن‌ها بسیار دشوار خواهد بود. چنین روش‌هایی می‌تواند در گروه‌های زیر طبقه‌بندی شود:

- ۱- تقریب معادله انتگرال [۳۰-۳۶].
- ۲- تکنیک‌های تبدیل انتگرال [۳۹-۴۷].
- ۳- تقریب حل سری‌ها [۴۸-۵۱].
- ۴- تقریب چند جمله‌ای [۵۲-۵۴].
- ۵- معادله رسانش گرما هایپربولیک [۵۵-۵۷].
- ۶- روش‌های عددی نظیر تفاضلات متناهی [۵۸-۷۷]، عناصر محدود [۷۸-۸۶]، عناصر مرزی [۹۰-۱۱۸].
- ۷- تکنیک‌های پیشروی فضایی به همراه فیلتر کردن داده‌های ورودی حاوی پارازیت نظیر آنچه که در روش همگرایی وجود دارد [۳۹، ۶۶، ۹۳].
- ۸- تکنیک‌های فیلتر کردن تکراری [۹۴].
- ۹- تکنیک‌های حالت - پایا [۹۲]، [۹۵-۹۶].
- ۱۰- روش معین کردن تابع پی در پی $Beck$ [۲، ۳۳، ۵۸، ۶۱].
- ۱۱- روش لونبرگ-مارکات^۱ برای مینیمم سازی فرم کمینه - مربعات [۲۴، ۴۷، ۹۷، ۹۹]، [۱۰۶-۱۱۳].
- ۱۲- تقریب منظم سازی تیخانو^۲ [۹۳-۱۲۰].
- ۱۳- روش‌های منظم سازی تکراری برای تخمین تابع و پارامترها.

^۱Levenberg-Marquardt

^۲Tikhonov

۱۴- الگوریتم‌های تکوینی^۳.

از مرور روش‌های ذکر شده پیداست که روش‌های متنوعی برای حل مسائل انتقال معکوس گرما استفاده شده است. بنابراین ضروری به نظر می‌رسد تا برخی از معیارهای پیشنهاد شده برای ارزیابی روش‌های حل *IHTP* را لیست و فهرست کنیم:

۱- اگر داده‌های اندازه‌گیری شده دقت بالایی داشته باشند، کمیت پیش‌بینی شده باید دقیق به دست آید.

۲- روش باید نسبت به خطاهای اندازه‌گیری پایدار باشد.

۳- روش باید یک اساس آماری داشته باشد و اجازه بدهد تا فرضیات آماری گوناگونی برای خطاهای اندازه‌گیری در نظر گرفته شود.

۴- روش نباید نیازمند به داده‌های ورودی از قبل هموار شده باشد.

۵- روش باید برای گام‌ها یا بازه‌های زمانی کوچک پایدار باشد.

۶- اندازه‌گیری دمایی باید از یک یا چند حسگر به‌دست آید.

۷- روش نباید نیازمند پیوسته بودن مشتق اول توابع نامعلوم باشد. بنابراین روش باید قادر به به‌دست آوردن توابعی با ناپیوستگی برشی باشد.

۸- داشتن زمان دقیق شروع اعمال یک شار گرمای سطحی نامعلوم یا چشمه نباید مورد نیاز واقع شود.

۹- روش نباید به تعداد ثابتی از اندازه‌گیری‌ها محدود شود.

۱۰- روش باید قادر باشد تا با محیط‌های فیزیکی پیچیده شامل جامد مرکب، مرزهای متحرک، خواص وابسته به دما، انتقال گرمای تابشی و همرفتی، مدهای ترکیب شده از انتقال گرما، مسائل چند بعدی و هندسه نامنظم (غیر اقلیدسی) عمل کند.

۱۱- روش باید جهت برنامه نویسی رایانه‌ای آسان باشد.

۱۲- هزینه و ارزش کامپیوتر باید متعادل باشد.

۱۳- استفاده‌کننده از روش نباید مهارت زیادی در ریاضیات داشته باشد.

۱۴- روش باید به بیش از یک کمیت نامعلوم قابل تعمیم باشد.

^۳Genetic

عموماً مسائل معکوس از طریق کمینه کردن یک تابع هدف حل می‌شوند. تابع هدف، S ، که ارائه‌کننده تخمین‌هایی با کمینه واریانس می‌باشد فرم کمینه مربعات معمولی نام دارد [۲۴، ۱۱۱] (یعنی مجموع مجذور باقیمانده‌ها) که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = (Y - T)^T(Y - T) \quad (۴-۳)$$

که در آن Y و T به ترتیب بردار دماهای اندازه‌گیری شده و تخمین زده شده نام دارند و توان T نشان‌دهنده ترانزاد بردار خواهد بود. دماهای تخمین زده شده از حل مسائل مستقیم که برای تخمین کمیت‌های نامعلوم به کار می‌روند به دست می‌آید. ما اکنون ۳ حالت خاص زیر را در نظر می‌گیریم:

الف- هنگامی که Y_i از یک حسگر تکی در زمان‌های $t_i, i = 1, \dots, I$ بدست می‌آید و در آنالیز معکوس مورد استفاده قرار می‌گیرد، ترانزاد بردار باقیمانده‌ها $(Y - T)^T$ با رابطه زیر داده می‌شود:

$$(Y - T)^T = (\bar{Y}_1 - \bar{T}_1, \bar{Y}_2 - \bar{T}_2, \dots, \bar{Y}_I - \bar{T}_I) \quad (۵-۳)$$

و فرم کمینه مربعات، معادله (۴-۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S = (Y - T)^T(Y - T) = \sum_{i=1}^I (Y_i - T_i)^2 \quad (۶-۳)$$

ب- هنگامی که از حسگرهای چندگانه در آنالیز معکوس استفاده می‌شود ترانزاد بردار باقیمانده‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(Y - T)^T = (\bar{Y}_1 - \bar{T}_1, \bar{Y}_2 - \bar{T}_2, \dots, \bar{Y}_I - \bar{T}_I) \quad (۷-۳)$$

که در آن برای زمان t_i ، $\bar{Y}_i - \bar{T}_i$ یک بردار افقی و برابر تعداد حسگرها، M ، می‌باشد یعنی:

$$(\bar{Y}_i - \bar{T}_i) = (\bar{Y}_{i1} - \bar{T}_{i1}, \bar{Y}_{i2} - \bar{T}_{i2}, \dots, \bar{Y}_{iM} - \bar{T}_{iM}) \quad (۸-۳)$$

در معادله (۸-۳) اولین زیرنویس به زمان t_i و دومین زیرنویس به تعداد حسگرها اشاره دارد.

بنابراین فرم کمینه مربعات معمولی، معادله (۴-۳)، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S = (Y - T)^T(Y - T) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I (Y_{im} - T_{im})^2$$

ج- اگر مقادیر انحراف از معیار اندازه‌گیری‌ها کاملاً متفاوت باشد، روش کمینه مربعات معمولی منجر به تخمینی با واریانس کمینه نمی‌شود [۲۴، ۱۱۱]. در چنین مواردی تابع هدف به صورت فرم کمینه مربعات وزن دار، S_w ، تعریف می‌شود:

$$S = (Y - T)^T W (Y - T) \quad (9-3)$$

که W ماتریس وزنی قطری نام دارد. چنین ماتریسی معمولاً به عنوان ماتریس کواریانس خطاهای اندازه‌گیری در نظر گرفته می‌شود. با فرض اندازه‌گیری‌ها از یک حسگر تکی، ماتریس وزنی W به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sigma_I^2} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

و S_w داده شده با معادله (۹-۳) را می‌توان به فرم واضح‌تر زیر نوشت:

$$S_w = \sum_{i=1}^I \frac{(Y_i - T_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (10-3)$$

که در آن σ_i انحراف معیار اندازه‌گیری Y_i در زمان t_i است. به طور مشابه برای مواردی که شامل M حسگر باشد معادله (۹-۳) به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$S_w = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \frac{(Y_{im} - T_{im})^2}{\sigma_{im}^2} \quad (11-3)$$

که در آن σ_{im} انحراف از معیار اندازه‌گیری Y_{im} از حسگر m ام در زمان t_i است. فصل بعد به حل مفصل یک مسئله رسانش گرمای معکوس با استفاده از روش لونیبرگ-مارکات و روش گرادیان مزدوج مربوط می‌شود. روش گرادیان مزدوج با معیار توقف مناسب به کلاس تکنیک‌های منظم سازی تکراری متعلق است.

فصل ۴

روش‌های حل مسائل انتقال معکوس گرما

در فصل قبلی ما در مورد اصول عمومی مربوط به فرمول‌بندی و حل مسئله انتقال حرارت معکوس بحث کردیم. هدف اصلی این فصل فراهم کردن پیش‌زمینه ریاضیات مورد نیاز برای استفاده از برخی از روش‌های حل مسائل انتقال حرارت معکوس می‌باشد. چهار روش زیر در نظر گرفته می‌شود:

روش ۱: روش لونیبرگ^۱ برای تخمین پارامتر

روش ۲: روش گرادیان مزدوج برای تخمین پارامتر

روش ۳: روش گرادیان مزدوج به همراه مسئله الحاقی برای تخمین پارامتر

روش ۴: روش گرادیان مزدوج به همراه مسئله الحاقی برای تخمین تابع

اگر چه روش‌های دیگر نیز در دسترس هستند اما ۴ روش بالا در این رساله انتخاب شده‌اند، زیرا آن‌ها به قدر کافی عمومی، متنوع، سر راست و قدرتمند هستند تا بر مشکلات مربوط به حل مسائل انتقال معکوس گرما غلبه کند.

روش ۱: یک روش تکراری برای حل مسائل کمترین مربعات خطی جهت تخمین پارامتر است. این روش اولین بار توسط لونیبرگ [۱۲۱] در سال ۱۹۴۴ با اصلاح کردن فرم کمترین مربعات معمولی به دست آمده است. بعدها در سال ۱۹۶۳ مارکات^۲ روش مشابهی را با استفاده از یک تقریب متفاوت به دست آورد. عقیده مارکات بر آن بود تا روشی را به دست آورد که در همسایگی کمینه فرم کمترین مربعات معمولی به روش گاوسی میل کند [۱۲۲-۱۲۴].

این روش لونیبرگ-مارکات^۳ [۱۲۱-۱۲۸] نامیده می‌شود و برای حل مسائل معکوس متنوعی که شامل پارامترهای نامعلوم است به کار می‌رود.

حل مسائل معکوس تخمین پارامتر با استفاده از روش ۱ نیازمند محاسبه ماتریس حساسیت، J ، دارد که عناصر مؤلفه‌های حساسیت، J_{ij} ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial T_i}{\partial P_j} = J_{ij} \quad (1-4)$$

که در آن $i = 1, 2, \dots, I$ ، $j = 1, 2, \dots, N$ تعداد اندازه‌گیری‌ها، N تعداد پارامترهای

^۱Levenberg

^۲Marquardt

^۳Levenberg-Marquardt

نامعلوم ، T_i ، i امین دمای تخمین زده شده و P_j ، j امین پارامتر تخمین زده شده می باشد. روش ۱ برای حل مسائل تخمین پارامتر خطی و غیر خطی بسیار مفید می باشد. اما برای مسائل تخمین غیر خطی که شامل تعداد زیادی از پارامترهای نامعلوم است، به خاطر زمان صرف شده در محاسبه ماتریس حساسیت معمولاً با مشکلاتی همراه است .

روش ۲: از روش کمینه کردن گرادیان مزدوج برای حل مسائل تخمین پارامتر استفاده می کند. همانند روش ۱، این روش به محاسبه ماتریس حساسیت نیازمند است که یک فرآیند زمان گیر است. (هنگامی که تعداد پارامترهای تخمین زده بسیار زیاد باشد مخصوصاً در مسائل غیر خطی).

روش های ۳ و ۴: از روش گرادیان مزدوج به همراه مسئله الحاقی استفاده می شود [۱۲۸-۱۴۰].

روش ۳ مخصوصاً برای حل مسائل شامل تخمین مؤلفه های توابع وابسته به زمان در تعیین تقریبی تابع نامعلوم، پایدار است . استفاده از مسئله الحاقی در تکنیک ۳ به یک عبارت برای جهت گرادیان می انجامد که شامل ضریب لاگرانژ است، بنابراین محاسبه ماتریس حساسیت نیازمند زمان کمتری است.

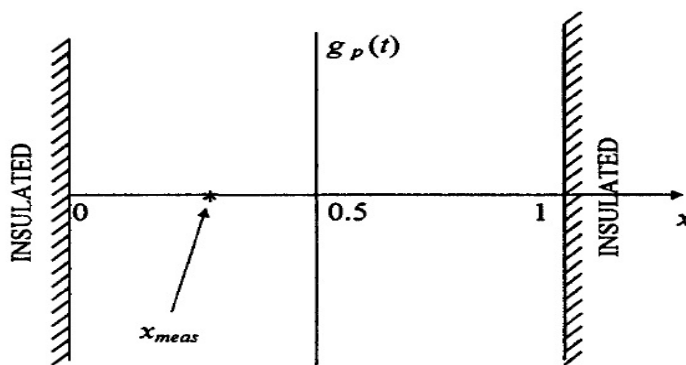
روش ۴ یک تقریب تخمین تابع است و هنگامی که هیچ گونه اطلاعات قبلی در مورد شکل تابعی کمیت نامعلوم در دسترس نیست بسیار مفید است. روش های ۲ و ۳ و ۴ به همراه معیار توقف مناسب برای روش های تکراری متعلق به کلاس تکنیک منظم سازی تکراری می باشد. در این فصل ما گام های اساسی را توصیف می کنیم و برای هر کدام از این ۴ روش الگوریتم های حل ارائه می کنیم. مؤلفه های حساسیت نقش مهمی در کاربرد روش های ۱ و ۲ و ۳ برای مسائل تخمین پارامتر دارد. از این رو در این فصل یک روش برای محاسبه آن توصیف خواهیم کرد.

۱-۴ روش ۱: روش لونبرگ برای تخمین پارامتر

روش لونبرگ که اساساً برای مسائل تخمین پارامتر غیر خطی به کار می‌رود، برای حل مسائل خطی که شرایط بسیار بدی برای کاربرد و استفاده الگوریتم‌های خطی دارند مورد استفاده قرار می‌گیرد.

حل مسائل انتقال حرارت معکوس با روش لونبرگ می‌تواند به صورت زیر دسته‌بندی شود:
ما هر کدام از این گام‌های بالا را هنگام حل مسئله آزمون رسانش گرمای معکوس که شامل وضعیت فیزیکی زیر است به کار می‌بریم:

رسانش گرمای گذرای خطی در یک صفحه فلزی با ضخامت بدون بعد واحد در نظر بگیرید. صفحه فلزی در ابتدا در دمای صفر قرار دارد و تمامی مرزها در $X = 0$ و $X = 1$ کاملاً عایق‌بندی شده است. در زمان $t > 0$ یک منبع گرما با قدرت $g_p(t)$ به ازای واحد سطح در وسط صفحه فلزی $X = 0.5$ جایگزین می‌شود و انرژی خود را مطابق شکل ۱-۴ آزاد می‌کند. فرمول‌بندی ریاضی این مسئله رسانش گرما به صورت بدون بعد می‌باشد و به صورت



شکل ۱-۴: هندسه و مختصات مسئله

زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + g_p(t) \delta(x - x_0) &= \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} & 0 < x < 1, t > 0 \\ \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} &= 0 & x = 0, t > 0 \\ \frac{\partial T(1, t)}{\partial x} &= 0 & x = 1, t > 0 \\ T(x, 0) &= 0 & t = 0, 0 < x < 1 \end{aligned}$$

که در آن $\delta(\cdot)$ تابع دلتای دیراک است.

۱-۱-۴ مسئله مستقیم:

در مسئله مستقیم وابسته به مسئله فیزیکی توصیف شده در بالا، قدرت $g_p(t)$ متغیر با زمان کاملاً معلوم است. آنگاه هدف مسئله مستقیم تعیین میدان دمایی گذرا $T(x, t)$ در صفحه فلزی است.

۲-۱-۴ مسئله معکوس:

برای مسئله معکوس مورد نظر، قدرت $g_p(t)$ متغیر با زمان، ناشناخته و نامعلوم است. اطلاعات اضافی به دست آمده از اندازه‌گیری‌های دمای گذرا که در مکان $X = X_{meas}$ در زمان‌های t_i ، $i = 1, \dots, I$ گرفته می‌شود برای تخمین $g_p(t)$ استفاده می‌شود. برای حل مسئله معکوس، تابع تولید انرژی $g_p(t)$ نامعلوم را در نظر می‌گیریم طوری که به فرم عمومی خطی زیر پارامتربندی شده باشد:

$$g_p(t) = \sum_{j=1}^N P_j C_j(t) \quad (2-4)$$

در اینجا P_j کمیت‌های نامعلوم و $C_j(t)$ توابع زمانی معلوم (چند جمله ای، $B - Splines$ و غیره) هستند. بعلاوه تعداد کل پارامترها، N ، معین است.

مسئله داده شده با معادلات (۱-۴) به همراه $g_p(t)$ نامعلوم، اما به صورت معادله (۲-۴)، یک مسئله رسانش گرمای معکوس است که در آن مؤلفه‌های P_j تخمین زده می‌شوند. حل این مسئله رسانش معکوس گرما برای تخمین N پارامتر نامعلوم بر اساس کمینه‌سازی فرم مینیمم مربعات معمولی داده شده به صورت زیر می‌باشد.

$$S_P = \sum_{i=1}^I [Y_i - T_i(P)]^2 \quad (3-4)$$

که در آن S مجموع مربعات خطا یا تابع هدف، $P^T = [P_1, P_2, \dots, P_N]$ بردار کمیت‌های نامعلوم، $T_i(P) = T(P, t_i)$ دمای تخمین زده شده در زمان t_i ، $Y_i = Y(t_i)$ دمای اندازه‌گیری شده در زمان t_i ، N تعداد کل پارامترهای نامعلوم و I تعداد کل اندازه‌گیری‌هاست که $I \geq N$ می‌باشد.

دماهای تخمین زده شده $T_i(P)$ از حل مسئله مستقیم در مکان اندازه‌گیری، X_{meas} ، با استفاده از تخمین کمیت‌های نامعلوم P_j ($j = 1, 2, \dots, N$)، به دست می‌آید. معادله (3-4) به فرم ماتریسی زیر نوشته می‌شود:

$$S(P) = [Y - T(P)]^T [Y - T(P)] \quad (4-4)$$

که در آن توان T علامت ترانهاده است و $[Y - T(P)]^T$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[Y - T(P)]^T = [Y_1 - T_1, Y_2 - T_2, \dots, Y_I - T_I] \quad (5-4)$$

۳-۱-۴ روش تکراری برای روش لونبرگ-مارکات

برای کمینه کردن فرم می‌نیمم مربعات داده شده با معادلات (4-4) احتیاج داریم که مشتق‌های $S(P)$ را نسبت به هر یک از پارامترهای نامعلوم $[P_1, P_2, \dots, P_N]$ برابر صفر قرار دهیم یعنی:

$$\frac{\partial S(P)}{\partial P_1} = \frac{\partial S(P)}{\partial P_2} = \dots = \frac{\partial S(P)}{\partial P_N} = 0 \quad (6-4)$$

چنین شرایط لازم برای کمینه کردن $S(P)$ می‌تواند به صورت ماتریسی با قرار دادن گرادیان $S(P)$ نسبت به پارامترهای برداری P برابر با صفر نمایش داده شود. یعنی:

$$\nabla S(P) = 2 \left[-\frac{\partial T^T(P)}{\partial P} \right] [Y - T(P)] = 0 \quad (7-4)$$

که در آن:

$$\frac{\partial T^T(P)}{\partial P} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial P_1} \\ \frac{\partial}{\partial P_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial P_N} \end{bmatrix} [T_1, T_2, \dots, T_N] \quad (۸-۴)$$

ماتریس حساسیت پاژاکوبی $J(P)$ با ترانهاده معادله (۸-۴) تعریف می شود یعنی:

$$J(P) = \left[\frac{\partial T^T(P)}{\partial P} \right]^T \quad (۹-۴)$$

به صورت واضح تر ماتریس حساسیت به صورت زیر نوشته می شود:

$$J(P) = \left[\frac{\partial T^T(P)}{\partial P} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial P_1} & \frac{\partial T_1}{\partial P_2} & \frac{\partial T_1}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial P_N} \\ \frac{\partial T_2}{\partial P_1} & \frac{\partial T_2}{\partial P_2} & \frac{\partial T_2}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial T_2}{\partial P_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial T_I}{\partial P_1} & \frac{\partial T_I}{\partial P_2} & \frac{\partial T_I}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial T_I}{\partial P_N} \end{bmatrix} \quad (۱۰-۴)$$

که در آن N تعداد کل کمیت های نامعلوم و I تعداد کل اندازه گیری ها می باشد. عناصر ماتریس حساسیت مؤلفه های حساسیت نامیده می شوند. بنابراین مؤلفه حساسیت J_{ij} به عنوان مشتق اول دمای تخمین زده شده در زمان t_i نسبت به پارامتر نامعلوم P_j می باشد یعنی:

$$J_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial P_j} \quad (۱۱-۴)$$

با استفاده از تعریف ماتریس حساسیت که با معادله (۹-۴) داده می شود برای معادله (۷-۴) خواهیم داشت:

$$-2 J^T(P) [Y - T(P)] = 0 \quad (۱۲-۴)$$

برای مسائل معکوس خطی، ماتریس حساسیت تابع پارامترهای نامعلوم نیست. در چنین موردی معادله (۱۲-۴) می تواند به صورت برداری از کمیت های نامعلوم P به صورت زیر حل

می‌شود [۱۲۴]:

$$P = (J^T J)^{-1} J^T Y \quad (۱۳-۴)$$

برای مسائل معکوس غیر خطی، ماتریس حساسیت تابعی از بردار پارامترهای نامعلوم P می‌باشد. حل معادله (۱۲-۴) برای مسائل تخمین غیر خطی به یک روش تکراری نیازمند است که از طریق خطی سازی بردار دماهای تخمین زده شده، $T(P)$ ، به دست می‌آید و این روش با بسط سری تیلور حول حل P^K در تکرار K همراه است. چنین خطی سازی به صورت زیر داده می‌شود:

$$T(P) = T(P^K) + J^K(P - P^K) \quad (۱۴-۴)$$

که در آن $T(P^K)$ و J^K به ترتیب دمای تخمین زده شده و ماتریس حساسیت به دست آمده برای تکرار K نام دارد. معادله (۱۴-۴) جانشین معادله (۱۲-۴) و عبارت حاصله طوری مرتب می‌شود تا روش تکراری زیر برای به دست آوردن بردار کمیت‌های نامعلوم P به دست آید [۱۲۴].

$$P^{K+1} = P^K + [(J^K)^T J^K J^{-1} (J^K)^T [Y - T(P^K)]] \quad (۱۵-۴)$$

روش تکراری داده شده با معادله (۱۵-۴) روش گاوس نامیده می‌شود. چنین روشی یک تقریب واقعی برای روش نیوتن (یا نیوتن - رافسون) است [۱۲۳]. باید توجه کنیم که معادله (۱۳-۴) همانند روش تکراری داده شده با معادله (۱۵-۴) نیازمند آن است که ماتریس $J^T J$ برابر ماتریس واحد شود یا

$$|J^T J| \neq 0 \quad (۱۶-۴)$$

که علامت $| \cdot |$ نشان دهنده دترمینان است.

