دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض ، گرایش آنالیز

عنوان

بهترین تقریب یکنواخت، در رده چندجمله‌ای‌ها

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

پژوهشگر

سکینه سهیلی مقدم

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: سهیلی مقدم نام: سکینه

عنوان: بهترین تقریب یکنواخت، در رده چندجمله‌ای‌ها

استاد راهنما: دکتر مهدی ایرانمنش

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشگاه صنعتی شاهرود

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۹۲

واژگان کلیدی: الگوریتم رمس، بهترین تقریب یکنواخت در مجموعه چندجمله‌ای‌ها، مجموعه متناوب، چندجمله‌ای‌های چبیشف، خطای تقریب

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا با استفاده از روش‌های عددی و معرفی الگوریتمی به‌نام الگوریتم رمس، بهترین تقریب توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها را محاسبه می‌کنیم، در ادامه مفاهیم اولیه چندجمله‌ای‌های چبیشف، تقریب توابع و بهترین تقریب یکنواخت چندجمله‌ای‌ها را معرفی کرده و سپس با استفاده از قضیه تناوبی چبیشف و نیز ویژگی‌های چندجمله‌ای چبیشف به بررسی بهترین تقریب یکنواخت از نوع چندجمله‌ای‌ها، برای رده‌ای از توابع گویا می‌پردازیم. در پایان قضایایی در مورد بهترین تقریب این دسته از توابع، و نیز مجموعه‌های متناوبی برای خطای تقریب این توابع به‌دست می‌آوریم.

تقدیم به همه ی کسانی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

---

[1] دکتر علی شریعتی

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکترمهدی ایرانمنش، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

همچنین لازم می‌دانم از پدید آورندگان بسته زی‌پرشین، مخصوصاً جناب آقای وفا خلیقی، که این پایان‌نامه با استفاده از این بسته، آماده شده است و نیز از آقای دکتر مرتضی فغفوری و آقای محمود امین‌طوسی به خاطر پاسخ‌گویی به سوالاتم در مورد LaTeX، کمال قدردانی را داشته باشم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ همسرم که در تمام مراحل زندگی پشتیبان من است کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

سکینه سهیلی مقدم

۱۳۹۲

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱
مقدمات

پیشگفتار
با روش‌های ریاضی می‌توان هر پدیده را بر حسب یک سری از توابع پایه(مثلثاتی یا چندجمله‌ای) مانند $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p_j(x)$ با دقت مناسب تقریب زد (بردن و همکاران ۱۹۸۰).

اما این که چه پدیده‌ای را با چه نوع تابعی تقریب بزنیم کاملا بستگی به رفتار آن پدیده دارد که به کدام نوع تابع پایه نزدیک‌تر است. مناسب بودن یک سری از توابع پایه نسبت به یک سری دیگر بدین معنا است که می‌توان در تعداد جملات کمتری از سری به دقت دلخواه رسید.

با این تفسیر از آن جا که p_nها خود چندجمله‌ای هستند، وچندجمله‌ای‌ها تابع نیز هستند، بهترین توابع پایه برای تقریب آن‌ها چندجمله‌ای‌های دیگر خواهد بود، بنابراین می‌توان از روش‌های تقریب چندجمله‌ای استفاده کرد.

ازجمله کاربردهای چندجمله‌ای‌ها می‌توان به تقریب توابع در آنالیزعددی، معادله مشخصه ماتریس‌ها در جبر خطی و تعیین رنگ در رنگ آمیزی گراف، اشاره کرد. سوالی که اینجا مطرح می‌شود این است که هدف از تقریب یک تابع به یک چندجمله‌ای چیست؟

پاسخی که به این سوال داده می‌شود این است که انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری چندجمله‌ای‌ها به مراتب ساده‌تر از توابع است، هم‌چنین کامپیوتر می‌تواند آن‌ها را به‌طور دقیق ارزیابی و مقداردهی کرده و عملیات مورد نیاز را روی آن‌ها ساده‌تر انجام دهد.

بنابر نظریه وایرشتراس هر تابع پیوسته در بازه $[a,b]$ را می‌توان به‌صورت یکنواخت و با دقت دلخواه با یک چندجمله‌ای تقریب زد (رودین ۱۹۷۳).

البته خود چندجمله ای‌ها نیز از این قاعده مستثنی نیستند و با استفاده از این مطلب می‌توان نتیجه گرفت که یک چندجمله‌ای مرتبه بالا را در بازه‌های کوچکتری از دامنه تعریفشان می‌توان با

استفاده از چندجمله‌ای مرتبه پایین تقریب زد، که استفاده از این چندجمله‌ای مرتبه پایین باعث تسریع محاسبات خواهد شد.

در این پایان نامه تقریب توابع در سه فصل مورد بررسی قرار گرفته است.

در فصل اول ابتدا به معرفی پژوهش‌هایی که تا کنون برای به‌دست آوردن بهترین تقریب توابع توسط چندجمله‌ای‌ها انجام شده، می‌پردازیم، سپس در ادامه تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز برای به‌دست آوردن بهترین تقریب توابع را بیان می‌کنیم.

درفصل دوم با استفاده از روش‌های عددی، بهترین تقریب توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها را به‌دست می‌آوریم.

هدف ما در فصل سوم این پایان‌نامه به‌دست آوردن بهترین تقریب یکنواخت توابع گویا در مجموعه چندجمله‌ای‌ها است.

۱.۱ پیشینه پژوهشی

مساله بهترین تقریب توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها از دیدگاه‌های متفاوتی بررسی شده است. ساده‌ترین حالت تقریب با چندجمله‌ای‌ها، تعیین خط مماس برای یک تابع مشتق‌پذیر در نقطه‌ای مانند $x_\circ$ ظاهر می‌شود.

در حقیقت خط مماس در یک نقطه مانند $x_\circ$ ساده‌ترین چندجمله‌ای از درجه یک است، که معمولا تابع f را در نزدیکی $x_\circ$ به‌خوبی تقریب می‌زند.

برنشتاین[۱] [۸]در سال ۱۹۷۳ اثبات کرد که اگر $f(x)$ تابعی پیوسته با دوره تناوب ۲π، و سری فوریه

$$f(x) = \sum_{k=\circ}^{\infty} a_k \cos n_k(x)$$

باشد، با این شرط که $a_k > \circ$ و $\frac{n_{k+۱}}{n_k} = ۲p_k + ۱$ که p_k عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه داریم:

$$E_n(f) = \sum_{k=n+۱}^{\infty} a_k$$

که $(n_j \leq n \leq n_j + ۱)$.

علاوه بر این نیومن و ریولین[۲] [۷] در سال ۱۹۷۶ نشان داده‌اند که اگر تابع f به شکل

$$f(x) = \sum_{k=\circ}^{\infty} a_k T_k(x)$$

---

[۱] Bernstein

[۲] Newman

تعریف شود و a_k ها مثبت و صعودی باشند و در رابطه $a_k \leq a_{k-1}a_{k+1}$، $(k \geq 1)$ صدق کنند، و $T_k(x)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از درجه k باشد، آنگاه خطای تقریب تابع f در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$E_n(f) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq 4eE_n(f).$$

موضوع اصلی در مساله تقریب توابع، بررسی وجود، یکتایی و مشخصه‌هایی برای این مساله است. وجود و یکتایی مساله بهترین تقریب تابع $f \in C[d,e]$ با نرم L_m توسط واتسون[3][۲] در سال ۱۹۸۰ و ریولین[4][۱] در سال ۱۹۸۱ اثبات شده است. همچنین قضایایی مانند قضیه تناوبی چبیشف، در خصوص مشخصه بهترین تقریب یکنواخت توابع با نرم L_m وجود دارد. و این قضایا جواب را برای توابعی با نرم L_m ، $(1 \leq m < \infty)$ ودر موارد کلی برای تمام توابع هموار توصیف می‌کنند.

چون در نرم یکنواخت (L_∞)، قضیه تناوبی چبیشف، بهترین تقریب یکنواخت توابع را در رده چندجمله‌ای‌ها به‌طور صریح مشخص نمی‌کند، محققان به دنبال آن هستند که مشخصه بهترین تقریب یکنواخت توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها را روی رده‌های خاصی از توابع به‌دست آورند.

بنابراین برخی محققان بر روی رده‌هایی از توابع، که توسط چندجمله‌ای چبیشف بسط داده می‌شوند، متمرکز شده‌اند. به‌طور مثال ریولین بهترین تقریب یکنواخت رده‌ای از توابع گویا مانند $1/(x-a)$ با شرط $(a > 1)$ را در مجموعه چندجمله‌ای‌ها مشخص کرد.

همچنین لوبینسکی[5][۶] در سال ۲۰۰۳ نشان داد که به‌وسیله درون‌یابی‌های لاگرانژ صفرهای چندجمله‌ای‌های چبیشف، بهترین تقریب تابع $1/(1+(ax)^2)$ روی بازه $[-1,1]$ را در مجموعه چندجمله‌ای‌ها می‌توان به‌دست آورد.

۲.۱ تعاریف اولیه

این بخش شامل تعاریف و اصول اولیه‌ای است که لازمه‌ی مطالعه و شناخت در زمینه پیداکردن بهترین تقریب توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها و شناسایی آن‌ها می‌باشد. به دلیل بدیهی بودن و مطابقت داشتن با برخی از قضایای ساده آنالیز از بیان جزییات و اثبات آن‌ها خودداری می‌کنیم و اثبات آن‌ها را به بخش مراجع ذکر شده در انتهای پایان‌نامه می‌سپاریم.

Watson[3]
Rivlin[4]
Lubinsky[5]

تعریف ۱.۲.۱. تابع نرم: یک نرم روی یک فضای برداری X یک تابع حقیقی مقدار روی فضای X است که تصویر هر $x \in X$ تحت این تابع با نماد$\|x\|$ نمایش داده می‌شود و برای هردو بردار دلخواه $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ ویژگی‌های زیر برقرار باشند:

۱. $\|x\| \geq ۰$

۲. $\|x\| = ۰ \Leftrightarrow x = ۰$

۳. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

۴. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

فضای خطی X را فضای خطی نرم‌دار گوییم اگر هر عنصر $x \in X$ در ویژگی‌های ۱.۲.۱ صدق کند.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X فضای خطی نرم‌دار، و f ($f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\|f\| < \infty$) تابع اندازه پذیری در فضای X باشد، و $۰ < m < \infty$، آن‌گاه نرم m تابع f به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|f\|_m = \left(\int |f(x)|^m dx \right)^{\frac{۱}{m}}$$

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه تمام توابع حقیقی پیوسته روی بازه بسته $[a, b]$ با نماد $C[a, b]$ نمایش داده می‌شود. به هر $f \in C[a, b]$، نرم سوپریمم آن یعنی

$$\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

را مربوط می‌کنیم، که نرم یکنواخت یا نرم چبیشف نام دارد.

تعریف ۴.۲.۱. چندجمله‌ای $p(x) = a_۰ + a_۱ x + \cdots + a_n x_n$ یک تابع است، که $a_۰, \ldots, a_n$ اعداد حقیقی و x یک متغیر حقیقی است. اگر $a_n \neq ۰$ باشد، آن‌گاه p یک چندجمله‌ای از درجه n است. فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n را با P_n نمایش می‌دهیم. به‌عبارت دیگر اگر $p(x) = a_۰ + a_۱ x + \cdots + a_k x_k$ و $k \leq n$ باشد آن‌گاه $p \in P_n$ است.

خارج قسمت دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ یا $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا گوییم. تمامی چندجمله‌ای‌ها توابعی گویا با $Q(x) = ۱$ هستند.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید K زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای ضرب داخلی X و$x \in X$ باشد. عنصر $y_۰ \in K$ بهترین تقریب، یا نزدیکترین نقطه به x در مجموعه K است، اگر

$$\|x - y_۰\| = d(x, K)$$

که
$$d(x,K) := \inf\{\|x-y\|; y \in K\}$$
مقدار $d(x,K)$ فاصله x تا K، یا خطای تقریب عنصر x به‌وسیله مجموعه K نامیده می‌شود. مجموعه تمام بهترین تقریب‌های عنصر x از مجموعه K را با $P_K(x)$ نشان می‌دهیم. بنابراین
$$P_K(x) := \{y \in K \ ; \quad \|x-y\| = d(x,K)\}$$
اگر هر $x \in X$ حداقل یک بهترین تقریب در مجموعه K داشته باشد، K یک مجموعه تقریب نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر K یک مجموعه تقریب است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$، $P_K(x) \neq \emptyset$.

اگر هر $x \in X$ دقیقا یک بهترین تقریب در مجموعه K داشته باشد، K یک مجموعه چبیشف[۶] نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر K یک مجموعه چبیشف است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$، $P_K(x)$ یک مجموعه تک عضوی باشد.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه متناهی با طول L باشد، به‌علاوه فرض کنید f,g توابع انتگرال پذیر روی I باشند.

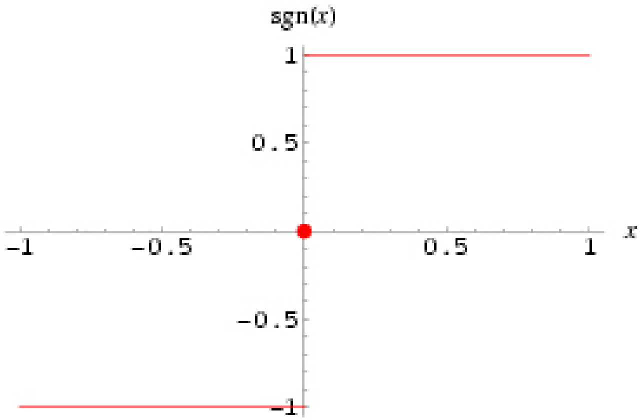
در این صورت تابع g را تقریب یکنواخت تابع f می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$ داشته باشیم:
$$|f(x) - g(x)| \leq \epsilon \qquad \forall x \in I \tag{۱.۱}$$

قضیه ۷.۲.۱. قضیه تقریب وایرشتراس:فرض کنید f تابع پیوسته‌ای روی بازه $[a,b]$ باشد، در این صورت برای هر $\varepsilon > ۰$ یک چندجمله‌ای $p(x)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x \in [a,b]$،
$$|f(x) - p(x)| < \epsilon$$

برهان. برای اثبات به [۱۲] مراجعه شود. □

تعریف ۸.۲.۱. تابع علامت برای هر عدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$sgnx = \begin{cases} -۱ & x < ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ ۱ & x > ۰ \end{cases}$$

---
[۶] Chebyshev



شکل ۱.۱: نمودار تابع علامت

یادآوری: ماسون در [۹] نشان داد که برای $f \in C[d,e]$، چندجمله‌ای یکتایی مانند $p_n^* \in P_n$ وجود دارد به طوری که

$$\|f - p_n^*\|_m \leq \|f - p\|_m, \quad \forall p \in P_n,$$

و p_n^* بهترین تقریب تابع f (با نرم L_m) در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_n روی بازه $[d,e]$ نامیده می‌شود.

و اگر نرم یکنواخت (L_∞) را داشته باشیم:

$$\max_{d\leq x\leq e} |f(x) - p_n^*(x)| < \max_{d\leq x\leq e} |f(x) - p(x)|, \quad \forall p \in P_n,$$

که در این حالت p_n^* **بهترین تقریب یکنواخت** تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[d,e]$ نامیده می‌شود.

با توجه به این مطلب که ترکیب خطی هر دو عضو دلخواه از یک زیرفضا، عضوی از زیرفضا است، لذا هر زیرفضا یک مجموعه محدب است. در مورد یک مجموعه،ویژگی محدب بودن به‌صورت زیر بیان می‌شود.

تعریف ۹.۲.۱. زیرمجموعه S از یک فضای خطی X را محدب گوییم، اگر هر ترکیب محدب از هر دو عضو S، همچنان عضو S باشد. یعنی اگر $x,y \in S$ باشند، آنگاه به ازای هر $۰ \leq \lambda \leq ۱$ داشته باشیم

$$\lambda x + (۱ - \lambda)y \in S$$

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید p_n^* بهترین تقریب تابع پیوسته $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ در مجموعه

چندجمله‌ای‌های P_nباشد، خطای تقریب تابع f را با $e(x)$ نمایش داده و به صورت

$$e(x) = f(x) - p_n^*(x)$$

تعریف می‌کنیم.

هم‌چنین خطای بهترین تقریب یکنواخت تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_n به صورت

$$\inf_{p_n^* \in P_n} \|f - p_n^*\| = E_n(f)$$

تعریف می‌شود.

در نتیجه اگر $e(x)$ خطای تقریب تابع f روی بازه $[a,b]$ باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است

$$|e(x)| = E_n(f;[a,b])$$

که نماد $E_n(f;[a,b]$ خطای تقریب تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[a,b]$ را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۲.۱۱. اگر f تابعی پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشد، حداقل دو نقطه $x_۱, x_۲ \in [a,b]$ وجود دارد به‌طوری که

$$|e(x_۱)| = |e(x_۲)| = E_n(f;[a,b])$$

و

$$e(x_۱) = -e(x_۲)$$

برهان. با توجه به پیوستگی تابع f، منحنی پیوسته $y = e(x)$ برای $a \leq x \leq b$ از بین خطوط $y = \pm E_n(f)$ عبور می‌کند و حداقل با یکی از این خطوط مماس می‌شود. نشان می‌دهیم که این منحنی باید بر هر دو خط مماس شود.

(برهان خلف)، فرض کنیم این منحنی بر هر دو خط مماس نشود، و فرض کنیم که q_n تقریبی بهتر از p_n^* برای تابع f باشد. حال فرض کنیم $e(x) > -E_n(f)$ در تمام بازه $[a,b]$ برقرار باشد. آنگاه

$$\min_{a \leq x \leq b} e(x) = m > -E_n(f) \qquad , \qquad c = \frac{E_n(f) + m}{۲} > ۰$$

چون $f(x) - q_n(x) = e(x) - c$ و $q_n = p_n^* + c \in P_n$ و

$$-(E_n(f) - c) = m - c \leq e(x) - c \leq E_n(f) - c$$

داریم: $\|f - q_n\| = E_n(f) - c$ که یک تناقض برای $E_n(f)$ است. بنابراین باید یک نقطه در بازه $[a,b]$ مانند $x_۱$ وجود داشته باشد به‌طوری که $e(x_۱) = -E_n(f)$.

با روشی مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $x_۲ \in [a,b]$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $e(x_۲) = E_n(f)$.
□

فصل ۲
بهترین تقریب توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها با روش‌های عددی

۱.۲ روش‌های تکراری رمس

در این بخش الگوریتمی را ارائه می‌دهیم که الگوریتم رمس [۱] نامیده می‌شود و طی آن با روش‌های گام به گام عددی به بهترین تقریب توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها دست می‌یابیم.

قبل از بیان این الگوریتم تعاریف و قضایای مورد نیاز اولیه را بیان می‌کنیم، چون فقط به صورت این قضایا نیاز داریم از ارائه اثبات‌ها خودداری می‌کنیم و اثبات تمام قضایا در مراجع انتهایی آورده شده است.

۱.۱.۲ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید $C[a,b]$ فضای تمام توابع پیوسته حقیقی مقدار مانند $f(x)$، روی بازه $a \leq x \leq b$ باشد، نرم هر تابع مانند f روی این بازه به‌صورت

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \tag{۱.۲}$$

تعریف می‌شود.

فرض کنید X فضای نرم‌دار خطی با عناصر $f, g, \ldots$ روی میدان اعداد حقیقی (مختلط)، و V، زیر فضای خطی n بعدی از X باشد. تقریب خطی عناصر X به صورت زیر بیان می‌شود.

---
[۱] Remez

تعریف ۲.۱.۲. با مفروضات فوق برای هر $f \in \mathbf{X}$ اگر عضو $g \in V$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $h \in V$ داشته باشیم

$$\|g-f\| \leq \|h-f\|$$

آن‌گاه می‌گوییم g تقریب خطی f است.

اگر g یک تابع خطی باشد، قرارداد می‌کنیم:

$$\mathcal{Q}_V(f) = \inf_{h \in V} \|h-f\| \qquad \forall f \in \mathbf{X}$$

در حالتی که تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌ها تقریب زده شود، به جای $\mathcal{Q}_V(f)$ از $E_n(f)$ استفاده می‌کنیم.

مرتبه تقریب یک تابع را به‌این صورت تعریف می‌کنیم که دنباله g_n از تقریب‌های تابع f را از مرتبه ρ_n، $\rho > ۰$ گوییم اگر

$$\|g_n(f) - f\| = o(\rho_n)$$

تعریف ۳.۱.۲. تابع انتگرال پذیر $\omega(x)$ را روی بازه $[a,b]$یک تابع وزن‌دار گوییم اگر برای هر $x \in [a,b]$ ، $\omega(x) \geq ۰$ باشد، اما روی هر زیر بازه از $[a,b]$، $\omega(x) \neq ۰$ باشد.

تعریف ۴.۱.۲. چندجمله‌ای‌های متعامد، رده‌هایی از چندجمله‌ای‌ها مانند $P_n(x)$ هستند که روی بازه $[a,b]$ تعریف می‌شوند و برای آن‌ها رابطه زیر صادق است،

$$\int_a^b \omega(x) p_m(x) p_n(x) d(x) = \delta_{mn}$$

که در آن $n \neq m$ و $\omega(x)$ یک تابع وزن‌دار و δ_{mn} دلتای کرونیکر است.

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول، مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد هستند، که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۵.۱.۲. چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از درجه‌ی nبر بازه $[-۱, ۱]$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-۱} x)$$

با توجه به تعریف ۵.۱.۲ هر چندجمله‌ای چبیشف در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کنند.

$$T_{n+۱}(x) = ۲xT_n(x) - T_{n-۱}(x), \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

با توجه به روابط

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta$$

$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta$$

و جمع این دو رابطه داریم

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos n\theta\cos\theta - \cos(n-1)\theta$$

با توجه به تعریف چندجمله‌ای چبیشف درجه n، اگر قرار دهیم $\theta = \cos^{-1} x$، پس $x = \cos\theta$. در نتیجه برای $n \geq 1$ داریم

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta\cos\theta = 2xT_n(x)$$

بنابراین رابطه زیر برقرار است

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

تعدادی از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول به‌صورت زیر هستند.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

توجه می‌کنیم که $T_n(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n است و با استقرا نشان داده می‌شود که ضریب x^n (بزرگترین توان) در آن 2^{n-1} است. به‌عبارتی

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \text{عباراتی با درجه کمتر از } n$$

اگر $T_n(x)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از درجه n باشد، با محاسبه T' مشاهده می‌کنیم که T' یک چندجمله‌ای از درجه $n-1$ است.

حال با مشتق‌گیری از رابطه $T_n(x) = \cos n\theta$ نسبت به x به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\frac{1}{n}T'_n(x) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

که یک چندجمله‌ای از مرتبه $n-1$ است و آن را چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم می‌نامیم و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

مطالب جزیی‌تر در مورد $U_n(x)$ در فصل سوم بیان شده است.

صفرهای $T_n(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = ۰ \Rightarrow n\theta = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \quad \theta = \frac{(۲k+۱)\pi}{۲n}$$

در نتیجه ریشه‌های $T_n(x)$ عبارتند از

$$x_k = \cos\frac{(۲k+۱)\pi}{۲n}, \quad k = ۰, ۱, \dots, n-۱$$

این ریشه‌ها در بازه $[-۱, ۱]$ قرار دارند و متمایز هستند.

ضمنا برای سهولت درکار با چندجمله‌ای‌ها، توجه می‌کنیم که چندجمله‌ای‌های چبیشف تعریف شده روی بازه دلخواه $[a, b]$ را می‌توان به چندجمله‌ای چبیشف روی بازه $[-۱, ۱]$ تبدیل کرد.

چندجمله‌ای‌های چبیشف $T_n(t)$، $n = ۰, ۱, \dots$ را در بازه $-۱ \leq t \leq ۱$ در نظر بگیرید. تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید

$$x = \frac{(b-a)t}{۲} + \frac{b+a}{۲}, \qquad -۱ \leq t \leq ۱$$

این تبدیل بازه $[a, b]$ از محور x را به بازه‌ی $[-۱, ۱]$ از محور t نقش می‌کند، و برعکس.

اکنون فرض کنید $T_n(t)$ چندجمله‌ای چبیشف بر بازه $-۱ \leq t \leq ۱$ باشد، چندجمله‌ای $\tilde{T}_n(x)$، ($\tilde{T}$فقط یک نمادگذاری است)را بر بازه $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{T}_n(x) = T_n(t) = \cos(n\cos^{-۱} t), \qquad n = ۰, ۱, \dots$$

بنابراین

$$\tilde{T}_۰(x) = T_۰(t) = ۱$$

$$\tilde{T}_۱(x) = T_۱(t) = t = \frac{۲x - (a+b)}{b-a}$$

$$\tilde{T}_۲(x) = T_۲(t) = ۲t^۲ - ۱ = ۲\left[\frac{۲x - (b+a)}{b-a}\right]^۲ - ۱$$

تعریف ۶.۱.۲. یک تابع مولد برای $f(x)$، یک سری توانی به صورت $\sum a_n x^n$ است که $f(x) = \sum a_n x^n$.