معادله (۱۶-۴) شرط شناسایی نامیده می‌شود یعنی اگر دترمینان $J^T J$ صفر باشد یا حتی خیلی کوچک باشد آنگاه کمیت‌های P_j ($j = 1, 2, \dots, N$) نمی‌تواند با استفاده از روش تکراری معادله (۱۵-۴) به دست آید. مسئله‌هایی که با $|J^T J| = 0$ رو به رو هستند، مسائل با شرایط بد توصیف می‌شوند. مسائل انتقال معکوس گرما اساساً حاوی شرایط بد هستند که در نتیجه با دشواری‌هایی در کاربرد معادلات (۱۳-۴) یا (۱۵-۴) همراه‌اند. روش لونبرگ چنین

دشواری‌هایی را با کاربرد روش تکراری به صورت زیر کاهش می‌دهد:

$$P^{K+1} = P^K + [(J^K)^T J^K + \mu^K \Omega^K]^{-1} (J^K)^T [Y - T(P^K)] \quad (17-4)$$

که در آن μ^K یک کمیت اسکالر مثبت به نام پارامتر میرایی است، و Ω^K یک ماتریس قطری است. هدف از جمله ماتریس $\mu^K \Omega^K$ که در معادله (17-4) وجود دارد، میرایی نوسانات و ناپایداری‌های مربوط به شرایط بد مسئله است که در صورت نیاز مؤلفه‌های آن را می‌توان در مقایسه با $J^T J$ بسیار بزرگ ایجاد کرد. پارامتر میرایی در شروع تکرارها بسیار بزرگ ساخته می‌شود، چرا که عموماً مسئله حول شروع حدس مورد استفاده برای روش تکراری، دارای شرایط بدی است و پارامترهای میرایی می‌تواند کاملاً نسبت به پارامترهای دقیق متفاوت باشد. با به‌کارگیری چنین تقریبی، نیازی به غیر یک بودن ماتریس $J^T J$ در شروع تکرارها نیست و روش لوببرگ به روش کاهش سریع^۴ میل می‌کند، یعنی گام بسیار کوچکی در جهت گرادیان منفی برداشته می‌شود. سپس پارامتر μ^K رفته رفته هنگامی که روش تکرار به سوی حل مسئله تخمین پارامتر پیش روی می‌کند، کاهش می‌یابد و سپس روش لوببرگ به روش گاوسی داده شده با معادله (15-4) میل می‌کند [124].

۴-۱-۴ معیار توقف برای روش ۱

معیار زیر برای توقف روش تکراری داده شده با معادله (17-4) توسط دنیس و همکارش^۵ [126] پیشنهاد شده است:

$$S(P^{K+1}) < \varepsilon_1 \quad (18-4)$$

$$\|P^{K+1} - P^K\| < \varepsilon_2 \quad (19-4)$$

$$\|(J^K)^T [Y - T(P^K)]\| < \varepsilon_3 \quad (20-4)$$

که در آن ε_1 و ε_2 و ε_3 تلرانس تعیین شده توسط استفاده کننده و $\|\cdot\|$ نرم بردار وابسته به هندسه اقلیدسی یعنی $\|X\| = (X^T X)^{1/2}$ است که توان T نشان‌دهنده ترانهاده است.

^۴Steepest Descent Method

^۵Dennis and Schnabel

۵-۱-۴ الگوریتم محاسباتی برای روش ۱

انواع مختلفی از روش لوببرگ را می‌توان بر حسب انتخاب ماتریس قطری Ω^K و فرم ماتریس میرایی μ^K در مقالات مختلف [۱۲۸-۱۲۱] یافت. ما در این جا روشی با ماتریس Ω^K به صورت زیر را توضیح می‌دهیم:

$$\Omega^K = \text{diag}[(J^K)^T J^K] \quad (۲۱-۴)$$

الگوریتمی که در زیر توصیف می‌شود به عنوان زیر برنامه *MRQMIN* در برنامه‌های محاسباتی موجود است. خواننده برای توضیحات بیشتر می‌تواند به مرجع این زیر برنامه مراجعه کند [۱۲۵].

فرض کنید اندازه‌گیری‌های دمایی $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_I)$ در زمان‌های t_i ($i = 1, \dots, I$) انجام شده است. همچنین فرض کنید که حدس اولیه P^* برای بردار پارامترهای نامعلوم P موجود باشد. سپس مقدار $\mu^* = 0.001$ و $K = 0$ انتخاب می‌شوند [۱۲۵].

گام ۱: مسئله مستقیم انتقال معکوس گرما را با معادلات (۱-۴) به همراه موجود بودن مقدار تخمینی P^K به منظور به‌دست آوردن بردار دمایی $T(P^K) = (T_1, \dots, T_I)$ حل کنید.

گام ۲: $S(P^K)$ را از معادله (۴-۴) حل کنید.

گام ۳: ماتریس حساسیت J^K تعریف شده با معادله (۹-۴) را محاسبه کنید سپس ماتریس Ω^K داده شده با معادله (۲۱-۴) را با استفاده از مقادیر کنونی P^K محاسبه کنید.

گام ۴: معادلات جبری سیستم خطی زیر را که از روش تکراری معادله (۱۷-۴) به‌دست می‌آید، حل کنید:

$$[(J^K)^T J^K + \mu^K \Omega^K] \Delta P^K = (J^K)^T [Y - T(P^K)] \quad (۲۲-۴)$$

برای محاسبه ΔP^K باید:

$$\Delta P^K = P^{K+1} - P^K \quad (۲۳-۴)$$

گام ۵: P^{K+1} را محاسبه کنید:

$$P^{K+1} = P^{K+1} - P^K \quad (۲۴-۴)$$

گام ۶: مسئله مستقیم (۴-۱) را با استفاده از تخمین جدید P^{K+1} حل کنید تا $T(P^{K+1})$ را به دست آورید. آنگاه $S(P^{K+1})$ را که با معادله (۴-۴) تعریف می شود محاسبه کنید.

گام ۷: اگر $S(P^{K+1}) \geq S(P^K)$ آنگاه μ^K را با μ^{K+1} جایگزین کنید و به گام ۴ بروید.

گام ۸: اگر $S(P^{K+1}) < S(P^K)$ مقدار تخمین جدید P^{K+1} را قبول کنید و μ^K را با μ^{K+1} جایگزین کنید.

گام ۹: معیار توقف داده شده با معادلات (۴-۱۸) تا (۴-۲۰) را بررسی کنید. اگر آن ها درست بودند روش تکرار را متوقف کنید، در غیر این صورت K را با $K+1$ جایگزین کنید و به گام ۳ برگردید.

۲-۴ مفهوم مؤلفه حساسیت

ماتریس حساسیت (۴-۹) نقش مهمی در مسائل تخمین کمیت بر عهده دارد. بنابراین در زیر در مورد اهمیت فیزیکی و ریاضی مؤلفه های حساسیت و روش محاسبات آن بحث خواهیم کرد.

مؤلفه حساسیت J_{ij} که با معادله (۴-۱۱) تعریف شده است، اندازه گیری دمای تخمین زده شده T_i نسبت به تغییرات پارامتر P_j است. چندین تقریب مختلف برای محاسبه مؤلفه های حساسیت وجود دارد.

(آ) حل تحلیلی مستقیم

(ب) مسئله مقدار مرزی

(ج) تقریب تفاضل متناهی.

ما در زیر تقریب تفاضل متناهی، که در این پایان نامه استفاده شده، را ارائه می کنیم.

تقریب تفاضل متناهی برای تعیین مؤلفه های حساسیت

مشتقات اول ظاهر شده در تعریف مؤلفه حساسیت معادله (۴-۱۱)، می تواند با روش تفاضل متناهی محاسبه شود. اگر از تقریب تفاضل پیشرو استفاده شود، مؤلفه های حساسیت نسبت به پارامتر P_j به صورت زیر تقریب زده می شوند.

$$J_{ij} \cong \frac{T_i(P_1, P_2, \dots, P_j + \epsilon P_j, \dots, P_N) - T_i(P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_N)}{\epsilon P_j} \quad (25-4)$$

که در آن 10^{-6} یا $10^{-5} = \epsilon$. اگر تقریب مرتبه اول داده شده با معادله (25-4) به اندازه کافی دقیق نباشد، مؤلفه‌های حساسیت می‌تواند با استفاده از تفاضلات مرکزی به صورت زیر تقریب زده شود:

$$J_{ij} \cong \frac{T_i(P_1, P_2, \dots, P_j + \epsilon P_j, \dots, P_N) - T_i(P_1, P_2, \dots, P_j - \epsilon P_j, \dots, P_N)}{2\epsilon P_j} \quad (26-4)$$

توجه شود که تقریب مؤلفه‌های حساسیت داده شده با معادله (25-4) به محاسبه N حل اضافی از مسئله مستقیم نیاز دارد در حالی که معادله (26-4) به حل اضافی $2N$ مسئله نیازمند است. بنابراین، محاسبه مؤلفه‌های حساسیت با استفاده از تفاضلات متناهی بسیار زمان‌گیر است.

۱-۲-۴ استفاده از حسگرهای چندگانه

الگوریتم محاسباتی لونبرگ که در بالا داده شده، می‌تواند با اصلاحات اندکی در مواردی که شامل اندازه‌گیری از حسگرهای چندگانه است مورد استفاده قرار گیرد. این کمیت‌ها نیازمند اصلاحاتی شامل شکل واضحی از بردار $[Y - T(P)]$ ، تابع هدف $S(P)$ و ماتریس حساسیت J می‌باشد.

در مواردی که داده‌های اندازه‌گیری شده از M حسگر برای تحلیل در دسترس است، بردار شامل اختلافات بین دمای اندازه‌گیری شده و تخمین زده شده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[Y - T(P)]^T = [\bar{Y}_1 - \bar{T}_1(P), \dots, \bar{Y}_I - \bar{T}_I(P)] \quad (27-4)$$

که در آن $[\bar{Y}_i - \bar{T}_i(P)]$ یک بردارسطری است که شامل اختلافات بین دماهای اندازه‌گیری شده و تخمین زده شده برای هر یک از M حسگر در زمان t_i ($i = 1, \dots, I$) می‌باشد. فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$[\bar{Y}_i - \bar{T}_i(P)] = [Y_{i1} - T_{i1}(P), \dots, Y_{im} - T_{im}(P)] \quad i = 1, \dots, I \quad (28-4)$$

در عناصر بردار $[Y_{im} - T_{im}(P)]$ ، زیرنویس i به زمان t_i ($i = 1, \dots, I$) اشاره دارد، در حالی که زیرنویس m به تعداد حسگرها اشاره دارد که در آن $m = 1, 2, \dots, M$.

با جانشینی معادلات (۲۷-۴) و (۲۸-۴) با معادله (۴-۴) فرم کمینه مربعات می‌تواند به فرم واضح زیر بیان شود:

$$S(P) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I [Y_{im} - T_{im}(P)]^2 \quad (۲۹-۴)$$

ماتریس حساسیت تعریف شده توسط معادله (۹-۴) نیز نیاز به اصلاح دارد. ترانهاده ماتریس حساسیت که با معادله (۸-۴) تعریف می‌شود، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial T^T(P)}{\partial P} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial P_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial P_N} \end{bmatrix} [\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_I] \quad (۳۰-۴)$$

که در آن

$$\bar{T}_i = [T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{iM}] \quad i = 1, \dots, I \quad (۳۱-۴)$$

بنابراین برای ماتریس حساسیت می‌توان نوشت:

$$J(P) = \left[\frac{\partial T^T(P)}{\partial P} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{T}_1^T}{\partial P_1} & \frac{\partial \bar{T}_1^T}{\partial P_2} & \frac{\partial \bar{T}_1^T}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial \bar{T}_1^T}{\partial P_N} \\ \frac{\partial \bar{T}_2^T}{\partial P_1} & \frac{\partial \bar{T}_2^T}{\partial P_2} & \frac{\partial \bar{T}_2^T}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial \bar{T}_2^T}{\partial P_N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial \bar{T}_I^T}{\partial P_1} & \frac{\partial \bar{T}_I^T}{\partial P_2} & \frac{\partial \bar{T}_I^T}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial \bar{T}_I^T}{\partial P_N} \end{bmatrix} \quad (۳۲-۴)$$

که در آن

$$\frac{\partial \bar{T}_i^T}{\partial P_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{i1}}{\partial P_j} \\ \frac{\partial T_{i2}}{\partial P_j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial T_{iM}}{\partial P_j} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, N \quad (۳۳-۴)$$

که I تعداد اندازه‌گیری‌های گذرا به ازای هر حسگر، M تعداد حسگرها و N تعداد پارامترهای نامعلوم است. ماتریس حساسیت داده شده با معادله (۴-۳۲) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$J_{kj} = \frac{\partial T_k}{\partial P_j} \quad (4-34)$$

که در آن زیر نویس k و j به ترتیب به تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس حساسیت اشاره دارد. تعداد سطر k که به زمان اندازه‌گیری t_i و به تعداد حسگر m بستگی دارد با رابطه زیر داده می‌شود:

$$k = (i - 1)M + m \quad (4-35)$$

با اصلاحات بالا، الگوریتم محاسباتی برای روش ۱، برای مواردی که شامل اندازه‌گیری از حسگرهای چندگانه است می‌تواند به کار برده شود.

۴-۳ روش ۲: روش گرادیان مزدوج برای تخمین پارامتر

در این قسمت روش دیگری را برای تخمین پارامترهای نامعلوم ارائه می‌کنیم. روش ۲، روش گرادیان مزدوج، یک روش قدرتمند و سر راست برای حل کردن مسائل معکوس خطی و غیرخطی تخمین پارامتر به شمار می‌آید. در روش تکراری روش گرادیان مزدوج، در هر تکرار یک گام با اندازه مناسب در جهت نزولی به منظور کمینه کردن تابع هدف انتخاب می‌شود. جهت نزولی به عنوان ترکیب خطی از جهت گرادیان منفی با جهت نزولی تکرار قبلی به دست می‌آید. ترکیب خطی به گونه‌ای است که زاویه حاصل بین جهت نزولی و جهت گرادیان منفی کمتر از 90° باشد و کمینه شدن تابع هدف ایجاد شود. تئوری‌های زیادی با در نظر گرفتن همگرایی روش گرادیان مزدوج می‌تواند در مراجع [۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۶، ۱۳۸] یافت شود. روش گرادیان مزدوج با یک معیار توقف مناسب به کلاس تکنیک‌های منظم سازی تکراری بستگی دارد که در آن تعداد تکرارها طوری انتخاب می‌شوند که حل پایداری از مسئله معکوس به دست می‌آید.

شبیه به روش ۱، روش ۲ نیز می‌تواند جهت تخمین پارامتر در گام‌های زیر دسته‌بندی شود :

جزئیات هر گام را هنگام توصیف مسئله آزمون هدایت حرارتی شرح داده شده در بخش ۱-۴ ارائه می‌کنیم که شامل تخمین تابع چشمه نامعلوم $g_p(t)$ است.

۱-۳-۴ مسئله مستقیم

در مسئله مستقیم وابسته به مسئله فیزیکی توصیف شده در قسمت ۱-۴، که به صورت ریاضی با معادلات (۱-۴) فرمول‌بندی شده است، منبع گرمای صفحه فلزی، $g_p(t)$ ، متغیر با زمان معلوم است. آنگاه هدف مسئله مستقیم تعیین میدان دمایی گذرا، $T(x, t)$ ، در ناحیه مورد نظر است.

۲-۳-۴ مسئله معکوس

در مسئله معکوس مورد نظر منبع گرمای صفحه فلزی، $g_p(t)$ ، وابسته به زمان نامعلوم در نظر گرفته می‌شود و اندازه‌گیری‌های دمایی در مکان، $x = x_{meas}$ ، در زمان‌های t_i ، $i = 1, 2, \dots, I$ ، برای آنالیز موجود می‌باشد.

برای حل چنین مسئله معکوسی، فرض می‌کنیم که تابع تولید انرژی $g_p(t)$ به صورت خطی داده شده با معادله (۲-۴) پارامتربندی شده باشد. آنگاه تخمین تابع نامعلوم $g_p(t)$ به تخمین N پارامتر نامعلوم p_j تقلیل می‌یابد. چنین مسئله تخمین پارامتر با کمینه کردن فرم کمینه مربعات حل می‌شود:

$$S(P) = [Y - T(P)]^T [Y - T(P)] \quad (۳۶-۴)$$

۳-۳-۴ روش تکراری برای روش گرادیان مزدوج

روش تکراری برای روش گرادیان مزدوج به منظور کمینه کردن فرم $S(P)$ بالا با رابطه زیر داده می‌شود [۱۳۸-۱۲۸]:

$$P^{k+1} = P^k - \beta^k d^k \quad (۳۷-۴)$$

که در آن β^k اندازه گام جستجو، d^k جهت نزولی و اندیس k تعداد تکرارها است. جهت نزولی آمیخته از جهت گرادیان، $\nabla S(P^k)$ ، و جهت نزولی تکرار قبلی d^{k-1} است. این جهت با رابطه

زیر داده می‌شود:

$$d^k = \nabla S(P^k) + \gamma^k d^{k-1} \quad (38-4)$$

عبارت مختلفی برای مؤلفه همبستگی γ^k وجود دارد. عبارت پلاک ریبر ^۶ [۱۳۳-۱۳۱] به فرم زیر داده می‌شود:

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N \{[\nabla S(P^k)]_j [\nabla S(P^k) - \nabla S(P^{k-1})]_j\}}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^{k-1})]_j^2} \quad k = 1, 2, \dots \quad (39-4)$$

که برای $\gamma^0 = 0, k = 0$ در حالی که عبارت فلچر-ریوز ^۷ [۱۳۴، ۱۳۳، ۱۳۱] به صورت زیر است:

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^k)]_j^2}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^{k-1})]_j^2} \quad k = 1, 2, \dots \quad (40-4)$$

که برای $\gamma^0 = 0, k = 0$ در اینجا $[\nabla S(P^k)]_j$ ، j امین مؤلفه جهت گرادیان در تکرار k ارزیابی می‌شود. جهت گرادیان با دیفرانسیل گیری معادله (۴-۳۶) نسبت به پارامترهای نامعلوم P به دست می‌آید یعنی:

$$\nabla S(P^k) = -2(J^K)^T [Y - T(P^K)] \quad (41-4)$$

که J^k ماتریس حساسیت تعریف شده با معادله (۴-۹) است. مؤلفه j ام جهت گرادیان می‌تواند به فرم زیر به دست بیاید:

$$[\nabla S(P^k)]_j = -2 \sum_{i=1}^I \frac{\partial T_i^k}{\partial P_j} [Y_i - T_i(P^K)] \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (42-4)$$

عبارت (۴-۴۰) و (۴-۳۹) برای محاسبه γ^k اطمینان می‌دهد که زاویه بین جهت نزولی و جهت گرادیان منفی کمتر از 90° درجه است طوری که تابع $S(P)$ کمینه می‌شود [۱۳۳]. اما شواهدی وجود دارد که عبارت پلاک ریبر همگرایی بهتری در مسائل تخمین غیر خطی دارد [۱۳۳، ۱۲۵].

اندازه گام جستجو β^k ظاهر شده در معادله (۴-۳۷) با کمینه کردن تابع $S(P^{k+1})$ نسبت به β^k به دست می‌آید یعنی:

$$\min_{\beta^k} S(P^{k+1}) = \min_{\beta^k} [Y - T(P^{k+1})]^T [Y - T(P^{k+1})] \quad (43-4)$$

^۶Polak-Ribiere

^۷Fletcher-Reeves

با جانشینی P^{k+1} داده شده با معادله (۴-۳۷) در معادله (۴-۴۳) داریم:

$$\min_{\beta^k} S(P^{k+1}) = \min_{\beta^k} [Y - T(P^k - \beta^k d^k)]^T [Y - T(P^k - \beta^k d^k)] \quad (4-44)$$

بردار دمایی $T(P^k - \beta^k d^k)$ می‌تواند با استفاده از بسط تیلور خطی شود، سپس با کمینه کردن نسبت به β^k عبارت زیر برای اندازه گام جستجو به دست می‌آید:

$$\beta^k = \frac{\sum_{i=1}^I [(\frac{\partial T_i}{\partial P^k})^T d^k] [T_i(P^k) - Y_i]}{\sum_{i=1}^I [(\frac{\partial T_i}{\partial P^k})^T d^k]^2} \quad (4-45)$$

که در آن

$$(\frac{\partial T_i}{\partial P^k})^T = [\frac{\partial T_i}{\partial P_1^k}, \frac{\partial T_i}{\partial P_2^k}, \dots, \frac{\partial T_i}{\partial P_N^k}] \quad (4-46)$$

توجه کنیم که بردار معادله (۴-۴۶)، i امین سطر ماتریس حساسیت است (معادله (۴-۱۰) را ببینید) ما می‌توانیم معادله (۴-۴۶) را به فرم ماتریسی زیر بنویسیم:

$$\beta^k = \frac{[J^k d^k]^T [T(P^k) - Y]}{[J^k d^k]^T [J^k d^k]} \quad (4-47)$$

بعد از محاسبه ماتریس حساسیت J^k ، جهت گرادیان $\nabla S(P^k)$ ، مؤلفه همبستگی γ^k و اندازه گام جستجو β^k روش داده شده با معادله (۴-۳۷) تا زمانی انجام می‌شود که معیار توقف بر اساس اصول اختلاف توضیح داده شده در زیر ارضا شود. ماتریس حساسیت می‌تواند با استفاده روش توصیف شده در قسمت ۴-۲ محاسبه شود.

۴-۳-۴ معیار توقف برای روش ۲

روش تکراری داده شده با معادلات (۴-۳۷) به همراه اندازه گام جستجو β^k داده شده با معادله (۴-۴۷)، روش گرادیان مزدوج با پایداری مورد نیاز برای کمینه کردن تابع (۴-۳۶) را ارائه نمی‌کند تا به عنوان یک روش خوش-رفتار دسته‌بندی شود. چنین موردی به خاطر آن است که خطاهای تصادفی ذاتی در دماهای اندازه‌گیری شده وجود دارد. هنگام کمینه کردن تابع (۴-۳۶) که دماهای تخمین زده شده به دماهای اندازه‌گیری شده که شامل خطاهایی است میل می‌کند نوسانات زیادی در حل مسئله معکوس ظاهر می‌شود که نتیجه‌ای از ویژگی بد-رفتاری مسئله معکوس است. روش گرادیان مزدوج می‌تواند خوش‌رفتار شود اگر اصول اختلاف برای

توقف روش تکراری استفاده شود [۱۳۱].

در اصول اختلاف، روش تکراری هنگامی متوقف می‌شود که معیار زیر ارضا شود:

$$S(P^{k+1}) < \epsilon \quad (4-48)$$

که در آن مقدار تلورانس ϵ طوری انتخاب می‌شود که حل مسئله به اندازه کافی پایدار به دست آید. در این حالت، ما روش تکراری را متوقف می‌کنیم. درست هنگامی که باقیمانده‌های بین دماهای اندازه‌گیری شده و تخمین زده شده خطاهای اندازه‌گیری از مرتبه یکسانی داشته باشند یعنی:

$$|Y(t_i) - T(X_{meas}, t_i)| \approx \sigma_i \quad (4-49)$$

که در آن σ_i انحراف معیار خطای اندازه‌گیری در زمان t_i است.

۴-۳-۵ الگوریتم محاسباتی برای روش ۲

فرض کنیم که اندازه‌گیری‌های دمایی $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_I)$ در زمان‌های t_i ($i = 1, \dots, I$) داده شده باشد و حدس اولیه P^0 برای بردار پارامتر نامعلوم موجود باشد. قرار دهید $k = 0$ و سپس:

گام ۱: مسئله انتقال حرارت مستقیم (۴-۱) را با استفاده از تخمین P^k حل کنید و بردار دماهای تخمین زده شده $T(P^k) = (T_1, T_2, \dots, T_I)$ را به دست آورید.

گام ۲: معیار توقف داده شده با معادله (۴-۴۸) را بررسی کنید. اگر درست نبود ادامه دهید.

گام ۳: ماتریس حساسیت J^k را که با معادله (۴-۹) تعریف شده، محاسبه کنید.

گام ۴: J^k و $T(P^k)$ و Y را معلوم کنید، جهت گرادیان $\nabla S(P^k)$ را از معادله (۴-۴۱) محاسبه کنید و مؤلفه همبستگی γ^k را از معادله (۴-۳۹) یا (۴-۴۰) محاسبه کنید.

گام ۵: جهت نزولی d^k را با استفاده از معادله (۴-۳۸) محاسبه کنید.

گام ۶: $J^k, Y, T(P^k), d^k$ را معلوم کنید و اندازه گام جستجو β^k را از معادله (۴-۴۷) محاسبه کنید.