گزاره ۷.۱.۲. تابع مولد برای چندجمله‌ای‌های چبیشف به‌صورت زیر است:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{۱ - tx}{۱ - ۲tx + t^۲}$$

با توجه به رابطه $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ رابطه زیر را می‌توانیم داشته باشیم

$$e^{in(\arccos(x))} = \cos(n\arccos(x)) + i\sin(n\arccos(x))$$

از این رابطه مشخص می‌شود که چندجمله‌ای چبیشف نوع اول یعنی $T_n(x)$ قسمت حقیقی این بسط است. حال اگر این بسط را با نماد زیر نمایش دهیم داریم:

$$\mathbf{G_n}(\mathbf{x}) = e^{in(\arccos(x)}$$

بنابراین در ادامه می‌توانیم بنویسیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n Re[\mathbf{G_n}(\mathbf{x})] = Re\left[\frac{1}{1 - te^{i\arccos(x)}}\right]$$

که در این رابطه داریم

$$Re\left[\frac{1}{1 - te^{i\arccos(x)}}\right] = Re\left\{\frac{[1 - t\cos(\arccos(x))] + it\sin(\arccos(x))}{[1 - t\cos(\arccos(x))]^2 + t^2\sin^2(\arccos(x))}\right\}$$

و در نهایت نتیجه می‌شود که

$$Re\left[\frac{1}{1 - te^{i\arccos(x)}}\right] = \frac{1 - t\cos(\arccos(x))}{1 - 2t\cos(\arccos(x)) + t^2}$$

و بنابراین رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2}$$

تعریف ۲.۱.۸. نقاط تناوبی برای هر تابع f تعریف شده روی بازه‌ای مانند I، دنباله‌ای از نقاط $x_1, x_2, \ldots, x_m$ در بازه I هستند که به‌صورت زیر مرتب شده باشند

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m$$

وبرای هر x_i، $(i = 1, \ldots, m)$ روابط زیر را داشته باشیم

$$|f(x_i)| = \|f\|_\infty$$

$$sgnf(x_{i+1}) = -sgnf(x_i)$$

اگر p_n^* بهترین تقریب تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[a, b]$ باشد، مجموعه $k + 1$ نقطه متمایز $x_0, x_1, \ldots x_k$ را که در رابطه $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_k \leq b$ صدق کند، یک مجموعه متناوب برای تابع خطای $f - p_n^*$ گوییم اگر دارای دو ویژگی زیر باشد:

۱. $j = 0, \cdots, k$ $\qquad |f(x_j) - p_n^*(x_j)| = \|f - p_n^*\|$

۲. $j = 0, \cdots, k - 1$ $\qquad [f(x_j) - p_n^*(x_j)] = -[f(x_{j+1}) - p_n^*(x_{j+1})]$

قضیه ۹.۱.۲. قضیه تناوبی چبیشف فرض کنید $f \in C[a,b]$ ، و $e(x) = f(x) - p_n^*(x)$ خطای تقریب f باشد. آن‌گاه p_n^* بهترین تقریب یکنواخت تابع f در چندجمله‌ای‌های p_n روی بازه $[a,b]$ است اگر و فقط اگر حداقل $n+۲$ نقطه $x_۱ < x_۲ < \cdots < x_{n+۲}$ در بازه $[a,b]$ برای

$$|e(x_i)| = \max_{d \leq x \leq e} |f(x) - p_n^*(x)|$$

وجود داشته باشد.

برهان. اگر $x_۰, ..., x_{n+۱}$ فرم یک مجموعه متناوب برای $f - p_n^*$ باشد، نشان می‌دهیم که p_n^* بهترین تقریب تابع f است.

(برهان خلف) فرض کنیم p_n^* بهترین تقریب تابع f نباشد، بنابراین $q_n \in P_n$ وجود دارد به‌طوری که

$$\|f - q_n\| < \|f - p_n^*\|$$

از این رو در حالت خاص چون $x_۰, ..., x_{n+۱}$ فرم یک مجموعه متناوب است، پس برای $j = ۰, ..., n+۱$ ،

$$|f(x_j) - q_n(x_j)| < \|f - p_n^*\| = |f(x_j) - p_n^*(x_j)|$$

طبق تعریف مجموعه متناوب برای $f - p_n$ تفاضل زیر را داریم

$$[f(x_j) - p_n^*(x_j)] - [f(x_j) - q_n(x_j)] = q_n(x_j) - p_n^*(x_j)$$

با توجه به این تفاضل همانطورکه j از ۰ تا $n+۱$ تغییر می‌کند، این تفاضل در علامت متناوب می‌شود.

بنابراین چندجمله‌ای $q_n(x) - p_n^*(x) \in P_n$ یک صفر در هر بازه $(x_j, x_{j+۱})$ برای $j = ۰, ..., n$ دارد و در مجموع $n+۱$ صفر دارد که نشان می‌دهد $q_n = p_n^*$، و این تناقض است، پس p_n^* بهترین تقریب تابع f است.

حال فرض کنید p_n^* بهترین تقریب یکنواخت تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌ها باشد و $f \notin P_n$، نشان می‌دهیم که حداقل $n+۲$ نقطه $x_۱ < x_۲ < \cdots < x_{n+۲}$ در بازه $[a,b]$ برای تابع خطا وجود دارد.

برهان خلف: اگر یک مجموعه متناوب بزرگتر شامل $k+۱$ نقطه $x_۰, ..., x_k$ برای p_n^* وجود داشته باشد که در رابطه

$$a \leq x_۰ < x_۱ < ... < x_{k-۱} < x_k \leq b$$

صدق کند، نشان می‌دهیم که $k \geq n+۱$.

فرض کنیم $k \leq n$ باشد، قرار می‌دهیم

$$\|f - p_n^*\| = \rho$$

حال فرض کنید $t_\circ, ..., t_s$، نقاط انتخابی بازه $[a, b]$ باشند به طوری که برای هر $\xi, \eta \in [t_j, t_{j+1}]$ و $j = \circ, ..., s - ۱$، $a = t_\circ < t_۱ < ... < t_s = b$ باشد و $e(x) = f(x) - p_n^*(x)$ در رابطه زیر صدق کند.

$$|e(\xi) - e(\eta)| < ۱/۲\rho \qquad (۲.۲)$$

حال اگر زیر بازه $[t_j, t_{j+۱}]$ شامل نقطه t و $e(t) = \rho$ باشد، زیر بازه را مثبت و اگر $e(t) = -\rho$ زیر بازه را منفی در نظر می‌گیریم. از رابطه ۲.۲ نتیجه می‌گیریم در تمام زیر بازه‌های مثبت $e(x) > \circ$ و در تمام زیر بازه‌های منفی $e(x) < \circ$ است.
حال فرض کنیم که $[t_j, t_{j+۱}]$ زیر بازه‌های مثبت و منفی باشند که به‌صورت $I_۱, I_۲, ..., I_N$ مرتب شده باشند و $I_۱$ زیر بازه مثبت باشد. بنابراین $I_۱, I_۲, ..., I_N$ را به زیر بازه‌هایی به‌صورت زیر تقسیم می‌کنیم.

زیر بازه‌های مثبت	$\{I_۱, I_۲, ..., I_{K_۱}\};$
زیر بازه‌های منفی	$\{I_{k_۱+۱}, I_{k_۱+۲}, ..., I_{K_۲}\};$
زیر بازه‌های مثبت	$\{I_{k_۲+۱}, I_{k_۲+۲}, ..., I_{K_۳}\};$
$\vdots$	
زیر بازه‌های $(-)^m$	$\{I_{k_m+۱}, I_{k_m+۲}, ..., I_{k_{m+۱}}\};$

که هر زیر بازه شامل حداقل یک عضو باشد و $۲ \leq m + ۱ \leq n + ۱$.
واضح است که بازه‌های I_{k_j} و $I_{k_j+۱}$ برای $j = ۱, .., m$ مجزا هستند. بنابراین می‌توانیم نقاط $z_۱, ..., z_m$ را طوری انتخاب کنیم که برای هر $x \in I_{k_j}$، $z_j > x$ و برای هر $x \in I_{k_j+۱}$، $z_j > x$ باشد.
حال اگر قرار دهیم

$$q(x) = (z_۱ - x)(z_۲ - x)...(z_m - x)$$

آنگاه $q \in P_n$ است و $q(x)$ در هر I_j برای $j = ۱, ..., N$ با $e(x)$ هم‌علامت است. حال اگر R را مجموعه تمام زیر بازه‌هایی که مثبت و منفی نیستند قرار دهیم، آنگاه

$$\max_{x \in R} |e(x)| = \rho' < \rho$$

در نتیجه $\|q\| = M$.

حال $\lambda > 0$ را طوری در نظر می‌گیریم که $\lambda M < \min(\rho - \rho', \rho/2)$

ادعا می‌کنیم که $p(x) = \lambda q(x) + p_n^*(x) \in P_n$ تقریبی بهتر از $p_n^*(x)$ برای تابع f است. از طرفی اگر $x \in R$ باشد آنگاه

$$|f(x) - p(x)| = |e(x) - \lambda q(x)| \le |e(x)| + \lambda |q(x)| \le \rho' + \lambda M < \rho \qquad (۳.۲)$$

از سوی دیگر اگر برای $j = 1, ..., N$، $x \in I_j$ باشد آنگاه $e(x)$ و $\lambda q(x)$ علامت‌های یکسانی دارند. پس داریم

$$|e(x)| > \rho/2 > |\lambda q(x)|$$

و در نتیجه

$$|f(x) - p(x)| = |e(x) - \lambda q(x)| = |e(x)| - |\lambda q(x)| \le \rho - |\lambda q(x)| < \rho \qquad (۴.۲)$$

با توجه به رابطه ۳.۲ و رابطه ۴.۲ داریم

$$\|f - p\| < \rho = \|f - p_n^*\|$$

که این رابطه با بهترین تقریب بودن p_n^* در تناقض است، پس قضیه برقرار است. □

قضیه فوق به ما نمی‌گوید که مجموعه‌های متناوب شامل $n+2$ نقطه برای تابع خطای $f - p_n^*$ یکتا هستند، بلکه نشان می‌دهد که تناوب‌های $f - p_n^*$ در بیشتر از $n+2$ نقطه ممکن نیست رخ دهد.

به‌طور مثال، ۰بهترین تقریب برای تابع $f(x) = \sin 4x$ روی بازه $[-\pi, \pi]$ است و بنابراین $f - p_0^*$، ۱۶ مجموعه متناوب متمایز شامل دو نقطه دارد.

در واقع این قضیه بیان می‌کند که $p_0^* = p_1^* = \cdots = p_5^* = p_6^* = 0$ بهترین تقریب برای $\sin 4x$ روی بازه $[-\pi, \pi]$ هستند و بنابراین $\max |\sin 4x| = 1$ و $\sin 4x$ روی بازه فوق ۸ بار متناوب می‌شود. اما $p_7 = 0$ بهترین تقریب نیست.

در ادامه با بیان قضیه‌ای نشان می‌دهیم که یکتایی بهترین تقریب تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌ها برقرار است. برای بیان قضیه یکتایی ابتدا نشان می‌دهیم که مجموعه بهترین تقریب‌ها یک مجموعه محدب است.

قضیه ۱۰.۱.۲. اگر V را فضای توابع پیوسته روی بازه $[a, b]$ در نظر بگیریم و $v \in V$ و W زیر فضایی از V باشد، مجموعه بهترین تقریب‌های $v \in V$ در W را با W^* نشان می‌دهیم، و W^* یک مجموعه محدب است.

برهان. اگر W^* تهی باشد، به انتفای مقدم قضیه برقرار است.

فرض کنید $w_1^*, w_2^* \in W^*$ باشد آنگاه اگر قرار دهیم

$$\|v - w_1^*\| = \|v - w_2^*\| = \rho$$

و فرض کنیم $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ موجود باشد به‌طوری که $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ آنگاه

$$\begin{aligned}\|v - (\lambda_1 w_1^* + \lambda_2 w_2^*)\| &= \|\lambda_1(v - w_1^*) + \lambda_2(v - w_2^*)\| \\ &\leq \lambda_1\|v - w_1^*\| + \lambda_2\|v - w_2^*\| = (\lambda_1 + \lambda_2)\rho = \rho\end{aligned}$$

بنابراین $\lambda_1 w_1^* + \lambda_2 w_2^* \in W^*$ است، بنابراین W^* محدب است. □

قضیه ۲.۱.۱۱. اگر p_n^* بهترین تقریب تابع $f \in C[a,b]$ در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_n باشد، آنگاه p_n^* یکتاست. به‌عبارت دیگر اگر $p \in P_n$ و $p \neq p_n^*$ باشد داریم

$$\|f - p_n^*\| < \|f - p\|$$

برهان. فرض کنید $\|f - p\| = \|f - p_n^*\| = E_n(f)$ باشد، آنگاه طبق قضیه ۲.۱.۱۰،مجموعه بهترین تقریب‌ها محدب است پس

$$q = \frac{p + p_n^*}{2}$$

نیز بهترین تقریب برای تابع f است.

فرض کنید که $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ مجموعه متناوبی برای تابع خطا یعنی $f - q$ باشد. بنابراین عدد صحیحی مانند l وجود دارد که برای $j = 0, \ldots, n+1$ داریم

$$\frac{f(x_j) - p(x_j)}{2} + \frac{f(x_j) - p_n^*(x_j)}{2} = (-1)^{l+j} E_n(f)$$

در نتیجه

$$\frac{|f(x_j) - p(x_j)|}{2} \leq \frac{E_n(f)}{2}$$

و

$$\frac{|f(x_j) - p_n^*(x_j)|}{2} \leq \frac{E_n(f)}{2}$$

و این دو رابطه برقرار است اگر و فقط اگر

$$f(x_j) - p(x_j) = f(x_j) - p_n^*(x_j) = (-1)^{l+j} E_n(f) \qquad j = 0, 1, \ldots, n+1$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$p(x_j) = p_n^*(x_j) \qquad j = 0, 1, \ldots, n+1$$

که نتیجه می‌دهد $p = p_n^*$. □

قضیه ۱۲.۱.۲. قضیه هان-باناخ[۲] فرض کنید $\mathbf{X}$ فضای خطی نرم‌دار و V زیرفضایی از $\mathbf{X}$ و f تابعکی پیوسته روی V باشد. آن‌گاه f را می‌توان به تابعکی خطی وکراندار مانند L بر $\mathbf{X}$ طوری توسیع داد که

$$\|L\| = \|f\|$$

و

$$L\mid_V = f$$

برهان. اثبات در [۱۹] بیان شده است. □

قضیه هان-باناخ وجود تابعک خطی L روی فضای $\mathbf{X}$ را تضمین می‌کند، بنابراین قضیه‌ای که در ادامه بیان می‌شود با توجه به قضیه هان-باناخ برقرر می‌شود.

قضیه ۱۳.۱.۲. فرض کنید $\mathbf{X}$ یک فضای نرم‌دار و V زیر فضایی از آن باشد و نیز فرض کنید

$$\mathcal{Q}_V(f) = \inf_{h\in V} \|h - f\|$$

آنگاه برای هر $f \in \mathbf{X}$ یک تابعک خطی L روی $\mathbf{X}$ با ویژگی‌های

۱.

$$L(h) = \circ \qquad \forall h \in V \tag{۵.۲}$$

۲.

$$\|L\| = \sup_{\substack{h\in\mathbf{X}\\ \|h\|=1}} |L(h)| \leq 1 \tag{۶.۲}$$

وجود دارد به‌طوری که

$$\mathcal{Q}_V f = L(f).$$

برهان. فرض کنیم $x \in \mathbf{X}$ و S، زیرفضای تولید شده توسط V و x باشد. همچنین فرض کنیم

$$d(x, V) = d > \circ$$

تابعک خطی φ را روی S برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و هر $h \in V$ دلخواه به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi(\alpha x + h) = \alpha d$$

واضح است که $\varphi(h) = \circ$ و $\varphi(x) = d$.

[۲] Hahn–Banach

می‌دانیم که

$$\|\varphi\| = \sup \frac{|\varphi(\alpha x + h)|}{\|\alpha x + h\|} = \sup \frac{|\alpha| d}{|\alpha|.\|(x + \frac{h}{\alpha}\|} = \sup \frac{d}{\|(x + \frac{h}{\alpha})\|}$$

حال اگر قرار دهیم $h' = \frac{h}{\alpha}$، و می‌دانیم که $d = d(x, V) = \inf\{\|x - y\|; y \in V\}$ پس $d \leq \|x + h'\|$ و با قرار دادن در نامساوی بالا داریم:

$$\|\varphi\| \leq ۱$$

حال با استفاده از قضیه هان-باناخ می‌توان φ را به تابعکی خطی مانند L روی $\mathbf{X}$ گسترش داد.
□

تعریف ۱۴.۱.۲. مجموعه مستقل خطی از توابع مانند $\{\varphi_i(x)\}_{x\in \mathbf{X}}$، $(۱ \leq i \leq n)$ را یک مجموعه چبیشف گوییم هرگاه هر ترکیب خطی از $\varphi_i(x)$ مانند $\phi(x) = \sum_{i=۱}^{n} a_i\varphi_i(x)$ و $a_i \in \mathbb{R}$ در $\mathbf{X}$ دارای حداکثر $n - ۱$ ریشه باشد.

لازم به ذکر است که فضای $\phi(x)$ ایجاد شده توسط مجموعه چبیشف $\varphi_i(x)$، $(i = ۱, ۲, \dots, n)$ را فضای هار [۳] گوییم.

$$\text{فضای هار} := \{\phi(x) : \phi(x) = \sum_{i=۱}^{n} a_i\varphi_i(x), \quad a_i \in \mathbb{R}\}$$

اگر یک مجموعه چبیشف داشته باشیم که یکی از φ_iها تابع ثابت $h(x) = ۱$ باشد، این مجموعه را یک مجموعه چبیشف با عنصر واحد گوییم.

قضیه ۱۵.۱.۲. شرط هار معادل با این شرط است که به ازای هر مجموعه چبیشف $\varphi_i(x)$ و n نقطه مجزای $x_i \in \mathbf{X}$، $i = ۱, \dots, n$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$\begin{vmatrix} \varphi_۱(x_۱) & \dots & \varphi_n(x_۱) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_۱(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq ۰$$

برهان. فرض کنید $\phi = span\{\varphi_۱, \dots, \varphi_n\}$، لذا اگر $\varphi(x) \in \phi$، آن‌گاه داریم $\varphi(x) = \sum_{i=۱}^{n} a_i\varphi_i(x)$.
فرض کنید φ' زیرفضای تولید شده توسط $\varphi(x)$ها باشد.
زیرفضای φ' در شرایط هار صدق می‌کند اگر و فقط اگر برای $\alpha_k \in \mathbb{R}$، $\varphi' = \sum_{k=۱}^{n} \alpha_k\varphi_k(x)$ با بیش‌تر از $x_۱, \dots, x_n$ ریشه مجزا در $\mathbf{X}$ متحد با صفر باشد، یعنی

$$\varphi(x_i) = \sum_{k=۱}^{n} \alpha_k\varphi_k(x_i) = ۰$$

[۳] Haar

در نتیجه تمام α_kها صفر هستند، که با مستقل خطی بودن $\varphi_k(x)$ در تناقض است. بنابراین دترمینان مخالف صفر است. $\square$

فرض کنید V یک زیرفضای n بعدی در $C[a,b]$ باشد که در شرایط هار صدق می‌کند، طبق قضایای بیان شده، روی V تابعک‌های خطی که در شرایط ۵.۲ صدق کند، وجود دارد.

حال $n+1$ نقطه متمایز x_i را انتخاب کرده و برای $\lambda_i \in \mathbb{R}$ و $h \in V$ تابعک خطی

$$L(h) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i h(x_i)$$

را می‌سازیم که نرم این تابعک خطی به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\|L\| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i|$$

اکنون اگر $h_v(x)$، $(v = 1, 2, \ldots, n)$ پایه‌ای برای فضای V باشد، با توجه به شرایط هار $h_v(x)$ در دو خاصیت زیر صدق می‌کند.

$$\sum_{i}^{n+1} \lambda_i h_v(x_i) = 0, \qquad v = 1, 2, \ldots, n \tag{۷.۲}$$

$$\sum_{i}^{n+1} |\lambda_i| = 1 \tag{۸.۲}$$

با این شرایط که λ_1 حقیقی و مثبت و برای $i = 1, \ldots, n+1$، $\lambda_i \neq 0$ باشند.

ملاحظه می‌شود که تابعک خطی به‌دست آمده در شرایط ۵.۲ و ۶.۲ صدق می‌کند، بنابراین

$$|L(f)| \leq \mathcal{Q}_V(f)$$

در نتیجه به هر تابعک خطی $L(f)$، یک $h \in V$ که در خاصیت زیر صدق کند، مربوط می‌شود.

$$h(x_i) + \lambda \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} = f(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{۹.۲}$$

قضیه ۱۶.۱.۲. تابع $h_0(x)$ بهترین تقریب تابع $f(x)$ نسبت به V است اگر و فقط اگر برای هر $h(x) \in V$ نامساوی

$$\min_{x \in D} (f(x) - h_0(x)) h(x) \leq 0$$

برقرار باشد، که در این رابطه D، مجموعه نقاط اکسترمم خطای تقریب f یعنی $f(x) - h_0(x)$ است.

برهان. اثبات در قضیه ۱۸، [۱۳] بیان شده است. $\square$

قضیه ۱۷.۱.۲. فرض کنید تابع $h(x)$، وابسته به تابعک خطی $L(f)$ به‌صورت زیر تعریف شود.

$$h(x_i) + \lambda\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} = f(x_i), \qquad i = ۱, ۲, \dots, n + ۱$$

که در این رابطه λ_iها می‌توانند اعداد حقیقی یا مختلطی باشند که در شرط زیر صدق می‌کنند.

$$\sum_{i=۱}^{n+۱} |\lambda_i| = ۱$$

آنگاه تابع $h(x)$ دقیقا با بهترین تقریب تابع $f(x)$ در مجموعه چندجمله‌ای‌ها روی مجموعه نقاط x_i ($i = ۱, ۲, \dots, n + ۱$) برابر است.

برهان. فرض خلف، اگر تابع h بهترین تقریب f نباشد، آنگاه با استفاده از قضیه ۱۶.۱.۲، یک $h_\circ \in V$ وجود دارد به‌طوری که برای $i = ۱, ۲, \dots, n + ۱$ داریم

$$(f(x_i) - h(x_i))h_\circ(x_i) > \circ$$

حال با استفاده از این نامساوی و رابطه ۹.۲ و قرار دادن $\tilde{h} = \lambda h_\circ$ نتیجه می‌شود که برای $i = ۱, ۲, \dots, n + ۱$

$$\lambda_i \tilde{h}(x_i) > \circ$$

و بنابراین

$$L(\tilde{h}) > \circ$$

و این رابطه نشان می‌دهد که

$$L(\tilde{h}) \neq \circ$$

که با رابطه ۷.۲ در تناقض است. □

قضیه ۱۸.۱.۲. فرض کنید تابع $f \in C[-۱, ۱]$، و در بازه $(-۱, ۱)$ دارای مشتق مرتبه $n + ۱$ام باشد و $f^{(n+۱)}(x)$ روی بازه $(-۱, ۱)$ ناصفر باشد. آنگاه فضای خطی تولید شده توسط توان‌های x^v، ($v = \circ, ۱, \dots, n$) و تابع $f(x)$ در شرایط هار صدق می‌کنند.

برهان. فرض می‌کنیم عکس این مطلب برقرار باشد، بنابراین تابع

$$f(x) + \sum_{v=\circ}^{n} \alpha_v x^v$$

با حداقل $n + ۲$ صفر متمایز در بازه $[-۱, ۱]$ وجود دارد. آنگاه با به کار بردن متوالی قضیه رول به تناقض می‌رسیم. □

قضیه ۱۹.۱.۲. فرض کنید تابع $f(x)$ در شرایط قضیه ۱۷.۱.۲ صدق کند، و نیز فرض کنید $\{x_i\}$ مجموعه نقاط متناوب در تقریب تابع f توسط چندجمله‌ای‌ها باشد که به صورت زیر مرتب شده باشند

$$-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$$

آنگاه برای $i = 1, 2, \ldots, n$ مجموعه نقاط متناوب تقریب تابع f در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$-\cos\frac{(i-1)\pi}{n} \leq x_i \leq -\cos\frac{i\pi}{n}$$

برهان. اثبات در قضیه ۸۱ [۱۳] بیان شده است. □

تعریف ۲۰.۱.۲. توابع هولومورفیک توابعی هستند که بر روی یک زیر مجموعه باز از صفحه مختلط $\mathbb{C}$ تعریف می‌شوند و در هر نقطه از صفحه مشتق مختلط دارند.

هولومورفیک بودن در نقطه‌ای مانند a به معنی نه تنها مشتق‌پذیری در آن نقطه بلکه مشتق‌پذیری در هر نقطه، درون یک دیسک باز به مرکز a در صفحه مختلط است.

اگر مجموعه D را زیرمجموعه بسته و کران‌داری از صفحه مختلط در نظر بگیریم، $A(D)$ را فضای خطی توابع تحلیلی $f(z)$ می‌نامیم که دامنه این توابع شامل مجموعه D باشد.

گلفند[۴] در [۲۱] نشان داده است که برای هر $f \in A(D)$ می‌توانیم منحنی ساده و بسته‌ای مانند γ پیدا کنیم به‌طوری که شامل دامنه f و نیز شامل مجموعه D باشد.

در تقریب توابع، گاهی نیازمند این هستیم که یک تابع را روی یک منحنی تقریب بزنیم. برای تقریب روی منحنی‌ها، شرط پیوسته بودن توابع کفایت می‌کند. برای توضیح بیشتر در این مورد والش [۵] در [۲۰] نشان داد که اگر γ یک منحنی در صفحه Z باشد و نقطه $z = 0$ درون منحنی واقع شود، آنگاه مجموعه توابع

$$\sum_{v=-m}^{n} a_v z^v \quad n = 0, 1, \ldots \qquad m = 1, 2, \ldots$$

در $C(\gamma)$ چگال هستند، که $C(\gamma)$ فضای خطی توابع پیوسته مانند $f(z)$ روی منحنی γ است.

با توجه به این مطالب ما می‌توانیم هر تابع پیوسته $f(z)$ را روی منحنی γ به‌وسیله چندجمله‌ای‌ها تقریب بزنیم.

تعریف ۲۱.۱.۲. فرض کنید $P_v(x)$، یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه v و بر حسب x باشد، اگر $P_v(x)$ به منحنی γ وابسته باشد به این چندجمله‌ای، چندجمله‌ای فابر[۶] گوییم.

---

[۴] Gelfond
[۵] Walsh
[۶] Faber

اگر منحنی γ دایره $|z-z_\circ| = r$ باشد، آنگاه این چندجمله‌ای‌ها به فرم $(z-z_\circ)^v$ هستند. و اگر γ مرز یک بیضی باشد آنگاه چندجمله‌ای‌های فابر با چندجمله‌ای‌های چبیشف یکی می‌شوند.

با توجه به تعریف ۲۱.۱.۲، اگر $f \in A[a,b]$ باشد، آنگاه بیضی‌هایی با کانون‌های $-۱,۱$ وجود دارد به‌طوری که تابع f درون آن‌ها هولومورفیک است.

اگر a و b نیم‌محورهای یک بیضی باشند آنگاه این بیضی با مقدار $x = a+b$ که $x > ۱$ تعریف می‌شود. و این بیضی را به اختصار با علامت $\mathfrak{E}_x$ نشان می‌دهیم.

حال اگر $q = q(f)$ را به‌عنوان سوپریمم تمام xهایی در نظر بگیریم که تابع $f(z)$ در نقاط درونی بیضی $\mathfrak{E}_q$ هولومورفیک باشد، بیضی $\mathfrak{E}_q$ را بیضی‌گونی از تابع f می‌نامیم.

قضیه ۲۲.۱.۲. فرض کنید $P_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد به‌طوری که

$$\max_{\substack{x \text{ حقیقی} \\ x\in[-۱,۱]}} |P_n(x)| = P$$

آنگاه برای هر بیضی‌گون $\mathfrak{E}_z$، $z > ۱$ نامساوی زیر برقرار است.

$$\max_{x\in\mathfrak{E}_z} |P_n(x)| \le Pz^n$$

است.

برهان. اثبات در قضیه ۷۴ [۱۳]. $\square$

قضیه ۲۳.۱.۲. فرض کنید $f(x) \in C[-t_\circ, t_\circ]$ و $t_\circ > \circ$ باشد، و برای هر $x \in [-t_\circ, t_\circ]$، $f^{(n+۱)}(x) \neq \circ$ باشد. به‌علاوه فرض کنید $P_n(x) = P_n(x,t)$، بهترین تقریب تابع $f(tx)$ در بازه $-۱ \le x \le ۱$ باشد که $\circ < t \le t_\circ$. ونیز فرض کنید نقاط متناوب $\xi_i(t)$ به‌صورت زیر مرتب شده باشند.

$$-۱ = \xi_\circ(t) < \xi_۱(t) < \cdots < \xi_n(t) < \xi_{n+۱}(t) = ۱$$

آنگاه خطای تقریب تابع $f(tx)$ به صورت زیر است.

$$E_n(f(tx)) = t^{n+۱}\frac{|f^{(n+۱)}(\circ)|}{۲^n(n+۱)!}(۱ + O(t^۲))$$

$$\begin{aligned} f(tx) - P_n(x) &= t^{n+۱}\frac{f^{(n+۱)}(\circ)}{۲^n(n+۱)!}T_{n+۱}(x) \\ &+ \frac{t^{n+۲}}{۲^n(n+۱)!}f^{(n+۲)}(\circ)(x^۲-۱)U_n(x) + O(t^{n+۳}) \end{aligned} \qquad (۱۰.۲)$$

و

$$\xi_i(t) = x_i^{(n)} + t(1 - (x_i^{(n)})^2)\frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+1)(n+2)f^{(n+1)}(0)} + O(t^2)$$

که $i = 0, 1, \dots, n+1$ و منظور از عبارت $O(t^2)$ این است که خطای تقریب از مرتبه t^2 است.
و اگر $t \to 0$،

$$x_i^{(n)} = -\cos\frac{i\pi}{n+1}, \qquad i = 0, 1, \dots, n+1$$

رابطه ۱۰.۲ برای $x \in [-1, 1]$ به‌طور یکنواخت برقرار است.

برهان. اثبات در [۱۳]. □

تعریف ۲۴.۱.۲. می‌دانیم که تناوب‌های $T_n(x)$ شامل نقاط

$$\cos\frac{i\pi}{n} \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

می‌باشد، که ریشه‌های چندجمله‌ای

$$(1 - x^2)U_{n-1}(x) \qquad (n > 0)$$

نیز هستند.

در بحث‌های قبلی ارتباط بین چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول و دوم را معرفی کرده‌ایم. بطور مثال این رابطه را در معادلات دیفرانسیلی زیر مشاهده می‌کنیم.

اگر در مورد چندجمله‌ای چبیشف نوع اول معادله زیر را داشته باشیم

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

آنگاه با استفاده از چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم $U_n(x)$ می‌توانیم برابری زیر را نیز داشته باشیم

$$(1 - x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n+2)U_n(x) = 0 \qquad (۱۱.۲)$$

قضیه ۲۵.۱.۲. فرض کنید V یک فضای n بعدی از فضای $C[a, b]$ باشد که در شرایط هار صدق می‌کند، علاوه بر این فرض کنید g بهترین تقریب تابع f در فضای V باشد، آنگاه $n+1$ نقطه x_i که به صورت صعودی مرتب شده باشند، وجود دارد به‌طوری که تابع خطای تقریب $\varepsilon(x) = f(x) - g(x)$ در رابطه

$$|\varepsilon(x_i)| = \|f - g\|$$

صدق می‌کند و برای $i = 1, 2, \dots, n+1$ و $v = 1, 2, \dots, n$،

$$\varepsilon(x_i) + \varepsilon(x_{v+1}) = 0 \qquad (۱۲.۲)$$

که مجموعه نقاط $\{x_i\}$ تناوب‌های تابع $f(x)$، نامیده می‌شود و تابع $g(x)$ به‌طور یکتا با ویژگی‌های ۱۲.۲ ساخته می‌شود.

با توجه به یکتا بودن $(P_n(x))$ یعنی بهترین تقریب تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌ها، و با استفاده از قضیه ۲۵.۱.۲، $n+2$ نقطه متمایز x_i وجود دارد که

$$-1 \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} \le 1$$

به طوری که برای $i = 0, 1, \ldots, n+1$،

$$P_n(x_i) + (-1)^i \lambda = f(x_i) \tag{۱۳.۲}$$

که در آن

$$|\lambda| = E_n(f) = \|P_n - f\|.$$

قضیه ۲۶.۱.۲. قضیه بولتسانو-وایرشتراس [7]: هر دنباله کران‌دار در $\mathbb{R}$، یک زیردنباله همگرا دارد.

اثبات این قضیه در [۳] بیان شده است.

قضیه ۲۷.۱.۲. برنشتاین در [۱۵] نشان داده است که اگر تابع $f \in C[-1,1]$ باشد، و شامل بیضی‌گون $\mathfrak{E}q$ باشد که $q > 1$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{E_n(f)} = \frac{1}{q}.$$

نتیجه ساده‌ای که از قضیه ۲۷.۱.۲ حاصل می‌شوداین است که برای دو تابع f و g که عضو $C[-1,1]$ باشند و هر دو تابع شامل بیضی‌گون $\mathfrak{E}_q$ هستند، تفاضل دو تابع یعنی $f-g$ دارای بیضی‌گون $\mathfrak{E}_{q_1}$ با $q_1 > q$ است بنابراین با توجه به قضیه ۲۷.۱.۲ اگر داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(g)} = \frac{1}{q} \tag{۱۴.۲}$$

آنگاه

$$E_n(g) - E_n(f-g) \le E_n(f) \le E_n(g) + E_n(f-g)$$

که نتیجه می‌شود

$$E_n(f) = E_n(g)(1 + O(1)) \tag{۱۵.۲}$$

در نهایت با استفاده از قضیه ۲۷.۱.۲ اگر $n \to \infty$، داریم

$$E_n(f-g) = O(E_n(g))$$

[7] Bolzano-Weierstrass

قضیه ۲۸.۱.۲. فرض کنید توابع $f, g \in C[a,b]$، و شامل بیضی‌گون $\mathfrak{E}_q$ باشند به‌طوری که در رابطه $q(f-g) > q$ صدق می‌کنند. فرض کنید رابطه ۱۴.۲ برقرار باشد و برای $n+۱$ ،$i = ۰, ۱, \ldots, n+۱$، x_i تناوب‌های تابع $g(x)$ در تقریب توسط چندجمله‌ای‌ها باشد. آنگاه اگر $n \to \infty$، تابع خطی $L_n(f)$ به‌صورت زیر خواهد بود.

$$|L_n(f)| = E_n(f)(۱ + O(۱))$$

قبل از این که به بیان الگوریتم بپردازیم لازم است که بهترین تقریب تابع $\frac{۱}{x-a}$ را در مجموعه چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n به‌دست آوریم، به این دلیل که از روابطی که طی این فرآیند حاصل می‌شود، در حل برخی مثال‌ها استفاده خواهیم کرد.

مثال ۲۹.۱.۲. هدف از این مثال یافتن تقریب تابع

$$f(x) = \frac{۱}{x-a}, \qquad \text{حقیقی} a, \qquad a > ۱ \tag{۱۶.۲}$$

روی بازه $[-۱, ۱]$ در مجموعه چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n است.

طبق قضیه تناوبی چبیشف $n+۲$ نقطه اکسترمم برای خطای تقریب، یعنی $f(x) - P_n(x)$ وجود دارد. و به‌علاوه نقاط ±۱ به تناوب تابع $f(x)$ وابسته است.

هم‌چنین برنشتاین در [۱۵] برای تابع خطای تقریب $f(x) - P_n(x)$ نمایش مثلثاتی به‌صورت زیر ارائه کرده است.

$$\frac{۱}{x-a} - P_n(x) = \frac{(a - \sqrt{a^۲ - ۱})^n}{a^۲ - ۱} \cos(n\varphi + \delta) \tag{۱۷.۲}$$

که در آن

$$x = \cos\varphi, \qquad \frac{ax - ۱}{x - a} = \cos\delta$$

با توجه به این رابطه نتیجه می‌شود که خطای تقریب برابر

$$E_n(\frac{۱}{x-a}) = \frac{(a - \sqrt{a^۲ - ۱})^n}{a^۲ - ۱} \tag{۱۸.۲}$$

هم‌چنین چیسر [۸] در [۱۴] نشان داده است که می‌توانیم رابطه ۱۷.۲ را به صورت زیر بازنویسی کنیم. یعنی خطای تقریب تابع f را به‌صورت زیر بیان کرده است.

$$\frac{۱}{x-a} - P_n(x) = \frac{M}{۲}\left\{v^n \frac{\alpha - v}{۱ - \alpha v} + v^{-n} \frac{۱ - \alpha v}{\alpha - v}\right\} \tag{۱۹.۲}$$

که در این رابطه

$$x = \frac{۱}{۲}\left(v + \frac{۱}{v}\right), \qquad |v| = ۱$$

[۸] Achieser

$$\alpha = a - \sqrt{a^{۲} - ۱}, \quad \text{به طوری که}\ |\alpha| < ۱, \quad \alpha = \frac{۱}{۲}\left(\alpha + \frac{۱}{\alpha}\right),$$

و

$$M = E_n\left(\frac{۱}{x-a}\right) = \frac{۴\alpha^{n+۲}}{(۱-\alpha^{۲})^{۲}} = \frac{(a-\sqrt{a^{۲}-۱})^n}{a^{۲}-۱}$$

از این روابط نتیجه می‌شود که تناوب‌های تابع $\frac{۱}{x-a}$ شامل نقاط ±۱ هستند، که میناردس [۹] در [۱۳] نشان داد که این نقاط ریشه‌های چندجمله‌ای

$$n\sqrt{a^{۲}-۱}T_n(x) + (ax-۱)T'_n(x) \tag{۲۰.۲}$$

نیز می‌باشند. که این رابطه همان بسط تابع $\frac{۱}{x-a}$ با چندجمله‌ای چبیشف نوع اول می‌باشد.

۲.۱.۲ روش‌های مستقیم

در این بخش ابتدا به معرفی روش‌های ابتدایی به دست آوردن بهترین تقریب توابع می‌پردازیم، سپس روش‌های پیشرفته تری از جمله الگوریتم رمس را برای تقریب توابع توسط چندجمله‌ای‌ها ارائه می‌دهیم و در ادامه با بیان مثالی به مقایسه این روش‌ها می‌پردازیم.

بهترین روش مستقیم و شناخته شده برای محاسبه تقریب با چندجمله‌ای‌ها، روشی به نام تلسکوپی است، که به‌صورت زیر بیان می‌شود .

فرض کنید تابع $f \in C[-۱,۱]$ و با استفاده از چندجمله‌ای چبیشف، به‌صورت زیر بسط داده شود،

$$f(x) = \sum_{v=۰}^{\infty} \alpha_v T_v(x)$$

در این صورت چندجمله‌ای که به‌صورت زیر بیان شود

$$Q_n(x) = \sum_{v=۰}^{n} \alpha_v T_v(x)$$

تقریبی به بهترین تقریب تابع $f(x)$ را فراهم می‌کند.

این روش با استفاده از قضیه ۲۲.۱.۲ برای رده‌های معینی از توابع تحلیلی پیشنهاد شده است. در بیشتر موارد زمانی از این روش استفاده می‌کنیم که نتایج عددی قابل قبولی تولید کند.

در ادامه روش‌هایی را ارائه می‌دهیم که نسبت به این روش در مرتبه بالاتر و حتی مهم‌تری قرار می‌گیرد و روش‌های کاربردی‌تری هستند.

[۹] Meinardus

۲.۲ الگوریتم رمس

الگوریتم رمس یک الگوریتم تکراری است. که اولین تکرار را با یک مجموعه $n+۱$ نقطه‌ای در بازه داده شده شروع می‌کنیم.

در هر تکرار دو گام محاسبه می‌شود. در گام اول ضرایب را به‌گونه‌ای محاسبه می‌کنیم که تابع خطا در $(n+۱)$ نقطه داده شده مقدارهایی برابر وعلامت‌هایی متناوب داشته باشد. اگر با این مجموعه نقاط به این هدف نرسیدیم به گام دوم می‌رویم و مجموعه جدیدی از نقاط ، که این شرایط را برآورده کند جستجو می‌کنیم. در پایان این الگوریتم مقدار تابع خطا در مجموعه نهایی که شامل $(n+۱)$ نقطه است، قدر مطلق ماکسیمم خطای تقریب را نشان می‌دهد، هم‌چنین دنباله‌ای از توابع به‌دست می‌آید که به تابع مورد نظر همگراست. در ادامه به شرح کامل این الگوریتم می‌پردازیم.

برای شروع الگوریتم با مجموعه $M_۰$ شامل $n+۱$ نقطه دوبه دو متمایز $x_i^{(۰)} \in [a,b]$ شروع می‌کنیم که به‌طور صعودی به‌صورت زیر مرتب شده‌اند.

$$a \leq x_۱^{(۰)} < x_۲^{(۰)} < \cdots < x_n^{(۰)} < x_{n+۱}^{(۰)} \leq b$$

متناظر با این نقاط تابع $h_۰(x) \in V$ را طوری در نظر می‌گیریم که در شرایط زیر صدق کند.

$$h_۰(x_i^{(۰)}) + (-۱)^i \lambda_۰ = f(x_i^{(۰)}) \qquad , i = ۱, ۲, \ldots, n+۱ \tag{۲۱.۲}$$

که رابطه ۲۱.۲ فرم یک سیستم خطی از معادلات برای ضرایب $h_۰(x)$، و مقادیر $\lambda_۰$ است. هم‌چنین

$$\lambda_۰ = L_۰(f)$$

یک تابعک خطی است که در ویژگی‌های ۷.۲ و ۸.۲ صدق می‌کند و بنابراین

$$|L_۰(f)| \leq \inf_{h \in V} \|h - f\|$$

با استفاده از قضیه ۱۷.۱.۲ و مقایسه با رابطه ۱۳.۲، تابع $h_۰(x)$ بهترین تقریب $f(x)$ روی مجموعه $M_۰$ است.

اکنون اگر $\|h_۰ - f\| = |L_۰(f)|$ باشد، $h_۰(x)$، بهترین تقریب $f(x)$ در بازه $[a,b]$ است، واگر $\|h_۰ - f\| > |L_۰(f)|$ باشد یک نقطه $\xi \in [a,b]$ وجود دارد به‌طوری که

$$|h_۰(\xi) - f(\xi)| > |L_۰(f)|$$

هدف از الگوریتم رمس به‌دست آوردن مجموعه جدید $M_۱$ از $M_۰$ است به‌طوری که دوباره شامل $n+۱$ نقطه باشد. و متناظرا تابعک خطی $L_۱(f)$، مقداری بزرگتر از $|L_۰(f)|$ داشته باشد.

برای برآورده شدن این شرایط مجموعه $M_1 = \{x_i^{(1)}\}$ را با ویژگی‌های زیر تعریف می‌کنیم.

۱. برای سهولت در کارقرار می‌دهیم $\varphi_0 = h_0 - f$ که تابع φ_0 در شرایط زیر صدق کند.

$$|\varphi_0(x_i^{(1)})| \geq |L_0(f)| \;, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{۲۲.۲}$$

۲. برای حداقل یک عدد صحیح مانند $i = i_0$ داریم

$$|\varphi_0(x_{i_0}^{(1)})| > |L_0(f)| \tag{۲۳.۲}$$

۳. برای $i = 1, 2, \ldots, n+1$ و ثابت ξ که برابر با ۱± است داشته باشیم

$$sgn\varphi_0(x_i^{(1)}) = \xi sgn\varphi_0(x_i^{(0)}) \tag{۲۴.۲}$$

قرارداد می‌کنیم زمانی که $\varphi = 0$ باشد، $sgn\varphi = 1$ است.

حال اگر

$$L_0(v) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{(0)} v(x_i^{(0)})$$

و

$$L_1(v) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{(1)} v(x_i^{(1)})$$

توابع خطی متناظر با مجموعه‌های M_0 و M_1 باشند. آن‌گاه

$$\begin{aligned} L_1(f) &= -\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{(1)} \varphi_0(x_i^{(1)}) \\ &= -\xi . \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{(1)} |\varphi_0(x_i^{(1)})| sgn\varphi_0(x_i^{(0)}) \\ &= \pm \sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i^{(1)}| |\varphi_0(x_i^{(1)})| . \xi sgn L_0(f), \end{aligned}$$

و بنابراین

$$|L_1(f)| = |L_0(f)| + \sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i^{(1)}| \left\{ |\varphi_0(x_i^{(1)})| - |L_0(f)| \right\} \tag{۲۵.۲}$$

در نهایت نتیجه می‌شود که

$$|L_1(f)| > |L_0(f)| \tag{۲۶.۲}$$

حال با مجموعه M_1 شروع می‌کنیم، بنابراین تابع $h_1(x) \in V$ وجود دارد به‌طوری که بهترین تقریب تابع $f(x)$ در مجموعه M_1 است.

با ادامه این روند یک الگوریتم توصیف می‌کنیم که بعد از تعدادی متناهی گام، دنباله‌ای از مجموعه‌های M_m و به‌ترتیب توابع خطی متناظرشان L_m، تولید می‌شود، که مقادیر $|L_m(f)|$ به‌طور یکنواخت صعودی هستند.

هم‌چنین این الگوریتم دنباله‌ای از توابع $h_m(x) \in V$ را تولید می‌کند.

هدف ما در ادامه این است که شرایطی را مهیا کنیم که دنباله $h_m(x)$ به بهترین تقریب $f(x)$ در فضای V همگرا می‌شود.

اگر $Q_V(f)$ بهترین تقریب تابع f در فضای V باشد، یعنی $Q_V(f) = inf_{h\in V}\|h-f\|$، هدف ما از ارائه الگوریتم این است که چه مقادیری از توابع خطی $|L_m(f)|$ به $Q_V(f)$همگرا می‌شوند.

قبل از این که به مساله همگرایی بپردازیم روش‌های خاصی برای ساخت مجموعه M_1 ارائه می‌دهیم.

ابتدا روش تغییر واحد را بیان می‌کنیم که این روش ساده شده الگوریتم رمس است.

برای شروع این روش یکی از نقاط M_0 را با نقطه جدیدی که در رابطه ۲۳.۲ صدق کند جایگزین می‌کنیم. برای برقراری رابطه ۲۴.۲ دستور زیر را که روش تغییر واحد نامیده می‌شود به کار می‌بندیم.

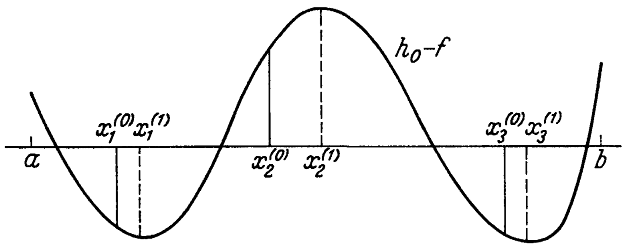
فرض کنید ξ نقطه‌ای باشد که در رابطه زیر صدق کند.

$$|\varphi_0(\xi)| = x > |L_0(f)|$$

آن‌گاه روش تغییر واحد با جدول زیر ارائه می‌شود.

بازه		جایگزین ξ شود
$a \le \xi < x_1^{(0)}$	$sgn\varphi_0(\xi) = sgn\varphi_0(x_1^{(0)})$	$x_1^{(0)}$
$a \le \xi < x_1^{(0)}$	$sgn\varphi_0(\xi) = -sgn\varphi_0(x_1^{(0)})$	$x_{n+1}^{(0)}$
$1 \le i \le n :$		
$x_i^{(0)} \le \xi < x_{i+1}^{(0)}$	$sgn\varphi_0(\xi) = sgn\varphi_0(x_i^{(0)})$	$x_i^{(0)}$
$x_i^{(0)} \le \xi < x_{i+1}^{(0)}$	$sgn\varphi_0(\xi) = -sgn\varphi_0(x_i^{(0)})$	$x_{i+1}^{(0)}$
$x_{n+1}^{(0)} \le \xi < b$	$sgn\varphi_0(\xi) = sgn\varphi_0(x_{n+1}^{(0)})$	$x_{n+1}^{(0)}$
$x_{n+1}^{(0)} \le \xi < b$	$sgn\varphi_0(\xi) = -sgn\varphi_0(x_{n+1}^{(0)})$	$x_1^{(0)}$

در نتیجه با این دستور، احتمال حالتی که $L_0(f) = 0$، باشد به خوبی توصیف شده است، و در این حالت هر نقطه‌ای می‌تواند با ξ جایگزین شود.



شکل ۱.۲: تغییرات همزمان الگوریتم رمس

شماره‌گذاری نقاط طبق مقادیرشان، مجموعه M_1 را تولید می‌کند.
همان طور که در شکل ۱.۲ مشاهده می‌کنید، الگوریتم رمس شامل تغییرات همزمان است.
تابع $\varphi_0(x)$ دارای حداقل n صفر $z_i^{(0)}$ در بازه $[a,b]$ است و برای $i=1,2,\dots,n$ داریم

$$x_i^{(0)} < z_i^{(0)} < x_{i+1}^{(0)}$$

که در این رابطه

$$z_0^{(0)} = a \quad , \quad z_{n+1}^{(0)} = b$$

اکنون در هر بازه

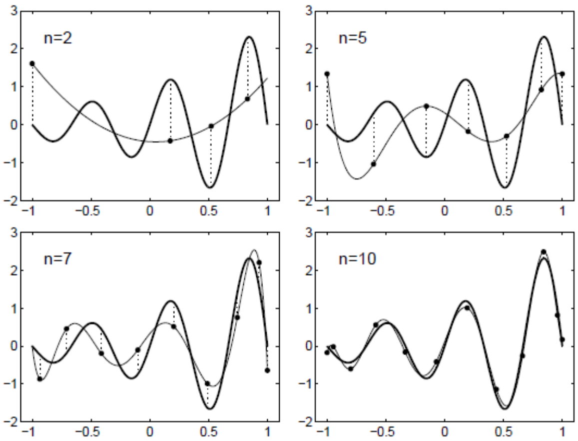
$$J_i = [z_i^{(0)}, z_{i+1}^{(0)}], \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

یک نقطه $x_{i+1}^{(1)}$ را طوری تعیین می‌کنیم که
برای $x \in J$ اگر $sgn\varphi_0(x_{i+1}^{(0)}) = 1$ باشد، آنگاه $\varphi_0(x_{i+1}^{(1)}) \geq \varphi_0(x)$
و
برای $x \in J$ اگر $sgn\varphi_0(x_{i+1}^{(0)}) = -1$ باشد، آنگاه $\varphi_0(x_{i+1}^{(1)}) \leq \varphi_0(x)$
بنابراین به‌طور ضمنی فرض می‌کنیم که $L_0(f) \neq 0$ است.
زمانی که $L_0(f) = 0$، نقاط $x_{i+1}^{(1)}$ به‌عنوان دنباله‌ای از نقاط انتخاب می‌شوند که $\varphi_0(x)$ به‌طور متناوب یک ماکسیمم و یک مینیمم دارد. بنابراین شرایط ۲۲.۲ و ۲۳.۲ و ۲۴.۲ برای مجموعه M_1 برقرار است. بنابراین در الگوریتم رمس، نقطه‌ای مانند ξ در مجموعه M_1 به گونه‌ای تولید می‌شود که

$$|\varphi_0(\xi)| = \|\varphi_0\|.$$

و این رابطه نشان می‌دهد که تابع خطا در نقطه ξ در علامت متناوب می‌شود.
در شکل ۲.۲ روند محاسبه بهترین تقریب تابع

$$f(x) = \frac{\sin(3\pi x)}{\exp(x)}$$



شکل ۲.۲: مراحل الگوریتم رمس

در مجموعه چندجمله‌ای‌ها، با استفاده از الگوریتم رمس برای مراحل ۲ و ۵ و ۷ و ۱۰ نشان داده شده است.