گام ۷: با معلوم بودن P^k ، β^k و d^k ، تخمین جدید P^{k+1} را با استفاده از معادله (۴-۳۷)

محاسبه کنید.

گام ۸: k را با $k + 1$ جایگزین کنید و به گام ۱ برگردید.

۴-۳-۶ استفاده از حسگرهای چندگانه

همانند روش ۱، الگوریتم محاسباتی بالا برای روش ۲ می‌تواند با اصلاحاتی در فرم کمیت‌هایی که در آینده توصیف می‌شود، برای اندازه‌گیری از حسگرهای چندگانه نیز استفاده شود. برای اندازه‌گیری‌های گذرا از M حسگر، بردار $[Y - T(P)]$ با معادلات (۲۷-۴) و (۲۸-۴) داده می‌شود. از این‌رو تابع هدف یا فرم کمینه مربعات $S(P)$ از معادله (۲۹-۴) به‌دست می‌آید در حالی که ماتریس حساسیت J با معادلات (۳۲-۴) و (۳۳-۴) داده می‌شود. از آنجایی که تابع هدف اصلاح می‌شود، محاسبه تلورانس ϵ برای معیار توقف بر اساس اصل اختلاف، به اصلاحاتی نیازمند است که از معادله (۲۹-۴) به‌دست می‌آید.

$$\epsilon = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \sigma_{im}^2 = IM\sigma^2 \quad (50-4)$$

که در آن I تعداد اندازه‌گیری‌های انجام شده برای هر حسگر، M تعداد حسگرها و $\sigma_{im} = \sigma$ انحراف از معیار ثابت اندازه‌گیری‌هاست. در اندازه‌گیری از M حسگر، اندازه گام جستجو β^k می‌تواند از ماتریس داده شده با معادله (۴۷-۴) محاسبه شود. اما فرم β^k معادله (۴۵-۴)، به اصلاح نیاز دارد زیرا ماتریس حساسیت با معادلات (۳۲-۴) و (۳۳-۴) به جای معادله (۱۰-۴) داده می‌شود. در نتیجه اندازه گام جستجو فرم زیر را به خود می‌گیرد:

$$\beta^k = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I [(\frac{\partial T_{im}}{\partial P^k})^T d^k][T_{im}(P^k) - Y_{im}]}{\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I [(\frac{\partial T_{im}}{\partial P^k})^T d^k]^2} \quad (51-4)$$

به طور مشابه، فرم ماتریسی عبارت گرادیان تابع هدف معادله (۴۱-۴)، معتبر باقی می‌ماند. برای اندازه‌گیری از چند حسگر، فرم مؤلفه‌های گرادیان معادله (۴۲-۴)، به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$[\nabla S(P^k)]_j = -2 \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \frac{\partial T_{im}^k}{\partial P_j} [Y_{im} - T_{im}(P^k)] \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (52-4)$$

۷-۳-۴ اندازه‌گیری پیوسته

تاکنون ما داده‌های اندازه‌گیری شده را در دامنه زمانی گسسته در نظر گرفته‌ایم. اکنون وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن داده‌های اندازه‌گیری شده یک حسگر تکی واقع در X_{meas} می‌تواند به صورت پیوسته تقریب زده شود. برای چنین موردی، تابع هدف شامل یک انتگرال‌گیری روی دامنه زمانی $0 \leq t \leq t_f$ می‌باشد که مدت زمان انجام آزمایش است. تابع هدف به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S(P) = \int_{t=0}^{t_f} [Y(t) - T(X_{meas}, t; P)]^2 dt \quad (53-4)$$

آنگاه معادله گرادیان (۵۳-۴) به صورت زیر خواهد شد:

$$\nabla S(P) = -2 \int_{t=0}^{t_f} [Y(t) - T(X_{meas}, t; P)] \frac{\partial T}{\partial P} dt \quad (54-4)$$

یا به صورت واضح‌تر هر مؤلفه بردار گرادیان با رابطه زیر داده می‌شود:

$$[\nabla S(P)]_j = -2 \int_{t=0}^{t_f} [Y(t) - T(X_{meas}, t; P)] \frac{\partial T}{\partial P_j} dt \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (55-4)$$

به علاوه، معادله (۴۵-۴) برای هر اندازه گام جستجو β^k باید به صورت پیوسته در دامنه زمانی بیان شود. این حالت از طریق کمینه کردن تابع هدف (۵۳-۴) نسبت به β^k به دست می‌آید:

$$\beta^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f} [T(X_{meas}, t; P^k) - Y(t)] \left[\frac{\partial T}{\partial P^k} \right]^T d^k dt}{\int_{t=0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial T}{\partial P^k} \right]^T d^k \right\}^2 dt} \quad (56-4)$$

توجه کنید که عبارت β^k داده شده با معادلات (۴۵-۴) و (۵۶-۴) بسیار شبیه هستند. سری ظاهر شده در معادله (۴۵-۴) به یک انتگرال برای حالت پیوسته معادله (۵۶-۴) تغییر می‌کند. تلرانس ϵ برای معیار توقف بر اساس اصل اختلاف، برای اندازه‌گیری‌های پیوسته، از معادله (۵۳-۴) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\epsilon = \sigma^2 t_f \quad (57-4)$$

کمیت‌های باقی‌مانده ظاهر شده در الگوریتم محاسباتی برای روش ۲ برای اندازه‌گیری‌های پیوسته بدون تغییر باقی می‌ماند.

توجه کنیم که در اندازه‌گیری‌های پیوسته از حسگرهای چندگانه، انتگرال سمت راست معادله (۴-۵۳) روی تعداد حسگرها جمع زده می‌شود یعنی:

$$S(P) = \sum_{m=1}^M \int_{t=0}^{t_f} [Y_m(t) - T(X_m, t; P)]^2 dt \quad (۴-۵۸)$$

بنابراین، دیگر کمیت‌های ظاهر شده در معادلات (۴-۵۷) - (۴-۵۴) شامل جمع روی تعداد حسگرها است. استخراج معادلات برای معادلات گرادیان، اندازه گام جستجو و تکران برای معیار توقف، برای اندازه‌گیری‌های پیوسته از حسگرهای چندگانه، کاملاً سر راست است.

به منظور اجرای الگوریتم تکراری روش گرادیان مزدوج که در بالا توضیح داده شد، ماتریس حساسیت برای هر تکرار باید محاسبه شود. برای مسائل خطی، محاسبه چنین ماتریسی با یک حل تحلیلی بسیار آسان است. در واقع ماتریس حساسیت برای مسائل خطی ثابت می‌ماند و تنها یک بار محاسبه می‌شود. به عبارت دیگر، برای مسائل معکوس غیرخطی، ماتریس حساسیت باید توسط روش تفاضل متناهی محاسبه شود. این موضوع هنگامی که مسئله شامل تعداد زیادی پارامتر یا اندازه‌گیری باشد بسیار وقت‌گیر است. برای مواردی شامل تخمین مؤلفه‌های توابع نامعلوم پارامتربندی شده، ما در زیر روش دیگری از روش گرادیان مزدوج ارائه می‌کنیم که نیازی به محاسبه ماتریس حساسیت برای به‌دست آوردن جهت گرادیان و اندازه گام جستجو نیست.

۴-۴ روش ۳: روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته به همراه مسئله الحاقی برای تخمین پارامتر

در این قسمت پیاده‌سازی و اجرای روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته را ارائه می‌کنیم که در آن دو مسئله کمکی که به‌عنوان مسئله الحاقی و مسئله حساسیت شناخته می‌شوند، به منظور محاسبه اندازه گام جستجو β^k و معادله گرادیان $\nabla S(P^k)$ حل می‌شوند. این روش برای مسائل در برگیرنده تخمین مؤلفه‌های توابع آزمایشی که به منظور تقریب شکل یک تابع ناشناخته استفاده می‌شود، بسیار مناسب است.

برای راحتی در آنالیزهای بعدی، فرض می‌کنیم که داده‌های اندازه‌گیری شده پیوسته باشند.

بنابراین فرم کمینه مربعات، معادله (۳-۴)، به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$S(P) = \int_{t=0}^{t_f} [Y(t) - T(X_{meas}, t; P)]^2 dt \quad (۵۹-۴)$$

که در آن $Y(t)$ دمای اندازه‌گیری شده، $T(X_{meas}, t; P)$ دمای تخمین‌زده شده در مکان اندازه‌گیری یکتای X_{meas} و مدت زمان انجام آزمایش می‌باشد.

گام‌های اساسی حل مسئله تخمین پارامتر با استفاده از روش گرادیان تعمیم یافته به همراه مسئله الحاقی شامل موارد زیر است:

ما در زیر جزئیات هر کدام از گام‌های اساسی را با به‌کار بردن یک مسئله آزمون ارائه می‌کنیم.

۱-۴-۴ مسئله مستقیم

در این قسمت برای مسئله آزمون در نظر گرفته شده که شامل تخمین قدرت $g_p(t)$ یک چشمه گرمای صفحه‌ای می‌باشد، مسئله مستقیم با معادلات (۱-۴) داده می‌شود. به منظور ساده

سازی تحلیل، این معادلات در زیر باز نویسی شده‌اند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + g_p(t) \delta(x - 0.5) &= \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} & 0 < x < 1, t > 0 \\ \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} &= 0 & x = 0, t > 0 \\ \frac{\partial T(1, t)}{\partial x} &= 0 & x = 1, t > 0 \\ T(x, 0) &= 0 & t = 0, 0 < x < 1 \end{aligned} \quad (۶۰-۴)$$

مسئله مستقیم با تخمین میدان دمایی $T(x, t)$ در ناحیه $0 < x < 1$ مربوط می‌شود هنگامی که جمله قدرت چشمه $g_p(t)$ معلوم می‌باشد.

۲-۴-۴ مسئله معکوس

مسئله معکوس به تخمین قدرت چشمه نامعلوم با استفاده از اطلاعات به‌دست آمده از یک حسگر واقع در مکان $X = X_{meas}$ مربوط می‌شود. ما تابع نامعلوم $g_p(t)$ را به‌فرم خطی زیر، پارامتربندی شده در نظر می‌گیریم:

$$g_p(t) = \sum_{j=1}^N P_j C_j(t) \quad (۶۱-۴)$$

که در آن $(j = 1, 2, \dots, N), C_j(t)$ توابع آزمایشی شناخته شده‌اند. بنابراین هدف مسئله معکوس تخمین N پارامتر نامعلوم P_j ($j = 1, 2, \dots, N$) می‌باشد.

۳-۴-۴ مسئله حساسیت

مسئله حساسیت با فرض آن که دمای $T(x, t)$ به مقدار $\Delta T(x, t)$ مختل می‌شود، هنگامی که قدرت چشمه نامعلوم $g_p(t)$ به مقدار $\Delta g_p(t)$ مختل می‌شود، به دست می‌آید. از آنجایی که قدرت به فرم داده شده با معادله (۴-۶۱) پارامتر بندی می‌شود، تابع $\Delta g_p(t)$ با مختل کردن هر یک از پارامترهای نامعلوم P_j به مقدار ΔP_j به دست می‌آید یعنی:

$$\Delta g_p(t) = \sum_{j=1}^N \Delta P_j C_j(t) \quad (۴-۶۲)$$

با جایگذاری $[T(x, t) + \Delta T(x, t)]$ با $T(x, t)$ و $[g_p(t) + \Delta g_p(t)]$ با $g_p(t)$ در مسئله مستقیم داده شده با معادلات (۴-۶۰) و کم کردن مسئله مستقیم اصلی از عبارت حاصله، مسئله حساسیت

زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta T(x, t)}{\partial X^2} + \Delta g_p(t) \delta(x - \cdot, \cdot) &= \frac{\partial \Delta T(x, t)}{\partial t} & \cdot < x < 1, t > \cdot \\ \frac{\partial \Delta T(\cdot, t)}{\partial x} &= \cdot & x = \cdot, t > \cdot \\ \frac{\partial \Delta T(1, t)}{\partial x} &= \cdot & x = 1, t > \cdot \\ \Delta T(x, \cdot) &= 0 & t = \cdot, \cdot < x < 1 \end{aligned} \quad (۴-۶۳)$$

در مسئله حساسیت (۴-۶۳)، $\Delta g_p(t)$ که با معادله (۴-۶۲) داده می‌شود، تنها تابع مورد نیاز برای حل می‌باشد. محاسبه $\Delta g_p(t)$ در آینده در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۴-۴-۴ مسئله الحاقی

از یک ضریب لاگرانژ $\lambda(x, t)$ در کمینه‌سازی تابع (۴-۵۹) استفاده می‌شود زیرا دمای $T(X_{meas}, t; P)$ ظاهر شده در چنین تابعی برای برآورده کردن قیدی که حل مسئله مستقیم است مورد نیاز خواهد بود. چنین ضریب لاگرانژی که برای محاسبه معادله گرادیان (که در زیر ظاهر می‌شود) مورد نیاز است، از حل مسئله الحاقی مربوط به مسئله حساسیت داده شده با معادلات (۴-۶۳) به دست می‌آید. برای تعریف و درک خصوصیات مسائل الحاقی، خواننده

باید مراجع [۱۳۱، ۱۴۰] را مطالعه کند.

به منظور استخراج مسئله الحاقی، تابع زیر را می‌نویسیم:

$$S(P) = \int_{t=0}^{t_f} [Y(t) - T(X_{meas}, t; P)]^2 dt \quad (۴-۶۴)$$

$$+ \int_{x=0}^1 \int_{t=0}^{t_f} \lambda(x, t) \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g_p(t) \delta(x - 0.5) - \frac{\partial T}{\partial t} \right] dt dx$$

که با ضرب کردن معادله دیفرانسیل جزئی مسئله مستقیم، معادله (۴-۶۰)، در ضرب لاگرانژ $\lambda(x, t)$ و انتگرال‌گیری روی بازه‌های زمانی و فضایی و اضافه کردن عبارت حاصله به تابع $S(P)$ داده شده با معادله (۴-۵۹) به‌دست می‌آید.

عبارت وابسته به متغیر $\Delta S(P)$ مربوط به تابع $S(P)$ می‌تواند با مختل کردن $T(x, t)$ به مقدار $\Delta T(x, t)$ و $g_p(t)$ به مقدار $\Delta g_p(t)$ در معادله (۴-۶۴) به‌دست آید. توجه کنید که $\Delta S(P)$ مشتق جهتی $S(P)$ در جهت اختلال $\Delta P = [\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_N]$ می‌باشد [۱۳۱، ۱۴۰]. بنابراین با جایگذاری $[T(x, t) + \Delta T(x, t)]$ به جای $T(x, t)$ و $[g_p(t) + \Delta g_p(t)]$ به جای $g_p(t)$ و $[S(P) + \Delta S(P)]$ به جای $S(P)$ در معادله (۴-۶۴) و کم کردن معادله اصلی (۴-۶۴) از عبارت حاصله و صرف نظر کردن از جملات مرتبه دوم خواهیم داشت:

$$\Delta S(P) = \int_{t=0}^{t_f} \int_{x=0}^1 2[T(x, t; P) - Y(t)] \Delta T(x, t) \delta(x - x_{meas}) dx dt$$

$$+ \int_{t=0}^{t_f} \int_{x=0}^1 \lambda(x, t) \left[\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} + \Delta g_p(t) \delta(x - 0.5) - \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \right] dt dx \quad (۴-۶۵)$$

که در آن $\delta(\cdot)$ تابع دلتای دیراک می‌باشد.

جمله دوم انتگرال در سمت راست این معادله از ساده‌سازی انتگرال جزء به جزء و استفاده از شرایط اولیه و مرزی مسئله حساسیت به‌دست می‌آید. انتگرال جزء به جزء جملات در برگیرنده مشتق دوم متغیرهای مکانی نتیجه می‌دهد:

$$\int_{x=0}^1 \lambda(x, t) \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} dx = \left[\lambda \frac{\partial \Delta T}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \Delta T \right]_{x=0}^1 + \int_{x=0}^1 \Delta T(x, t) \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} dx \quad (۴-۶۶)$$

باجایگزین کردن شرایط مرزی (۴-۶۳) از مسئله حساسیت در معادله (۴-۶۶) خواهیم داشت:

$$\int_{x=0}^1 \lambda(x, t) \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} dx = \frac{\partial \lambda(0, t)}{\partial X} \Delta T(0, t) - \frac{\partial \lambda(1, t)}{\partial x} \Delta T(1, t) + \int_{x=0}^1 \Delta T(x, t) \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} dx \quad (۴-۶۷)$$

به طور مشابه، با انتگرال گیری جزء به جزء جملات شامل مشتق زمانی در معادله (۴-۶۵) خواهیم داشت:

$$\int_{t=0}^{t_f} \lambda(x, t) \frac{\partial \Delta T}{\partial t} dt = [\lambda(x, t) \Delta T(x, t)]_{t=0}^{t_f} - \int_{t=0}^{t_f} \Delta T(x, t) \frac{\partial \lambda}{\partial t} dt \quad (۴-۶۸)$$

بعد از جایگذاری شرط اولیه (۴-۶۳) از مسئله حساسیت، معادله بالا به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\int_{t=0}^{t_f} \lambda(x, t) \frac{\partial \Delta T}{\partial t} dt = \lambda(x, t_f) \Delta T(x, t_f) - \int_{t=0}^{t_f} \Delta T(x, t) \frac{\partial \lambda}{\partial t} dt \quad (۴-۶۹)$$

آنگاه با جانشینی معادلات (۴-۶۷) و (۴-۶۹) در معادله (۴-۶۵) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \Delta S(P) = & \int_{t=0}^{t_f} \int_{x=0}^1 \left\{ \frac{\partial^2 \lambda(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} \right. \\ & + 2[T(x, t; P) - Y(t)] \delta(X - X_{meas}) \} \Delta T(x, t) dx dt \\ & + \int_{t=0}^{t_f} \frac{\partial \lambda(\cdot, t)}{\partial x} \Delta T(\cdot, t) dt - \int_{t=0}^{t_f} \frac{\partial \lambda(1, t)}{\partial x} \Delta T(1, t) dt \\ & - \int_{x=0}^1 \lambda(x, t_f) \Delta T(x, t_f) dx + \int_{t=0}^{t_f} \lambda(\cdot, 0) \Delta g_p(t) dt \end{aligned} \quad (۴-۷۰)$$

مسئله مقدار مرزی برای ضریب لاگرانژ $\lambda(x, t)$ از طریق صرف نظر کردن چهار انتگرال اول شامل $\Delta T(x, t)$ در سمت راست معادله (۴-۷۰) به دست می آید. این کار مسئله الحاقی زیر را به دنبال خواهد داشت.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \lambda(x, t)}{\partial x^2} + 2[T(x, t; P) - Y(t)] \delta(x - x_{meas}) &= 0 \\ 0 < x < 1, 0 < t < t_f \\ \frac{\partial \lambda(\cdot, t)}{\partial x} &= 0, \quad x = 0, 0 < t < t_f \\ \frac{\partial \lambda(1, t)}{\partial x} &= 0, \quad x = 1, 0 < t < t_f \\ \lambda(x, t_f) &= 0, \quad t = t_f, 0 < x < 1 \end{aligned} \quad (۴-۷۱)$$

توجه شود که در مسئله الحاقی، آخرین شرط مرزی معادله (۴-۷۱) مقدار تابع $\lambda(x, t)$ در زمان نهایی $t = t_f$ است. در مسئله مقدار اولیه، مقدار تابع در زمان $t = 0$ معین می شود. اما مسئله مقدار نهایی (۴-۷۱) می تواند به مسئله مقدار اولیه با تغییر متغیر جدید $\tau = t_f - t$ تبدیل شود.

۵-۴-۴ معادله گرادیان

با صرف نظر کردن از جملات شامل $\Delta T(x, t)$ ، جملات انتگرالی زیر در سمت راست معادله (۷۰-۴) باقی می ماند:

$$\Delta S(P) = \int_{t=0}^{t_f} \lambda(\cdot, \cdot, t) \Delta g_p(t) dt \quad (۷۲-۴)$$

با جایگذاری $\Delta g_p(t)$ به فرم پارامتری داده شده با معادله (۶۲-۴) در معادله (۷۲-۴) خواهیم داشت:

$$\Delta S(P) = \sum_{j=1}^N \int_{t=0}^{t_f} \lambda(\cdot, \cdot, t) C_j(t) dt \Delta P_j \quad (۷۳-۴)$$

مشتق جهتی $S(P)$ در جهت یک بردار ΔP با رابطه زیر داده می شود:

$$\Delta S(P) = \sum_{j=1}^N [\nabla S(P)]_j \Delta P_j \quad (۷۴-۴)$$

که در آن

$$\Delta P = [\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_N] \quad (۷۵-۴)$$

توجه کنید که بزرگی بردار ΔP در معادله (۷۴-۴) حذف می شود زیرا در آنالیز کنونی مسئله دخالتی ندارد. بنابراین با مقایسه معادلات (۷۳-۴) و (۷۴-۴)، مؤلفه j ام بردار گرادیان $\nabla S(P)$ را برای تابع $S(P)$ به صورت زیر به دست می آوریم:

$$[\nabla S(P)]_j = \int_{t=0}^{t_f} \lambda(\cdot, \cdot, t) C_j(t) dt \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (۷۶-۴)$$

استفاده از مسئله الحاقی برای محاسبه بردار گرادیان برای مسائل شامل توابع نامعلوم، که می تواند مشابه معادله (۶۱-۴) پارامتربندی شود بسیار مفید است. مخصوصاً برای مسائلی که نیازی به عبارات تحلیلی برای مؤلفه های حساسیت و تقریب تفاضل محدود ندارند. با تقریب کنونی، بردار گرادیان از طریق حل مسئله الحاقی یکتا محاسبه می شود. به عبارت دیگر، محاسبه بردار گرادیان در روش ۲، داده شده با معادله (۶۴-۴)، نیازمند N حل اضافی از مسئله مستقیم برای محاسبه مؤلفه های حساسیت از طریق تقریب تفاضل محدود خواهد بود.

۶-۴-۴ روش تکراری برای روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته برای تخمین پارامتر

روش تکراری مربوط به روش گرادیان تعمیم یافته برای محاسبه بردار پارامترهای نامعلوم P با معادلات (۳۷-۴) - (۳۹-۴) داده می‌شود. مؤلفه‌های بردار گرادیان اکنون با استفاده از معادله (۷۶-۴) به جای معادله (۴۲-۴) محاسبه می‌شود.

اندازه گام جستجو β^k طوری انتخاب می‌شود که تابع $S(P)$ را در هر تکرار k کمینه کند یعنی:

$$\min_{\beta^k} S(P^{k+1}) = \min_{\beta^k} \int_{t=0}^{t_f} [Y(t) - T(X_{meas}, t; P^k - \beta^k d^k)]^2 dt \quad (۷۷-۴)$$

با خطی سازی دمای تخمین زده شده $T(X_{meas}, t; P^k - \beta^k d^k)$ با بسط سری تیلور و اجرای کمینه سازی بالا خواهیم داشت:

$$\beta^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f} [T(X_{meas}, t; P^k - Y(t)) \Delta T(X_{meas}, t; d^k)] dt}{\int_{t=0}^{t_f} [\Delta T(X_{meas}, t; d^k)]^2 dt} \quad (۷۸-۴)$$

که در آن $\Delta T(X_{meas}, t; d^k)$ حل مسئله حساسیت داده شده با معادلات (۶۳-۴) می‌باشد که با قرار دادن $\Delta P_j = d_j^k$, $(j = 1, 2, \dots, N)$ در محاسبه تابع $\Delta g_p(t)$ داده شده با معادله (۶۲-۴) به دست می‌آید.

۷-۴-۴ معیار توقف روش ۳

همانند روش ۲، معیار توقف برای روش ۳ بر اساس اصل اختلاف می‌باشد زمانی که انحراف از معیار σ مربوط به اندازه گیری‌ها، از قبل شناخته شده باشد که با رابطه زیر داده می‌شود:

$$S(P) < \epsilon \quad (۷۹-۴)$$

که در آن $S(P)$ با معادله (۵۹-۴) محاسبه می‌شود. تیرانس ϵ از معادله (۵۹-۴) با فرض

$$|Y(t) - T(X_{meas}, t; p)| \approx \sigma \quad (۸۰-۴)$$

محاسبه می‌شود که در آن σ انحراف از معیار خطاهای اندازه گیری است که ثابت فرض شده‌اند.