همانطورکه ملاحظه می‌کنیم نقطه‌ها که تعداد آن‌ها در این شکل به ترتیب ۴ و ۷ و ۹ و ۱۲ می‌باشد، نوسانات خطای تقریب $f - p^*$ را در مراحل مختلف، و نقطه‌چین‌های عمودی خطاهای متناظر را نشان می‌دهند.

قضیه‌ای که در ادامه بیان می‌شود، قضیه همگرایی است که وجود الگوریتم رمس را نتیجه می‌دهد وبیان می‌کند که در حالت کلی الگوریتم رمس با انجام روش تغییر واحد در شرایط معادلات ۲۲.۲ و ۲۳.۲ و ۲۴.۲ صدق می‌کند.

با بیان این قضیه، ابتدا شرایطی مهیا می‌کنیم که همگرایی الگوریتم تغییر واحد را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۱.۲.۲. اگر شرایط ۲۲.۲ و ۲۳.۲ و ۲۴.۲ در هر گام برقرار باشد، و اگر در هر گام از مجموعه‌های M_{m+1} یک نقطه $\xi \in [a,b]$ وجود داشته باشد به‌طوری که تابع خطا در این نقطه متناوب شود به عبارتی

$$|\varphi_m(\xi)| = \|\varphi_m\|$$

آنگاه الگوریتم تغییر واحد همگرا می‌شود. در نتیجه دنباله توابع $h_m(x) \in V$ روی بازه $[a,b]$ به بهترین تقریب $f(x)$ همگرا می‌شود.

برهان. این قضیه را در دو مرحله اثبات می‌کنیم.

۱. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر تابعک خطی

$$L(v)=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i v(\xi_i)$$

متناظر با نقاط $\{\xi_i\}$ که $i=1,2,\dots,n+1$ باشد و در شرایط ۷.۲ و ۸.۲ صدق کند، و برای تابع ثابت $f(x)\in C[a,b]$ نامساوی

$$|L(f)|\geq c>0$$

برقرار باشد، آنگاه عدد g وابسته به c ، f، V و n وجود دارد به طوری که

$$\xi_{i+1}-\xi_i\geq g>0$$

برای $i=1,2,\dots,n$ برقرار است.

فرض کنید عکس این مطلب برقرار باشد، یعنی دنباله‌ای از مجموعه‌های $\{\xi_i^k\}$ و یک عدد صحیح $i=i_0$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\lim_{h\to\infty}(\xi_{i_0+1}^k-\xi_{i_0}^k)=0$$

آنگاه یک تابع $h\in V$ را با توجه به رابطه زیر ایجاد می‌کنیم.

$$h(\xi_i^k)=f(\xi_i^k),\qquad 1\leq i\leq n+1,\quad i\neq i_0$$

با ادامه این روند نتیجه می‌شود که

$$|h(\xi_{i_0}^k)-f(\xi_{i_0}^k)|\leq|h(\xi_{i_0}^k)-h(\xi_{i_0+1}^k)|+|f(\xi_{i_0}^k)-f(\xi_{i_0+1}^k)|\leq\varepsilon$$

که در این رابطه همانطور که $k\to\infty$، $\varepsilon\to 0$. اما با توجه به این مطلب که

$$\sum_{i=1}^{n+1}|\lambda_i|=1$$

است، به رابطه زیر می‌رسیم.

$$0\leq c\leq|L(f)|\leq\sum_{i=1}^{n+1}|\lambda_i|.|h(\xi_i^k)-f(\xi_i^k)|\leq|\lambda_{i_0}|.\varepsilon\leq\varepsilon$$

این نکته از این لحاظ قابل توجه است که حتی در حالتی که دو نقطه از $\{\xi_i\}$ همزمان رخ دهد، تابع خطی که در شرایط ۷.۲ و ۸.۲ صدق کند وجود دارد.

این برهان نشان می‌دهد که در این مورد تابع خطی به راحتی به صفر می‌رسد.

۲. فرض کنید $L(f)$ تابع تعریف شده در بالا باشد، و نیز فرض کنیم مفروضات ۱ برقرار باشد.

ادعا می‌کنیم برای $i=1,2,\ldots,n+1$ یک عدد $d>0$ وابسته به c,f,V و n وجود داشته باشد به طوری که

$$|\lambda_i| \geq d > 0$$

همچنین تابع $h(x)$ نیز مانند رابطه ۱ تعریف می‌شود، و رابطه زیر برای آن برقرار است.

$$0 \leq c \leq |\lambda_{i_0}|.|h(\xi_{i_0}) - f(\xi_{i_0})| \leq |\lambda_{i_0}|.C_{i_0}$$

که در این رابطه C_{i_0} به c,f,V,n وابسته است. و این رابطه دنباله‌ای از شرایط هار است.
حال اگر پایه $h^{(1)}(x),h^{(2)}(x),\ldots,h^{(n)}(x)$ را برای فضای V معرفی کنیم، قرار می‌دهیم

$$h(x) = \sum_{v=1}^{n} \alpha_v h^{(v)}(x)$$

آنگاه

$$\sum_{v=1}^{n} \alpha_v h^{(v)}(\xi_i) = f(\xi_i), \qquad 1 \leq i \leq n+1, \qquad i \neq i_0$$

با توجه به ویژگی

$$\xi_{i+1} - \xi_i \geq g > 0$$

که در قسمت ۱ اثبات شده است و نیز با توجه به شرایط هار، مقدار به‌دست آمده برای این سیستم یک کران پایین مثبت وابسته به c,f,V,n دارد.

در نتیجه نامساوی

$$|\lambda_{i_0}| \geq d_{i_0} > 0$$

برای

$$d_{i_0} = \frac{c}{C_{i_0}}$$

برقراراست، و اثبات با قرار دادن

$$d = \min_{1 \leq i \leq n+1} d_i > 0$$

نتیجه می‌شود.

در ادامه به اثبات همگرایی می‌پردازیم.

از رابطه ۲.۲۵ استفاده می‌کنیم و در آن ۰ و ۱ را با m و $m+1$ جایگزین می‌کنیم. با توجه به رابطه ۲.۲۶ مقادیر مطلق توابع که از گام‌های تکراری حاصل می‌شود، به‌جز برای $L_0(f)$ یک کران پایین مثبت دارند.

حال با توجه به مفروضات یک نقطه ξ در مجموعه M_{m+1} وجود دارد به‌طوری که

$$|\varphi_m(\xi)| = \|\varphi_m\|$$

و در نتیجه در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$|\varphi_m(\xi)| > L_m(f)$$

و اگر مراحل به پایان نرسید، برای ادامه یک عدد صحیح i_0 وجود دارد به‌طوری که

$$|L_{m+1}(f)| - |L_m(f)| \geq |\lambda_{i_0}^{(m+1)}|\{\|\varphi_m\| - |L_m(f)|\} \qquad (۲۷.۲)$$

و بنابراین رابطه ۲۷.۲یک تخمین ناچیز برای $\|\varphi_m\|$ فراهم می‌کند.

با استفاده از رابطه ۲۶.۲ دنباله $|L_m(f)|$ به‌طور یکنواخت افزایشی است.

و چون

$$|L_m(f)| \leq Q_V(f)$$

پس مانند بالا $L_m(f)$ کران‌دار می‌شود.

اکنون

$$|L_{m+1}(f)| - |L_m(f)| = \tilde{\varepsilon}_m \geq 0$$

که $\tilde{\varepsilon}_m$ در رابطه

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{\varepsilon}_m = 0$$

صدق می‌کند، و بنابراین با استفاده از رابطه ۲۷.۲ داریم

$$Q_V(f) \leq \|\varphi_m\| \leq Q_V(f) + \varepsilon_m$$

و از آن‌جایی‌که

$$0 \leq \varepsilon_m = \frac{\tilde{\varepsilon_m}}{|\lambda_{i_0}^{(m+1)}|} \leq \frac{\tilde{\varepsilon_m}}{d}$$

و با توجه به این مطلب که

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0.$$

در ادامه نامساوی

$$Q_V(f) \leq \|h_m - f\| \leq Q_V(f) + \varepsilon_m$$

را برای دنباله‌ای از توابع $h_m(x) \in V$ به‌دست می‌آوریم.

برای ادامه اثبات کافی است نشان دهیم که دنباله $h_m(x)$ روی بازه $[a,b]$ به‌طور یکنواخت همگرا می‌شود.

مجموعه تمام $h \in V$ را که در رابطه

$$\|h - f\| \leq \mathcal{Q}_V(f) + \varepsilon \qquad (۲۸.۲)$$

صدق کند، در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که اگر $h_۱(x)$ و $h_۲(x)$ دو تابع در V باشند که در شرایط ۲۸.۲ صدق کنند، آنگاه نامساوی

$$\|h_۱ - h_۲\| \leq \delta(\varepsilon)$$

که $\lim_{\varepsilon\to ۰} \delta(\varepsilon) = ۰$، همزمان با یکتایی بهترین تقریب $f(x)$ نسبت به فضای V برقرار است.

فرض می‌کنید که ادعای ما نادرست باشد، بنابراین دو دنباله $h_۱^{(v)}$ و $h_۲^{(v)}$ که $v = ۱, ۲, \ldots$ در فضای V وجود دارند به‌طوری که اگر برای $v = ۱, ۲, \ldots$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\|h_۱^{(v)} - h_۲^{(v)}\| \geq k > ۰ \qquad (۲۹.۲)$$

داشته باشیم:

$$\lim_{v\to\infty} \|h_۱(v) - f\| = \mathcal{Q}_V(f)$$

و

$$\lim_{v\to\infty} \|h_۲(v) - f\| = \mathcal{Q}_V(f)$$

چون Vبا متناهی بعد است، قضیه بولتسانو-وایرشتراس نشان می‌دهد که زیر دنباله‌های همگرایی از هر دو دنباله می‌توانیم انتخاب کنیم. با استفاده از رابطه ۲۹.۲، اگر فرض کنیم $h_۱^*$ و $h_۲^*$ به‌گونه‌ای باشند که روابط

$$\|h_۱^* - f\| = \|h_۲^* - f\| = \mathcal{Q}_V(f)$$

برای آن‌ها برقرار باشد و $h_۱^* \neq h_۲^*$ آن‌گاه

واضح است که این رابطه، با یکتایی بهترین تقریب در تناقض است. در نتیجه همگرایی در این قضیه اثبات می‌شود.

هم‌چنین نامساوی

$$|L_{m+۱}(f)| - |L_m(f)| \geq |\lambda_{i_۰}^{(m+۱)}|\{\mathcal{Q}_V(f) - |L_m(f)|\}$$

دنباله‌ای از نامساوی ۲۷.۲ است، بنابراین یک ثابت $q < ۱$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathcal{Q}_V(f) - |L_{m+۱}(f)| \leq q(\mathcal{Q}_V(f) - |L_m(f)|)$$

لذا توابع خطی $L_m(f)$ به $\mathcal{Q}_V(f)$ همگرا می‌شوند.

□

سوالی که اینجا مطرح می‌شود این است که همگرایی مراتب بالاتر چه زمانی برقرار می‌شود؟ همگرایی مراتب بالاتر نیاز به مفروضات بیشتری دارد که این همگرایی را تحت قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید V فضای تعریف شده در بالا باشد. و تابع $f \in C[a,b]$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر بوده و در بازه باز (a,b) دارای مشتق مرتبه دوم باشد، و نیز فرض کنید که $h(x)$ بهترین تقریب تابع $f(x)$ باشد به‌طوری که

$$\varphi(x) = h(x) - f(x)$$

طبق قضیه تناوبی چبیشف، تابع خطای تقریب، $(\varphi(x))$ دقیقا $n+۱$ نقطه اکسترمم در $[a,b]$ دارد، و اگر ξ یک نقطه اکسترمم در $a < \xi < b$ باشد آن‌گاه

$$\varphi''(\xi) \neq ۰$$

است.

اگر یکی از نقاط انتهایی بازه نقطه اکسترمم باشد، فرض می‌کنیم $\varphi'(x)$ در آن نقطه ناصفر است.

آنگاه دو ثابت مثبت $c_۱$ و $c_۲$ وجود دارد به‌طوری که دنباله‌ای که از تکرارهای الگوریتم رمس به‌دست می‌آید در روابط زیر صدق می‌کند.

$$\|h_{m+۱} - h\| \leq c_۱ \|h_m - h\|^۲ \tag{۳۰.۲}$$

و

$$\mathcal{Q}_V(f) - |L_{m+۱}(f)| \leq c_۲(\mathcal{Q}_V(f)) - |L_m(f)|)^۲. \tag{۳۱.۲}$$

بنابراین با بررسی این مراحل نتیجه می‌گیریم در حالتی می‌توانیم یک تابع را با چندجمله‌ای‌ها تقریب بزنیم که مشتقات غیرصفر $\varphi(x)$ در نقاط اکسترمم واقع شوند و تابع مورد نظر در شرایط قضیه ۱۷.۱.۲ صدق کند.

برهان. برای راحتی بیان اثبات، مجموعه زیر را که ممکن است تهی نیز باشد، تعریف می‌کنیم

$$I = \begin{cases} \{i \mid ۲ \leq i \leq n\} & \text{برای } a \in M, \quad b \in M \\ \{i \mid ۱ \leq i \leq n\} & \text{برای } a \notin M, \quad b \in M \\ \{i \mid ۲ \leq i \leq n+۱\} & \text{برای } a \in M, \quad b \notin M \\ \{i \mid ۱ \leq i \leq n+۱\} & \text{برای } a \notin M, \quad b \notin M \end{cases}$$

که در این مجموعه $i = ۱, ۲, \dots, n + ۱$ ،$M = \{x_i\}$ تناوب‌ها را نشان می‌دهد.

فرض کنیم $h^{(v)}(x)$ پایه‌ای برای فضای V باشد، معادلات زیر را بررسی می‌کنیم.

$$\sum_{v=۱}^{n} \alpha_v h^{(v)}(\xi_i) + (-۱)^i \lambda = f(\xi_i), \qquad i = ۱, ۲, \dots, n + ۱ \tag{۳۲.۲}$$

$$\sum_{v=۱}^{n} \alpha_v h^{(v)'}(\xi_i) = f'(\xi_i), \qquad i \in I \tag{۳۳.۲}$$

که پریم‌ها در این معادلات مشتقات را نشان می‌دهند، و $\xi_۱, \xi_۲, \dots, \xi_{n+۱}$ اعدادی در بازه $[a, b]$ هستند که به‌صورت صعودی مرتب شده‌اند.

معادله ۳۳.۲ مقادیر ξ_i را به عنوان توابعی از α_v به‌صورت زیر تعریف می‌کند.

$$\xi_i = \xi_i(\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_n) \qquad i \in I$$

نقاط $x_i \in M$ و $i \in I$ برای $\alpha_v = \tilde{\alpha}_v$ در رابطه ۳۳.۲ صدق می‌کند که در آن

$$\sum_{v=۱}^{n} \tilde{\alpha}_v h^{(v)}(x) = h(x).$$

بنابراین برای $i \in I$ با فرض

$$h''(x_i) - f''(x_i) \neq ۰$$

و برای $\varepsilon > ۰$ و به حد کافی کوچک که در رابطه

$$\| \sum_{v=۱}^{n} \alpha_v h^{(v)}(x) - h(x) \| < \varepsilon$$

صدق کند، نقاط ξ_i که توابع مشتق‌پذیری از α هستند وجود دارد که در رابطه ۳۳.۲ صدق می‌کند. ودر این مورد

$$|\xi_i - x_i| < \delta(\varepsilon)$$

و اگر $\varepsilon \to ۰$ ،$\delta(\varepsilon) \to ۰$.

در ادامه بحث به معرفی الگوریتمی می‌پردازیم که به الگوریتم دوم رمس موسوم است.

معادله ۳۲.۲ یک معادله غیرخطی است و روش تکراری نیوتن که به‌صورت زیر معرفی می‌شود، در مورد آن به‌کار برده می‌شود.

اگر برای $i = ۱, ۲, \dots, n + ۱$ داشته باشیم

$$F_i(\alpha_۱, \dots, \alpha_n, \lambda) = \sum_{v=۱}^{n} \alpha_v h^{(v)}(\xi_i) + (-۱)^i \lambda - f(\xi_i)$$

آنگاه برای $i \in I$ معادله ۳۳.۲ نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_x} = h^{(x)}(\xi_i), \qquad x = ۱, ۲, \dots, n$$

و

$$\frac{\partial F_i}{\partial \lambda} = (-۱)^i, \qquad ۱ \leq i \leq n + ۱.$$

فرمول‌های روش تکراری نیوتن هستند، بنابراین

$$\sum_{v=۱}^{n} \alpha_v^{(m)} h^{(v)\prime}(x_i^{(m+۱)}) = f'(x_i^{(m+۱)}), \qquad i \in I \qquad (۳۴.۲)$$

$$\sum_{v=۱}^{n} \alpha_v^{(m+۱)} h^{(v)}(x_i^{(m+۱)}) + (-۱)^i \lambda_{m+۱} = f(x_i^{(m+۱)}), \quad i = ۱, ۲, \dots, n + ۱. \qquad (۳۵.۲)$$

با توجه به مفروضات قضیه ۲.۲.۲، (برای m به حد کافی بزرگ)، الگوریتمی که به‌وسیله معادلات ۳۴.۲ و ۳۵.۲ توصیف می‌شود، الگوریتم دوم رمس نامیده می‌شود.

هم‌چنین می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر نقطه a به تناوب‌ها وابسته باشد، آنگاه چون $\varphi'(a) \neq ۰$ است،برای m به حد کافی بزرگ $x_۱^{(m)} = a$.

متناظرا، این مطلب برای حالتی که b نیز به تناوب‌ها وابسته باشد، برقرار است. بنابراین همگرایی الگوریتم رمس برقرار است، ونتیجه می‌دهد که ماتریس سیستم خطی ۳۵.۲تبدیل به یک ماتریس غیر واحد می‌شود، و بنابراین مشتقات جزیی توابع $F_i(\alpha_۱, \dots, \alpha_n, \lambda)$ وجود دارد.

در نهایت با استفاده از روش تکراری نیوتن نتیجه می‌گیریم که

$$|\alpha_v^{(m+۱)} - \tilde{\alpha}_v| = O(|\alpha_v^{(m)} - \tilde{\alpha}_v|^۲)$$

و

$$|\lambda_{m+۱} - \tilde{\lambda}| = O(|\lambda_m - \tilde{\lambda}|^۲), \qquad |\tilde{\lambda}| = \mathcal{Q}_V(f).$$

و این روابط اثبات قضیه را نتیجه می‌دهد. □

درکاربردهای عددی، برای انجام تکرارها، به حل معادلات غیرخطی ، که به‌دلیل مقادیر بزرگ n به‌آسانی قابل حل نیستند، نیاز داریم. حتی در نقاط ثابت روش نیوتن، مناسب‌تر است که معادلات غیرخطی ۳۲.۲و ۳۳.۲ را به‌طور مستقیم بررسی کنیم، که نقاط ξ_i به عنوان توابعی از α_v در نظر گرفته نمی‌شوند.

برای برطرف کردن این مشکل، فرض می‌کنیم نقاط a و b وابسته به تناوب‌ها باشند و قرار می‌دهیم

$$x_۱^{(m)} = a, \qquad x_{n+۱}^{(m)} = b, \qquad m = ۰, ۱, \dots$$

اکنون فرض کنیم

$$H_i(\alpha_۱,\dots,\alpha_n;\xi_۲,\dots,\xi_n;\lambda)=\sum_{v=۱}^{n}\alpha_v h^{(v)}(\xi_i)+(-۱)^i\lambda-f(\xi_i),$$
$$i=۲,۳,\dots,n$$
$$G_i(\alpha_۱,\dots,\alpha_n;\xi_۲,\dots,\xi_n)=\sum_{v=۱}^{n}\alpha_v h^{(v)'}(\xi_i)-f^i(\xi_i),$$
$$i=۲,۳,\dots,n$$

آنگاه برای $i=۱,۲,\dots,n+۱$ داریم

$$\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_x}=h^{(x)}(\xi_i);\qquad x=۱,۲,\dots,n;$$
$$\frac{\partial H_i}{\partial\xi_\eta}=\delta_{i\eta}\left\{\sum_{v=۱}^{n}a_v h^{(v)'}(\xi_i)-f'(\xi_i)\right\};\quad \eta=۲,۳,\dots,n;$$
$$\frac{\partial H_i}{\partial\lambda}=(-۱)^i$$

و برای $i=۲,۳,\dots,n$ داریم

$$\frac{\partial G_i}{\partial\alpha_x}=h^{(x)'}(\xi_i);\qquad x=۱,۲,\dots,n$$
$$\frac{\partial G_i}{\partial\xi_\eta}=\delta_{i\eta}\left\{\sum_{v=۱}^{n}\alpha_v h^{(v)''}(\xi_i)-f''(\xi_i)\right\};\quad \eta=۲,۳,\dots,n.$$

برای $(i=۱,۲,\dots,n+۱)$ با قرار دادن $\xi=x_i$، دترمینان ژاکوبین دارای فرمی به‌صورت زیر است.

$$\varphi''(x_۲)\varphi''(x_۳)\dots,\varphi''(x_n)\begin{vmatrix} h^{(۱)}(x_۱) & h^{(۲)}(x_۱) & \dots & h^{(n)}(x_۱) & -۱\\ h^{(۱)}(x_۲) & h^{(۲)}(x_۲) & \dots & h^{(n)}(x_۲) & +۱\\ \vdots & & & & \\ h^{(۱)}(x_{n+۱}) & h^{(۲)}(x_{n+۱}) & \dots & h^{(n)}(x_{n+۱}) & (-۱)^{n+۱}\end{vmatrix}$$

که با توجه به مفروضات مساله این دترمینان همواره غیرصفر است.

اکنون فرض می‌کنیم که برای $v=۱,۲,\dots,n$ مشتق سوم $h^{(v)}(x)$ ، و تابع $f(x)$ وجود داشته باشد و روی بازه (a,b) پیوسته باشد، آنگاه روش نیوتن که به‌طور صریح نمایش‌های زیر را توصیف می‌کنند، همگرای مرتبه دوم است و روابط ۳۰.۲ و ۳۱.۲ برقرارند، و علاوه بر این برای $i=۲,۳,\dots,n$ داریم

$$|x_i^{(m+۱)}-x_i|=O(|x_i^{(m)}-x_i|^۲)$$

بنابراین الگوریتم به‌صورت زیر دنبال می‌شود.

برای m به حدکافی بزرگ، فرض کنیم $h_{m-1}(x)$ و نقاط $x_i^{(m)}$ برای $i = 2, 3, \ldots, n$ از الگوریتم رمس به‌دست آمده باشند، و فرض کنیم تخمین‌های خوبی برای بهترین تقریب و تناوب‌های شناخته شده باشد، آنگاه تکرارها را طبق فرمول‌های زیر ادامه می‌دهیم.

$$h_m(x_i^{(m)}) + (-1)^i \lambda_m = f(x_i^{(m)}) + (x_i^{(m)} - x_i^{(m+1)}) \varphi'_{m-1}(x_i^{(m)}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n+1$$

$$h'_m(x_i^{(m)}) = f'(x_i^{(m)}) + (x_i^{(m)} - x_i^{(m+1)}) \varphi''_{m-1}(x_i^{(m)}), \tag{۳۶.۲}$$

$$i = 2, 3, \ldots, n$$

در هر گام h_m و λ_m و $x_i^{(m+1)}$ محاسبه می‌شود.

در ادامه به دنبال یافتن مقادیری از λ_m هستیم که کران پایینی برای $\mathcal{Q}_V(f)$، محسوب می‌شوند.

بنابراین مناسب‌تر است که از فرمول تکراری زیر که با روش ارائه شده در بالامتفاوت است، استفاده کنیم.

$$h_m(x_i^{(m)}) + (-1)^i \lambda_m = f(x_i^{(m)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{۳۷.۲}$$

$$x_i^{(m+1)} = x_i^{(m)} - \frac{h'_m(x_i^{(m)}) - f'(x_i^{(m)})}{h''_{m-1}(x_i^{(m)}) - f''(x_i^{(m)})}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n \tag{۳۸.۲}$$

دو روش تکراری که طبق روابط ۳۷.۲ و ۳۸.۲ ارائه شده است برای هر مقدار آغازین دلخواهی همگرا نمی‌شود و می‌توانند به عنوان رابطه اصلاح شده موثری استفاده شود.