بنابراین تیرانس ϵ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\epsilon = \sigma^2 t_f \quad (۸۱-۴)$$

۸-۴-۴ الگوریتم محاسباتی برای روش ۳

الگوریتم محاسباتی برای روش گرادیان تعمیم یافته با مسئله الحاقی به منظور تخمین پارامتر می‌تواند به صورت زیر پارامتر بندی شود. فرض کنید که اندازه‌گیری‌های دمایی $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_I)$ در زمان‌های $(i = 1, 2, \dots, I), t_i$ و حدس اولیه P^* برای بردار پارامترهای نامعلوم P موجود باشد. قرار می‌دهیم $k = 0$ و سپس:

گام ۱: $g_p(t)$ را بر طبق معادله (۴-۶۱) محاسبه کنید و سپس مسئله مستقیم داده شده با معادلات (۴-۶۰) را به منظور محاسبه $T(x, t)$ حل کنید.

گام ۲: معیار توقف داده شده با معادله (۴-۷۹) را بررسی کنید. به شرط برآورده نشدن آن، الگوریتم را ادامه دهید.

گام ۳: $T(X_{meas}, t)$ و دمای اندازه‌گیری شده $Y(t)$ را معلوم کنید و مسئله الحاقی (۴-۷۱) را برای محاسبه $\lambda(0.5, t)$ حل کنید.

گام ۴: $\lambda(0.5, t)$ را معلوم کنید و هر یک از مؤلفه‌های بردار گرادیان $\nabla S(P)$ را از معادله (۴-۷۶) محاسبه کنید.

گام ۵: گرادیان $\nabla S(P)$ را معلوم کنید و λ^k را از معادله (۴-۳۹) یا (۴-۴۰) محاسبه کنید و جهت نزولی d^k را از معادله (۴-۳۸) محاسبه کنید.

گام ۶: با قرار دادن $\Delta P^k = d^k$ ، $\Delta g_p(t)$ را از معادله (۴-۶۲) محاسبه کنید و سپس مسئله حساسیت داده شده با معادلات (۴-۶۳) را حل کنید تا $\Delta T(X_{meas}, t; d^k)$ را به دست آورید.

گام ۷: $\Delta T(X_{meas}, t; d^k)$ را معلوم کنید. سپس اندازه گام جستجو β^k را از معادله (۴-۷۸) محاسبه کنید.

گام ۸: β^k و d^k را معلوم کنید. سپس تخمین جدید P^{k+1} را از معادله (۴-۳۷) محاسبه کنید. k را با $k+1$ جایگزین کنید و به گام ۱ برگردید.

۹-۴-۴ استفاده از حسگرهای چندگانه

الگوریتم محاسباتی بالا می‌تواند با اندکی اصلاحات برای مواردی که خواندن اطلاعات از M حسگر برای تحلیل معکوس موجود است، به کار برده شود. در چنین مواردی، تابع هدف (۵۹-۴) به صورت زیر ویرایش می‌شود:

$$S(P) = \sum_{m=1}^M \int_{t=0}^{t_f} [Y_m(t) - T(X_m, t; P)]^2 dt \quad (۸۲-۴)$$

که در آن $Y_m(t)$ اندازه‌گیری پیوسته حسگر واقع در X_m برای $m = 1, 2, \dots, M$ می‌باشد. می‌توان به آسانی نشان داد که معادله مربوط به مسئله الحاقی، معادله (۷۱-۴)، به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \lambda(x, t)}{\partial x^2} + 2 \sum_{m=1}^M [T(X_m, t; P) - Y(t)] \partial(X - X_m) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < t_f \quad (۸۳-۴)$$

در حالی که شرایط مرزی و نهایی، معادله (۷۱-۴)، برای حسگرهای چندگانه بدون تغییر باقی می‌ماند.

برای خواندن اطلاعات M حسگر، اندازه گام جستجو و تفرانس معیار توقف از عبارات زیر به دست می‌آید:

$$\beta^k = \frac{\sum_{m=1}^M \int_{t=0}^{t_f} [T(x_m, t; P^k) - Y_m(t)] \Delta T(x_m, t; d^k) dt}{\sum_{m=1}^M \int_{t=0}^{t_f} [\Delta T(x_m, t; d^k)]^2 dt} \quad (۸۴-۴)$$

$$\epsilon = M \sigma^2 t_f \quad (۸۵-۴)$$

وضعیت‌های عملی بی‌شماری وجود دارند که در آن هیچ‌گونه اطلاعاتی در مورد شکل تابعی کمیت نامعلوم در دسترس نیست. بنابراین آن‌ها نباید به صورت معادله (۶۱-۴) پارامتربندی شوند چرا که توابع آزمایشی اشتباهی در چنین فرآیندهایی مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر چه توابع آزمایشی عمومی، نظیر $B - Spline$ ، می‌تواند در پارامتر سازی مورد استفاده قرار گیرد اما همچنان این سؤال که چه مقدار توابع آزمایشی برای یک تقریب درست از کمیت نامعلوم مورد نیاز است باقی می‌ماند.

برای مواردی که هیچ‌گونه اطلاعات قبلی در مورد فرم تابعی کمیت نامعلوم در دسترس نباشد، کمینه‌سازی معادله (۵۹-۴) باید به طور کامل در فضای وابسته به توابع انجام شود. در این

قسمت تابع (۴-۵۹) در فضای همه N پارامتر P_j ممکن کمینه شود. به عبارت دیگر، برای تقریب تخمین تابع، معادله (۴-۵۹) در یک فضای نامحدودی از توابع کمینه خواهد شد. در قسمت بعدی ما روش گرادیان تعمیم یافته را ارائه می‌کنیم همانطوری که برای تقریب تخمین تابع به کار برده می‌شود.

۴-۵ روش ۴: روش گرادیان تعمیم یافته به همراه مسئله الحاقی برای تخمین تابع

در این قسمت یک طرح کمینه‌سازی تکراری قدرتمند که روش گرادیان تعمیم یافته به همراه مسئله الحاقی نامیده می‌شود، برای حل مسائل تخمین توابع مربوط به انتقال حرارت معکوس به کار می‌رود. در این تقریب، هیچ‌گونه اطلاعات قبلی در مورد شکل تابعی تابع نامعلوم در دسترس نیست (به جز برای فضای توابع متعلق به آن) [۱۲۸-۱۴۰].

به منظور توضیح روش ۴، ما مسئله آزمون داده شده با معادلات (۴-۶۰) را برای تخمین قدرت وابسته به زمان نامعلوم، $g_p(t)$ ، مربوط به یک چشمه انرژی صفحه‌ای، با استفاده از خواندن گذرا از یک حسگر یکتا واقع در x_{meas} در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که تابع نامعلوم وابسته به فضای هیلبرت توابع مجذور - انتگرال پذیر در بازه زمانی مفروض می‌باشد [۱۳۱، ۱۳۳، ۱۴۰] که با $L_2(0, t_f)$ نشان داده می‌شود که در آن t_f مدت زمان انجام آزمایش می‌باشد. توابع در چنین فضایی شرط زیر را بر آورده می‌کنند:

$$\int_{t=0}^{t_f} [g_p(t)]^2 dt < \infty \quad (۴-۸۶)$$

به منظور حل کردن مسائل تخمین توابع کنونی، تابع $S[g_p(t)]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$S[g_p(t)] = \int_{t=0}^{t_f} \{Y(t) - T[x_{meas}, t; g_p(t)]\}^2 dt \quad (۴-۸۷)$$

که تحت قیودی که از طریق مسئله مستقیم هدایت حرارتی معین می‌شود، کمینه خواهد شد. گام‌های اساسی روش ۴ برای حل مسائل تخمین تابع، که از طریق کمینه‌سازی معادله تابعی (۴-۸۷) به دست می‌آید، مشابه با گام‌های اساسی روش ۳ برای مسائل تخمین پارامتر می‌باشد. این گام‌ها عبارتند از:

اکنون جزئیات هر کدام از این گام‌ها را ارائه خواهیم کرد.

۴-۵-۱ مسئله مستقیم

مسئله مستقیم شامل تعیین میدان دمایی در محیط می‌شود هنگامی که منبع چشمه معلوم باشد. فرمول‌بندی مسئله مستقیم با معادلات (۴-۶۰) داده می‌شود.

۴-۵-۲ مسئله معکوس

در مسئله معکوس در نظر گرفته شده در این قسمت، جمله چشمه $g_p(t)$ یک تابع مجهول نسبت به زمان می‌باشد. داده‌های دمایی اندازه‌گیری شده $Y(t)$ که در مکان x_{meas} به دست می‌آید در سرتاسر بازه زمانی $0 \leq t \leq t_f$ موجود می‌باشد که در آن زمان نهایی است. اما برخلاف روش ۳ که در آن $g_p(t)$ با معادله (۴-۶۱) پارامتربندی شده است، هیچ‌گونه شکل تابع گونه‌ای برای جمله چشمه از قبل فرض شده وجود ندارد. تنها فرض موجود آن است که $g_p(t)$ به فضای $L_2(0, t_f)$ متعلق می‌باشد. تابع حساسیت $\Delta T(x, t)$ و ضریب لاگرانژ $\lambda(x, t)$ برای اجرای روش تکراری ۴ مورد نیاز است. بنابراین ما به گسترش دو مسئله کمکی نیازمندیم، یعنی مسئله حساسیت و مسئله الحاقی تا بتوانیم دو تابع فوق $(\lambda(x, t), \Delta T(x, t))$ را تعیین کنیم که در زیر بحث خواهد شد.

۴-۵-۳ مسئله حساسیت

استخراج مسئله حساسیت برای روش ۴ مشابه با روش ۳ می‌باشد. در این روش فرض بر آن است که هنگامی که $g_p(t)$ به اندازه $\Delta g_p(t)$ افزایش می‌یابد دمای $T(x, t)$ به اندازه $\Delta T(x, t)$ تغییر می‌کند. بنابراین ما $T(x, t)$ را با $[T(x, t) + \Delta T(x, t)]$ و $g_p(t)$ را با $[g_p(t) + \Delta g_p(t)]$ جایگزین می‌کنیم و آن را از مسئله اصلی (۴-۶۰) کم می‌کنیم تا مسئله حساسیت داده شده با معادلات (۴-۶۳) را به دست آوریم. اما در روش ۴ تغییرات تابع مجهول، $\Delta g_p(t)$ ، به صورت پارامتربندی شده معادله (۴-۶۲) داده نمی‌شود.

۴-۵-۴ مسئله الحاقی

روش استخراج مسئله الحاقی برای روش ۴ نیز مشابه با روش ۳ می‌باشد. برای توسعه مسئله الحاقی، یک ضریب لاگرانژ $\lambda(x, t)$ معرفی می‌کنیم. ما معادله (۴-۶۰) را در $\lambda(x, t)$ ضرب می‌کنیم و عبارت حاصله را روی دامنه فضایی از $x = 0$ تا $x = 1$ و سپس بر روی بازه زمانی از $t = 0$ تا $t = t_f$ انتگرال گیری می‌کنیم. عبارت به دست آمده با این روش، با تابع داده شده $S[g_p(t)]$ با معادله (۴-۸۷) جمع می‌شود تا عبارت تابع گونه زیر به دست آید:

$$S[g_p(t)] = \int_{t=0}^{t_f} \{Y(t) - T[x_{meas}, t; g_p(t)]\}^2 dt + \int_{x=0}^1 \int_{t=0}^{t_f} \lambda(x, t) \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g_p(t) \delta(x - 0.5) - \frac{\partial T}{\partial t} \right] dt dx \quad (۴-۸۸)$$

که مترادف با فرم معادله (۴-۶۴) برای تخمین پارامتر می‌باشد.

یک عبارت برای تغییر $\Delta S[g_p(t)]$ از فرم $S[g_p(t)]$ می‌تواند با فرض آنکه $T(x, t)$ به اندازه $\Delta T(x, t)$ تغییر کند هنگامی که $g_p(t)$ به مقدار $\Delta g_p(t)$ آشفته شود، به دست آید. تغییرات $\Delta S[g_p(t)]$ مشتق جهتی $S[g_p(t)]$ را در جهت اختلال $\Delta g_p(t)$ به دست می‌دهد [۱۳۱، ۱۴۰]. با جایگزین کردن $[T(x, t) + \Delta T(x, t)]$ به جای $T(x, t)$ و $[g_p(t) + \Delta g_p(t)]$ به جای $g_p(t)$ و $[S[g_p(t)] + \Delta S[g_p(t)]]$ به جای $S[g_p(t)]$ در معادله (۴-۸۸) و کم کردن معادله اصلی (۴-۸۸) از عبارت حاصله و صرفنظر کردن از جملات مرتبه دوم خواهیم داشت:

$$\Delta S[g_p(t)] = \int_{t=0}^{t_f} \int_{x=0}^1 \{T[x, t; g_p(t)] - Y(t)\} \Delta T(x, t) \delta(x - x_{meas}) dx dt + \int_{t=0}^{t_f} \int_{x=0}^1 \lambda(x, t) \left[\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} + \Delta g_p(t) \delta(x - 0.5) - \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \right] dx dt \quad (۴-۸۹)$$

که در آن $\delta(\cdot)$ تابع دلتای دیراک می‌باشد. معادله (۴-۸۹) به معادله (۴-۶۵) برای تخمین پارامتر شبیه می‌باشد.

جمله انتگرالی دوم در سمت راست معادله (۴-۸۹) با انتگرال گیری جزء به جزء، استفاده از شرایط اولیه و مرزی مسئله حساسیت حل می‌شود. جملات انتگرالی شامل $\Delta T(x, t)$ در عبارت حاصله به منظور به دست آوردن مسئله الحاقی داده شده با معادلات (۴-۷۱) برای تعیین ضریب لاگرانژ $\lambda(x, t)$ صفر در نظر گرفته می‌شود.

۵-۵-۴ معادله گرادیان

بعد از فرآیند استفاده شده در بالا برای به دست آوردن مسئله الحاقی، جملات زیر باقی می ماند:

$$\Delta S[g_p(t)] = \int_{t=0}^{t_f} \lambda(0, 5, t) \Delta g_p(t) dt \quad (90-4)$$

که در روش ۳، فرم پارامتربندی شده $\Delta g_p(t)$ در معادله (۶۲-۴)، به منظور به دست آوردن مؤلفه های بردار گرادیان داده شده با معادله (۷۶-۴) در معادله بالا جانشین شده است. چنین تقریبی نمی تواند در اینجا مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین با استناد به اینکه تابع مجهول $g_p(t)$ به فضای توابع مجذور انتگرال پذیر در بازه $0 \leq t \leq t_f$ متعلق است می توان نوشت [۱۴۰، ۱۳۳، ۱۳۱]:

$$\Delta S[g_p(t)] = \int_{t=0}^{t_f} \nabla S[g_p(t)] \Delta g_p(t) dt \quad (91-4)$$

که در آن $\nabla S[g_p(t)]$ گرادیان $S[g_p(t)]$ می باشد.

از مقایسه معادلات (۹۰-۴) و (۹۱-۴) می توان نتیجه گرفت:

$$\nabla S[g_p(t)] = \lambda(0, 5, t) \quad (92-4)$$

که معادله گرادیان برای شکل تابع گونه می باشد.

۶-۵-۴ روش تکراری برای روش گرادیان مزدوج برای تخمین تابع

توسعه ریاضی انجام شده در بالا، سه مسئله مجزا که با معادلات (۶۰-۴)، (۶۳-۴) و (۷۱-۴) تعریف می شود و به ترتیب مسائل مستقیم، حساسیت و الحاقی نامیده می شود را ارائه می کند که برای محاسبه توابع $T(x, t)$ ، $\Delta T(x, t)$ و $\lambda(x, t)$ مورد استفاده قرار می گیرند. داده های اندازه گیری شده $Y(t)$ از یک حسگر واقع در x_{meas} موجود است و گرادیان $\nabla S[g_p(t)]$ با معادله (۹۲-۴) داده می شود.

تابع نامعلوم $g_p(t)$ از طریق کمینه سازی $S[g_p(t)]$ داده شده با معادله (۸۷-۴) تخمین زده می شود. این مسئله از یک روش تکراری با انتخاب صحیح جهت نزولی و اندازه گام جستجو از k به $k+1$ به دست می آید. این روش تکراری مربوط به روش گرادیان تعمیم یافته برای تخمین تابع $g_p(t)$ به صورت زیر داده می شود:

$$g_p^{k+1}(t) = g_p^k(t) - \beta^k d^k(t) \quad (93-4)$$

که در آن β^k اندازه گام جستجو و $d^k(t)$ جهت نزولی نامیده می شود و به صورت زیر تعریف می گردد:

$$d^k(t) = \nabla S[g_p^k(t)] + \gamma^k d^{k-1}(t) \quad (94-4)$$

مؤلفه تعمیم یافته γ^k از معادله پلاک ریبر [۱۳۱-۱۳۳] محاسبه می شود:

$$\gamma^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f} \nabla S[g_p^k(t)] \{ \nabla S[g_p^k(t)] - \nabla S[g_p^{k-1}(t)] \} dt}{\int_{t=0}^{t_f} \{ \nabla S[g_p^{k-1}(t)] \}^2 dt} \quad k = 1, 2, \dots \quad (95-4)$$

که $\gamma^0 = 0$ برای $k = 0$. یا از معادله فلچر ریوز [۱۳۱، ۱۳۳، ۱۳۴]:

$$\gamma^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f} \{ \nabla S[g_p^k(t)] \}^2 dt}{\int_{t=0}^{t_f} \{ \nabla S[g_p^{k-1}(t)] \}^2 dt} \quad k = 1, 2, \dots \quad (96-4)$$

که $\gamma^0 = 0$ برای $k = 0$. اندازه گام β^k از طریق کمینه سازی تابع $S[g_p^{k+1}(t)]$ داده شده با

معادله (۸۷-۴) نسبت به β^k تعیین می شود یعنی:

$$\min_{\beta^k} S[g_p^{k+1}(t)] = \min_{\beta^k} \int_{t=0}^{t_f} \{ Y(t) - T[x_{meas}, t; g_p^k(t) - \beta^k d^k(t)] \}^2 dt \quad (97-4)$$

سپس با استفاده از بسط سری تیلور معادله (۹۷-۴) فرم زیر را به خود می گیرد:

$$\min_{\beta^k} S[g_p^{k+1}(t)] = \min_{\beta^k} \int_{t=0}^{t_f} \{ Y(t) - T[x_{meas}, t; g_p^k(t)] + \beta^k \Delta \} T[x_{meas}, t; d^k(t)] \}^2 dt \quad (98-4)$$

که در آن $T[x_{meas}, t; d^k(t)]$ حل مسئله حساسیت داده شده با معادلات (۶۳-۴) می باشد که

با قرار دادن $\Delta g_p^k(t) = d^k(t)$ به دست می آید. برای کمینه کردن معادله (۹۸-۴)، از آن نسبت

به β^k دیفرانسیل می گیریم و عبارت حاصله را برابر صفر قرار می دهیم. بعد از انجام اندکی

محاسبات معادله زیر برای اندازه گام β^k به دست می آید:

$$\beta^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f} \{ T[x_{meas}, t; g_p^k(t)] - Y(t) \} \Delta T[x_{meas}, t; d^k(t)] dt}{\int_{t=0}^{t_f} \{ \Delta T[x_{meas}, t; d^k(t)] \}^2 dt} \quad (99-4)$$

روش تکرار داده شده با معادلات (۹۳-۴) - (۹۶-۴) و (۹۹-۴) تا زمانی به کار برده می شود

که معیار توقف بر مبنای اصل اختلاف ارضا شود که در زیر توضیح داده شده است.

۷-۵-۴ معیار توقف برای روش ۴

مشابه با روش‌های ۲ و ۳، معیار توقف با رابطه زیر داده می‌شود:

$$S[g_p(t)] < \epsilon \quad (۱۰۰-۴)$$

که در آن $S[g_p(t)]$ با معادله (۸۷-۴) محاسبه می‌شود. تلورانس ϵ طوری انتخاب می‌شود که حل‌های هموار، به همراه اندازه‌گیری‌هایی شامل خطاهای تصادفی به‌دست آید. فرض می‌شود که این حل‌ها به‌اندازه کافی دقیق‌اند هنگامی که

$$|Y(t) - T[x_{meas}, t; g_p(t)]| \approx \sigma \quad (۱۰۱-۴)$$

که در آن σ انحراف از معیار خطاهای اندازه‌گیری است. بنابراین ϵ از معادله (۸۷-۴) به دست می‌آید:

$$\epsilon = \sigma^2 t_f \quad (۱۰۲-۴)$$

برای اندازه‌گیری‌های بدون خطا، ϵ یک عدد به اندازه کافی کوچک در نظر گرفته می‌شود.

۸-۵-۴ الگوریتم محاسباتی برای روش ۴

فرض کنید که حدس اولیه $\dot{g}_p(t)$ برای تابع $g_p(t)$ در دسترس باشد. قرار دهید $k = ۰$ سپس:

گام ۱: مسئله مستقیم (۶۰-۴) را حل کنید و $T(x, t)$ را بر اساس $g_p^k(t)$ محاسبه کنید.

گام ۲: معیار توقف (۱۰۰-۴) را بررسی کنید. اگر درست نبود ادامه دهید.

گام ۳: با دانستن $T(x_{meas}, t)$ و دمای اندازه‌گیری شده $Y(t)$ مسئله الحاقی (۷۱-۴) را حل کنید و $\lambda(۰/۵, t)$ را محاسبه کنید.

گام ۴: با دانستن $\lambda(۰/۵, t)$ ، $\nabla S[g_p^k(t)]$ را از معادله (۹۲-۴) محاسبه کنید.

گام ۵: با دانستن گرادیان $\nabla S[g_p^k(t)]$ ، γ^k را از معادلات (۹۵-۴) یا (۹۶-۴) محاسبه کنید و جهت نزولی $d^k(t)$ را از معادله (۹۴-۴) محاسبه کنید.

گام ۶: قرار دهید $\Delta g_p^k(t) = d^k(t)$ و مسئله حساسیت (۶۳-۴) را برای به‌دست آوردن $\Delta T[x_{meas}, t; d^k(t)]$ حل کنید.

گام ۷: با دانستن $\Delta T[x_{meas}, t; d^k(t)]$ ، اندازه گام جستجو β^k را از معادله (۹۹-۴) محاسبه

کنید.

گام ۸ : با دانستن اندازه گام جستجو β^k و جهت نزولی $d^k(t)$ ، $g_p^{k+1}(t)$ را از معادله (۹۳-۴)

محاسبه کنید و به گام ۱ برگردید.

تعمیم الگوریتم بالا هنگام استفاده از حسگرهای چندگانه مشابه با قسمت قبلی برای روش ۳

می‌باشد.

فصل ۵

تخمین ضریب هدایت حرارت یک بعدی متغیر
با مکان با استفاده از روش گرادیان مزدوج

۵-۱ مقدمه

در فصل حاضر، معادلات حاکم بر مسئله و نحوه حل آن معرفی شده است. یک قطعه فلزی به طول L در نظر گرفته شده، در ابتدا مسئله مستقیم برای یک مقدار واقعی از ضریب هدایت حرارتی با استفاده از یک روش عددی مناسب حل شده است و حل عددی و حل تحلیلی معادلات حاکم شرح داده شده است. روش ۲ به عنوان یک روش معکوس برای برآورد ضریب هدایت حرارتی متغیر با مکان در تیغه فلزی با استفاده از عکس برداری حرارتی در نقاط مختلف از سطح تیغه، به کار گرفته شد. از داده‌های دمایی حاصل از عکس برداری حرارتی، در تقریب‌های مختلف با در نظر گرفتن ۱۰ و ۲۰ مکان مختلف از سطح تیغه مورد نظر برای حل مسئله معکوس استفاده شده است که این مکان‌ها در هر دو تقریب به طور یکنواخت از سطح تیغه انتخاب شده‌اند. سپس با در نظر گرفتن این داده‌های دمایی، و با استفاده از روش تکراری گرادیان مزدوج به تخمین ضریب هدایت حرارتی متغیر با مکان، که به صورت توابع مختلفی در نظر گرفته شده‌اند، پرداختیم. روش معکوس نظیر به صورت یک برنامه کامپیوتری پیاده‌سازی شده است. همچنین از یک روش مناسب جهت تخمین دقت روش معکوس به کار گرفته شده استفاده شد. و نتایج با مقادیر واقعی مورد آزمون مقایسه شدند تا صحت روش به کار گرفته شده ارزیابی شود.

۵-۲ معادلات حاکم

رسانش گرمای گذرای خطی در یک صفحه فلزی با ضخامت بدون بعد واحد را در نظر بگیرید. صفحه فلزی ابتدا در دمای صفر قرار دارد. بعد از زمان $t > 0$ شار حرارتی ثابتی روی مرز $x = 0$ اعمال می‌شود. در حالی که مرز $x = L$ عایق نگهداری می‌شود. فرمول ریاضی مسئله مستقیم هدایت حرارتی به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
\rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) & 0 < x < L, t > 0 \\
-K \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} &= q'' & x = 0, t > 0 \\
\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} &= 0 & x = L, t > 0 \\
T(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq L, t = 0
\end{aligned} \tag{۱-۵}$$

که در آن $\frac{\partial T}{\partial x}$ گرادیان دما در سوی جریان گرماست، q'' شار حرارتی ثابت اعمال شده بر حسب $\frac{W}{m^2}$ ، c گرمای ویژه جسم بر حسب $\frac{J}{kg.K}$ و ρ چگالی بر حسب $\frac{kg}{m^3}$ است و K ضریب هدایت حرارتی متغیر با مکان بر حسب $\frac{W}{m.K}$ می‌باشد. شرایط اولیه و مرزی و خواص حرارتی مشخص هستند، مسئله مستقیم تعریف شده توسط معادلات (۱-۵) می‌تواند به صورت عددی حل شود و توزیع دما را به عنوان تابعی از زمان نسبت به موقعیت هر نقطه در جسم محاسبه کرد [۱۴۱].

۱-۲-۵ حل عددی معادلات هدایت حرارت یک بعدی

در این بخش، روش ضمنی توصیف شده در بخش ۱-۶-۲ جهت گسسته‌سازی مسئله مستقیم هدایت حرارتی مورد استفاده قرار گرفته است. برای این کار m گره با فواصل مساوی روی بازه $0 < x < L$ در نظر می‌گیریم. از تقریبهای تفاضل محدود مختلفی برای نشان دادن مشتقهای مسئله مستقیم هدایت حرارتی تعریف شده با معادلات (۱-۵) می‌توان استفاده کرد [۲۰]. در این بخش، از تقریب تفاضل پیشروی مرتبه یک برای مشتق زمان به فرم زیر استفاده کردیم:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \tag{۲-۵}$$

همچنین از تقریب تفاضل مرکزی مرتبه دوم برای مشتقهای مکان در معادله (۱-۵) به صورت زیر استفاده کردیم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \tag{۳-۵}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \tag{۴-۵}$$

بار دیگر معادله (۱-۵) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \tag{۵-۵}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (۶-۵)$$

با جایگذاری معادلات تفاضل محدود فوق در معادله (۶-۵) داریم:

$$\rho c \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k_i \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2\Delta x} \cdot \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (۷-۵)$$

یا

$$\rho c \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{k_i}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) + \frac{1}{4(\Delta x)^2} [(k_{i+1} - k_{i-1})(T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1})] \quad (۸-۵)$$

با فرض $S_i = \frac{k_i}{\rho c_p} \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ برای معادله (۸-۵) داریم:

$$T_i^{n+1} - T_i^n = S_i (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) + \frac{1}{4} [(S_{i+1} - S_{i-1})(T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1})] \quad (۹-۵)$$

معادله (۹-۵) را به شکل استاندارد زیر می نویسیم:

$$[S_i + \frac{1}{4}(S_{i+1} - S_{i-1})]T_{i+1}^{n+1} - (1 + 2S_i)T_i^{n+1} + [S_i - \frac{1}{4}(S_{i+1} - S_{i-1})]T_{i-1}^{n+1} = -T_i^n$$

$$i = 2, \dots, n-1 \quad (۱۰-۵)$$

با جایگذاری فرمول های تفاضل محدود برای شرایط مرزی معادله (۱-۵) داریم:

$$-K \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = q'' \Rightarrow -K_1 \frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{\Delta x} = q''$$

$$\Rightarrow T_1^{n+1} = T_2^{n+1} + \frac{q'' \Delta x}{K_1} \quad (۱۱-۵)$$

و

$$\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=M} = 0 \Rightarrow \frac{T_M^{n+1} - T_{M-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow T_M^{n+1} = T_{M-1}^{n+1} \quad (۱۲-۵)$$

که با جایگذاری معادله (۱۱-۵) در معادله (۱۰-۵) و ساده سازی برای گره مرزی $i = 2$ داریم:

$$[S_2 + \frac{1}{4}(S_3 - S_1)]T_3^{n+1} - [1 + S_2 + \frac{1}{4}(S_3 - S_1)]T_2^{n+1} = -T_2^n - (S_2 - \frac{1}{4}(S_3 - S_1)) + \frac{q'' \Delta x}{k_1} \quad (۱۳-۵)$$

همچنین با جایگذاری فرمول (۵-۱۲) در فرمول شماره (۵-۱۰) و ساده‌سازی برای گره مرزی $i = m - 1$ داریم:

$$[-1 - S_{M-1} + \frac{1}{4}(S_M - S_{M-2})]T_{M-1}^{n+1} + [S_{M-1} - \frac{1}{4}(S_M - S_{M-2})]T_{M-2}^{n+1} = -T_{M-1}^n \quad (۵-۱۴)$$

با نوشتن این معادلات تفاضل محدود برای تمام نقاط شبکه در نقاط زمانی جلوتر، مجموعه‌ای از معادلات جبری به دست می‌آید که ماتریس ضرائب این دسته از معادلات یک ماتریس سه قطری^۱ خواهد بود. با حل دستگاه معادلات سه قطری حاصل از معادلات (۵-۱۰)، (۵-۱۳) و (۵-۱۴) می‌توان توزیع دما را در تمام نقاط ورقه به دست آورد.

۵-۲-۲ حل تحلیلی معادلات هدایت حرارت یک بعدی

جهت اطمینان از صحت و دقت روش عددی به کار گرفته شده در بالا، در این قسمت به حل تحلیلی مسئله داده شده با معادلات (۵-۱) می‌پردازیم [۱۴۲]. از روش جداسازی متغیرها^۲ جهت حل مسئله آزمون داده شده با فرض این که ضریب هدایت حرارتی ثابت باشد، استفاده شده است. مجدداً مسئله آزمون داده شده با معادلات (۵-۱) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad a = \frac{K}{\rho c} \quad (۵-۱۵)$$

$$-K \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = q'' \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad (۵-۱۶)$$

$$\theta(x, 0) = T_0 \quad , \quad t = 0, 0 < x < L$$

به جستجوی جواب‌هایی از مسئله (۵-۱۵) به صورت زیر می‌پردازیم:

$$\theta(x, t) = \psi(x, t) + \phi(x) \quad (۵-۱۷)$$

با به کارگیری روش جداسازی متغیرها در ادامه خواهیم دید تابع $\psi(x, t)$ یک تابع نمایی بر حسب زمان خواهد بود. بنابراین در رابطه (۵-۱۷) مادامی که $t \rightarrow \infty$ عبارت $\psi(x, t) \rightarrow 0$ و در نتیجه، $\theta(x, t) \rightarrow \phi(x)$ که با توجه به ناپایدار بودن مسئله در نظر گرفته شده با معادلات (۵-۱)، مادامی که $t \rightarrow \infty$ دمای ورقه باید بدون محدودیت بالا رود لذا نتیجه بدست آمده

^۱ Tridiagonal

^۲ Separation of variables

قوانین فیزیک مسئله را نقض می کند. به منظور احراز این شرایط، معادله (۵-۱۷) را با افزودن عبارت $\varphi(t)$ اصلاح می کنیم بنابراین مادامی که $t \rightarrow \infty$ ، $\varphi(t) \rightarrow \infty$. بنابراین فرض صحیح به صورت زیر می باشد:

$$\theta(x, t) = \psi(x, t) + \phi(x) + \varphi(t) \quad (۵-۱۸)$$

حال با جایگذاری معادله (۵-۱۸) در معادلات (۵-۱) دو دسته معادلات زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \psi(x, 0) = -\phi(x) - \varphi(0) \quad (۵-۱۹)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(L, t) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (۵-۲۰)$$

$$-K \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, t) = q'' \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (۵-۲۱)$$

از آنجایی که در معادله (۵-۲۰)، $\varphi(t)$ و $\phi(x)$ به هم وابسته نیستند آن را برابر ثابت C قرار می دهیم:

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = C \quad (۵-۲۲)$$

از حل معادله فوق داریم:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = C \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = aCt + C_1 \quad (۵-۲۳)$$

همچنین

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = C \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = \frac{1}{2}Cx^2 + C_2x + C_3 \quad (۵-۲۴)$$

با جایگذاری معادله (۵-۲۴) در معادلات (۵-۲۱) مقادیر C و C_2 به راحتی محاسبه می شود.

که از حل آن ها نتیجه می شود:

$$C_2 = \frac{q''}{K} \quad C = \frac{q''}{KL}$$

که C_1 و C_3 ثابت های باقیمانده اند. با توجه به اینکه حل $\psi(x, t)$ بستگی به $\varphi(t)$ و $\phi(x)$ دارد، می توانیم بصورت قراردادی این ثابت ها را برابر با صفر در نظر بگیریم. پس با فرض

$C_1 = C_2 = 0$ عبارات (۲۳-۵) و (۲۴-۵) به صورت زیر خواهد شد:

$$\varphi(t) = a \frac{q''}{KL} t \quad (25-5)$$

$$\phi(x) = \frac{q''}{2KL} x^2 - \frac{q''}{K} x \quad (26-5)$$

از طرف دیگر، فرض می‌کنیم $\psi(x, t) = \chi(x)\tau(t)$ جوابی برای مسئله (۱۹-۵) باشد. با جایگذاری این جواب در معادله (۱۹-۵) داریم:

$$\frac{1}{a} \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = \frac{\chi''(x)}{\chi(x)} \quad (27-5)$$

از آنجا که طرف راست معادله فوق فقط تابعی از متغیر زمانی t و طرف چپ تابعی فقط از متغیر مکانی x می‌باشد. تساوی فوق فقط وقتی برای هر t و x مسئله صادق است که هر یک از دو طرف تساوی برابر مقدار ثابت $-\lambda^2$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{1}{a} \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = \frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = -\lambda^2 \quad (28-5)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \chi'' + \lambda^2 \chi = 0, & \frac{\partial \chi}{\partial x}(0) = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial x}(L) = 0, & (a) \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + a\lambda^2 \tau(t) = 0, & & (b) \end{cases} \quad (29-5)$$

همانطور که مشاهده می‌شود معادلات فوق، معادلات مرتبه دوم با ضرائب ثابت هستند. بنابراین جواب عمومی این معادلات با استفاده از چند جمله‌ای مشخصه آن‌ها حاصل می‌شود. چند جمله‌ای مشخصه عبارت (b) در معادله (۲۹-۵) برابر $r + a\lambda^2 = 0$ می‌باشد که جواب عمومی برای این معادله به فرم زیر می‌باشد:

$$\tau(t) = C_n e^{-a\lambda_n^2 t} \quad (30-5)$$

همچنین چند جمله‌ای مشخصه عبارت (a) در معادله (۲۹-۵) به فرم $r^2 + \lambda^2 = 0$ می‌باشد که جواب عمومی آن به فرم زیر می‌باشد:

$$\chi(x) = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x \quad (31-5)$$

که با جایگذاری شرایط مرزی عبارت (a) در معادله (۳۱-۵) داریم:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}(0) = -A_1 \lambda \sin \lambda x + A_2 \lambda \cos \lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 0 \quad (32-5)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}(L) = -A_1 \lambda \sin \lambda L \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L} \quad (33-5)$$

لذا جواب عمومی عبارت (a) در معادله (5-29) عبارتست از:

$$\chi_n(x) = A_n \cos \lambda_n x \quad (34-5)$$

که در آن $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ برای $n = 1, 2, 3, \dots$ بنابراین جواب عمومی معادله (5-19) برای $n = 1, 2, 3, \dots$ به صورت زیر است:

$$\psi_n(x, t) = \chi_n(x) \tau_n(t) = A_n \cos(n\pi x/L) \cdot C_n e^{-a\lambda_n^2 t} \quad (35-5)$$

از آن جا که معادله (5-19) یک معادله خطی است، پس هر ترکیب خطی از جواب ها نیز جواب معادله می باشد. یعنی

$$\psi(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x \Rightarrow a_0 = c \cdot A_0, \quad a_n = c_n A_n \quad (36-5)$$

که $a_0 = c \cdot A_0, a_n = c_n A_n$ با اعمال شرط مرزی معادله (5-36) نتیجه می گیریم:

$$T_0 - \phi(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x \quad (37-5)$$

سری فوق، سری فوریه کسینوسی تابع $T_0 - \phi(x)$ می باشد بنابراین ضرائب a_0 و a_n برابرند با:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L (T_0 - \frac{q''}{2KL} x^2 + \frac{q''}{K} x) \cos \lambda_n x dx \quad (38-5)$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L (T_0 - \frac{q''}{2KL} x^2 + \frac{q''}{K} x) dx \quad (39-5)$$

از حل معادلات (5-38) و (5-39) داریم:

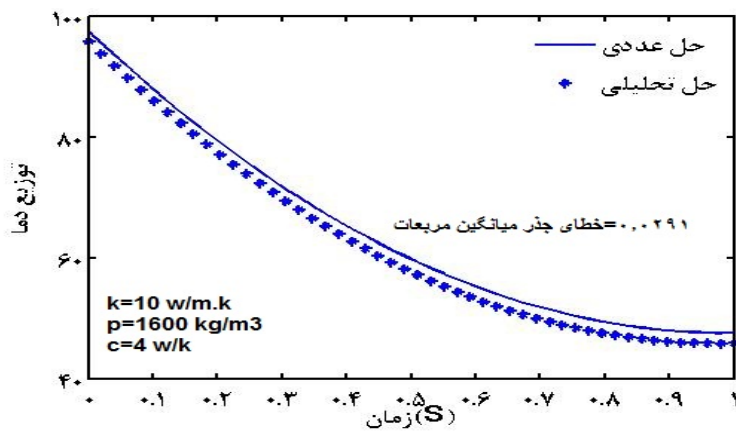
$$a_0 = T_0 + \frac{q'' L}{3K} \quad (40-5)$$

$$a_n = -\frac{2q''}{KL\lambda_n^3} \quad (41-5)$$

بنابراین با جایگذاری $\psi(x, t)$ ، $\phi(x)$ و $\varphi(t)$ در معادله (5-18) دمای ورقه عبارت است از:

$$\theta(x, t) = T_0 + \frac{q'' l}{3K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2q''}{KL\lambda_n^3} e^{-a\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x + (\frac{q''}{2KL} x^2 - \frac{q''}{K} x + \frac{aq''}{KL} t) \quad (42-5)$$

شکل 5-1 نتایج حاصل از حل عددی و حل تحلیلی مسئله داده شده با معادلات (5-1) را با در نظر گرفتن شرایط ترموفیزیکی یکسانی نمایش می دهد.



شکل ۵-۱: توزیع دمای ورقه فلزی

فصل ۶

نتایج عددی حل معکوس مسئله هدایت حرارت
یک بعدی

در این فصل با توجه به معادلات حاکم ارائه شده و نحوه حل آن‌ها در فصل‌های قبل، نتایج حاصل از حل مسئله معکوس تخمین ضریب هدایت حرارتی متغیر با مکان در حالت یک بعدی ارائه خواهد شد. روش گرادیان مزدوج به عنوان یک روش معکوس حرارتی برای بهینه‌سازی تابع هدف به کار گرفته شده است. به منظور ارزیابی و اطمینان از صحت روش معکوس به کار گرفته شده جهت برآورد ضریب هدایت حرارتی متغیر با مکان، تعدادی آزمایش عددی ارائه شده است. در این آزمایشات قطعه‌ای به طول $L = 1\text{ m}$ با دمای اولیه $T_0 = 0^\circ\text{K}$ و شار حرارتی $q = 1000\text{ KWm}^{-2}$ اعمال شده در مرز $x = 0$ ، در نظر گرفته شده است. داده‌های شبیه‌سازی شده دما با حل مسئله مستقیم هدایت حرارتی تعریف شده با معادلات (۵-۱)، با استفاده از روش ضمنی تفاضل محدود با گام زمانی $\Delta t = 0.1\text{ s}$ و گام مکانی $\Delta x = 0.02\text{ cm}$ به دست آمده‌اند. همچنین داده‌های دما با استفاده از عکس‌برداری حرارتی در هر 0.1 s ثبت می‌شود. از داده‌های دمایی حاصل از عکس‌برداری حرارتی، یک‌بار در ۱۰ مکان و بار دیگر در ۲۰ مکان از سطح تیغه فلزی که در هر دو حالت به طور یکنواخت از سطح تیغه انتخاب شده‌اند، برای حل مسئله معکوس استفاده شده است. خطای می‌نیمم مربعات برای تمام حالت‌ها 10^{-4} در نظر گرفته شده است. در ادامه نتایج حاصل از چند حدس اولیه برای ضریب هدایت حرارتی متغیر با مکان به همراه نمودارهای مربوطه ارائه شده است. همچنین جهت ارزیابی کمی دقت نتایج به دست آمده، مقدار خطای جذر میانگین مربعات یا ریشه دوم واریانس که با عنوان خطای استاندارد شناخته شده است، در نظر گرفته شده است. که فرمول‌بندی آن به فرم زیر می‌باشد:

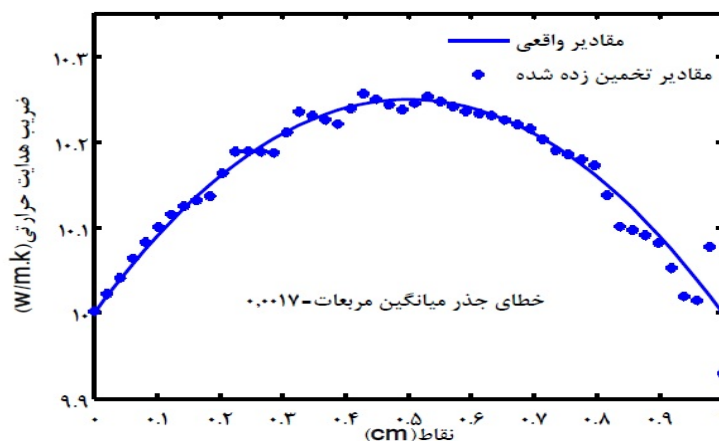
$$e_{RMS} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_{real,i} - K_{est,i})^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_{real,i})^2}} \quad (1-6)$$

که در رابطه بالا N تعداد نقاط است.

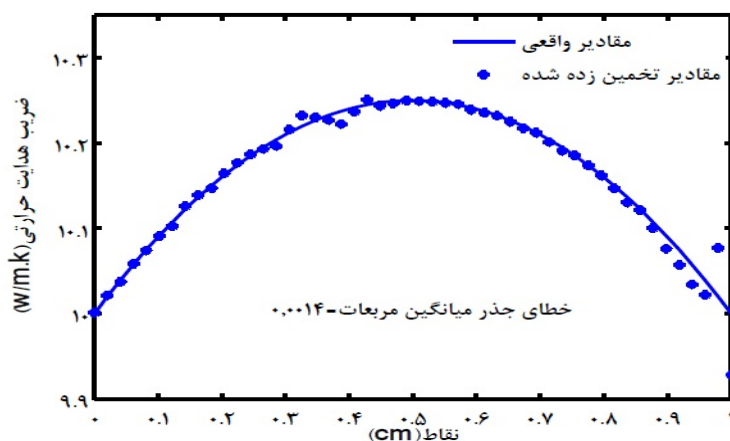
مثال ۱: در این حالت ضریب هدایت حرارتی یک تابع درجه دو با معادله

$$k(x) = -x^2 + x + 10$$

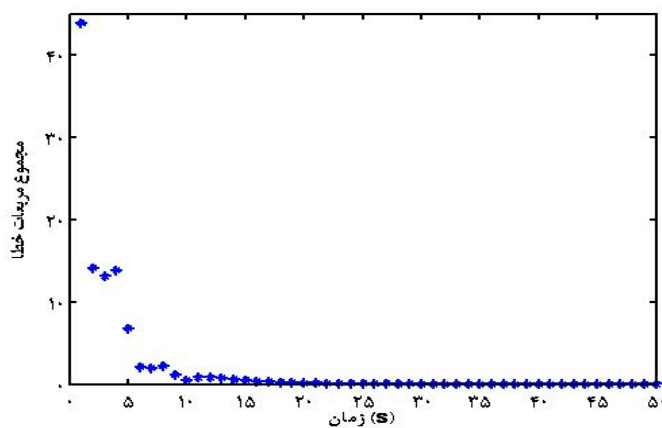
در نظر گرفته شده است. شکل‌های ۱-۶ و ۲-۶ نتایج حاصل از صحت و دقت روش معکوس به کار گرفته شده را با در نظر گرفتن ۱۰ و ۲۰ سنسور با استفاده از عکس‌برداری حرارتی نشان می‌دهند.



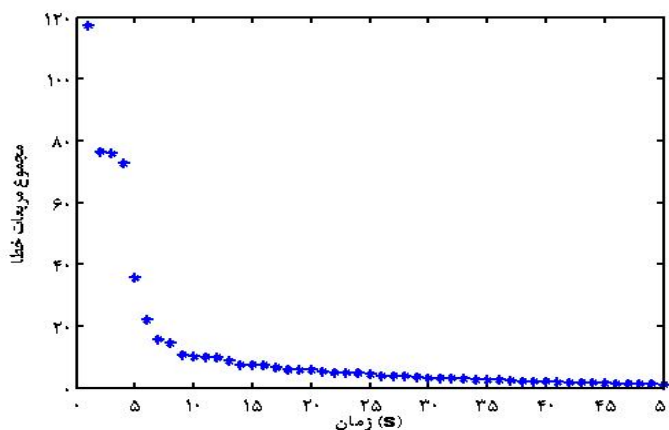
شکل ۱-۶: تخمین ضریب هدایت حرارتی درجه دو با استفاده از داده‌های حاصل از عکس‌برداری حرارتی در محل ۱۰ سنسور حرارتی



شکل ۲-۶: تخمین ضریب هدایت حرارتی درجه دو با استفاده از داده‌های حاصل از عکس‌برداری حرارتی در محل ۲۰ سنسور حرارتی



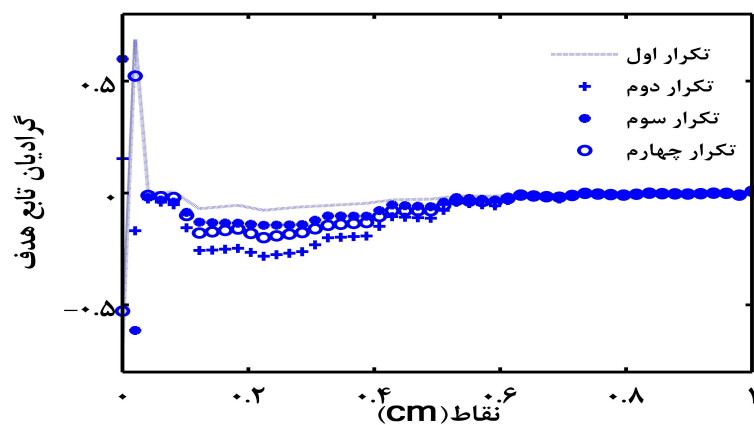
(آ) ۱۰ سنسور حرارتی



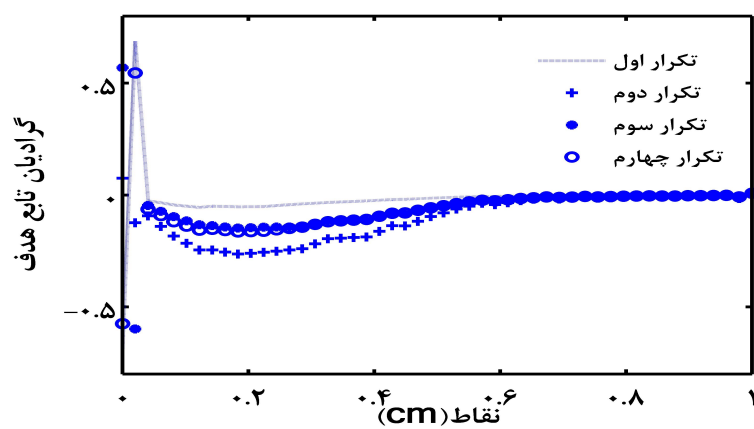
(ب) ۲۰ سنسور حرارتی

شکل ۳-۶: نمودار کاهش مجموع مربعات خطا در ۵۰ تکرار اول از تخمین تابعی ضریب هدایت حرارتی درجه دو

شکل ۳-۶ (آ) و ۳-۶ (ب) خطای می‌نیمم مربعات یا نرخ کاهش تابع هدف را در ۵۰ تکرار اول از تخمین ضریب هدایت حرارتی مجهول نشان می‌دهند. با توجه به شکل همان‌طور که انتظار می‌رود تابع می‌نیمم مربعات با جهش زیادی در ثانیه‌های اولیه (۱۰ ثانیه اول) روبروست. در شکل ۴-۶ گرادیان تابع هدف محاسبه شده در ۴ تکرار اول از تخمین ضریب هدایت حرارتی مجهول نشان داده شده است. خطای جذر میانگین مربعات با استفاده از رابطه (۱-۶) در حالتی که از داده‌های حاصل از عکس‌برداری حرارتی از ۱۰ سنسور صورت گرفته برابر 0.0017 محاسبه گردیده و در حالتی که عکس‌برداری حرارتی از ۲۰ سنسور صورت گرفته برابر 0.0014 محاسبه شده است.