در هر گام از روش معرفی شده در بالا به دنبال محاسبه

$$\|h_m - f\|$$

هستیم و با این روش

$$|L_m(f)$$

خود به خود تولید می‌شود. حال اگر خارج قسمت این دو عبارت عددی نزدیک به یک باشد، آنگاه چون نرم تابع خطا نمی‌تواند به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش یابد، به تقریب $h_m(x)$ بسنده می‌کنیم.

در ادامه با بیان یک مثال ساده روش معرفی شده را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳.۲.۲. فرض کنید تابع

$$f(x) = |x|^3$$

روی بازه $[-۱,۱]$ با چندجمله‌ای‌هایی از درجه ۵ تقریب زده شود. چون تابع $f(x)$ یک تابع زوج است، بهترین تقریب آن در مجموعه چندجمله‌ای‌ها به فرم زیر است.

$$a+bx^{۲}+cx^{۴}$$

و مجموعه تناوب‌های این تابع در مبدا متقارن است و دارای ۷ نقطه شامل نقاط $-۱,۰$ و ۱ است. بنابراین کافی است روش را روی بازه $[۰,۱]$ بکار بندیم.

اکنون اگر قرار دهیم $n=۳$ و

$$x_{۱}^{(m)}=۰,\qquad x_{۴}^{(m)}=۱,\qquad m=۰,۱,\ldots$$

با در نظر گرفتن مقادیر ابتدایی

$$x_{۲}^{(۰)}=۰/۲۵,\qquad x_{۳}^{(۰)}=۰/۷۵,$$

و با قرار دادن این مقادیر در رابطه ۳۷.۲ داریم

$$h_{۰}(x)=۰/۶x^{۴}+۰/۴۱۲۵x^{۲}-۰/۰۰۶۲۵;\qquad \lambda_{۰}=-۰/۰۰۶۲۵$$

که نتیجه می‌شود

$$۰/۰۰۶۲۵\leq E_{۴}(f)\leq\|h_{۰}-f\|\leq ۰/۰۱۱۱۶$$

تکرارهای فرمول‌های ۳۷.۲ و ۳۸.۲ روش نیوتن، نتیجه می‌دهد که

$$x_{۲}^{(۱)}=۰/۵;\quad x_{۳}^{(۱)}=۰/۹$$

و

$$h_{۱}(x)=۰/۶۰۶۰۶x^{۴}+۰/۴۰۹۰۹x^{۲}-۰/۰۰۷۵۷;\qquad \lambda_{۱}=-۰/۰۰۷۵۷.$$

اکنون

$$۰/۰۰۷۵۷\leq E_{۴}(f)\leq\|h_{۱}-f\|\leq ۰/۰۰۹۵۷.$$

از دومین تکرار نتیجه می‌شود که

$$x_{۲}^{(۲)}=۰/۴۰;\quad x_{۳}^{(۲)}=۰/۸۴$$

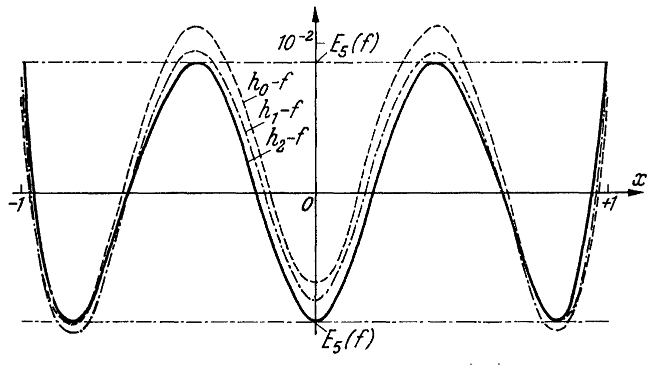
و

$$h_{۲}(x)=۰/۶۰۳۶۲x^{۴}+۰/۴۱۴۰۸x^{۲}-۰/۰۰۸۸۵;\qquad \lambda_{۲}=-۰/۰۰۸۸۵$$

بنابراین

$$۰/۰۰۸۸۵\leq E_{۴}(f)\leq\|h_{۲}-f\|\leq ۰/۰۰۸۹۲$$

نمودار خطاهای $h_{۰}-f$، $h_{۱}-f$، $h_{۲}-f$ در شکل ۳.۲ نشان داده شده است.



شکل ۳.۲: تقریب تابع $|x|^3$

۱.۲.۲ تقریب‌های اولیه

الگوریتم تغییر واحد که تا کنون در مورد آن بحث شد، معمولا بسیار سریع همگرا می‌شود و نیازمند محاسبات قابل توجهی در هر گام است، به‌علاوه، این که با یک تقریب اولیه خوب الگوریتم را شروع کنیم نیز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. به این معنی که به تخمین‌های خوبی برای تناوب‌ها نیاز داریم.

در مورد سیستم‌های چبیشف ممکن است انتخاب مقادیر ابتدایی بسیار مبهم باشد. بنابراین از این به بعد فقط سیستم‌های چبیشف با عنصر واحد را بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم تابع $f(x)$ بوسیله توابعی در فضای V_n که دارای بعد $n+1$ است، تقریب زده شود.

اگر تقریب های دقیقی در دسترس نباشد، توابع $S_n(x)$ را روی بازه $[a,b]$ به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که دارای شرایط زیر باشد. و تناوب تابع S_{n+1} را برای مجموعه ابتدایی M_0 انتخاب می‌کنیم.

۱. $S_n(x) \in V_n$

۲. $\|S_n(x)\| = 1$

۳. $Q_{n-1}(S_n) = 1$

۴. $S_n(b) = 1$

همچنین برای سهولت قرار می‌دهیم $S_0(x) = 1$.

میناردس در [۱۳] نشان داده است که تابع $S_n(x)$ که با شرایط بالا ساخته می‌شود دارای ویژگی‌های زیر است.

۱. $S_n(x)$ دارای $n+۱$ نقطه اکسترمال در بازه $[a,b]$ است، که نقاط a و b نیز نقاط اکسترمال هستند. و این نقاط به طور صعودی مرتب شده‌اند. و تابع $S_n(x)$ برای $v = ۱, ۲, \ldots, n$ دارای ویژگی تناوبی $S_n(x_v) + S_n(x_{v+۱}) = ۰$ است.

۲. $S_n(x)$ یکنوای اکید است.

این انتخاب این انگیزه را سبب می‌شود که مجموع جزیی

$$\sum_{v=۰}^{\infty} \alpha_v S_v(x)$$

یک تقریب خوب به بهترین تقریب توابعی مانند $f(x)$ است که دارای بسطی به‌صورت

$$f(x) = \sum_{v=۰}^{\infty} \alpha_v S_v(x)$$

با ضرایب α_v است که بطور سریع به صفر کاهش پیدا می‌کند.

در مورد تقریب با چندجمله‌ای‌ها این انتخاب، به مجموعه نقاط اکسترمم چندجمله‌ای‌های چبیشف $T_{n+۱}$ منجر می‌شود.

نتایج دقیقی در مورد این که چه مقادیری از $|L_۰(f)|$ و $\|h_۰ - f\|$ به حد کافی دقیق هستند، وجود ندارد. و این مورد می‌تواند با روش‌های ارائه شده، به‌طور عددی بررسی شود.

مشکل عمده‌ای که در این روش وجود دارد، این است که انتخاب نقاطی هم‌فاصله(نقاطی با فاصله‌های برابر) برای مجموعه $M_۰$ در حالتی که تقریب با چندجمله‌ای‌ها مد نظر باشد بطور معین معرفی نشده است.

با انتخاب $M_۰$، یک تخمین غیر همزمان از $|L_۰(f)|$ در قضیه ۲۸.۱.۲ برای تقریب توابع تحلیلی با چندجمله‌ای ها به‌دست می‌آید.

اگر f و g دو تابع در $C[-۱,۱]$ با شرط $q = q(f) = q(g)$، و $q(f-g) > q(f)$ باشد، آنگاه با استفاده از قضیه ۲۸.۱.۲، تابع $f(x)$ با انتخاب تناوب‌هایی از $g(x)$ به عنوان مجموعه اولیه $M_۰$، در مجموعه چندجمله‌ای‌ها تقریب زده می‌شود.

با ارائه یک مثال مطالب بیان شده را قابل فهم‌تر می‌کنیم.

مثال ۴.۲.۲. فرض کنید تابع

$$f(x) = \tan \frac{\pi}{۴} x$$

روی بازه $[-۱,۱]$ توسط چندجمله‌ای‌هایی با درجه ≤ ۴ تقریب زده شود، بهترین تقریب این تابع به فرم

$$ax + bx^۳$$

است و دارای تناوب‌هایی شامل ۶ نقطه متقارن در اطراف صفر شامل نقاط ۱− و ۱ است. بنابراین کافی است مساله را روی بازه $[۰,۱]$ بررسی کنیم.

قرار دهید

$$x_۸^{(m)} = ۱, \qquad m = ۰, ۱, \ldots$$

و

$$g(x) = -\frac{۸x}{\pi(x^۲ - ۴)}.$$

با توجه به این که در نقاط $x = \pm ۲$ دارای قطب هستیم داریم

$$q(f) = q(g) = ۲ + \sqrt{۳}$$

در حالی که اگر قطب‌ها را در ± ۶ در نظر بگیریم داریم

$$q(f - g) = ۶ + \sqrt{۳۵} > q(f)$$

با توجه به این مطالب نقاط اکسترمم مثبت تابع $g(x)$، صفرهای مثبتی از چندجمله‌ای

$$(۱ - x^۲)\left\{\frac{۱}{\alpha^۲}U_{۲r+۲}(x) - ۲U_{۲r}(x) + \alpha^۲ U_{۲r-۲}(x)\right\}$$

برای $r = ۱$ هستند. بنابراین قرار می‌دهیم

$$x_۱^{(۰)} = ۰/۳۲۵; \qquad x_۲^{(۰)} = ۰/۸۲۵$$

در نتیجه رابطه ۲.۲۱ نتیجه می‌دهد که

$$h_۰(x) = ۰/۲۲۹۸۵x^۳ + ۰/۷۶۶۰۶x; \qquad \lambda_۰ = -۰/۰۰۴۰۸$$

و بنابراین

$$۰/۰۰۴۰۸ \leq E_۴(f) \leq \|h_۰ - f\| \leq ۰/۰۰۴۲۶$$

با استفاده از رابطه ۲.۱۵ با میل کردن $n \to \infty$ داریم

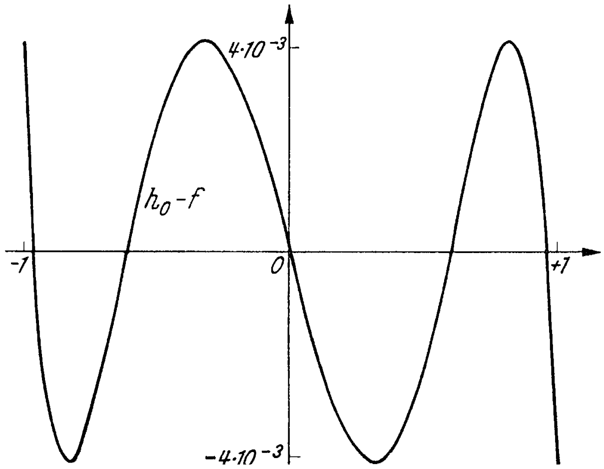
$$E_{۲n}\left(\tan\frac{\pi}{۴}x\right) = \frac{۲(۲ - \sqrt{۳})^{۲n-۱}}{۳\pi}(۱ + O(۱))$$

در حالتی که $n = ۲$ باشد این مقدار برابر

$$۰/۰۰۴۰۸۲$$

می‌باشد، که با مقادیر $\|h_۰ - f\|$ و $|\lambda_۰|$ در تناسب است.

مثال ۲.۲.۵. در ادامه با بیان مثالی تقریب تابع $\Gamma(x)$ را روی بازه $[۱,۲]$ در مجموعه چندجمله‌ای‌های درجه ۴ محاسبه می‌کنیم.



شکل ۴.۲: تقریب تابع $\tan \frac{\pi}{4}x$

برای هر عدد حقیقی مثبت x، تابع گاما به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma(x) := \int_{۰}^{\infty} t^{x-۱}e^{-t}dt$$

مجموعه $M_۰$ را طوری در نظر می‌گیریم که شامل نقاط ۱ و ۲و اعداد

$$x_v^{(۰)} = \frac{۳ - x_v}{۲}, \qquad v = ۲, ۳, ۴, ۵$$

باشند که نقاط x_v ریشه‌های چندجمله‌ای ۲۰.۲ با $a = ۳$ و $n = ۴$ هستند. بنابراین

$$x_۱^{(۰)} = ۱; \qquad x_۲^{(۰)} = ۱/۰۸۲۹;$$

$$x_۳^{(۰)} = ۱/۳۱۳۸; \qquad x_۴^{(۰)} = ۱/۶۲۴۲;$$

$$x_۵^{(۰)} = ۱/۸۹۳۳; \qquad x_۶^{(۰)} = ۲$$

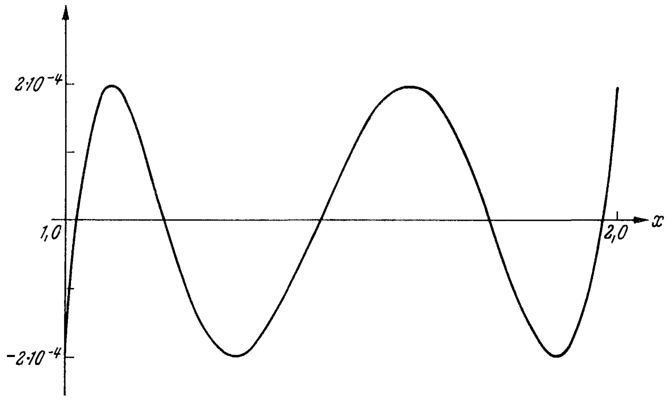
و به‌دست می‌آوریم که

$$h_۰(x) = ۰/۱۷۴۵۷۶۵۰x^۴ - ۱/۱۸۲۴۶۷۷۷x^۳ + ۳/۳۷۵۴۸۲۱۶x^۲ - ۴/۴۶۷۴۲۷۰۰x + ۳/۰۹۹۶۳۹۸۲; \qquad \lambda_۰ = -۱/۹۶۲۹ \cdot ۱۰^{-۴}$$

که نتیجه می‌شود

$$۱/۹۶۲۹ \cdot ۱۰^{-۴} \leq E_۴(\Gamma(x); ۱, ۲) \leq \|h_۰ - \Gamma\| \leq ۱/۹۶۸۰ \cdot ۱۰^{-۴}$$

در بسیاری از موارد فرمول‌های متناظر و مقادیر آغازین برای تناوب‌ها از تطبیق با تابعی مانند g به دست می‌آید، حتی اگر $q(f-g) = q(f) = q(g)$ باشد. هم‌چنین نتایج زیر می‌تواند برقرار باشد.



شکل ۲.۵: تقریب تابع $\Gamma(x)$

فرض کنید تابع $f \in C[-۱, ۱]$ باشد و در شرایط زیر صدق کند

$$q = a + \sqrt{a^۲ - ۱}, \qquad a \text{ حقیقی}, \qquad a > ۱$$

و فرض کنید اعداد حقیقی c, x و عدد گویای r به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که

$$g_۱(z) = f(z) - c(a-z)^x \log^r(a-z)$$

برقرار باشد و در رابطه

$$q(g_۱) > q(f)$$

صدق کند.

اکنون اگر تناوبی از تابع

$$\frac{۱}{a-z}$$

را که توسط رابطه ۲.۲۰ ارائه شده، انتخاب کنید، آنگاه همان‌طور که $n \to \infty$، تابع خطی متناظر یعنی $(L_n(f))$ در روابط زیر صدق می‌کند.

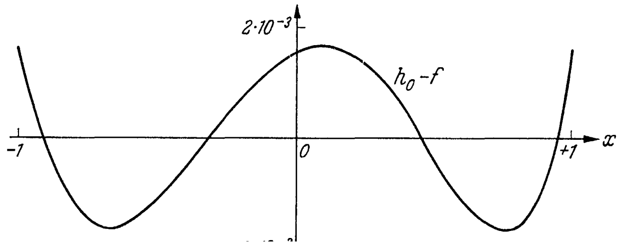
$$|L_n(f)| = E_n(f)(۱ + O(۱))$$

علاوه براین با استفاده از رابطه ۲.۱۳ چندجمله‌ای متناظر $P_n(x)$ (که به‌وسیله $h_\circ(x)$ نشان داده می‌شود) وجود دارد به‌طوری که اگر $n \to \infty$،

$$\|P_n - f\| = E_n(f)(۱ + O(۱))$$

این انتخاب ساده برای مجموعه ابتدایی $M_\circ$ نتایج بسیار خوبی دارد به‌طوری که به تکرارهای بیشتری نیاز نداریم.

در ادامه با ارائه مثالی مطالب بیان شده را واضح‌تر می‌کنیم



شکل ۶.۲: تقریب تابع $\sqrt{(۲-x)(x+۵)}$

مثال ۶.۲.۲. فرض کنید تابع

$$f(x) = \sqrt{(۲-x)(x+۵)}$$

به‌وسیله چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[-۱,۱]$ تقریب زده شود. با استفاده از روش بالا قرار می‌دهیم $a = ۲$ و

$$x_۱^{(۰)} = -۱ \qquad x_۲^{(۰)} = -۰/۶۴۳$$

$$x_۳^{(۰)} = ۰/۱۳۴ \qquad x_۴^{(۰)} = ۰/۷۷۷$$

$$x_۵^{(۰)} = ۱$$

آنگاه

$$h_۰(x) = -۰/۰۳۵۱۲۴x^۲ - ۰/۲۰۵۴۱۴x^۲ - ۰/۰۴۷۲۱۸۲x + ۳/۱۳۶۸۲۲;$$

و

$$\lambda_۰ = ۰/۰۰۱۶۱۲$$

و

$$۰/۰۰۱۶۱۲ \leq E_۳(f) \leq \|h_۰ - f\| \leq ۰/۰۰۱۶۵۰$$

منحنی خطا در شکل ۶.۲ نشان داده شده است.

تخمین‌های مناسب زیادی را می‌توان برای توابع تحلیلی تعیین کرد، حتی اگر این توابع در ویژگی‌هایی که در بالا بررسی شد صدق نکنند.
تکنیک‌هایی که در ادامه بیان خواهیم کرد نتایج بسیار خوبی برای تمام توابع ارائه می‌دهد.

فرض کنیم تابع $f \in C[-1, 1]$، و دارای نمایشی با سری‌های توانی به‌صورت

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v x^v$$

است.

حال مجموع جزیی زیر را بررسی می‌کنیم.

$$\tilde{f}(x) = \sum_{v=0}^{n+3} \alpha_v x^v$$

و گام‌های تکراری را با روابط ۳۷.۲ و ۳۸.۲ و مجموعه M_0 شامل نقاط

$$x_i^{(0)} = x_i = -\cos\frac{i\pi}{n+1}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n+1$$

به‌کار می‌بندیم.

به‌طوری که تابع $h_0(x)$ در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$h_0(x_i) + (-1)^i \lambda = \tilde{f}(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n+1$$

چندجمله‌ای

$$h_0(x) - \tilde{f}(x) + (-1)^{n+1} \cdot \lambda T_{n+1}(x)$$

از درجه $n+3$ است و در نقاط $x_i = 0, 1, \ldots, n+1$ صفر می‌شود. به‌علاوه این عبارت به‌صورت زیر نیز نوشته می‌شود.

$$(1 - x^2) U_n(x)$$

با مقایسه روابط بالا و قرار دادن چندجمله‌ای چیبیشف نوع دوم به جای $U_n(x)$ به رابطه زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} 2^n(h_0(x) - \tilde{f}(x)) = -\left\{a_{n+1} + a_{n+3}\left(\frac{n+3}{4}\right)\right\} T_{n+1}(x) + \\ + (a_{n+2} + a_{n+3}x)(1 - x^2) U_n(x). \end{aligned}$$

با استفاده از این مطلب و به‌کار بردن رابطه ۱۱.۲ مقادیر

$$h'(x_i) - \tilde{f}'(x_i),$$

$$h''(x_i) - \tilde{f}''(x_i)$$

برای $i = 1, 2, \ldots, n$ قابل محاسبه است.

با به کار بردن روش تکراری ۳۸.۲، فرمول

$$x_i^{(1)} = x_i + \frac{(1 - x_i^2)(a_{n+2} + a_{n+3}x_i)}{(n+1)a_{n+1}} \qquad (۳۹.۲)$$

برای نقاط $x_i^{(1)}$ از M_0 که $i=1,2,\ldots,n$ باشد، به‌دست می‌آید.

به‌طور مشابه اگر تابع $f(x)$ با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف دارای بسطی به‌صورت

$$f(x)=\sum_{v=0}^{\infty}\alpha_v T_v(x)$$

باشد، آنگاه با استفاده از مجموع جزیی

$$\tilde{\tilde{f}}(x)=\sum_{v=0}^{n+3}\alpha_v T_v(x)$$

و با روشی مشابه برای $i=0,1,\ldots,n+1$ فرمول زیر نتیجه می‌شود

$$\tilde{x}_i^{(1)}=x_i+\frac{(1-x_i^2)(2\alpha_{n+2}+4\alpha_{n+3}x_i)}{(n+1)\alpha_{n+1}} \tag{۴۰.۲}$$

می‌شود.

که فرمول‌های به دست آمده از روابط ۳۹.۲ و ۴۰.۲ را فرمول‌های پیش تکرار می‌نامیم.

در ادامه دو روش پیش تکرار و روش مستقیم را طی مثالی با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

مثال ۷.۲.۲. به منظور ایجاد یک مقایسه با روش پیش تکرار، مساله تقریب تابع e^{-x^2} توسط زیر فضای V_7 از چندجمله‌ای‌ها را روی بازه $[-1,1]$ به‌دست می‌آوریم.

ابتدا بهترین تقریب این تابع را توسط چندجمله‌ای‌ها با روش پیش تکرار به‌دست می‌آوریم.

تابع موردنظر دارای بهترین تقریبی به فرم زیر می‌باشد.

$$a+bx^2+cx^4+dx^6$$

تقریب این تابع را روی بازه $[0,1]$ به‌دست می‌آوریم، که نقاط ۰ و ۱ به تناوب‌ها وابسته هستند.

از فرمول ۳۹.۲ استفاده می‌کنیم و قرار می‌دهیم

$$x_1^{(0)}=0 \qquad x_2^{(0)}=0/375$$

$$x_3^{(0)}=0/698 \qquad x_4^{(0)}=0/921$$

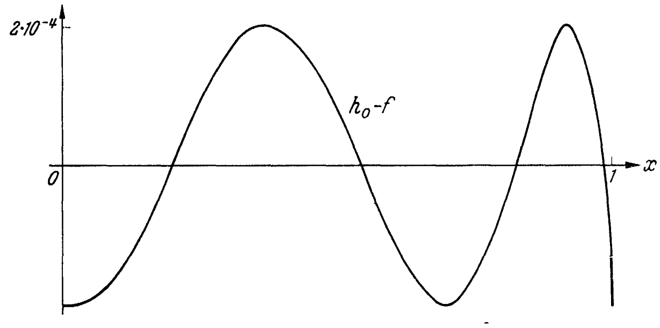
$$x_5^{(0)}=1$$

در نتیجه داریم

$$h_0(x)=0/999799-0/993256x^2+0/464142x^4-0/103007x^6$$

و

$$\lambda_0=-0/000201$$



شکل ۷.۲: نمودار پیش تکرار برای تابع $e^{-x^۲}$

که نتیجه می‌شود

$$۰/۰۰۰۲۰۱ \leq E_۷(f) \leq \|h_۰ - f\| \leq ۰/۰۰۰۲۰۸$$

حال بهترین تقریب این تابع را با روش مستقیم به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید t یک عدد حقیقی باشد، آنگاه تابع e^{tz} را می‌توان برحسب چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از درجه v یعنی$T_v(z)$ به صورت زیر بسط داد.

$$e^{tz} = I_۰(t) + ۲\sum_{v=۱}^{\infty} I_v(t)T_v(z) \qquad (۴۱.۲)$$

که در آن

$$I_v(t) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(t/۲)^{۲n+v}}{n!(v+n)!}$$

تابع بسل از مرتبه v است.

حال می‌خواهیم بهترین تقریب این تابع را در مجموعه چندجمله‌ای‌ها به دست آوریم.

از رابطه ۴۱.۲بسط این تابع به صورت زیر است.

$$e^{-x^۲} = e^{-\frac{۱}{۲}} I_۰(-\frac{۱}{۲}) + ۲e^{-\frac{۱}{۲}} \sum_{v=۱}^{\infty} I_v(-\frac{۱}{۲}) T_{۲v}(x)$$

و بنابراین

$$Q_۷(x) = ۰/۹۹۹۷۹۰ - ۰/۹۹۳۰۷۴x^۲ + ۰/۴۶۳۶۵۰x^۴ - ۰/۱۰۲۶۷۸x^۶$$

در ادامه با به کار بردن قضیه ۲۳.۱.۲ نتیجه می‌شود که

$$۰/۰۰۰۱۹۱ \leq E_۷(f) \leq \|Q_۷ - f\| \leq ۰/۰۰۰۲۱۰$$

با مشاهده این رابطه معلوم می‌شود که نتیجه به‌دست آمده ضعیف‌تر از نتیجه‌ای است که از روش پیش تکرار به‌دست می‌آید.