(آ) ۱۰ سنسور حرارتی



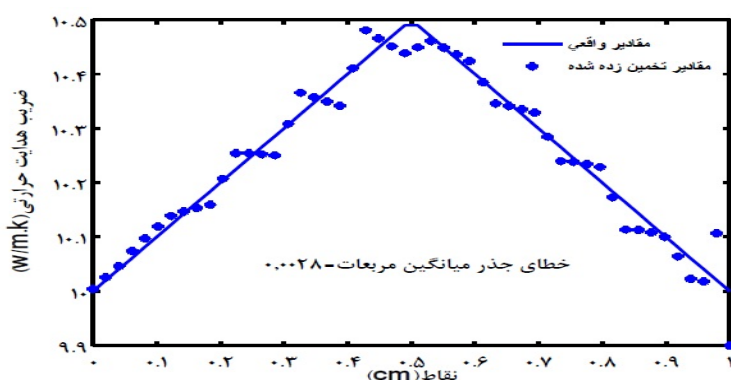
(ب) ۲۰ سنسور حرارتی

شکل ۴-۶: نمودار گرادیان تابع هدف در ۴ تکرار اول از تخمین تابعی ضریب هدایت حرارتی درجه دو

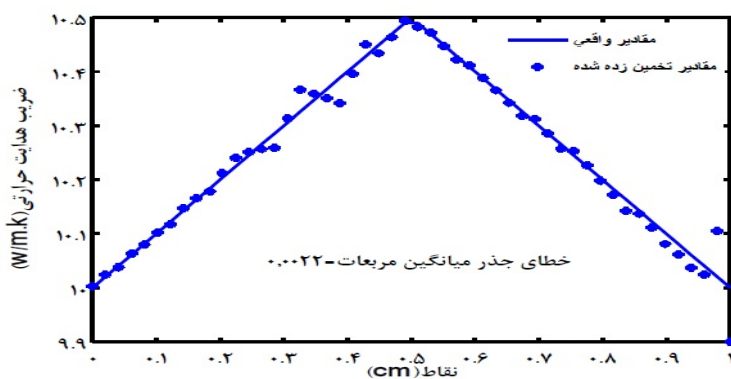
مثال ۲: در این حالت یک تابع مثلثی با معادله

$$k(x) = |x - 0.5| + 10.5$$

برای ضریب هدایت حرارتی در نظر گرفته شده است. تخمین نقاط تکین به کمک روش معکوس کاری دشوار و حائز اهمیت می باشد. نتایج به دست آمده از این حدس نیز در شکل های ۵-۶ - ۸-۶ ارائه شده اند. که کارائی روش به کار گرفته شده در برآورد این تقریب از ضریب هدایت حرارتی را نشان می دهد.

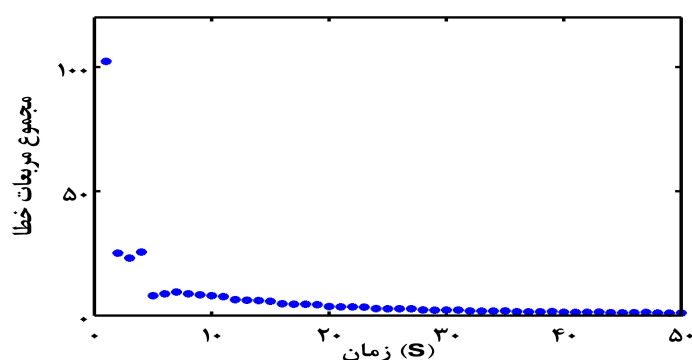


شکل ۵-۶: تخمین ضریب هدایت حرارتی مثلثی با استفاده از داده های حاصل از عکس برداری حرارتی در محل ۱۰ سنسور حرارتی

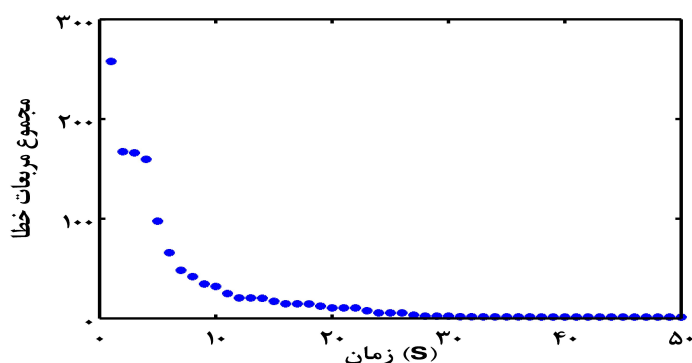


شکل ۶-۶: تخمین ضریب هدایت حرارتی مثلثی با استفاده از داده های حاصل از عکس برداری حرارتی در محل ۲۰ سنسور حرارتی

شکل های ۵-۶ و ۶-۶ نیز همانند مثال اول، ضریب هدایت حرارتی تخمین زده شده با استفاده از روش معکوس به کار گرفته شده را نشان می دهند. توزیع دقیق تر داده ها در اطراف شکل با



(آ) ۱۰ سنسور حرارتی

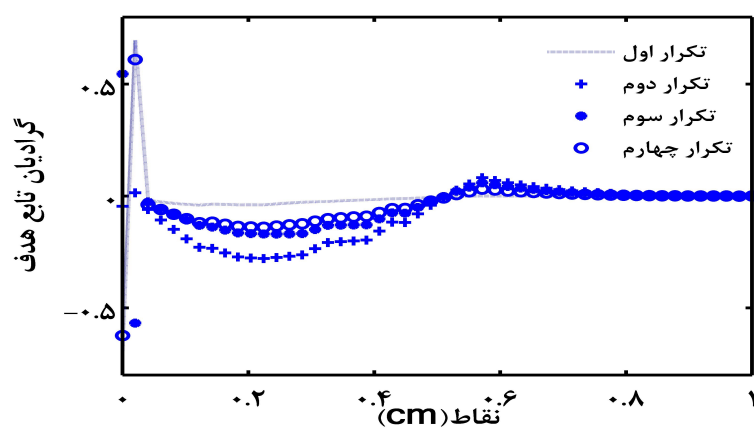


(ب) ۲۰ سنسور حرارتی

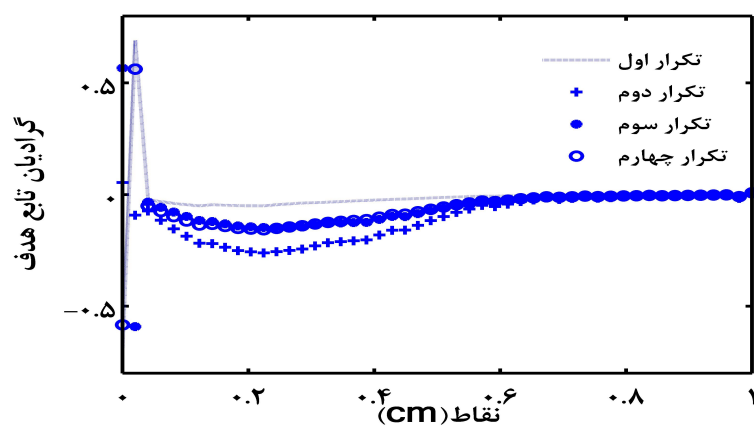
شکل ۶-۷: کاهش مجموع مربعات خطا در ۵۰ تکرار اول از تخمین تابعی ضریب هدایت حرارتی مثلی

افزایش تعداد سنسور حرارتی نمایان است. شکل ۶-۷ (آ) و ۶-۷ (ب) نشان‌دهنده کاهش شدید خطای می‌نیمم مربعات یا نرخ کاهش تابع هدف در ۵۰ تکرار اول از تخمین ضریب هدایت حرارتی مجهول می‌باشد که با نتایج مورد انتظار سازگار است. شکل ۶-۸ (آ) و ۶-۸ (ب) نیز نمودار گرادیان تابع هدف را در ۴ تکرار اول از تخمین ضریب هدایت حرارتی مجهول نمایش می‌دهد.

در این حالت خطای جذر میانگین مربعات برای حالتی که عکس‌برداری حرارتی از ۱۰ سنسور صورت گرفته ۰.۰۰۲۸ محاسبه گردیده و در حالتی که عکس‌برداری حرارتی از ۲۰ سنسور صورت گرفته برابر ۰.۰۰۲۲ محاسبه شده است. مشاهده می‌شود هرچه از داده‌های حاصل از عکس‌برداری حرارتی در تعداد سنسور بیشتری استفاده شود، این خطا کاهش می‌یابد.



(آ) ۱۰ سنسور حرارتی



(ب) ۲۰ سنسور حرارتی

شکل ۶-۸: نمودار گرادیان تابع هدف در ۴ تکرار اول از تخمین تابعی ضریب هدایت حرارتی مثلی

فصل ۷

تخمین ضریب هدایت حرارت دو بعدی متغیر با
مکان با استفاده از روش گرادیان مزدوج

۷-۱ مقدمه

مسئله هدایت حرارت دو بعدی یکی از مسائل مهم در زندگی روزانه ما به خصوص در ساختمان‌ها، دیوارها، پل‌ها، پنجره‌ها و غیره به‌شمار می‌آید. با کمک راه‌حل‌های به‌دست آمده برای مسائل هدایت حرارت دو بعدی و با کمک کدهای کامپیوتری ساده که از حل مسائل دو بعدی هدایت حرارتی به‌دست آمده‌اند، تجزیه و تحلیل انتقال گرما یا شار گرما در ساختمان‌ها، دیوارها، پنجره‌ها و غیره آسان‌تر می‌شود. از این‌رو ما در این بخش مسئله هدایت حرارتی یک بعدی توصیف شده در بخش ۵ را به دو بعد تعمیم می‌دهیم و معادلات حاکم و نحوه حل آن‌ها را معرفی می‌کنیم.

در این بخش، معادلات حاکم بر مسئله هدایت حرارت دو بعدی، حل عددی و حل تحلیلی معادلات حاکم شرح داده شده است. یک صفحه فلزی با ابعاد $L \times L$ m را در نظر بگیرید. همانند حالت یک بعدی ابتدا مسئله هدایت حرارتی مستقیم دو بعدی را حل و توزیع دما را در داخل صفحه فلزی محاسبه می‌کنیم. هدف روش معکوس تخمین ضریب هدایت حرارتی دو بعدی متغیر با مکان می‌باشد. در حالت دو بعدی نیز روش گرادیان مزدوج برای برآورد پارامتر مجهول به‌کار گرفته شده است. از داده‌های دمایی حاصل از عکس‌برداری حرارتی در ۲۰ مکان مختلف از سطح صفحه فلزی برای حل مسئله معکوس استفاده شده است. سپس با در نظر گرفتن این داده‌ها و با کمک روش گرادیان مزدوج به تخمین ضریب هدایت حرارتی متغیر با مکان که به صورت یک رویه درجه دو در نظر گرفته شده پرداختیم.

۷-۲ حل عددی

رسانش گرمای گذرای خطی در یک صفحه فلزی مربعی به ابعاد $L \times L$ m را در نظر بگیرید. صفحه فلزی ابتدا در دمای صفر قرار دارد. بعد از زمان $t > 0$ شار حرارتی ثابتی روی مرز $x = 0$ اعمال می‌شود. در حالی که مرزهای $x = L$ و $y = 0$ و $y = L$ عایق نگهداری می‌شود. فرمول ریاضی مسئله مستقیم هدایت حرارتی در حالت دو بعدی به صورت زیر داده می‌شود:

$$\rho c \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, y) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x, y) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right)$$

$$0 < x, y < L, \quad t > 0$$

$$\begin{aligned} -K \frac{\partial T(0, y, t)}{\partial x} &= q'' & x = 0, \quad t > 0 \\ \frac{\partial T(L, y, t)}{\partial x} &= 0 & x = L, \quad t > 0 \\ \frac{\partial T(x, 0, t)}{\partial y} &= 0 & y = 0, \quad t > 0 \\ \frac{\partial T(x, L, t)}{\partial y} &= 0 & y = L, \quad t > 0 \\ T(x, y, 0) &= 0 & 0 \leq x, y \leq L, \quad t = 0 \end{aligned} \quad (1-7)$$

مسئله مستقیم تعریف شده توسط معادلات (۱-۷) می‌تواند به صورت عددی حل شود و توزیع دما را به عنوان تابعی از زمان نسبت به موقعیت هر نقطه در جسم محاسبه کرد.

۱-۲-۷ حل عددی معادلات هدایت حرارتی دو بعدی

برای حل عددی مسئله هدایت حرارت دو بعدی اگرچه روش‌های سنتی مانند روش ضمنی ساده یا روش کرانک-نیکلسون برای حل قابل استفاده هستند اما نقطه ضعف عمده این روش‌ها این است که حل در هر مرحله از روش کندتر و مقیاس حافظه بزرگ برای ذخیره عناصر ماتریس مورد نیاز است. بنابراین با استفاده از روش ADI که در فصل اول به عنوان روشی کارآمد در حل معادلات دو بعدی سهموی توضیح داده شد برای حل عددی استفاده

می‌کنیم. بار دیگر معادله (۱-۷) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, y) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x, y) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2-7)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial k}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (3-7)$$

معادلات تفاضل محدود مدل (۱-۷) با فرمول‌بندی ADI برای مقطع زمانی $n + \frac{1}{4}$ به صورت زیر است. با استفاده از تقریب تفاضل پیشروی مرتبه یک برای تغییرات زمانی و تقریب تفاضل مرکزی مرتبه دوم و تقریب تفاضل پیشروی مرتبه دوم برای جملات انتشار، داریم:

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^n}{\Delta t}}{2} = k_{i,j} \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{k_{i+1,j} - k_{i-1,j}}{2\Delta x} \cdot \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \\ + k_{i,j} \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{k_{i,j+1} - k_{i,j-1}}{2\Delta y} \cdot \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (۴-۷)$$

بافرض اینکه $\Delta x = \Delta y$ و $S_{i,j} = \frac{K_{i,j}}{2\rho c} \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ را به شکل استاندارد زیر

می نویسیم:

$$\begin{aligned} [-S_{i,j} + \frac{1}{4}(S_{i+1,j} - S_{i-1,j})]T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2S_{i,j})T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + [-S_{i,j} + \frac{1}{4}(S_{i+1,j} - S_{i-1,j})]T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ = [S_{i,j} + \frac{1}{4}(S_{i,j+1} - S_{i,j-1})]T_{i,j+1}^n + (1 - 2S_{i,j})T_{i,j}^n + [S_{i,j} - \frac{1}{4}(S_{i,j+1} - S_{i,j-1})]T_{i,j-1}^n \end{aligned} \quad (۵-۷)$$

برای $i, j = 2, \dots, m-1$ به همین ترتیب با جایگذاری فرمول های تفاضل محدود برای شرایط مرزی معادله (۱-۷) داریم:

$$-K \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = q'' \Rightarrow T_{1,j}^n = T_{2,j}^n + \frac{q'' \Delta x}{K_{1,j}} \quad j = 1, \dots, m \quad (۶-۷)$$

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow T_{M,j}^n = T_{M-1,j}^n \quad j = 1, \dots, m \quad (۷-۷)$$

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow T_{i,1}^n = T_{i,2}^n \quad i = 1, \dots, m \quad (۸-۷)$$

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=L} = 0 \Rightarrow T_{i,m}^n = T_{i,m-1}^n \quad i = 1, \dots, m \quad (۹-۷)$$

که با جایگذاری در معادله (۵-۷) برای گره $j = 2, \dots, m-1, i = 2$ داریم:

$$\begin{aligned} [-S_{2,j} + \frac{1}{4}(S_{3,j} - S_{1,j})]T_{3,j}^{n+\frac{1}{2}} + [1 + S_{2,j} + \frac{1}{4}(S_{3,j} - S_{1,j})]T_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ = [S_{2,j} + \frac{1}{4}(S_{2,j+1} - S_{2,j-1})]T_{2,j+1}^n + (1 - 2S_{2,j})T_{2,j}^n + [S_{2,j} - \frac{1}{4}(S_{2,j+1} - S_{2,j-1})]T_{2,j-1}^n \end{aligned} \quad (۱۰-۷)$$

همچنین برای گره $j = 2, \dots, m, i = m-1$ داریم:

$$\begin{aligned} [1 + S_{m-1,j} - \frac{1}{4}(S_{m,j} - S_{m-2,j})]T_{m-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + [-S_{m-1,j} + \frac{1}{4}(S_{m,j} - S_{m-2,j})]T_{m-2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ = [S_{m-1,j} + \frac{1}{4}(S_{m-1,j+1} - S_{m-1,j-1})]T_{m-1,j+1}^n + (1 - 2S_{m-1,j})T_{m-1,j}^n \\ + [S_{m-1,j} - \frac{1}{4}(S_{m-1,j+1} - S_{m-1,j-1})]T_{m-1,j-1}^n \end{aligned} \quad (۱۱-۷)$$

به طور مشابه برای مقطع زمانی $n + 1$ با استفاده از روش ADI داریم:

$$\begin{aligned} \rho c \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} = & k_{i,j} \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{k_{i+1,j} - k_{i-1,j}}{2\Delta x} \cdot \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \\ & + k_{i,j} \frac{T_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta y)^2} + \frac{k_{i,j+1} - k_{i,j-1}}{2\Delta y} \cdot \frac{T_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (12-7)$$

با ساده سازی، معادله (12-7) را به فرم استاندارد زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} [-S_{i,j} - \frac{1}{4}(S_{i,j+1} - S_{i,j-1})]T_{i,j+1}^{n+1} + (1 + 2S_{i,j})T_{i,j}^{n+1} + [-S_{i,j} + \frac{1}{4}(S_{i,j+1} - S_{i,j-1})]T_{i,j-1}^{n+1} \\ = [S_{i,j} + \frac{1}{4}(S_{i+1,j} - S_{i-1,j})]T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - 2S_{i,j})T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + [S_{i,j} - \frac{1}{4}(S_{i+1,j} - S_{i-1,j})]T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (13-7)$$

برای $i, j = 2, \dots, m-1$ با جایگذاری شرایط مرزی در معادله (13-7) برای گره $i = 2, \dots, m-1, j = 2$ داریم:

$$\begin{aligned} [-S_{i,2} - \frac{1}{4}(S_{i,2} - S_{i,1})]T_{i,2}^{n+1} + [1 + S_{i,2} + \frac{1}{4}(S_{i,2} - S_{i,1})]T_{i,2}^{n+\frac{1}{2}} \\ = \frac{-q''\Delta x}{K(i,1)}[-S_{i,2} + \frac{1}{4}(S_{i,2} - S_{i,1})] + [S_{i,2} + \frac{1}{4}(S_{i+1,2} - S_{i-1,2})]T_{i+1,2}^{n+\frac{1}{2}} \\ + (1 - 2S_{i,2})T_{i,2}^{n+\frac{1}{2}} + [S_{i,2} - \frac{1}{4}(S_{i+1,2} - S_{i-1,2})]T_{i-1,2}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (14-7)$$

همچنین برای گره $i = 2, \dots, m, j = m-1$ داریم:

$$\begin{aligned} [1 + S_{i,m-1} - \frac{1}{4}(S_{i,m} - S_{i,m-2})]T_{i,m-1}^{n+1} + [-s(i, m-1) + \frac{1}{4}(S_{i,m} - S_{i,m-2})]T_{i,m-2}^{n+1} \\ = [S_{i,m-1} + \frac{1}{4}(S_{i+1,m-1} - S_{i-1,m-1})]T_{i+1,m-1}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - 2S_{i,m-1})T_{i,m-1}^{n+\frac{1}{2}} \\ + [S_{i,m-1} - \frac{1}{4}(S_{i+1,m-1} - S_{i-1,m-1})]T_{i-1,m-1}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (15-7)$$

روش حل با حل دستگاه (5-7) آغاز می شود. فرمول بندی معادله (5-7) در جهت x ضمنی و در جهت y صریح است. جواب معادله سه قطری (5-7) داده های مورد نیاز برای سمت راست معادله (13-7) را فراهم می کند تا بتوان معادله سه قطری (2-33) را حل کرد. این معادله تفاضل محدود در جهت y ضمنی و در جهت x صریح است. که از حل دستگاه

معادلات سه قطری در هرگام زمانی می‌توان توزیع دما را به عنوان تابعی از زمان نسبت به موقعیت هر نقطه در جسم محاسبه کرد.

۳-۷ حل تحلیلی معادلات هدایت حرارت دو بعدی

جهت اطمینان از صحت و دقت روش عددی به کار گرفته شده در بالا، در این قسمت به حل تحلیلی مسئله داده شده با معادلات (۱-۷) می‌پردازیم [۱۴۲]. برای حل مسئله آزمون دوبعدی نیز از روش جداسازی متغیرها با فرض این که ضریب هدایت حرارتی ثابت باشد، استفاده شده است. مسئله داده شده با معادلات (۱-۷) را در نظر بگیرید. مجدداً سعی می‌کنیم معادله با مشتقات جزئی (۱-۷) را به چند معادله دیفرانسیل معمولی تفکیک کنیم به طوریکه هر معادله فقط شامل یکی از متغیرهای مستقل گردد. بنابراین به جستجوی جواب‌هایی از مسئله (۱-۷) به صورت زیر می‌پردازیم:

$$T(x, y, t) = X(x, t)Y(y, t) \quad (۱۶-۷)$$

با توجه به فرض فوق می‌توانیم مسئله ناپایدار دوبعدی داده شده با معادلات (۱-۷) را به صورت دو مسئله یک بعدی یکی به صورت پایدار و دیگری ناپایدار بیان کنیم. با جایگذاری معادله (۱۶-۷) در معادله (۱-۷) عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{X} \left(\frac{\partial X}{\partial t} - a \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial Y}{\partial t} - a \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) \quad (۱۷-۷)$$

که در آن $a = \frac{K}{\rho c}$ می‌باشد. از آنجایی که متغیرهای y, x به هم وابسته نیستند لذا دو طرف معادله (۱۷-۷) نیز به هم وابسته نبوده و می‌توانیم آن را برابر $\pm \lambda^2(t)$ قرار دهیم که تابعی از زمان است. به دلیل تقارن هندسی و همچنین حرارتی مسئله، مسئله مقدار مشخصه در جهت‌های y, x باید یکسان باشد و این امر فقط با فرض $\lambda^2(t) = 0$ می‌تواند رخ دهد. با به کارگیری این مقدار برای $\lambda^2(t)$ و جایگذاری معادله (۱۶-۷) در شرایط اولیه و مرزی معادله (۱-۷)، داریم:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = a \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial Y}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}
 -K \frac{\partial X(\cdot, t)}{\partial x} &= \frac{q''}{Y(y, t)} & (b) \quad \frac{\partial Y(\cdot, t)}{\partial y} &= \cdot & (a) \quad (18-7) \\
 \frac{\partial X(L, t)}{\partial x} &= \cdot & \frac{\partial Y(L, t)}{\partial y} &= \cdot \\
 X(x, \cdot) &= \cdot & Y(y, \cdot) &= T.
 \end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می کنید، مسئله (18-7.a) یک مسئله هدایت حرارتی پایدار می باشد که با استفاده از روش جداسازی متغیرها قابل حل است. فرض می کنیم جواب این مسئله به فرم $Y(y, t) = \psi(y).u(t)$ باشد. با جایگذاری این معادله در معادلات (18-7.a) جواب عمومی این مسئله به شکل زیر نتیجه می شود:

$$Y(y, t) = a. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(an\pi/L)^2 t} \cos(n\pi/L)x \quad (19-7)$$

با اعمال شرط اولیه معادله (18-7.a) نتیجه می گیریم:

$$Y(y, \cdot) = a. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi/L)x = T. \quad (20-7)$$

سری فوق سری فوریه کسینوسی است بنابراین ضرائب به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$a. = \frac{1}{L} \int_0^L T. dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L (T. \cos(n\pi/L)x) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

از حل انتگرال های فوق $a. = T..L$ و $a_n = 0$ به دست می آیند. در نتیجه جواب عمومی مسئله (18-7.a) به صورت زیر به دست می آید:

$$Y(y, t) = T..L \quad (21-7)$$

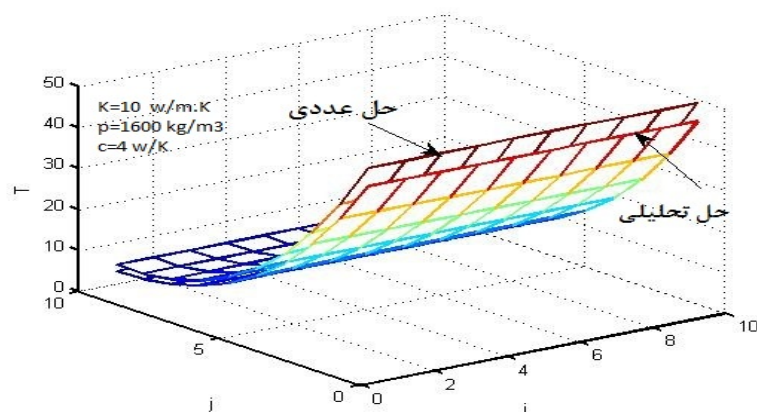
از طرفی مسئله (18-7.b) یک مسئله هدایت حرارتی ناپایدار می باشد که فرمول بندی آن مشابه مسئله هدایت حرارتی یک بعدی می باشد که حل تحلیلی آن در فصل 5 آورده شده است. بنابراین جواب عمومی مسئله (18-7.b) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 X(x, t) &= \\
 \frac{q'' L}{3K.T..L} &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2q''}{K.T..L \lambda_n^2} e^{-a\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x + \left(\frac{q''}{2K.T..L} x^2 - \frac{q''}{K.T..L} x + \frac{aq''}{K.T..L} t \right)
 \end{aligned} \quad (22-7)$$

حال از معادله (۷-۱۶) جواب عمومی مسئله هدایت حرارت دو بعدی (۷-۱) به فرم زیر است:

$$T(x, y, t) = \frac{q'' L}{3K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2q''}{KL\lambda_n^2} e^{-a\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x + \left(\frac{q''}{2KL} x^2 - \frac{q''}{K} x + \frac{aq''}{KL} t \right) \quad (۷-۲۳)$$

که $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ است. شکل ۷-۱ نتایج حاصل از حل عددی و حل تحلیلی مسئله داده شده با معادلات (۵-۱) را با در نظر گرفتن شرایط ترموفیزیکی یکسانی نمایش می‌دهد.



شکل ۷-۱: مقایسه توزیع دمای صفحه فلزی حاصل از حل عددی و حل تحلیلی

فصل ۸

نتایج عددی حل معکوس مسئله هدایت حرارت
دو بعدی

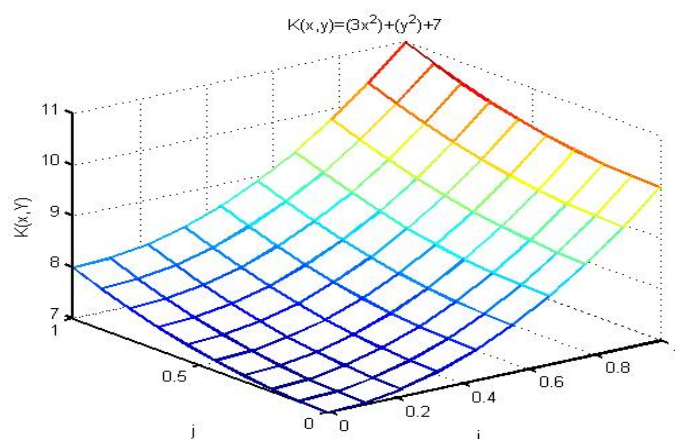
در این بخش، با توجه به معادلات حاکم ارائه شده و نحوه حل آن‌ها، نتایج حاصل از حل مسئله معکوس ارائه خواهد شد. برای حالت دو بعدی نیز روش گرادیان مزدوج به عنوان یک روش معکوس حرارتی برای بهینه‌سازی تابع هدف به کار گرفته شده است. برای برآورد کارائی روش معکوس در تخمین ضریب هدایت حرارتی دو بعدی، آزمایش عددی زیر ارائه شده است. در این آزمایش صفحه ای با ابعاد $1 \times 1 \text{ m}$ با دمای اولیه $T_0 = 0^\circ \text{K}$ و شار حرارتی $q = 1000 \text{ kwm}^{-2}$ اعمال شده در مرز $x = 0$ ، در نظر گرفته شده است. داده‌های شبیه‌سازی شده دما با حل مسئله مستقیم هدایت حرارتی تعریف شده با معادلات (۷-۱)، با استفاده از روش ضمنی تفاضل محدود با گام زمانی $\Delta t = 1 \text{ S}$ و گام مکانی $\Delta x = \Delta y = 0.1 \text{ cm}$ به دست آمده‌اند. همچنین داده‌های دما با استفاده از عکس‌برداری حرارتی در هر 1 S ثبت می‌شود. از داده‌های دمایی حاصل از عکس‌برداری حرارتی در ۲۰ مکان از سطح صفحه فلزی که به طور یکنواخت از سطح انتخاب شده‌اند، برای حل مسئله معکوس استفاده شده است. خطای می‌نیمم مربعات 10^{-3} در نظر گرفته شده است. در ادامه نتایج حاصل از تخمین ضریب هدایت حرارتی دو بعدی که به صورت یک رویه درجه دو در نظر گرفته شده است، به همراه نمودارهای مربوطه ارائه شده است. همچنین جهت ارزیابی کمی دقت نتایج به دست آمده، مقدار خطای جذر میانگین مربعات یا ریشه دوم واریانس، که قبلاً با رابطه (۶-۱) ارائه شده است، در نظر گرفته شده است.

مثال ۱: در این مثال ضریب هدایت حرارتی به صورت یک رویه درجه دو با معادله زیر برای تخمین در نظر گرفته شده است.

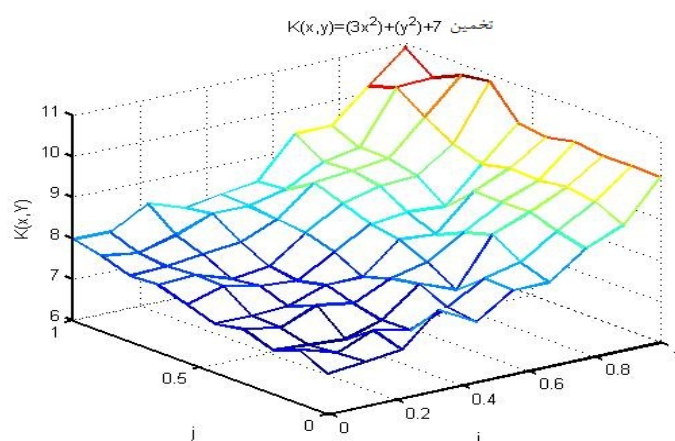
$$K(x, y) = 3x^2 + y^2 + 7 \quad (1-8)$$

شکل ۸-۱ رویه فوق را در ناحیه مستطیلی $0 < x < 1, 0 < y < 1$ نمایش می‌دهد. حال مسئله معکوس را با استفاده از داده‌های حاصل از عکس‌برداری حرارتی در ۲۰ مکان از سطح صفحه فلزی، با استفاده از روش گرادیان مزدوج حل می‌کنیم. نتایج حاصل از حل مسئله معکوس جهت تخمین ضریب هدایت حرارتی (۸-۱) در شکل ۸-۲ نشان داده شده است. خطای جذر میانگین مربعات برای این تقریب از ضریب هدایت حرارتی معادل 0.0258 به دست آمده

است.

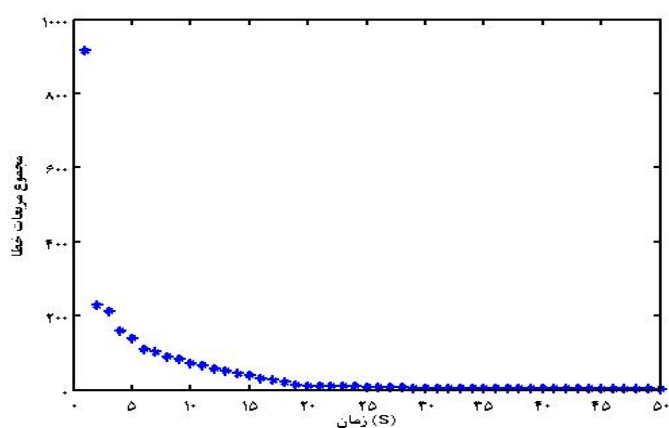


شکل ۸-۱: نمایش رویه $K(x, y) = 3x^2 + y^2 + 7$

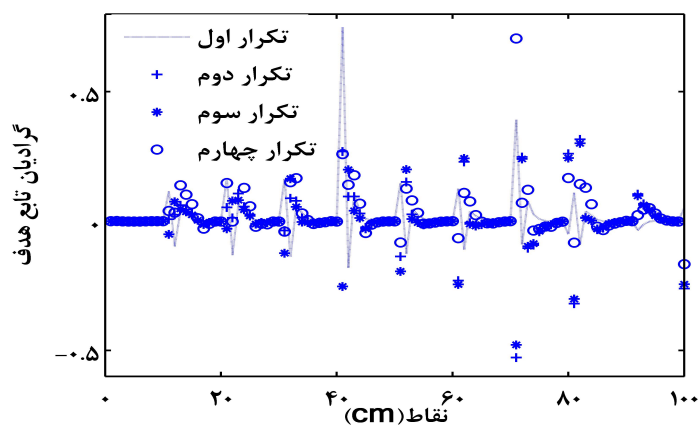


شکل ۸-۲: تخمین رویه $K(x, y) = 3x^2 + y^2 + 7$ با استفاده از روش گرادیان مزدوج

شکل ۸-۳ نرخ کاهش تابع هدف را در ۵۰ تکرار اول از تخمین ضریب هدایت حرارتی مجهول نشان می‌دهد. همچنین شکل ۸-۴ نمودار گرادیان تابع هدف را در ۴ تکرار اول از تخمین ضریب هدایت حرارتی دو بعدی در تمام نقاط نشان می‌دهد.

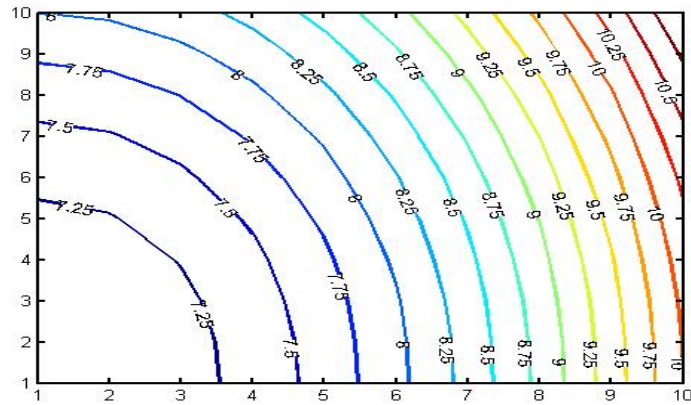


شکل ۸-۳: نمودار کاهش مجموع مربعات خطا در ۵۰ تکرار اول از تخمین رویه درجه دو

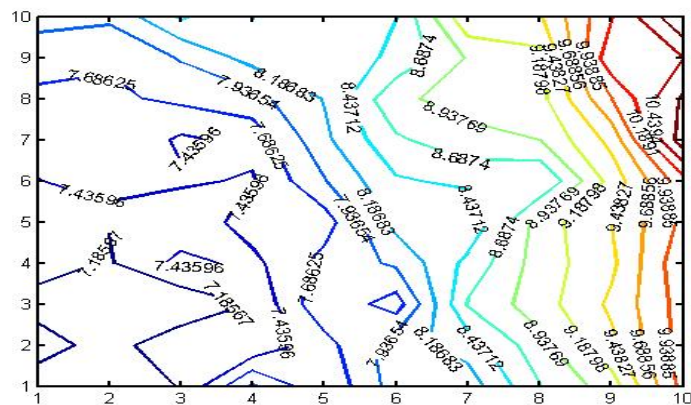


شکل ۸-۴: نمودار گرادیان تابع هدف در ۴ تکرار اول از تخمین رویه درجه دو

نمودار کانتور ضریب هدایت حرارتی و تخمین آن با استفاده از روش گرادیان مزدوج، به ترتیب در شکل‌های ۸-۵ و ۸-۶ نشان داده شده است. در این نمودارها امکان مقایسه مقادیر ضریب هدایت حرارتی تخمین زده شده با مقادیر واقعی آن وجود دارد.



شکل ۸-۵: نمودار کانتور رویه درجه دو $K(x, y) = 3x^2 + y^2 + 7$ از نوع خطی



شکل ۸-۶: نمودار کانتور تخمین رویه درجه دو $K(x, y) = 3x^2 + y^2 + 7$ از نوع خطی

فصل ۹

نتیجه گیری و پیشنهاداتی برای کارهای آتی

در این رساله، روش گرادیان مزدوج به عنوان یک روش معکوس به منظور برآورد ضریب هدایت حرارتی متغیر با مکان در یک تیغه فلزی به کار گرفته شد. که یک روش تکراری، بر اساس می‌نیم کردن تابع مجموع مربعات می باشد. معادلات حاکم بر مسئله، معادله انتقال حرارت هدایتی ناپایا (یک بعدی-دو بعدی) می باشد که به روش تفاضل محدود گسسته سازی شد. به دلیل عدم دسترسی به داده های آزمایشگاهی از داده های شبیه سازی شده حاصل از حل مستقیم مسئله هدایت حرارتی، به عنوان داده های ورودی برای آنالیز معکوس استفاده شد.

در این پایان نامه، دو ضریب هدایت حرارتی مجهول یک بعدی به فرم های درجه دو و مثلثی و ضریب هدایت حرارتی مجهول دو بعدی به فرم یک رویه درجه دو، که جزء مهمترین توابع در برآورد آنالیز معکوس محسوب می شوند، با استفاده از روش گرادیان مزدوج تخمین زده شدند. عکس برداری حرارتی در تمام نقاط از سطح تیغه فلزی انجام شد و صحت خروجی کامپیوتر با مقایسه مقادیر واقعی و مقادیر شبیه سازی شده با انتخاب تعداد مختلف از داده های حاصل از عکس برداری حرارتی، که به صورت یکنواخت از سطح تیغه فلزی انتخاب شده اند، نشان داده شد. به طور کلی نتایج حاصل از روش معکوس به کار گرفته شده با مقادیر دقیق توابع هم پوشانی خوبی داشتند.

میزان خطای جذر میانگین مربعات در تخمین ضرائب هدایت حرارتی مجهول، محاسبه شد. در حالت یک بعدی نتایج نشان دادند خطای تخمین برای ضریب هدایت حرارتی مثلثی نسبت به فرم درجه دو آن، بیشتر است. دلیل این موضوع وجود نقطه تکین در فرم مثلثی ضریب هدایت حرارتی است. که باعث ایجاد خطای بیشتری می شود.

نتایج نشان می دهند در هر دو تخمین برای ضریب هدایت حرارتی، با استفاده از تعداد نقاط بیشتری از داده های حاصل از عکس برداری حرارتی از سطح تیغه فلزی، جواب های به دست آمده از آنالیز معکوس، هم از نظر توزیع نقاط در اطراف حدس واقعی برای ضریب هدایت حرارتی متغیر با مکان و هم از لحاظ آماری دارای دقت بیشتری هستند. با این حال نتایج به دست آمده نشان می دهد برای رسیدن به خطای ۰.۰۰، در نظر گرفتن داده های حاصل

از عکس‌برداری حرارتی در ۱۰ مکان از سطح تیغه فلزی که به‌طور یکنواخت از سطح تیغه انتخاب شوند، کافیست.

تخمین ضریب هدایت حرارتی به‌عنوان یک تابع محلی و در یک صفحه غیر همگن دو بعدی، کار جدیدی در مباحث انتقال حرارت معکوس است. از نتایج حاصل شده در این پایان‌نامه می‌توان در زمینه‌های کاربردی زیادی از جمله

* تخمین ضرایب هدایت حرارتی موثر مواد متخلخل

* تشخیص عیب در مواد ریخته‌گری

* استفاده از کاربرد روش معکوس استفاده شده در *thermal therapy* بافت.

* تخمین مقاومت تماسی دو سطح

استفاده کرد.

مراجع

- [1] Ozisik, M. N., Orlande, H. R. B. (2000), *"Inverse Heat Transfer Fundamentals And Applications"*, Taylor and Francis.
- [2] Beck, J. V., Blackwell, B. and St. Clair, C. R. (1985), *"Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems"*, Wiley Interscience, New York.
- [3] Hon, Y.C. and Wei, T. (2004), *"A Fundamental Solution Method for Inverse Heat Conduction Problem"*, Eng. Analysis with Boundary Elements, Vol. 28, No. 5, pp. 489-495.
- [4] Haung, C.H. and Haung, C.Y. (2007), *"An Inverse Problem in Estimating Simultaneously the Effective Thermal Conductivity and Volumetric Heat Capacity of Biological Tissue"*, Appl. Math. Modeling, Vol. 31, No. 9, pp. 1785-1797.
- [5] Ivaz, K. and Nikazad, T. (2005), *"An Inverse Solidification of Pure Substance Problem in Twodimensions"*, Appl. Math. Letters, Vol. 18, No. 8, pp. 891-896.
- [6] Hadamard, J. (1923), *"Lectures on Cauchy's Problem in Linear Differential Equations"*, Yale University Press, New Haven, CT.
- [7] Stolz, G. (1960), *"Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes"*, ASME J. Heat Transfer, vol. 82, 20-26.
- [8] Janicki, M., Napieralski, A. (2004), *"Inverse Heat Conduction Problems In Electronics With Special Consideration Of Analytical Analysis Methods"*, Semiconductor Conference, vol. 2, pp. 455-458.
- [9] Chahwane, L., Tittlein, P. (2009), Wurtz, E., Zuber, B., *"using an Inverse Method To Evaluate Envelope Thermal Properties"*, Eleventh International IBPSA Conference, pp. 1476-1481.
- [10] Kuye, A.O., Oko, C.O.C., Nnamchi, S.N. (2010), *"Determination Of The Thermal Conductivity And Specific Heat Capacity Of Neem Seeds By Inverse Problem Method"*, Journal of Engineering Science and Technology Review, Vol. 3, pp. 1-6.
- [11] Linan, Z., Guangjun, W., Hong, C. (2011), *"Estimating Steady Multi-variables Inverse Heat Conduction Problem by Using Conjugate Gradient Method"*, Proceedings of the CSEE.
- [12] Baradaran Rahimi, A. and Mohammadiun, M. (2012), *"Estimation Of The Strength Of The Time-Dependent Heat Source Using Temperature Distribution At A Point In A Three Layer System"*, International Journal Of Engineering, vol 25-4, pp. 389-398.
- [13] Holman, J. P. (1997), *"Heat Transfer"*, 8th Edn, McGraw-Hill, New York.

- [14] Incropera, F. P., DEWITT, D. P., Bergman, T. L., Lavine A. S. (2007), *"Fundamentals Of Heat And Mass Transfer"*, 6th Edn, John Wiley And Sons, Inc. U.K New Delhi.
- [15] Glaser, P. E., Black, I. A., and Doherty, P. (1965), *"Multilayer Insulation"*, Mech. Eng., p. 23, August.
- [16] Barron, R. (1967), *"Cryogenic systems"*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- [17] Dewitt, W. D., Gibbon, N. C, and Reid, R. L. (1968), *"Multifoil Type Thermal Insulation"*, IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., Vol. 4, no. 5, suppl. pp. 263-271.
- [18] Anderson, J. D. (1982), *"Modern Compressible Flow With Historical Perspective"*, McGraw-Hill Book Company.
- [19] Hellwig, G. (1977), *"Partial Differential Equations: An Introduction"*, B. G. Teubner, Stuttgart.
- [20] Hoffmann, A. (1989), *"Computational Fluid Dynamics"*, Engineering Education System, Vol 2.
- [21] Afsheen, A. (2009), *"Alternating Direction Implicit Method For Two-Dimensional Heat Transfer Problem"*, National College of Business Administration Economics Lahore, Master Of Philosophy In Mathematics.
- [22] Alifanov, O . M. (1977), *"Determination of Heat Loads from a Solution of the Non-linear Inverse Problem"*, High Temperature, Vol. 15(3), pp. 498-504.
- [23] Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y. (1977), *"Solution of Ill-Posed Problems"*, Winston Sons, Washington, DC.
- [24] Beck, J. V. and Arnold, K. J. (1977), *"Parameter Estimation in Engineering and Science"*, Wiley Interscience, New York.
- [25] Alifanov, O. M. (1994), *"Inverse Heat Transfer Problems"*, Springer-Verlag, New York.
- [26] Alifanov, O. M, and Tryanin, A. P. (1985), *"Determination of the Coefficient of Internal Heat Exchange and the Effective Thermal Conductivity of a Porous Solid on the Basis of a Nonstationary Experiment"*, J. Eng. Phys., Vol. 48(3), pp. 356-365.
- [27] Alifanov, O . M., Artyukhin, E. and Rumyantsev, A. (1995), *"Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems"*, Begell House, New York.
- [28] Artyukhin, E. A. (1981), *"Reconstruction of the Thermal Conductivity Coefficient from the Solution of the Nonlinear Inverse Problem"*, J. Eng. Phys., Vol. 41(4), pp. 1054-1058.
- [29] Artyukhin, E. A. (1993), *"Iterative Algorithms for Estimating Temperature-Dependent Thermophysical Characteristics"*, International Conference on Inverse Problems in Engineering - Proceedings, Palm Coast, F1, pp. 101-108.
- [30] Giedt, W. H. (1955), *"The Determination of Transient Temperatures and Heat Transfer at a Gas-Metal Interface Applied to a 40-mm Gun Barrel"*, Jet Propulsion, Vol. 25, pp. 158-162.