فصل ۳

بهترین تقریب برخی توابع گویا در مجموعه چندجمله‌ای‌ها

در این بخش ضمن معرفی چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از درجه q، یعنی $T_q(x)$، از ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف و قضیه تناوبی چبیشف، استفاده نموده و بهترین تقریب یکنواخت رده‌ای از توابع گویا به فرم $\text{۱}/(T_q(a) \pm T_q(x))$، (که $a^{\text{۲}} > \text{۱}$) را در مجموعه چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[-\text{۱}, \text{۱}]$ تعیین می‌کنیم. به‌علاوه مجموعه‌هایی برای محاسبه خطای تقریب این رده از توابع به‌دست می‌آوریم که آن‌ها را مجموعه‌های متناوب می‌نامیم.

۱.۳ تعاریف مقدماتی

در فصل دوم مباحث کاملی در مورد چندجمله‌ای‌های چبیشف ارائه دادیم. برای یادآوری بیشتر تعاریف مختصری ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۳. چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از درجه‌ی nبر بازه $[-\text{۱}, \text{۱}]$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-\text{۱}} x)$$

و این چندجمله‌ای در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کند.

$$T_{n+\text{۱}}(x) = \text{۲}xT_n(x) - T_{n-\text{۱}}(x), \qquad n = \text{۱}, \text{۲}, \ldots$$

با توجه به این رابطه بازگشتی، تعدادی از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول به‌صورت زیر

هستند.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

صفرهای $T_n(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = 0 \Rightarrow n\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \quad \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

در نتیجه ریشه‌های $T_n(x)$ عبارتند از

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

این ریشه‌ها در بازه $[-1, 1]$ قرار دارند و متمایز هستند.

ضمنا برای سهولت در کار با چندجمله‌ای‌ها، با توجه به این که با تبدیل خطی

$$x = \frac{(b-a)t}{2} + \frac{b+a}{2}, \qquad -1 \leq t \leq 1$$

بازه $[a, b]$ از محور x به بازه‌ی $[-1, 1]$ از محور t نقش می‌شود، چندجمله‌ای‌های چبیشف تعریف شده روی بازه دلخواه $[a, b]$ را می‌توان به چندجمله‌ای چبیشف روی بازه $[-1, 1]$ تبدیل کرد.

اگر $T_n(t)$، $n = 0, 1, \dots$ چندجمله‌ای‌های چبیشف در بازه $-1 \leq t \leq 1$ باشد. چندجمله‌ای $\tilde{T}_n(x)$، ($\tilde{T}$فقط یک نمادگذاری است)را بر بازه $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{T}_n(x) = T_n(t) = \cos(n\cos^{-1} t), \qquad n = 0, 1, \dots$$

در فصل قبل نشان دادیم که تابع مولد برای چندجمله‌ای‌های چبیشف به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2}$$

گزاره ۲.۱.۳. هر چندجمله‌ای‌های چبیشف را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{n}{2} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r}{n-r} \binom{n-r}{r} (2x)^{n-2r} \\ &= \sum_{m=0}^{[n/2]} \binom{n}{2m} x^{n-2m} \left(x^2 - 1\right)^m \end{aligned}$$

که در آن $\binom{n}{k}$ ضرایب دوجمله‌ای نیوتن هستند،

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

ونماد $[n/2]$ جز صحیح $\frac{n}{2}$ است.

قضیه ۳.۱.۳. اگر m, n اعداد نامنفی باشند آن‌گاه برای هر چندجمله‌ای چبیشف روابط زیر برقرار است.

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}(T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x)$$

$$(T_{m+n}(x) - 1)(T_{|m-n|}(x) - 1) = (T_m(x) - t_n(x))^2$$

$$T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$$

برهان. اثبات در [10] بیان شده است. □

تعریف ۴.۱.۳. ضریب پیوستگی تابعی مانند f روی یک بازه I به‌صورت زیر تعریف می‌شود. برای هر دو نقطه $x, y \in I$ و $\delta > 0$ که $|x-y| < \delta$ داشته باشیم

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x,y \in I} |f(x) - f(y)|$$

قضیه ۵.۱.۳. قضیه جاکسون[1][3]: فرض کنید تابع $f(x)$ روی بازه $[-1, 1]$ پیوسته باشد، اگر ω، ضریب پیوستگی تابع $f(x)$ باشد، آنگاه برای هر ثابت $c > 0$ و عدد مثبت n داریم:

$$E_n(f) \leq c\omega(n^{-1})$$

برهان. اثبات در [3] بیان شده است. □

تعریف ۶.۱.۳. تابع $f \in C[d, e]$ در شرط لیپ شیتز از مرتبه α صدق می‌کند، هرگاه برای هر دو نقطه $x, y \in [d, e]$ و $K > 0$ داشته باشیم:

$$|f(x) - f(y)| < K|x-y|^\alpha$$

در صورتی‌که تعریف ۶.۱.۳ برای تابع f برقرار باشد می‌نویسیم $f \in lip_k^\alpha$.

نتیجه قضیه جکسون: با توجه به قضیه جکسون برای تابع پیوسته f و ثابت c و $n > 0$، $E_n(f) \leq c\omega(n^{-1})$ ، اگر تابع پیوسته f روی بازه $[-1, 1]$ درشرط لیپ شیتز از مرتبه α صدق کند($f \in lip_k^\alpha$)، آنگاه

$$E_n(f; [-1, 1]) \leq 6kn^{-\alpha}$$

[1] Jackson

تعریف ۷.۱.۳. نقاط تناوبی برای تابع f، دنباله‌ای از نقاط مانند $x_۱, x_۲, \ldots, x_m$ در دامنه f هستند، که به‌صورت زیر مرتب شده باشند

$$x_۱ < x_۲ < \cdots < x_m$$

وبرای هر x_i، $(i = ۱, \ldots, m)$ روابط زیر را داشته باشیم

$$|f(x_i)| = \|f\|_\infty$$

$$sgnf(x_{i+۱}) = -sgnf(x_i)$$

اگر p_n^* بهترین تقریب تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[a, b]$ باشد، مجموعه $k + ۱$ نقطه متمایز و متناوب $x_۰, x_۱, \ldots x_k$ را که در رابطه $a \leq x_۰ < x_۱ < \cdots < x_k \leq b$ صدق کند، یک مجموعه تناوبی برای تابع خطای $f - p_n^*$ گوییم اگر دارای دو ویژگی زیر باشد:

۱. $j = ۰, \cdots, k$ $\qquad |f(x_j) - p_n^*(x_j)| = \|f - p_n^*\|$

۲. $j = ۰, \cdots, k - ۱$ $\qquad [f(x_j) - p_n^*(x_j)] = -[f(x_{j+۱}) - p_n^*(x_{j+۱})]$

۲.۳ بهترین تقریب یکنواخت از نوع چندجمله‌ای برای توابع گویا

مساله بهترین تقریب توابع (با نرم L_m) در مجموعه چندجمله‌ای‌ها یکی از مهمترین و کاربردی‌ترین موضوعات در نظریه تقریب است، که اهمیت ویژه‌ای در مباحث مربوط به معادلات دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل جزیی، معادلات انتگرالی، معادلات دیفرانسیل انتگرالی، و ... دارد. این مساله به صورت زیر تعریف می‌شود:

می‌دانیم که طبق قضیه تقریب وایرشتراس، برای هر تابع $f \in C[d, e]$، یک چندجمله‌ای یکتای $p_n^* \in P_n$ وجود دارد به‌طوری که:

$$\|f - p_n^*\|_m \leq \|f - p\|_m, \qquad \forall p \in P_n \tag{۱.۳}$$

تعریف ۱.۲.۳. چندجمله‌ای p_n^* را که در رابطه (۱.۳)صدق کند، بهترین تقریب تابع f (با نرم L_m)در مجموعه چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[d, e]$ گوییم.

تعریف ۲.۲.۳. فرض کنید $f \in C[d, e]$ و P_n مجموعه چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n باشد، برای هر عدد صحیح نامنفی n، چندجمله‌ای یکتایی مانند $p_n^* \in P_n$ وجود دارد به‌طوری که برای

هر $p \in P_n$ داریم:

$$E_n(f;[d,e]) = \max_{d\leq x\leq e} |f(x) - p_n^*(x)| \leq \max_{d\leq x\leq e} |f(x) - p(x)|$$

که در این حالت p_n^* بهترین تقریب یکنواخت تابع f روی بازه $[d,e]$ در مجموعه چندجمله‌ای‌ها است.

هم‌چنین قضیه تناوبی چبیشف را که شرط لازم و کافی برای تقریب توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها، فراهم می‌کند، به‌صورت زیر بیان کردیم:

فرض کنید $f \in C[a,b]$ ، و $\varepsilon(x) = f(x) - p_n^*(x)$ خطای تقریب f باشد. آن‌گاه p_n^* بهترین تقریب یکنواخت تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌ها است اگر و فقط اگر حداقل $n+۲$ نقطه $x_۱ < x_۲ < \cdots < x_{n+۲}$ در بازه $[a,b]$ برای

$$|\varepsilon(x_i)| = \max_{d\leq x\leq e} |f(x) - p_n^*(x)|$$

وجود داشته باشد.

در فصل دوم با بیان قضیه‌ای، یکتا بودن بهترین تقریب یک تابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها را نشان دادیم. به‌عبارت دیگر اگر p_n^* بهترین تقریب تابع $f \in C[a,b]$ در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_n باشد، آنگاه p_n^* یکتاست.

لم ۳.۲.۳. فرض کنید $T_n'(x)$ مشتق $T_n(x)$ باشد، آنگاه برای هر $x \in [-۱,۱]$ و $k = ۰,۱,۲,\ldots$ داریم:

$$T_n'(x) = \begin{cases} ۲n(T_{n-۱}(x) + T_{n-۳}(x) + \cdots + T_۰(x)) - n & n = ۲k+۱ \\ ۲n(T_{n-۱}(x) + T_{n-۳}(x) + \cdots + T_۱(x)) & n = ۲k \end{cases}$$

برهان. با توجه به این‌که در تعریف چندجمله‌ای چبیشف $x = \cos\theta$ در نظر گرفته می‌شود، با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به x داریم:

$$(-\sin\theta)\theta' = ۱$$

و

$$\theta' = -\frac{۱}{\sin\theta}$$

که θ' مشتق θ نسبت به x است. بنابراین

$$T_n'(x) = (\cos n\theta)' = -n\theta'\sin n\theta = \frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$$

حال دو حالت در نظر می‌گیریم.

زمانی که $n = ۲k$، داریم:

$$\begin{aligned}
&2n(T_{n-1}(x)+T_{n-3}(x)+...+T_1(x))\\
&=\frac{n}{\sin\theta}(2\sin\theta\cos(n-1)\theta+2\sin\theta\cos(n-3)\theta+...\\
&\quad+2\sin\theta\cos 3\theta+2\sin\theta\cos\theta)\\
&=\frac{n}{\sin\theta}((\sin n\theta-\sin(n-2)\theta)+(\sin(n-2)\theta-\sin(n-4)\theta+...\\
&\quad+(\sin 4\theta-\sin 2\theta)+(\sin 2\theta))\\
&=\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}$$

زمانی که $n=2k+1$، داریم:

$$\begin{aligned}
&2n(T_{n-1}(x)+T_{n-3}(x)+...+T_0(x))-n\\
&=\frac{n}{\sin\theta}((2\sin\theta\cos(n-1)\theta+2\sin\theta\cos(n-3)\theta+...\\
&\quad+2\sin\theta\cos 2\theta+2\sin\theta)-\sin\theta)\\
&=\frac{n}{\sin\theta}(((\sin n\theta-\sin(n-2)\theta)+(\sin(n-2)\theta-\sin(n-4)\theta)+...\\
&\quad+(\sin 3\theta-\sin\theta)+2\sin\theta)-\sin\theta\\
&=\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}$$

□

در ادامه برای نشان دادن مشتق مرتبه kام $T_n(x)$، از $T_n^{(k)}(x)$ استفاده می‌کنیم. در حالت کلی چندجمله‌ای‌های چبیشف در روابط زیر صدق می‌کنند:

۱. $T_n^{(k)}(1)=\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)...(n^2-(k-1)^2)}{1\times3\times5...(2k-1)};\qquad k\geq 1$

۲. $T_n(-x)=(-1)^nT_n(x);\qquad n\geq 0$

با توجه به رابطه

$$T_n'(x)=\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}=\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x)$$

نتیجه می‌شود که

$$T'_n(۱) = n^۲$$

همچنین با ادامه این روند داریم

$$T''_n(x) = n\frac{d}{d\theta}(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta})(-\frac{۱}{\sin\theta})$$

حال با مشتق‌گیری تا مرحله k ام در نقطه $x = ۱$ اثبات ۱ بدیهی است.

جزییات اثبات در [۳] بطور دقیق بیان شده است.

درمورد رابطه ۲ داریم

$$T_n(-x) = \cos(n\arccos(-x)) = (-۱)^n\cos(n\arccos x) = (-۱)^nT_n(x)$$

لم ۴.۲.۳. برای $x \geq ۱$ و $k = ۰, ۱, \ldots, n$ همواره داریم: $T_n^{(k)}(x) > ۰$

برهان. با توجه به رابطه

$$T'_n(x) = \frac{n}{\sqrt{۱ - x^۲}}\sin(n\arccos x)$$

و

$$T'_n(x'_n) = [\cos(n\arccos cos(\frac{k\pi}{n}))] = \cos(k\pi) = (-۱)^k.$$

ملاحظه می‌کنیم که ماکسیمم در مقادیر زوج و مینیمم در مقادیر فرد k اتفاق می‌افتد.

حال با استفاده از ویژگی ۱ و به‌کار بردن قضیه رول نتیجه حاصل می‌شود. □

اگر $T_n(x)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از درجه n باشد، با محاسبه T' مشاهده می‌کنیم که T' یک چندجمله‌ای از درجه $n-۱$ است.

حال با مشتق‌گیری از رابطه $T_n(x) = \cos n\theta$ نسبت به x به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\frac{۱}{n}T'_n(x) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

که یک چندجمله‌ای از مرتبه $n-۱$ است و آن را چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم می‌نامیم و به‌صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+۱)\theta}{\sin\theta}$$

به‌طور مشابه، محدوده تغییرات x و θ در این چندجمله‌ای، مانند چندجمله‌ای چبیشف نوع اول است.

هم‌چنین رابطه بازگشتی زیر برای $U_n(x)$ برقرار است.

$$U_n(x) = ۲xU_{n-۱}(x) - U_{n-۲}(x) \qquad n = ۲, ۳, \ldots$$

با توجه به این رابطه تعدادی از این چندجمله‌ای‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$U_۰(x) = ۱$$

$$U_۱(x) = ۲x$$

$$U_۲(x) = ۴x^۲ - ۱$$

$$U_۳(x) = ۸x^۳ - ۴x$$

هم‌چنین رابطه بازگشتی زیر بین چندجمله‌ای چبیشف نوع اول و دوم برقرار است.

$$U_n(x) - U_{n-۲}(x) = ۲T_n(x) \qquad n = ۲, ۳, \ldots$$

لم ۵.۲.۳. اگر q یک عدد صحیح و مثبت باشد داریم: $T_q^۲(x) > ۱ \Leftrightarrow x^۲ > ۱$

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که $f(x) = T_q^۲(x)$ برای $x > ۱$ صعودی اکید است.

برای رسیدن به این هدف نشان می‌دهیم که برای $x > ۱$، $f'(x) = ۲T_q'(x)T_q(x) > ۰$ است.

طبق لم ۴.۲.۳ تمام مشتقات $T_n(x) > ۰$ هستند، که نتیجه می‌شود $f'(x)$ همواره بزرگتر از صفر است. پس $f(x)$ صعودی اکید است، حال $x > ۱$ است اگر و فقط اگر $f(x) > f(۱)$ باشد. به‌علاوه

$$T_q^۲(x) > T_q^۲(۱) = ۱ \Leftrightarrow x > ۱ \tag{۲.۳}$$

حال اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم، با استفاده از رابطه ۲.۳ و با توجه به زوج بودن q در رابطه $T_q(-x) = (-۱)^q T_q(x) = T_q(x)$ داریم:

$$T_q^۲(-x) = T_q^۲(x) > ۱ \Leftrightarrow x < -۱ \tag{۳.۳}$$

چون $x < -۱$، پس $x^۲ > ۱$ است، در نتیجه با ترکیب روابط ۲.۳ و ۳.۳ برهان کامل می‌شود. □

لم ۶.۲.۳. برای $x = \cos(\theta)$ و $|t| < ۱$ و عدد طبیعی p داریم:

(a)

$$\sum_{j=۰}^{\infty} t^{pj} T_{pj}(x) = \frac{۱ - t^p \cos(p\theta)}{۱ + t^{۲p} - ۲t^p \cos(p\theta)} \tag{۴.۳}$$

(b)

$$\sum_{j=۰}^{n-۱} t^{pj} T_{pj}(x) = \frac{۱ - t^p \cos(p\theta) - t^{pn} \cos(pn\theta) + t^{pn+p} \cos(pn\theta)\cos(p\theta)}{۱ + t^{۲p} - ۲t^p \cos(p\theta)} + \frac{t^{pn+p} \sin(pn\theta)\sin(p\theta)}{۱ + t^{۲p} - ۲t^p \cos(p\theta)}$$

برهان. می‌دانیم که $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ با استفاده از بسط دوجمله‌ای

$$\begin{aligned}(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n &= \cos^n(\theta)+\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta)\\ &+\binom{n}{2}\cos^{n-2}(\theta)(i^2\sin^2\theta)+\cdots+\binom{n}{n}(i\sin\theta)^n\\ &=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(\cos(\theta))^k(i\sin\theta)^{n-k}\end{aligned} \tag{۵.۳}$$

طبق تعریف توابع مولد برای چندجمله‌ای‌های چبیشف و قرار دادن $x=\cos(\theta)$ داریم

$$\frac{1-t^px}{1+t^{2p}-2t^px}=\sum_{n=0}^{\infty}T_{pj}(x)t^{pj} \tag{۶.۳}$$

حال با توجه به روابط ۵.۳ و ۶.۳ نتیجه حاصل می‌شود. □

لم ۷.۲.۳. برای هر $x\in[-1,1]$ و هر عدد صحیح و مثبت q و $a^2>1$ داریم:

$$\frac{1}{(T_q(a)-T_q(x))}=\frac{2t^q}{(t^{2q}-1)}-\frac{4t^q}{(t^{2q}-1)}\sum_{k=0}^{\infty}t^{qk}T_{qk}(x) \tag{۷.۳}$$

که t در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$t=\left(T_q(a)-\sqrt{T_q^2(a)-1}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{۸.۳}$$

برهان. از رابطه ۸.۳ معلوم می‌شود که $|t|<1$ است. همچنین با رابطه ۴.۳ و لم ۵.۲.۳، $a^2>1 \Leftrightarrow T_q^2(a)>1$، با انتخاب a به‌طوری که $a^2>1$ باشد برهان کامل می‌شود. □

در ادامه با بیان قضایایی بهترین تقریب یکنواخت تابع $1/(T_q(a)-T_q(x))$ روی بازه $[-1,1]$ را در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_{qn} به‌دست می‌آوریم.

۳.۳ بهترین تقریب یکنواخت تابع $1/(T_q(a)-T_q(x))$

قضیه ۱.۳.۳. بهترین تقریب یکنواخت تابع $f(x)=1/(T_q(a)-T_q(x))$ روی بازه $[-1,1]$ در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_{qn}، زمانی که $a^2>1$ باشد، به‌صورت زیر است.

$$p^*_{qn}(x)=\frac{2t^q}{t^{2q}-1}-\frac{4t^q}{t^{2q}-1}\sum_{k=0}^{n-1}t^{qk}T_{qk}(x)+\frac{4t^{qn+q}}{(t^{2q}-1)^2}T_{qn}(x) \tag{۹.۳}$$

و

$$E_{qn}(f;[-1,1])=\|f-p^*_{qn}\|_\infty=\frac{4t^{qn+2q}}{(t^2q-1)^2} \tag{۱۰.۳}$$

که در آن

$$t = \left(T_q(a) - \sqrt{T_q^{۲}(a) - ۱}\right)^{۱/q} \tag{۱۱.۳}$$

برهان. با استفاده از قضیه تناوبی چبیشف اگر بخواهیم اثبات کنیم که p_{qn}^* در معادله ۹.۳ بهترین تقریب یکنواخت تابع $۱/(T_q(a) - T_q(x))$ در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_{qn} است باید نشان دهیم که خطای تقریب یعنی

$$e_{qn}(x) = \frac{۱}{(T_q(a) - T_q(x))} - p_{qn}^*(x),$$

$۲ + qn$ نقطه متناوب در بازه $[-۱, ۱]$ دارد. با توجه به روابط ۷.۳ و ۹.۳ داریم:

$$e_{qn}(x) = -\frac{۸t^q}{t^{۲q} - ۱} \sum_{k=n}^{\infty} t^{qk} T_{qk}(x) - \frac{۴t^{qn+q}}{(t^{۲q} - ۱)^{۲}} T_{qn}(x). \tag{۱۲.۳}$$

با به کار بردن لم ۴.۲.۳ داریم:

$$\sum_{k=n}^{\infty} t^{qk} T_{qk}(x) = \frac{t^{qn}\cos(qn\theta) - t^{qn+q}(\cos(qn\theta)\cos(q\theta) + \sin(qn\theta)\sin(q\theta))}{۱ + t^{۲q} - ۲t^q\cos(q\theta)} \tag{۱۳.۳}$$

حال با ترکیب روابط ۱۲.۳ و ۱۳.۳ نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} e_{qn}(x) = &-\frac{۴t^q}{t^{۲q} - ۱}\left\{t^q n \frac{\cos(qn\theta) - t^q(\cos(qn\theta)\cos(q\theta) + \sin(qn\theta)\sin(q\theta))}{۲t^q(T_q(a) - T_q(x))}\right\} \\ &- \frac{۴t^{qn+q}}{(t^{۲q} - ۱)^{۲}} T_{qn}(x). \end{aligned} \tag{۱۴.۳}$$

حال با ساده کردن رابطه ۱۴.۳ و قرار دادن

$$\alpha = \left\{\frac{(۱ - t^q\cos(q\theta))(t^{۲q} - ۱)(\cos(qn\theta) + t^q(t^{۲q} - ۱)\sin(q\theta)\sin(qn\theta))}{۲t^q(T_q(a) - T_q(x))}\right\}$$

و

$$\beta = (۱ - t^q\cos(q\theta))(t^{۲q} - ۱) + ۲t^q(T_q(a) - T_q(x))$$

و

$$\lambda = \frac{(۱ - T_q(a)T_q(x))}{(T_q(a) - T_q(x))}\cos(qn\theta)$$

داریم:

$$\begin{aligned} e_{qn}(x) &= -\frac{4t^{q+qn}}{(t^{2q}-1)^2}\left\{\alpha+\frac{2t^q(T_q(a)-T_q(x))\cos(qn\theta)}{2t^q(T_q(a)-T_q(x))}\right\} \\ &= -\frac{2t^{qn}}{(t^{2q}-1)^2}\left\{\frac{\beta}{(T_q(a)-T_q(x))}\cos(qn\theta)-\frac{t^q(t^{2q}-1)\sin(q\theta)}{(T_q(a)-T_q(x))}\sin(qn\theta)\right\} \\ &= -\frac{4t^{qn+2q}}{(t^{2q}-1)^2}\left\{\lambda-\frac{\sqrt{T_q^2(a)-1}\sqrt{1-T_q^2(x)}}{(T_q(a)-T_q(x))}\sin(qn\theta)\right\} \end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

اکنون اگر تعریف کنیم:

$$G_{1,q}(x) := \frac{(1-T_q(a)T_q(x))}{(T_q(a)-T_q(x))}; \qquad x\in[-1,1]$$

و

$$G_{2,q}(x) := \frac{\sqrt{T_q^2(a)-1}\sqrt{1-T_q^2(x)}}{(T_q(a)-T_q(x))}; \qquad x\in[-1,1]$$

می‌توانیم بنویسیم:

$$G_{1,q}^2(x)+G_{2,q}^2(x)=1; \qquad x\in[-1,1]$$

بنابراین برای $x\in[-1,1]$ داریم:

$$-1\le G_{1,q}(x)\le 1$$

از این روابط نتیجه می‌شود که برای هر $x\in(-1,1)$ یک عنصر $\eta_{x,q}\in(0,\pi)$ وجود دارد به طوری که:

$$\cos(\eta_{x,q})=G_{1,q}(x)=\frac{(1-T_q(a)T_q(x))}{(T_q(a)-T_q(x))} \tag{۱۶.۳}$$

بنابراین با توجه به رابطه ۱۶.۳ نتیجه می‌شود که

$$\sin(\eta_{x,q})=G_{2,q}(x)=\frac{\sqrt{T_q^2(a)-1}\sqrt{1-T_q^2(x)}}{(T_q(a)-T_q(x))} \tag{۱۷.۳}$$

با جایگذاری معادلات ۱۶.۳ و ۱۷.۳ در رابطه $e_{qn}(x)$ و قراردادن $(\eta_x=\eta_{x,q})$ داریم:

$$\begin{aligned} e_{qn}(x) &= -\frac{4t^{qn+2q}}{(t^{2q}-1)^2}\{\cos(\eta_x)\cos(qn\theta)-\sin(\eta_x)\sin(qn\theta)\} \\ &= -\frac{4t^{qn+2q}}{(t^{2q}-1)^2}\cos(qn\theta+\eta_x). \end{aligned}$$

حال اگر مشتق $G_{1,q}(x)$ را محاسبه کنیم نتیجه می‌شود:

$$G_{1,q}'(x) = -\frac{T_q'(x)(T_q^2(a)-1)}{(T_q(a)-T_q(x))^2}$$

دو حالت در نظر می‌گیریم :

زمانی که q یک عدد زوج باشد داریم:

$$G'_{۱,q}(x)\begin{cases} > ۰ & \bigcup_{i=۱}^{q/۲}\left(\cos\left(\frac{(۲i)\pi}{q}\right),\cos\left(\frac{(۲i-۱)\pi}{q}\right)\right)\bigcup\{-۱\}, \\ = ۰ & x=\cos\left(\frac{i\pi}{q}\right), i=۱,۲,\dots,q-۱, \\ < ۰ & x\in\bigcup_{i=۰}^{(q-۲)/۲}\left(\cos\left(\frac{(۲i+۱)\pi}{q}\right),\cos\left(\frac{۲i\pi}{q}\right)\right)\bigcup\{۱\}, \end{cases}$$

زمانی که q یک عدد فرد باشد داریم:

$$G'_{۱,q}(x)\begin{cases} < ۰ & \bigcup_{i=۱}^{(q-۱)/۲}\left(\cos\left(\frac{(۲i+۱)\pi}{q}\right),\cos\left(\frac{(۲i)\pi}{q}\right)\right)\bigcup\{۱,-۱\}, \\ = ۰ & x=\cos\left(\frac{i\pi}{q}\right), i=۱,۲,\dots,q-۱, \\ > ۰ & x\in\bigcup_{i=۰}^{(q-۲)/۲}\left(\cos\left(\frac{(۲i)\pi}{q}\right),\cos\left(\frac{(۲i-۱)\pi}{q}\right)\right)\bigcup\{۱\}, \end{cases}$$

فرض کنیم q یک عدد زوج باشد، اگر x از ۱− تا $\cos(q-۱)\pi/q$ تغییر کند، θ از π تا $(q-۱)\pi/q$ و η_x از π تا ۰ و $\cos(q\theta+\eta_x)$ از $\cos(qn+۱)\pi$ تا $\cos(q-۱)n\pi$ تغییر می‌کند. زمانی که x از $\cos(q-۱)\pi/q$ تا $\cos(q-۲)\pi/q$ تغییر کند، θ از $(q-۱)\pi/q$ تا $(q-۲)\pi/q$ و η_x از ۰ تا $-\pi$ و $\cos(qn\theta+\eta_x)$ از $\cos((q-۱)n)\pi$ تا $\cos((q-۲)n-۱)\pi$ تغییر می‌کند.