- [31] Masket, A. V. and Vastano, A. C. (1962), "*Interior Value Problems of Mathematics Physics, Part 11. Heat Conduction*", American J. of Physics, Vol. 30, pp. 796-803.
- [32] Sabherwal, K. C. (1965), "*An Inverse Problem of Transient Heat Conduction*", Indian J. of Pure and Applied Physics, Vol. 3, pp. 397-398.
- [33] Beck, J. V. (1968), "*Surface Heat Flux Determination Using an Integral Method*", Nuclear Engineering and Design, Vol. 7, pp. 170-178.
- [34] Ternkin, A. G. (1978), "*Integral Solutions of Inverse Heat Conduction Problems*", Heat Transfer Sov. Res., Vol. 10, pp. 20-32.
- [35] Abramovich, B. G. and Trofimov, V. S. (1979), "*Integral Form of the Inverse Heat Conduction Problem for a Hollow Cylinder*", High Temp. (USSR), Vol. 17, pp. 552-554.
- [36] Hills, R. G., Mulholland, G. P., and Matthews, L. K. (1982), "*The Application of the Backus-Gilbert Method to the Inverse Heat Conduction Problem in Composite Media*", ASME Paper No. 82-HT-26.
- [37] Chen, C. J. and Thomsen, D. M. (1975), "*On Transient Cylindrical Surface Heat Flux Predicted from Interior Temperature Response*", AIAA Journal, Vol. 13, pp. 697-699.
- [38] Chen, C. J. and Thomsen, D. M. (1974), "*On Determination of Transient Surface Temperature and Heat Flux by Imbedded Thermocouple in a Hollow Cylinder*", Tech. Rept., Rock Island Arsenal, Rock Island, IU.
- [39] Sparrow, E. M., Haji-Sheikh, A. and Lundgren, T. S. (1964), "*The Inverse Problem in Transient Heat Conduction*", J. Appl. Mech., 86E, pp. 369-375.
- [40] Deverall, L. I. and Channapragda, R. S. (1966), "*A New Integral Equation for Heat Flux in Inverse Heat Conduction*", J. of Heat Transfer, Vol. 88, pp. 327-328.
- [41] Imber, M. and Khan, J. (1972), "*Prediction of Transient Temperature Distributions with Embedded Thermocouples*". AIAA Journal, Vol. 10, pp. 784-789.
- [42] Khan, J. (1972), "*A New Analytical Solution of the Inverse Heat Conduction Problem*", Ph.D. Thesis, Polytechnic Inst. of Brooklyn, New York.
- [43] Imber, M. (1974), "*Temperature Extrapolation Mechanism for Two-Dimensional Heat Flow*", AIAA J., Vol 12, pp. 1089-1093.
- [44] Imber, M. (1975), "*Two-Dimensional Inverse Conduction Problem - Further Observations*", AIAA J., Vol. 13, pp. 114-115.
- [45] Woo, K. C. and Chow, L. C. (1981), "*Inverse Heat Conduction by Direct Inverse Laplace Transform*", Numerical Heat Transfer, Vol. 4, pp. 499-504.
- [46] Carvalho, R.N., Orlande, H. R. B. and ozisik, M. N. (2000), "*Estimation of the Boundary Heat Flux in Grinding via the Conjugate Gradient Method*", Heat Transfer Engr., (to appear).
- [47] Mejias, M. M., Orlande, H. R. B. and ozisik, M. N. (1999), "*Design of Optimum Experiments for the Estimation of Thermal Conductivity Components of Orthotropic Solids*", Hyb. Meth Engr., Vol 1, pp. 37-53.

- [48] Burggraf, O. R. (1964), *"An Exact Solution of the Inverse Problem in Heat Conduction Theory and Applications"*, J. Heat Transfer, 86C, pp. 373-382.
- [49] Kover'yanov, V. A. (1967), *"Inverse Problem of Non-Steady Thermal Conductivity"*, Teplofizika Vysokikh Temp., Vol. 5, pp.141-148.
- [50] Makhin, J. A. and Shmukin, A. A. (1973), *"Inverse Problems of Unsteady Heat Conduction"*, Heat Transfer-Sov. Res., Vol. 5, pp. 160-165.
- [51] Langford, D. (1976), *"New Analytical Solutions of the One-Dimensional Heat Equation for Temperature and Heat Flow Rate Both Prescribed at the Same Fixed Boundary (with Applications to the Phase Change Problem)"*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 24, pp. 315-322.
- [52] Frank, I. (1963), *"An Application of Least Squares Method to the Solution of the Inverse Problem of Heat Conduction"*, J. Heat Transfer, 85C, pp.378-379.
- [53] Mulholland, G. P. and San Martin, R. L. (1973), *"Indirect Thermal Sensing in Composite Media"*, Int. J. Heat Mass Transfer, 16, pp. 1056-1060.
- [54] Mulholland, G. P., Gupta, B. P., and San Martin, R. L. (1975), *"Inverse Problem of Heat Conduction in Composite Media"*, ASME Paper No. 75-WA/HT- 83.
- [55] Novikov, N. A. (1978), *"Hyperbolic Equation of Thermal Conductivity: Solution of the Direct and Inverse Problems for a Semi-Infinite Bar"*, J. Eng. Phys., Vol. 35, pp. 1253-1257.
- [56] Novikov, A. (1981), *"Solution of the Linear One-Dimensional Inverse Heat-Conduction Problem on the Basis of a Hyperbolic Equation"*, J. Eng. Phys., Vol. 40(6), pp. 1093-1098.
- [57] Weber, C. F. (1981), *"Analysis and Solution of the Ill-posed Inverse Heat Conduction Problem"*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 24, pp. 1783-1792.
- [58] Beck, J. V. and Wolf, H. (1965), *"The Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem"*, ASME Paper No. 65-HT-40.
- [59] Powell, W. B. and Price, T. W. (1964), *"A Method for the Determination of Local Heat Flux Transient Temperature Measurements"*, ISA Transactions, Vol. 3(3), pp. 246-254.
- [60] Fidelle, T. P. and Zinsmeister, G. E. (1968), *"A Semi-Discrete Approximate Solution of the Inverse Problem of Transient Heat Conduction"*, ASME Paper No. 68-WA/HT-26.
- [61] Beck, J. V. (1970), *"Nonlinear Estimation Applied to the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem"*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 13, pp. 703-716.
- [62] D'Souza, N. (1975), *"Numerical Solution of One-Dimensional Inverse Transient Heat Conduction by Finite Difference Method"*, ASME Paper No. 75-WA/HT-81.
- [63] Garifo, L., Schrock, V. E., and Spedicato, E. (1975), *"On the Solution of the Inverse Heat Conduction Problem by Finite Differences"*, Energia Nucleare, Vol. 22, pp. 452-464.
- [64] Randall, J. D. (1976), *"Finite Difference Solution of the Inverse Heat Conduction Problem and Ablation"*, Technical Report, Johns Hopkins University. Laurel, MD.

- [65] Dantas, L. and Orlande, H. R. B. (1996), "*A Function Estimation Approach for Determining Temperature-Dependent Thermophysical Properties*", Inverse Problems in Engineering, Vol. 3, pp. 261-279.
- [66] Murio, D. A. (1989), "*The Mollification Method and the Numerical Solution of the Inverse Heat Conduction Problem by Finite Difference*", Comput. Math. Appl., Vol. 17, pp. 1385-1896.
- [67] Raynaud, M. and Bransier, J. (1986), "*A New Finite Difference Method for the Nonlinear Heat Conduction Problem*", Numer. Heat Transfer, Vol. 9, pp. 27-42.
- [68] Machado, H. A., Orlande, H. R. B. (1997), "*Inverse Analysis of Estimating the Time-wise and Spacewise Variation of the Wall Heat Flux in a Parallel Plate Channel*", Int. J Numer. Meth. Heat and Fluid Flow, Vol. 7, pp. 696-710.
- [69] Bokar, J. C. and Ozisik, M. N. (1995), "*An Inverse Analysis for Estimating Time Varying Inlet Temperature in Laminar Flow Inside a Parallel Plate Duct*", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 38, pp. 39-45.
- [70] Huang, C. H., Ozisik, M. N., and Sawaf, B. (1992), "*Conjugate Gradient Method for Determining Unknown Contact Conductance During Metal Casting*", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 35, pp. 1779-1789.
- [71] Orlande, H. R. B. and ozisik, M. N. (1993), "*Inverse Problem of Estimating Interface Conductance Between Periodically Contacting Surfaces*", J. Thermophysics and Heat Transfer. Vol. 7, pp. 319-325.
- [72] Orlande, H. R. B. and ozisik, M. N. (1994), "*Determination of the Reaction Function in a Reaction-Diffusion Parabolic Problem*", J. Heat Transfer, Vol. 116, pp. 1041-1044.
- [73] Ozisik, M. N., Orlande, H. R. B., Hector, L.G. and Anyalebechi, P. N. (1992), "*Inverse Problem of Estimating Interface Conductance During Solidification via Conjugate Gradient Method*", J. Materials Proc. Manufact. Science, Vol. 1, pp. 213-225.
- [74] Alencar Jr., J. P., Orlande, H. R. B. and Ozisik, M. N. (1998), "*A Generalized Coordinates Approach for the Solution of Inverse Heat Conduction Problems*", 11 th International Heat Transfer Conference, Vol. 7, pp. 53-58, Kyongju, Korea.
- [75] Colaço, M. J. and Orlande, H. R. B. (1999), "*A Comparison of Different Versions of the Conjugate Gradient Method of Function Estimation*", Num. Heat Transfer-Part A, (to appear).
- [76] Machado, H. A. and Orlande, H. R. B. (1996), "*Estimation of the Timewise and Spacewise Variation of the Wall Heat Flux to a Non-Newtonian Fluid in a Parallel Plate Channel*", Int. Symposium on Transient Convective Heat Transfer-Proceedings, J. Padet (ed.), pp. 587-596, Turkey.
- [77] Machado, H. A., and Orlande, H. R. B. (1998), "*Inverse Problem of Estimating the Heat Flux to a Non-Newtonian Fluid in a Parallel Plate Channel*", RBCM -J. Braz. Soc. Mech. Sciences, Vol. 20, pp. 51-61.
- [78] Osman, A. M., Dowding, IS. J. and Beck, J. V. (1997), "*Numerical Solution of the General Two-dimensional Inverse Heat Conduction Problem*", ASME J. Heat Transfer, Vol. 119, pp. 38-44.

- [79] Blackwell, B. F. (1980), *"An Efficient Technique for the Solution of the One-Dimensional Inverse Problem of Heat Conduction"*, Technical Report, Sandia Laboratories, Thermal Test and Analysis Division, Albuquerque, NM.
- [80] Muuy, R. J., Avila, J. H., and Root, R. E. (1975), *"Determination of Transient Heat Transfer Coefficients and the Resultant Surface Heat Flux from Internal Temperature Measurements"*, General Electric, GEAP-20731.
- [81] Hore, P. S., Krutz, G. W., and Schoenhals, R. J. (1977), *"Application of the Finite Element Method to the Inverse Heat Conduction Problem"*, ASME Paper NO. 77-WA/TM-4.
- [82] Bass, B. R. (1979), *"Incor: A Finite Element Program for One-Dimensional Nonlinear Inverse Heat Conduction Analysis"*. Technical Report RNC/NUREG/CSL)/TM-8, Oak Ridge National Lab.
- [83] Bass, B. R. and Ott, L. J. (1980), *"A Finite Element Formulation of the Two-Dimensional Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem"*, Advances in Computer Technology, pp. 238-248.
- [84] Zabaras, N. and Ngugen, T. H. (1995), *"Control of the Freezing Interface Morphology in Solidification Processes in the Presence of Natural Convection"*, Int. J Num. Meth. Eng. , Vol. 38, pp. 1555-1578.
- [85] Zabaras, N. and Yang, G. (1997), *"A Functional Optimization Formulation and Implementation of an Inverse Natural Convection Problem"*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 144, pp. 245-274.
- [86] Yang, G. and Zabaras, N. (1998), *"An Adjoint Method for the Inverse Design of Solidification Processes with Natural Convection"*, Int. J. Num Merh. Eng., Vol. 42, pp. 1121-1144.
- [87] Huang, C. H. and Tsai, C. C. (1998), *"An Inverse Heat Conduction Problem of Estimating Boundary Fluxes in an Irregular Domain with Conjugate Gradient Method"*, Heat and Mass Transfir, Vol. 34, pp. 47-54.
- [88] Huang, C. H. and Tsai, C. C. (1997), *"A Shape Identification Problem in Estimating Time-Dependent Irregular Boundary Configurations"*, HTD-Vol. 340 ASME National Heat Transfer Conference vol. 2, pp. 41-48, Dulikravich, G.S. and Woodburry, K. (eds.).
- [89] Huang, C. H. and Chiang, C. C. (1998), *"Shape Identification Problem in Estimating Geometry of Multiple Cavities"*, AIAA J. Therm. and Heat Transfer, Vol. 12, pp. 270-277.
- [90] Lesnic, D., Elliot, L. and Ingharn D. B. (1996), *"Application of the Boundary Element Method to Inverse Heat Conduction Problems"*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 39, pp. 1503-1517.
- [91] Martin, T. J. and Dulikravich, G. S. (1997), *"Non-Iterative Inverse Determination of Temperature-Dependent Heat Conductivities"*, HTD-Vol. 340 ASME National Heat Transfir Conference vol. 2, pp. 141-150, Dulikravich, G.S. and Woodburry, K. (eds.).

- [92] Dulikravich, G. S. and Martin, T. J. (1996), "*Inverse Shape and Boundary Condition Problems and Optimization in Heat Conduction*", Chapter 10 in *Advances in Numerical Heat Transfer*, Vol. 1, pp. 381-426, Minkowycz, W. J. and Sparrow, E. M. (eds.), Taylor and Francis.
- [93] Murio, D. A. (1993), "*The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems*", Wiley Interscience, New York.
- [94] Matsevityi, Y. M. and Multanovskii, A. V. (1986), "*Pointwise Identification of Thermophysical Characteristics*", J. Eng. Phys., Vol. 49(6), pp. 1392-1397.
- [95] Martin, T. J. and Dulikravich, G. S. (1998), "*Inverse Determination of Steady Convective Local Heat Transfer Coefficients*", ASME J. Heat Transfer, Vol. 120, pp. 328-334.
- [96] Martin, T. J. and Dulikravich, G. S. (1996), "*Inverse Determination of Boundary Conditions in Steady Heat Conduction with Heat Generation*", ASME J. Heat Transfer, Vol. 118, pp. 546-554.
- [97] Silva Neto, A. J. and Ozisik, M. N. (1992), "*An Inverse Analysis of Simultaneously Estimating Phase Function, Albedo and Optical Thickness*", ASME J. Heat Transfer, Vol. 114, pp. 9-12.
- [98] Li, H. Y. and Ozisik, M. N. (1992), "*Identification of the Temperature Profile in an Absorbing, Emitting, and Isotropically Scattering Medium by Inverse Analysis*", J. Heat Transfer, Vol. 114, pp. 1060-1063.
- [99] Ho, C. H. and Ozisik, M. N. (1989), "*An Inverse Radiation Problem*", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 32, pp. 335-341.
- [100] Li, H. Y. and ozisik, M. N. (1993), "*Inverse Radiation Problem for Simultaneous Estimation of Temperature Profile and Surface Reflectivity*", J. Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 7, pp. 88-93.
- [101] Li, H. Y. and ozisik, M. N. (1992), "*Estimation of the Radiation Source Term with a Conjugate-Gradient Method of Inverse Analysis*", J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, Vol. 48, pp. 237-244.
- [102] Ho, C. H. and Ozisik, M. N. (1988), "*Inverse Radiation Problem in Inhomogeneous Media*", J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, Vol. 40, pp. 553-560.
- [103] Rupert Jr., N., Raynaud, M. and Sacadura, J. F. (1996), "*A Method for the Solution of the Coupled Inverse Heat Conduction-Radiation Problem*", ASME J Heat Transfer, Vol. 118, pp. 10-17.
- [104] Bailleul, J. L., Delaunay, D. and Jamy, Y. (1998), "*Optimal Thermal Processing of Composite Materials: An Inverse Algorithm and Its Experimental Validation*", 11th International Heat Transfer Conference, Vol. 5, pp. 87-92, Kyongju, Korea.
- [105] Jarny, Y., Delaunay, D. and Brizaut, J. S. (1993), "*Inverse Analysis of the Elastomer Cure Control of the Vulcanization Degree*", 1th International Conference on Inverse Problems in Engineering-Proceedings, pp. 291-298, Palm Coast, FL.
- [106] Bokar, J. C. and ozisik, M. N. (1995), "*An Inverse Problem for the Estimation of Radiation Temperature Source Term in a Sphere*", Inverse Problems in Engineering, Vol. 1, pp. 191-205.

- [107] Jurkowsky, T., Jarny, Y. and Delaunay, D. (1997), "*Estimation of Thermal Conductivity of Thermoplastics Under Molding Conditions: an Apparatus and an Inverse Algorithm*", Int. J. Heat Mass Transfir. Vol. 40, pp. 4169-4181.
- [108] Orlande, H. R. B. and ozisik, M. N. (1999), "*Inverse Problems Computations in Heat and Mass Transfer*", International Conf. On Comput. Heat and Mass Transfer-Keynote Lecture, North Cyprus.
- [109] ozisik, M. N. (1994), "*Heat Conduction*", Chapter 14, Wiley.
- [110] Farebrother, R. W. (1988), "*Linear Least Squares Computations*", Marcel Dekker, New York.
- [111] Bard, Y. B. (1974), "*Nonlinear Parameter Estimation*", Academic Press, New York.
- [112] Levenberg, K. (1944), "*A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least-Squares*", Quart. Appl. Math, Vol. 2, pp. 164-168.
- [113] Marquardt, D. W. (1963), "*An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters*", J. Soc. Ind. Appl. Math, Vol. 11, pp. 431-441.
- [114] Tikhonov, A. N. (1963), "*Regularization of Incorrectly Posed Problems*", Soviet Math. Dokl., Vol. 4(6), pp. 1624-1627.
- [115] Tikhonov, A. N. (1975), "*Inverse Problems in Heat Conduction*", J. Eng. Phys., Vol. 29(1), pp. 816-820.
- [116] Trujillo, D. M. and Busby, H. R. (1997), "*Practical Inverse Analysis in Engineering*", CRC Press, Boca Raton.
- [117] Beck, J. V. and Blackwell, B. (1988), "*in Handbook of Numerical Heat Transfer*", Minkowycz, W. J., Sparrow, E. M., Schneider, G. E., and Pletcher, R. H., (eds.), Wiley Intersc., New York.
- [118] Huang, C. H. and ozisik, M. N. (1991), "*Optimal Regularization Method to Determine the Strength of a Plane Surface Heat Source*", Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 12, pp. 173-178.
- [119] Craven, P. and Wahba, G. (1979), "*Smoothing Noisy Data with Spline Functions*", Numerische Mathematics, Vol. 31, pp. 377-403.
- [120] Busby, H. R. and Trujillo, D. M. (1985), "*Numerical Solution of a Two Dimensional Inverse Heat Conduction Problems*", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 21, pp. 349-359.
- [121] Levenberg, K. (1944), "*A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least Squares*", Quart. Appl. Math., Vol. 2, pp. 164-168.
- [122] Marquardt, D. W. (1963), "*An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters*", J. Soc. Ind. Appl. Math, Vol. 11, pp. 431-441.
- [123] Bard, Y. B. (1974), "*Nonlinear Parameter Estimation*", Acad. Press, New York.
- [124] Beck, J. V. and Arnold, K. J. (1977), "*Parameter Estimation in Engineering and Science*", Wiley, New York.
- [125] Press, W. H., Flannery, B. F., Teukolsky S. A. and Wetterling W. T. (1989), "*Numerical Recipes*", Cambridge University Press, New York.

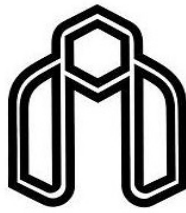
- [126] Dennis, J. and Schnabel, R. (1983), *"Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations"*, Prentice Hall.
- [127] Mod, J. J. (1977), *"The Levenberg-Marquardt Algorithm: implementation and Theory"*, in Numerical Analysis, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 630, G. A. Watson (ed.), Springer-Verlag, Berlin, pp. 105-116.
- [128] Ozisik, M. N. (1993), *"Heat Conduction"*, 2nd ed., Wiley, New York.
- [129] Alifanov, O. M. (1977), *"Determination of Heat Loads from a Solution of the Non-linear Inverse Problem."*, High Temperature, Vol. 15, pp. 498-504.
- [130] Alifanov, O. M. and Artyukhin, E. A. (1975), *"Regularized Numerical Solutions of Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem"*, J. Eng. Phys., Vol. 29, pp. 934-938.
- [131] Alifanov, O. M. (1994), *"Inverse Heat Transfer Problems"*, Springer-Verlag, New York.
- [132] Alifanov, O. M. (1974), *"Solution of an Inverse Problem of Heat-Conduction by Iterative Methods"*, J. Eng. Phys., Vol. 26, pp. 471-476.
- [133] Daniel, J. W. (1971), *"The Approximate Minimization of Functionals"*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs.
- [134] Fletcher, R. and Reeves C. M. (1964), *"Function Minimization by Conjugate Gradients"*, Computer J., Vol. 7, pp. 149-154.
- [135] Alifanov, O. M. (1975), *"Inverse Boundary Value Problems of Heat Conduction"*, J. Eng. Phys., Vol. 25.
- [136] Hestenes, M. R. and Stiefel, E. (1952), *"Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems"*, J. Res. NBS, Vol. 49, pp. 409-436.
- [137] Beckmann, F. S. (1960), *"The Solution of Linear Equation by Conjugate Gradient Method"*, Mathematical Methods for Digital Computer, A. Ralston and H. S. Wilf (eds.) chap. 4, Wiley, New York.
- [138] Kärnmerer, W. I. and Nashed, M. Z. (1972), *"On the Convergence of the Conjugate Gradient Method for Singular Linear Operator Equations"*, J. Num. Anal., Vol. 9, pp. 165-181.
- [139] Huang, C. H. and Ozisik, M. N. (1992), *"Inverse Problem of Determining the Unknown Strength of an Internal Plane Heat Source"*, J. Franklin Institute, pp. 751-764.
- [140] Jarny, Y., Ozisik, M. N. and Bardon J. P. (1991), *"A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction"*, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 34, pp. 2911-2919.
- [141] SAWAF, B. and OZISIK, M. N. (1995), *"An Inverse Analysis To Estimate Linearly Temperature Dependent Thermal Conductivity Components And Heat Capacity Of An Orthotropic Medium"*, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 38, No. 16, pp. 3005-3010.
- [142] Arpaci, Vedat S. (1966), *"Conduction heat transfer"*, Addison-Wesley Pub. Co.

Abstract:

In this thesis, the thermal conductivity of a metal slab is estimated by an inverse heat transfer method. Material discussed could be an inhomogeneous matter. So the thermal conductivity can be Position-Dependent. And the Position-Dependent of the Thermal Conductivity, are considered in governing equations. The governing equations are Unsteady heat conduction equation (one dimensional - two dimensional). In the inverse method, Using temperature measurements of sensors, And calculate the sensitivity function, The objective function has been estimated. The total least squares error and root mean squares error is also included in the calculations. It has many industrial applications, including the estimation problem areas (due to manufacturing process) on the matter. It also has great importance in troubleshooting casting parts. It is assumed that, the local temperature in the metal slab can be suitably measured by a thermal imaging process. The measured temperature data are employed to estimate the thermal conductivity of the plate as a function of position. The Conjugate Gradient Method (CGM) is used to optimize the objective function. This method is used for optimization in many engineering problems, Accuracy is acceptable. The efficiency of the presented inverse method is evaluated by selection of different conductivity functions in the metal slab, i.e. quadratic function and triangular function. Inverse method is implemented as a computer program. The obtained results are compared with the physical values of thermal conductivity and the accuracy of the results is also studied.

According to papers and reports, Estimation of thermal conductivity as a position function of non-homogeneous two-dimensional plate by inverse heat transfer method, Is the main novelty of the present study.

Key Words: Inverse heat conduction, Thermal conductivity, Conjugate Gradient Method, Thermal Imaging.



Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences
Department of Mathematics

M.S Theise

**Estimation Of Conduction Heat Transfer Coefficient
Using Inverse Heat Transfer Method**

Nasibeh Asa Golsorkhi

Supervisors:

Dr. Hojat Ahsani Tehrani

Dr. Mohsen Nazari

Advisor:

Dr. Ali Abbas Nejad

July 2013