با ادامه این روند زمانی که x از $\cos\pi/q$ تا $\cos ۰$ تغییر کند، θ از π/q تا ۰ و η_x از ۰ تا $-\pi$ و $\cos(qn\theta+\eta_x)$ از $\cos(n\pi)$ تا $\cos(-\pi)$ تغییر می‌کند. و زمانی که x از ۱− تا ۱ تغییر کند، $\cos(qn\theta+\eta_x)$ از $\cos(qn+۱)\pi$ تا $\cos(-\pi)$ و در نتیجه $\cos(qn\theta+\eta_x)$ دارای حداقل $qn+۲$ نقطه اکسترمم است که این اکسترمم‌ها در نقاط ۱± رخ می‌دهند.

زمانی که q فرد باشد نیز همین روند را داریم. بنابراین با توجه به قضیه تناوبی چبیشف بهترین تقریب تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_{qn}، p^*_{qn} است و

$$E_{qn}(f;[-۱,۱])=\|f-p^*_{qn}\|_\infty=\frac{۴t^{qn+۲q}}{(t^{۲q}-۱)^۲}.$$

□

نتیجه ۲.۳.۳. صفرهای چندجمله‌ای

$$\left(T'_{qn}(x)\sqrt{۱-x^۲}\right)(۱-T_q(a)T_q(x))+qnT_{qn}(x)\left(\sqrt{T_q^۲(a)-۱}\sqrt{۱-T_q^۲(x)}\right) \quad (۱۸.۳)$$

نقاط متناوبی ازتابع گویای $۱/(T_q(a)-T_q(x))$ هستند.

برهان. همان‌طور که در قضیه ۱.۳.۳ دیدیم نقاط متناوب تابع $۱/(T_q(a)-T_q(x))$ نقاط اکسترمم

$\cos(qn\theta+\eta_x)$ است که $x=\cos(\theta)$ و $\cos(\eta_x)=\frac{(1-T_q(a)T_q(x))}{(T_q(a)-T_q(x))}$. به‌عبارت دیگر برای هر نقطه اکسترمم از $\cos(qn\theta+\eta_x)$ داریم $\sin(qn\theta+\eta_x)=0$. بنابراین

$$\begin{aligned}
0=\sin(qn\theta+\eta_x)&=\left(\frac{T'_{qn}(x)\sin(\theta)}{qn}\right)\left(\frac{(1-T_q(a)T_q(x))}{(T_q(a)-T_q(x))}\right)\\
&+T_{qn}(x)\left(\frac{\sqrt{T_q^2(a)-1}\sqrt{1-T_q^2(x)}}{(T_q(a)-T_q(x))}\right)\\
&=\left(T'_{qn}(x)\sqrt{1-x^2}\right)(1-T_q(a)T_q(x))+qnT_{qn}(x)\left(\sqrt{T_q^2(a)-1}\sqrt{1-T_q^2(x)}\right).
\end{aligned}$$

بنابراین ریشه‌های $\left(T'_{qn}(x)\sqrt{1-x^2}\right)(1-T_q(a)T_q(x))+qnT_{qn}(x)\left(\sqrt{T_q^2(a)-1}\sqrt{1-T_q^2(x)}\right)$ نقاط متناوبی از تابع گویای $1/(T_q(a)-T_q(x))$ هستند. بنابراین ۱− و ۱ صفرهای معادله ۱۸.۳ هستند. □

در این بخش بهترین تقریب یکنواخت تابع $1/(T_q(a)+T_q(x))$ روی بازه $[-1,1]$ را در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_{qn} زمانی که $a^2>1$ باشد، به‌دست می‌آوریم.

۴.۳ بهترین تقریب تابع $1/(T_q(a)+T_q(x))$

برای به‌دست آوردن بهترین تقریب یکنواخت تابع $1/(T_q(a)+T_q(x))$ ابتدا لم زیر را اثبات می‌کنیم.

لم ۱.۴.۳. فرض کنید $x\in[-1,1]$ و q یک عدد صحیح و مثبت باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{1}{(T_q(a)+T_q(x))}=\frac{2t^q}{t^{2q}-1}-\frac{4t^q}{t^{2q}-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{qk}T_{qk}(x)$$

که t در رابطه

$$t=\left(T_q(a)-\sqrt{T_q^2(a)-1}\right)^{1/q} \qquad (۱۹.۳)$$

صدق می‌کند.

برهان. رابطه ۱۹.۳ نشان می‌دهد که $|t|<1$، در نتیجه با به کار بردن قضیه تناوبی چبیشف، $a^2>1 \Leftrightarrow T_q^2(a)>1$، بنابراین کافی است a را طوری انتخاب کنیم که $a^2>1$ باشد. □

قضیه ۲.۴.۳. بهترین تقریب یکنواخت تابع $f(x)=1/(T_q(a)+T_q(x))$ روی بازه $[-1,1]$ در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_{qn} برابر با

$$p^*_{qn}(x)=\frac{2t^q}{t^{2q}-1}-\frac{4t^q}{t^{2q}-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{qk}T_{qk}(x)+\frac{4(-1)^n t^{qn+q}}{(t^{2q}-1)^2}T_{qn}(x)$$

و

$$E_{qn}(f;[-1,1]) = \|f - p^*_{qn}\|_\infty = \frac{4t^{qn+2q}}{(t^2q-1)^2}$$

که در آن

$$t = \left(T_q(a) - \sqrt{T_q^2(a)-1}\right)^{1/q}$$

برهان. اثبات این قضیه مشابه برهان قضیه ۱.۳.۳ است. □

ملاحظه ۳.۴.۳. طبق قضیه جاکسون[۲] برای هر $f \in C[d,e]$ داریم:

$$E_n(f;[d,e]) \leq 6\omega\left(\frac{e-d}{2n}\right)$$

که در این رابطه ω ضریب پیوستگی $f(x)$ روی بازه $[d,e]$ است. همچنین تابع $f \in C[d,e]$ در شرط لیپ شیتز از مرتبه α صدق می‌کند،

از سوی دیگر در مورد تابع $f(x) = 1/(T_q(a) \pm T_q(x))$ زمانی که $a^2 > 1$ باشد، برای هر $x,y \in [-1,1]$ داریم:

$$|f(x) - f(y)| < K|x-y|$$

که نشان می‌دهد این تابع در شرط لیپ شیتز از مرتبه یک صدق می‌کند، یعنی ($f \in lip_K^1$).

بنابراین با توجه به این نتایج خطای تقریب f توسط چندجمله‌ای‌ها باید در قضیه جکسون صدق کند یعنی

$$E_{qn}(f;[-1,1]) \leq 6\omega\left(\frac{1}{qn}\right) \leq \frac{6K}{qn}$$

و بنابراین f به‌طور یکنواخت به p^*_{qn} نزدیک می‌شود، یا:

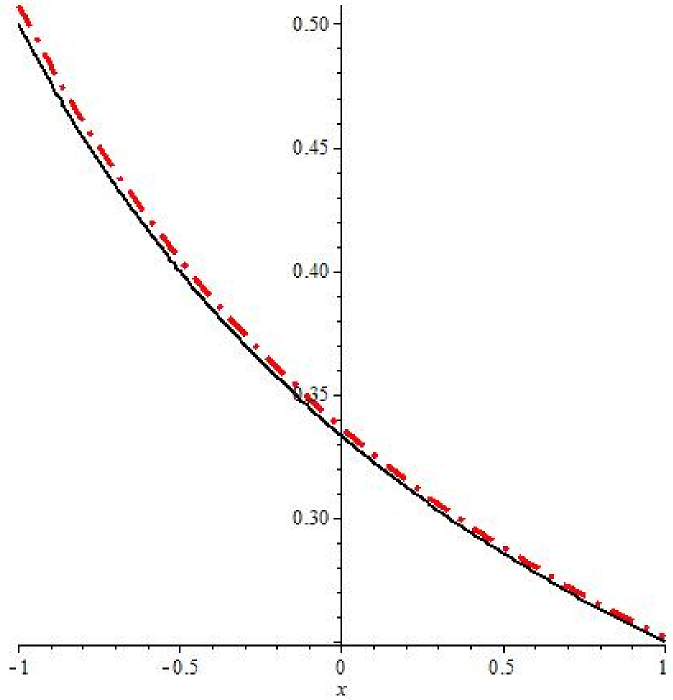
$$\lim_{n\to\infty} E_{qn}(f;[-1,1]) = 0$$

مثال ۴.۴.۳. در این مثال هدف ما پیدا کردن بهترین تقریب یکنواخت تابع زیر در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_4 است.

$$\frac{1}{(x+3)}; \qquad x \in [-1,1]$$

برای رسیدن به این هدف کافی است در قضیه ۲.۴.۳، قرار دهیم، $q=1, a=3, n=4$. بنابراین

[۲] Jackson



شکل ۱.۳: بهترین تقریب $\frac{۱}{(x+۳)}$

داریم $t=۳-۲\sqrt{۲}$ و

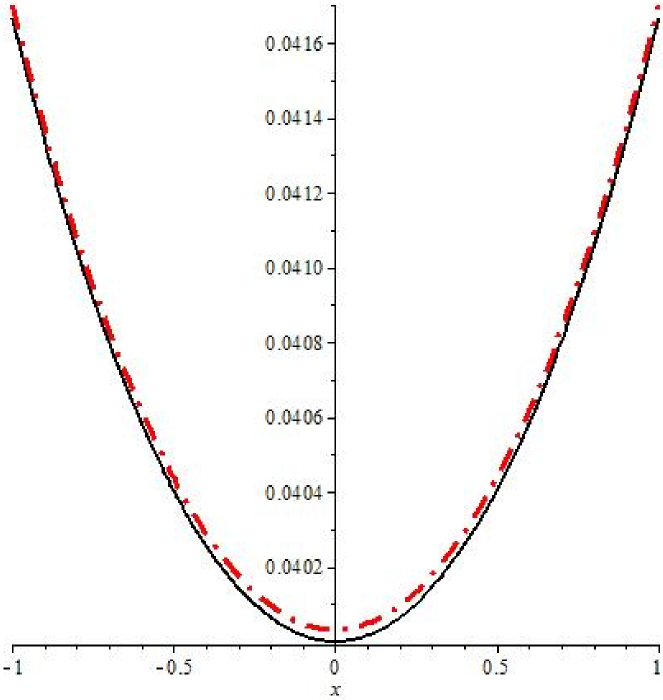
$$p_۴^*(x)=\frac{(۳-۲\sqrt{۲})}{(۸-۶\sqrt{۲})}-\frac{(۳-۲\sqrt{۲})}{(۴-۲\sqrt{۲})}\sum_{k=۰}^{۳}(-۱)^k(۳-۲\sqrt{۲})^kT_k(x)$$
$$+\frac{(۳۳۶۳-۲۳۷۸\sqrt{۲})}{(۱۳۶-۹۶\sqrt{۲})}T_۴(x)$$

و در این رابطه $T_k(x)$ برای $x\in[-۱,۱]$ در روابط بازگشتی ۲.۳ صدق می‌کند.

در شکل ۱.۳ تابع $۱/(x+۳)$ را رسم کرده‌ایم، در این شکل نقطه چین‌ها بهترین تقریب یکنواخت تابع $۱/(x+۳)$ را در مجموعه چندجمله‌ای‌های $P_۴$ نشان می‌دهد.

مثال ۵.۴.۳. بهترین تقریب یکنواخت تابع $f(x)=\frac{۱}{۲۵-x^۲}$ در مجموعه چندجمله‌ای‌های $P_{۲n}$ به شکل زیر است:

$$p_{۲n}^*(x)=\frac{-۴۹+۲۰\sqrt{۶}}{۱۰(-۱۲۰+۴۹\sqrt{۶})}+\frac{-۴۹+۲۰\sqrt{۶}}{۵(-۱۲۰+۴۹\sqrt{۶})}\sum_{k=۰}^{n-۱}\left(۵-۲\sqrt{۶}\right)^{۲k}T_{۲k}(x)$$
$$+\frac{(-۴۹+۲۰\sqrt{۶})(۵-۲\sqrt{۶)^{۲n}})}{۱۲۰۰(-۴۸۰۱+۱۹۶۰\sqrt{۶})}T_{۲n}(x).$$



شکل ۲.۳: بهترین تقریب $\frac{1}{(25-x^2)}$

تابع $f(x)=\frac{1}{25-x^2}$ در شکل ۲.۳ رسم شده است و بهترین تقریب یکنواخت تابع $\frac{1}{25-x^2}$ در مجموعه چندجمله‌ای‌های از درجه ۶ با نقطه چین مشخص شده است.

مثال ۶.۴.۳. در این مثال بهترین تقریب یکنواخت تابع زیر را می‌یابیم.

$$\frac{1}{-8x^4+8x^2+96}; \qquad x\in[-1,1]$$

با توجه به رابطه $T_4(2)-T_4(x)=-8x^4+8x^2+96$ و قضیه ۱.۳.۳ داریم:

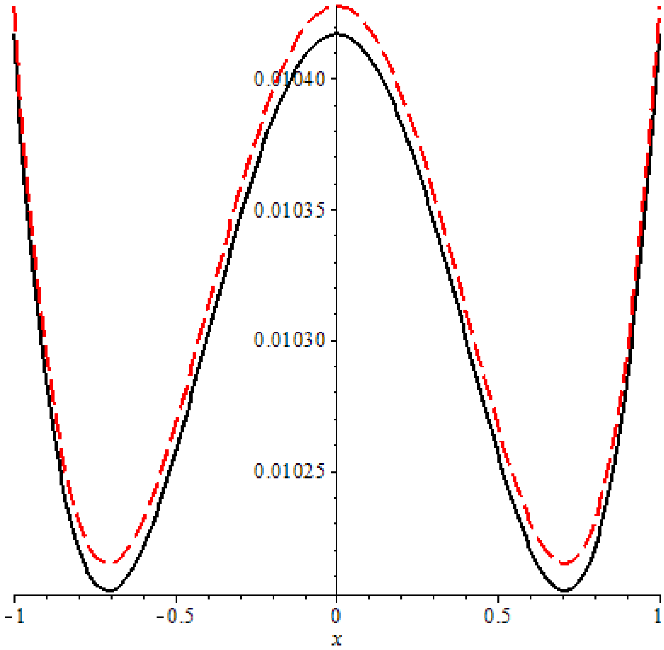
$$t=\left(97-\sqrt{9408}\right)^{1/4}$$

و

$$p^*_{4n}(x)=\frac{2t^2}{(t^8-1)}-\frac{4t^4}{(t^8-1)}\sum_{k=0}^{n-1}t^{4k}T_{4k}(x)+\frac{4t^{4n+4}}{(t^8-1)^2}T_{4n}(x)$$

در شکل ۳.۳ بهترین تقریب یکنواخت تابع $\frac{1}{-8x^4+8x^2+96}$ در مجموعه چندجمله‌ای‌های از درجه ۱۶ روی بازه $[-1,1]$ با خط‌چین نشان داده شده است.

در قسمت بعد با استفاده از مطالب گفته شده بهترین تقریب یکنواخت رده خاصی از توابع گویا به فرم $\frac{1}{(a^2\pm x^2)}$ را در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_{2n} به‌دست می‌آوریم.



شکل ۳.۳: بهترین تقریب $\frac{1}{(-8x^4+8x^2+96)}$

۵.۳ بهترین تقریب یکنواخت توابع گویا با فرم $\frac{1}{(a^2 \pm x^2)}$ در مجموعه چندجمله‌ای‌ها

در ابتدای این فصل بهترین تقریب یکنواخت رده‌ای از توابع گویا به فرم $1/(T_q(a) \pm T_q(x))$ را روی بازه $[-1, 1]$ در مجموعه چندجمله‌ای‌ها به‌دست آوردیم. در ادامه می‌توانیم رابطه $\frac{1}{(a^2 \pm x^2)}$ را با استفاده از روابط بازگشتی چندجمله‌ای‌های چبیشف، به‌صورت زیر داشته باشیم:

$$\frac{1}{a^2 \pm x^2} = \frac{1}{1/2(T_0(a) + T_2(a)) \pm 1/2(T_0(x) \pm T_2(x))}$$

بنابراین با استفاده از روابط بیان شده برای به‌دست آوردن بهترین تقریب یکنواخت توابع گویا به فرم $1/(T_q(a) \pm T_q(x))$ می‌توانیم بهترین تقریب توابع گویا با فرم $\frac{1}{(a^2 \pm x^2)}$ در مجموعه چندجمله‌ای‌ها را نیز به‌دست آوریم.

مثال ۱.۵.۳. طبق لم ۶.۲.۳ برای $x = \cos(\theta)$ و $|t| < 1$ و عدد طبیعی p می‌توانیم روابط زیر را داشته باشیم:

(a)

$$\sum_{j=0}^{\infty} t^{pj}T_{pj}(x) = \frac{1 - t^p\cos(p\theta)}{1 + t^{2p} - 2t^p\cos(p\theta)}, \qquad (20.3)$$

(b)

$$\sum_{j=0}^{n-1} t^{pj}T_{pj}(x) = \frac{1 - t^p\cos(p\theta) - t^{pn}\cos(pn\theta) + t^{pn+p}\cos(pn\theta)\cos(p\theta)}{1 + t^{2p} - 2t^p\cos(p\theta)} + \frac{t^{pn+p}\sin(pn\theta)\sin(p\theta)}{1 + t^{2p} - 2t^p\cos(p\theta)}$$

۱.۵.۳ بهترین تقریب یکنواخت تابع $1/(a^2 - x^2)$ روی بازه $[-1, 1]$

در ادامه بهترین تقریب یکنواخت تابع $\frac{1}{(a^2-x^2)}$ روی بازه $[-1,1]$ را طی مثالی در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_{2n} به‌دست می‌آوریم.

مثال ۲.۵.۳. بهترین تقریب یکنواخت تابع $\frac{1}{(a^2-x^2)}$ زمانی‌که $a^2 > 1$ باشد روی بازه $[-1,1]$در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_{2n} به‌صورت زیر است.

$$p^*_{2n}(x) = \frac{4t^2}{t^4-1} - \frac{8t^2}{t^4-1}\sum_{k=0}^{n-1} t^{2k}T_{2k}(x) + \frac{8t^{2n+2}}{(t^4-1)^2}T_{2n}(x) \qquad (21.3)$$

و

$$E_{2n}(f;[-1,1]) = \|f - p^*_{2n}\|_\infty = \frac{8t^{2n+4}}{(t^4-1)^2}$$

که در آن

$$t = a - \sqrt{(a^2-1)} \qquad (22.3)$$

با استفاده از بخش (a) در مثال ۱.۵.۳ داریم،

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}T_{2k}(x) = \frac{1 - t^2\cos(2\theta)}{1 + t^4 - 2t^2\cos(2\theta)}$$

همچنین ماسون [3] در [۹] با توجه به بسط چبیشف توابع نشان داد که می‌توانیم برابری زیر را داشته باشیم:

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{2}{a(a^2-1)^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}(a - (a^2-1)^{\frac{1}{2}})^{2k}T_{2k}(x); \qquad (a^2 > 1), \qquad (23.3)$$

[3] Mason

از رابطه ۲۲.۳ داریم:

$$a = \frac{t^۲ + ۱}{۲t} \tag{۲۴.۳}$$

حال اگر روابط ۲۳.۳ و ۲۴.۳ را با هم ترکیب کنیم نتیجه می‌شود که

$$\frac{۱}{a^۲ - x^۲} = \frac{۴t^۲}{t^۴ - ۱} - \frac{۸t^۲}{t^۴ - ۱} \sum_{k=۰}^{\infty} t^{۲k} T_{۲k}(x). \tag{۲۵.۳}$$

طبق قضیه تناوبی چبیشف، برای به‌دست آوردن $p^*_{۲n}$ که بهترین تقریب یکنواخت تابع $\frac{۱}{(a^۲ - x^۲)}$ در $P_{۲n}$ است، کافی است نشان دهیم که خطای تقریب این تابع یعنی

$$e_{۲n}(x) = \frac{۱}{a^۲ - x^۲} - p^*_{۲n}(x)$$

$۲n + ۲$ نقطه متناوب در بازه $[-۱, ۱]$ دارد، حال با استفاده از روابط ۲۱.۳ و ۲۵.۳ داریم:

$$e_{۲n}(x) = -\frac{۸t^۲}{t^۴ - ۱} \sum_{k=n}^{\infty} t^{۲k} T_{۲k}(x) - \frac{۸t^{۲n+۲}}{(t^۴ - ۱)^۲} T_{۲n}(x)$$

حال با استفاده از ۱.۵.۳ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} e_{۲n}(x) = &-\frac{۸t^۲}{t^۴ - ۱} \left\{ t^{۲n} \frac{\cos(۲n\theta) - t^۲(\cos(۲n\theta)\cos(۲\theta) + \sin(۲n\theta)\sin(۲\theta))}{۱ + t^۴ - ۲t^۲\cos(۲\theta)} \right\} \\ &- \frac{۸t^{۲n+۲}}{(t^۴ - ۱)^۲} T_{۲n}(x). \end{aligned} \tag{۲۶.۳}$$

با ساده کردن رابطه۲۶.۳ و استفاده از روابط:

$$\cos(۲\theta) = ۲x^۲ - ۱; \qquad (x = \cos(\theta)),$$

$$۱ + t^۴ - ۲t^۲\cos(۲\theta) = ۴t^۲(a^۲ - x^۲),$$

$$t^۴ - ۱ = ۴a^۲t^۲ - ۲t^۲ - ۲,$$

و قرار دادن

$$\varphi = ((۱ - t^۲(۲x^۲ - ۱))(t^۴ - ۱) + ۴t^۲(a^۲ - x^۲))$$

و

$$\psi = (t^۲(t^۴ - ۱)\sqrt{(۱ - (۲x^۲ - ۱)^۲)})$$

و

$$\beta = (a^۲ - x^۲(۲a^۲ - ۱))$$

داریم:

$$\begin{aligned} e_{۲n}(x) &= -\frac{۸t^{۲n+۲}}{(t^۴-۱)^۲}\left\{\frac{\varphi}{۴t^۲(a^۲-x^۲)}\cos(۲n\theta)-\frac{\psi}{۴t^۲(a^۲-x^۲)}\sin(۲n\theta)\right\} \\ &= -\frac{۸t^{۲n+۴}}{(t^۴-۱)^۲}\left\{\frac{\beta}{(a^۲-x^۲)}\cos(۲n\theta)-\frac{۲\sqrt{a^۴-a^۲}\sqrt{x^۲-x^۴}}{(a^۲-x^۲)}\sin(۲n\theta)\right\} \end{aligned} \tag{۲۷.۳}$$

اکنون با تعریف روابط

$$G_۱(x) := \frac{(a^۲-x^۲(۲a^۲-۱))}{(a^۲-x^۲)}; \quad x\in[-۱,۱],$$

$$G_۲(x) := \frac{۲\sqrt{a^۴-a^۲}\sqrt{x۶۲-x^۴}}{(a^۲-x^۲)}; \quad x\in[-۱,۱]$$

داریم:

$$G_۱'(x) = -\frac{۴xa^۲(۲a^۲-۱)}{(a^۲-x^۲)^۲}\begin{cases} >۰ & x\in[-۱,۰], \\ =۰ & x=۰, \\ <۰ & x\in(۰,۱]. \end{cases} \tag{۲۸.۳}$$

$$G_۱(-۱)=-۱\le G_۱(x)\le ۱ = G_۱(۰); \quad x\in[-۱,۰], \tag{۲۹.۳}$$

$$G_۱(۱)=-۱\le G_۱(x)\le ۱ = G_۱(۰); \quad x\in[۰,۱], \tag{۳۰.۳}$$

$$G_۱^۲(x)+G_۲^۲(x)=۱; \quad x\in[-۱,۱]. \tag{۳۱.۳}$$

از روابط ۲۸.۳–۳۱.۳ نتیجه می‌شود که برای هر $x\in(-۱,۱)$ یک $\eta_x\in(۰,\pi)$ وجود دارد به‌طوری که:

$$\cos(\eta_x)=G_۱(x)=\frac{(a^۲-x^۲(۲a^۲-۱))}{(a^۲-x^۲)} \tag{۳۲.۳}$$

از رابطه ۳۲.۳ نتیجه می‌شود که

$$\sin(\eta_x)=G_۲(x)=\frac{۲\sqrt{a^۴-a^۲}\sqrt{x^۲-x^۴}}{(a^۲-x^۲)} \tag{۳۳.۳}$$

و با جایگزینی ۳۲.۳ و ۳۳.۳ در۲۷.۳ داریم:

$$\begin{aligned} e_{۲n}(x) &= -\frac{۸t^{۲n+۴}}{(t^۴-۱)^۲}\{\cos(\eta_(x))\cos(۲n\theta)-\sin(\eta_(x))\sin(۲n\theta)\} \\ &= -\frac{۸t^{۲n+۴}}{(t^۴-۱)^۲}\cos(۲n\theta+\eta_x). \end{aligned}$$

حال اگر x از ۱– تا ۰ تغییر کند، آنگاه θ از π تا $\frac{\pi}{۲}$ و η_x از π تا ۰ و $\cos(۲n\theta+\eta_x)$ از $\cos(۲n+۱)\pi$ تا $\cos n\pi$ تغییر می‌کند. اما زمانی که x از ۰ تا ۱ تغییر کند، θ از $\frac{\pi}{۲}$ تا ۰ و η_x از ۰ تا $-\pi$ و

$\cos(2n\theta+\eta_x)$ از $\cos n\pi$ تا $\cos(-\pi)$ تغییر می‌کند. بنابراین زمانی که x از -1 تا ۱ تغییر می‌کند، $\cos(2n\theta+\eta_x)$ از $\cos(2n+1)\pi$ تا $\cos(-\pi)$ تغییر می‌کند. و در نتیجه $\cos(2n\theta+\eta_x)$ حداقل دارای $2n+2$ نقطه اکسترمم است که این نقاط مقادیر متناوب ± 1 را اختیار می‌کنند. بنابراین $p^*_{2n}(x)$ بهترین تقریب درمجموعه P_{2n} است و

$$E_{2n}(f;[-1,1]) = \|f-p^*_{2n}\|_\infty = \frac{8t^{2n+4}}{(t^4-1)^2}.$$

با توجه به مطالب ذکر شده می‌توانیم حالتی را بررسی کنیم که صورت تابع گویای مورد نظر چندجمله‌ای مانند $q(x)$ باشد. این حالت با نتیجه زیر بیان شده است.

نتیجه ۳.۵.۳. بهترین تقریب تابع $q(x)/(a^2 \pm x)$ روی بازه $[-1,1]$ در مجموعه P_{2n} برای هر $q \in P_{n+1}$، $kr^*_n - r$ است که r^*_n بهترین تقریب $1/(a^2 \pm x)$ است و

$$q(x)/(a^2 \pm x) = k/(a^2 \pm x) - r$$

برهان. نتیجه را برای $q(x)/(a^2-x)$ اثبات می‌کنیم. $r \in P_n$ را طوری در نظر می‌گیریم که

$$\frac{q(x)}{(a^2-x)} = \frac{k}{(a^2-x)} - r$$

درنتیجه برای هر $r \in P_n$ داریم:

$$E_n(f,[-1,1]) = E_n(f-r,[-1,1]).$$

بنابراین $kr^*_n - r$ بهترین تقریب تابع $q(x)/(a^2-x)$ در مجموعه P_n روی بازه $[-1,1]$ است. اگر در نتیجه قبل x را به x^2 تبدیل کنیم و $Q(x) = q(x^2)$ و $R(x) = r(x^2)$ باشد، آنگاه به نتیجه زیر می‌رسیم. □

نتیجه ۴.۵.۳. بهترین تقریب تابع $Q(x)/(a^2 \pm x^2)$ روی بازه $[-1,1]$ در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_{2n} برای هر $Q \in P_{2n+2}$، $cR^*_{2n} - R$ است که در آن R^*_{2n} بهترین تقریب $1/(a^2 \pm x^2)$ است و $Q(x)/(a^2 \pm x^2) = c/(a^2 \pm x^2) - R$ است.

نتیجه ۵.۵.۳. صفرهای چندجمله‌ای $T'_{2n}(x)(a^2 - x^2(2a^2-1)) + 4nax(T_{2n}(x))\sqrt{a^2-1}$، -1 و ۱ هستند که نقاط متناوبی از تابع $1/(a^2-x^2)$ هستند.

برهان. همان‌طورکه در مثال ۲۱.۳ ملاحظه کردیم نقاط تناوبی تابع $1/(a^2-x^2)$ نقاط اکسترمم $\cos(2n\theta+\eta_x)$ است که $x=\cos(\theta)$ و $\cos(\eta_x) = (a^2 - x^2(2a^2-1))/(a^2-x^2)$. از طرفی برای

هر نقطه اکسترمم از $\cos(2n\theta+\eta_x)$، $\sin(2n\theta+\eta_x)=0$ است. بنابراین

$$
\begin{aligned}
0=\sin(2n\theta+\eta_x) &= \left(\frac{T'_{2n}\sin(\theta)}{2n}\right)\left(\frac{(a^2-x^2(2a^2-1))}{(a^2-x^2)}\right)\\
&+(T_{2n}(x))\left(\frac{2\sqrt{a^4-a^2}\sqrt{x^2-x^4}}{(a^2-x^2)}\right)\\
&=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2n(a^2-x^2)}\left\{T'_{2n}(x)(a^2-x^2(2a^2-1))+4nax(T_{2n}(x))\sqrt{a^2-1}\right\}.
\end{aligned}
$$

بنابراین ریشه‌های $T'_{2n}(x)(a^2-x^2(2a^2-1))+4nax(T_{2n}(x))\sqrt{a^2-1}$ ، -1 و 1 هستند که نقاط متناوبی از تابع $1/(a^2-x^2)$ می‌باشند. □

۲.۵.۳ بهترین تقریب یکنواخت تابع $1/(a^2-x^2)$ روی بازه $[-c,c]$

در بخش قبل بهترین تقریب توابع را در مجموعه P_{2n} را روی بازه $[-1,1]$ به‌دست آوردیم. در ادامه بهترین تقریب توابع را روی بازه $[-c,c]$ زمانی که $c>0$ تعیین می‌کنیم(به‌این دلیل که تابع $1/(a^2-x^2)$ یک تابع زوج است می‌توانیم در تعریف چندجمله‌ای چبیشف از درجه n روی بازه $[d,e]$ قرار دهیم $[d,e]=[-c,c]$).

مثال ۶.۵.۳. فرض کنید $x\in[-c,c]$ باشد و $a^2>c^2$، آنگاه

$$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{4t^2}{c^2(t^4-1)}-\frac{8t^2}{c^2(t^4-1)}\sum_{k=0}^{\infty}t^{2k}T^*_{2k}(x), \tag{۳۴.۳}$$

که

$$t=\frac{a-\sqrt{a^2-c^2}}{c},\qquad (a^2>c^2)$$

از روابط ۲۴.۳ و ۲۵.۳ داریم:

$$\frac{1}{(t^2+1)^2/(2t)^2-\cos^2(\theta)}=\frac{4t^2}{t^4-1}-\frac{8t^2}{t^4-1}\sum_{k=0}^{\infty}t^{2k}T^*_{2k}(x), \tag{۳۵.۳}$$

اکنون از روابط قبل داریم که $\cos(\theta)=\frac{x}{c}$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{(1+t^2)^2/(2t)^2-\cos^2(\theta)}=\frac{c^2}{c^2(1+t^2)^2/(2t)^2-x^2} \tag{۳۶.۳}$$

حال با ترکیب روابط ۳۵.۳ و ۳۶.۳ داریم:

$$\frac{1}{c^2(1+t^2)^2/(2t)^2-x^2}=\frac{4t^2}{c^2(t^4-1)}-\frac{8t^2}{c^2(t^4-1)}\sum_{k=0}^{\infty}t^{2k}T^*_{2k}(x) \tag{۳۷.۳}$$

با ترکیب روابط ۳۴.۳ و ۳۷.۳ نتیجه می‌شود که

$$a^2 = c^2((1+t^2)/(2t))^2, \qquad (ct^2 + 2at + c = 0)$$

یا

$$t = \frac{a - \sqrt{a^2 - c^2}}{c}, \qquad (a^2 > c^2)$$

که نتیجه می‌شود $|t| < 1$.

حال می‌خواهیم بررسی کنیم اگر در مثال ۲۱.۳ بازه $[-1, 1]$ را به $[-c, c]$ تعمیم دهیم باز هم روابط برقرارند؟

مثال ۷.۵.۳. نشان دهید که بهترین تقریب یکنواخت تابع $1/(a^2 - x^2)$ در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_{2n} روی بازه $[-c, c]$ که $a^2 > c^2$ است، به‌صورت زیر می‌باشد.

$$p^*_{2n}(x) = \frac{4t^2}{c^2(t^4-1)} - \frac{8t^2}{c^2(t^4-1)} \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} T^*_{2k}(x) + \frac{8t^{2n+2}}{c^2(t^4-1)^2} T^*_{2n}(x), \qquad (۳۸.۳)$$

و

$$E_{2n}(f) = \|f - p^*_{2n}\|_\infty = \frac{8t^{2n+4}}{c^2(t^4-1)^2}$$

که

$$t = \frac{a - \sqrt{a^2 - c^2}}{c}, \qquad (a^2 > c^2). \qquad (۳۹.۳)$$

با توجه به قضیه تناوبی چبیشف کافی است اثبات کنیم که تابع خطا یعنی

$$e_{2n}(x) = \frac{1}{a^2 - x^2} - p^*_{2n}(x)$$

$2n + 2$ نقطه متناوب در $[-c, c]$ دارد. از روابط ۳۴.۳ و ۳۸.۳ نتیجه می‌شود که

$$e_{2n}(x) = -\frac{8t^2}{c^2(t^4-1)} \sum_{k=n}^{\infty} t^{2k} T^*_{2k}(x) - \frac{8t^{2n+2}}{c^2(t^4-1)^2} T^*_{2n}(x). \qquad (۴۰.۳)$$

حال ازمثال ۱.۵.۳ داریم:

$$\sum_{k=n}^{\infty} t^{2k} T^*_{2k}(x) = t^{2n} \frac{\cos(2n\theta) - t^2(\cos(2n\theta)\cos(2\theta) + \sin(2n\theta)\sin(2\theta))}{1 + t^4 - 2t^2\cos(2\theta)} \qquad (۴۱.۳)$$

علاوه بر این با ترکیب روابط ۴۰.۳ و ۴۱.۳ و قرار دادن $\lambda = 1 + t^4 - 2t^2\cos(2\theta)$ داریم:

$$
\begin{aligned}
e_{2n}(x) = &-\frac{8t^{2n+2}}{c^2(t^4-1)}\left\{\frac{\cos(2n\theta) - t^2(\cos(2n\theta)\cos(2\theta) + \sin(2n\theta)\sin(2\theta))}{1+t^4-2t^2\cos(2\theta)}\right\} \\
&- \frac{8t^{2n+2}\cos(2n\theta)}{c^2(t^4-1)^2} \\
= &-\frac{8t^{2n+2}}{c^2(t^4-1)}\left\{\frac{(1-t^2\cos(2\theta))(t^4-1)+\lambda}{1+t^4-2t^2\cos(2\theta)}\right\}\cos(2n\theta) \\
&+ \frac{8t^{2n+2}}{c^2(t^4-1)^2}\left\{\frac{t^2(t^4-1)\sin(2\theta)}{1+t^4-2t^2\cos(2\theta)}\right\}\sin(2n\theta). \qquad (۴۲.۳)
\end{aligned}
$$

با توجه به رابطه ۴۲.۳ و قرار دادن

$$\mu = c^2a^2 - x^2(2a^2 - c^2)$$

و

$$\delta = 2\sqrt{a^4 - a^2c^2}\sqrt{x^2c^2 - x^4}$$

داریم:

$$e_{2n}(x) = -\frac{8t^{2n+2}}{c^2(t^4-1)}\left\{\frac{\mu}{c^2(a^2-x^2)}\cos(2n\theta) - \frac{\delta}{c^2(a^2-x^2)}\sin(2n\theta)\right\}. \qquad (۴۳.۳)$$

با روشی مشابه مثال۲.۵.۳ برای هر $x \in (-c, c)$ یک $\gamma_x \in (0, \pi)$ وجود دارد به‌طوری که

$$\cos(\gamma_x) = \frac{c^2a^2 - x^2(2a^2 - c^2)}{c^2(a^2 - x^2)} \qquad (۴۴.۳)$$

و

$$\sin(\gamma_x) = \frac{2\sqrt{a^4 - a^2c^2}\sqrt{x^2c^2 - x^4}}{c^2(a^2 - x^2)} \qquad (۴۵.۳)$$

حال با جایگذاری ۴۵.۳ و ۴۴.۳ در ۴۳.۳ نتیجه می‌شود که

$$e_{2n}(x) = -\frac{8t^{2n+4}}{c^2(t^4-1)^2}\cos(2n\theta + \gamma_x).$$

با توجه به قضیه تناوبی چیبشف اگر x از $-c$ تا c تغییر کند، $\cos(2n\theta + \gamma_x)$ از $\cos(2n+1)\pi$ تا $\cos(-pi)$ تغییر می‌کند و در نتیجه $\cos(2n\theta + \gamma_x)$ حداقل $2n+2$ نقطه اکسترمم دارد، که مقادیر متناوب ± 1 را اختیار می‌کنند. در نهایت داریم:

$$E_{2n}(f; [d, e]) = \|f - p^*_{2n}\|_\infty = \frac{8t^{2n+4}}{c^2(t^4-1)^2} \qquad (۴۶.۳)$$

ملاحظه ۸.۵.۳. اگر قضیه جکسون را برای هر $f \in C[d, e]$ به‌کار ببریم، آن‌گاه:

$$E_n(f;[d,e]) \leq 6\omega\left(\frac{e-d}{2n}\right)$$

و $f \in lip_k^\alpha$.

از سوی دیگر برای $f(x) = 1/(a^2 \pm x^2)$ داریم:

$$|f(x)-f(y)| < K|x-y|; \qquad x,y \in [-c,c],$$

که K ثابت است. به عبارت دیگر $f \in lip_K^1$. حال با استفاده از نتایج بالا داریم:

$$E_{2n}(f:[-c,c]) \leq 6\omega\left(\frac{c}{2n}\right) \leq \frac{3Kc}{n},$$

و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} E_{2n}(f;[-c,c]) = 0$$

حال اگر در رابطه ۴۶.۳، $|t| < 1$ در نظر گرفته شود، حد بالا برقرار می‌شود.

نتیجه ۹.۵.۳. صفرهای چندجمله‌ای

$$T_{2n}^*(x)(c^2a^2 - x^2(2a^2-c^2)) + 4nax(T_{2n}^*(x))\sqrt{a^2-c^2}$$

$-c$ و c هستند و اگر $x \in [-c,c]$ باشد، نقاط متناوبی از ریشه‌های تابع $1/(a^2-c^2)$ نیز هستند.

در ادامه مثالی ارائه می‌دهیم تا بهترین تقریب رده‌ای از توابع گویا به فرم $1/(a^2-x^2)$ را در مجموعه P_{2n} بهتر درک کنیم.

مثال ۱۰.۵.۳. اگر $f(x) = \frac{1}{25-x^2}$ و $x \in [-3,3]$ باشد، آنگاه $a=5, c=3$ است. بنابراین از ۳۹.۳ داریم:

$$t = \frac{5-\sqrt{25-9}}{3} = \frac{1}{3}.$$

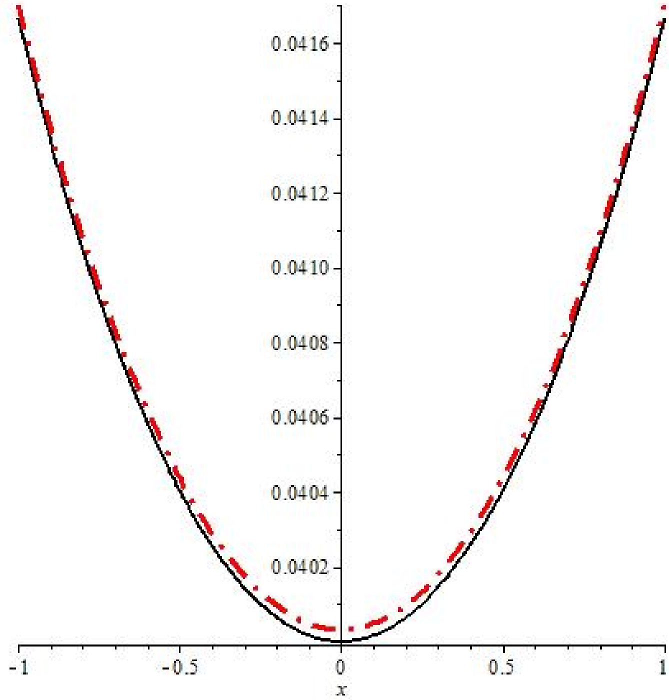
حال با توجه به رابطه ۳۸.۳ بهترین تقریب تابع $1/(25-x^2)$ روی بازه $[-3,3]$ در مجموعه P_{2n} به شکل زیر است:

$$p_{2n}^*(x) = -\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} T_{2k}^*(x) + \frac{8(81)^2}{(3)^{2n+4}(80)^2}T_{2k}^*(x),$$

که $T_k^*(x)$ برای $x \in [-c,c]$در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$T_0^*(x) = 1, \qquad T_1^*(x) = \frac{x}{c}, \qquad T_k^*(x) = \frac{2}{c}xT_{k-1}^*(x) - T_{k-2}^*(x) \tag{۴۷.۳}$$

در شکل ۴.۳ بهترین تقریب تابع $\frac{1}{(25-x^2)}$، با خط‌چین نشان داده شده است.



شکل ۴.۳: بهترین تقریب $\frac{۱}{(۲۵-x^۲)}$

۳.۵.۳ بهترین تقریب یکنواخت تابع $۱/(a^۲+x^۲)$

در این بخش بهترین تقریب یکنواخت $۱/(a^۲+x^۲)$ را در مجموعه $P_{۲n}$ روی بازه $[-c,c]$ برای $(c>۰)$ به‌دست می‌آوریم. ابتدا لم زیر را ارائه می‌دهیم سپس با استفاده از آن بهترین تقریب یکنواخت به $۱/(a^۲+x^۲)$ را مشخص می‌کنیم.

لم ۱۱.۵.۳. فرض کنید که $x\in[-c,c]$ و $a>۰$ باشد. آنگاه داریم :

$$\frac{۱}{a^۲+x^۲}=\frac{۴t^۲}{c^۲(t^۴-۱)}-\frac{۸t^۲}{c^۲(t^۴-۱)}\sum_{k=۰}^{\infty}(-۱)^k t^{۲k}T^*_{۲k}(x)$$

که

$$t=\frac{\sqrt{a^۲+c۶۲}-a}{c},\qquad (a>۰).$$

برهان. با توجه به ۱.۵.۳ داریم:

$$\sum_{k=۰}^{\infty}(-۱)^k t^{۲k}T^*_{۲k}(x)=\frac{۱+t^۲\cos(۲\theta)}{۱+t^۴+۲t^۲\cos(۲\theta)}.$$

حال برای $x\in[-۱,۱]$ داریم:

$$\frac{۱}{a^۲+x^۲}=\frac{۲}{a(a^۲+۱)^{۱/۲}}\sum_{k=۰}^{\infty}(-۱)^k((a^۲+۱)^{۱/۲}-a)^{۲k}T_{۲k}(x),\qquad (a>۰). \quad (۴۸.۳)$$

حال اگر $t=\sqrt{a^۲+۱}-a$، (که نتیجه می‌شود $a=(۱-t^۲)/۲t$) ، با قرار دادن $x=\cos(\theta)$ می‌توانیم رابطه ۴۸.۳ را به فرم زیر بنویسیم:

$$\frac{۱}{(۱-t^۲)^۲/(۲t)^۲+\cos^۲(\theta)}=\frac{۴t^۲}{(t^۴-۱)}-\frac{۸t^۲}{(t^۴-۱)}\sum_{k=۰}^{\infty}(-۱)^k t^{۲k}T_{۲k}(x).$$

ادامه اثبات مشابه برهان مثال ۶.۵.۳ است. □

مثال ۱۲.۵.۳. بهترین تقریب یکنواخت تابع $۱/(a^۲+x^۲)$ در مجموعه $P_{۲n}$ روی بازه $[-c,c]$، که $a>۰$ باشد به‌صورت زیراست.

$$p^*_{۲n}(x)=\frac{۴t^۲}{c^۲(t^۴-۱)}-\frac{۸t^۲}{c^۲(t^۴-۱)}\sum_{k=۰}^{n-۱}(-۱)^k t^{۲k}T^*_{۲k}(x)+\frac{۸(-۱)^n t^{۲n+۲}}{c^۲(t^۴-۱)^۲}T^*_{۲k}(x) \quad (۴۹.۳)$$

و

$$E_{۲n}(f)=\|f-p^*_{۲n}\|_\infty=\frac{۸t^{۲n+۴}}{c^۲(t^۴-۱)^۲}$$

که در آن

$$t=\frac{\sqrt{a^۲+c^۲}-a}{c},\qquad (a>۰) \quad (۵۰.۳)$$

با توجه به قضیه تناوبی چبیشف کافی است نشان دهیم که

$$e_{۲n}(x)=\frac{۱}{a^۲+x^۲}-p^*_{۲n}(x)$$

$۲n+۲$ نقطه متناوب در بازه $[-c,c]$ دارد. علاوه بر این با استفاده از ۴۹.۳ داریم:

$$e_{۲n}(x)=-\frac{۸t^۲}{c^۲(t^۴-۱)}\sum_{k=n}^{\infty}(-۱)^k t^{۲k}T^*_{۲k}(x)-\frac{۸(-۱)^n t^{۲n+۲}}{c^۲(t^۴-۱)^۲}T^*_{۲n}(x) \quad (۵۱.۳)$$

طبق مثال ۱.۵.۳ و قرار دادن $\alpha=t^۲(\cos(۲n\theta)\cos(۲\theta)$ داریم:

$$\sum_{k=n}^{\infty}(-۱)^k t^{۲k}T^*_{۲k}(x)=(-۱)^n t^۲ n\frac{\cos(۲n\theta)+\alpha+\sin(۲n\theta)\sin(۲\theta))}{۱+t^۴+۲t^۲\cos(۲\theta)}. \quad (۵۲.۳)$$

اکنون با ترکیب ۵۱.۳ و ۵۲.۳ و قرار دادن

$$\eta=\frac{۸(-۱)^n t^{۲n+۲}}{c^۲(t^۴-۱)^۲}$$

نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} e_{۲n}(x) = &-\frac{۸(-۱)^n t^{۲n+۲}}{c^۲(t^۴-۱)}\left\{\frac{\cos(۲n\theta)+t^۲(\cos(۲n\theta)\cos(۲\theta)+\sin(۲n\theta)\sin(۲\theta))}{۱+t^۴+۲t^۲\cos(۲\theta)}\right\} \\ &-\eta\cos(۲n\theta) \\ = &-\eta\left\{\frac{(۱+t^۲\cos(۲\theta))(t^۴-۱)+(۱+t^۴+۲t^۲\cos(۲\theta))}{۱+t^۲+۲t^۲\cos(۲\theta)}\right\}\cos(۲n\theta) \\ &-\eta\left\{\frac{t^۲(t^۴-۱)\sin(۲\theta)}{۱+t^۴+۲t^۲\cos(۲\theta)}\right\}\sin(۲n\theta) \end{aligned} \tag{۵۳.۳}$$

حال اگر $\mu = ۲\sqrt{a^۴+a^۲c^۲}\sqrt{x^۲c^۲-x^۴}$ و $\theta = x^۲(۲a^۲+c^۲)-a^۲c^۲$باشد، با استفاده از ۵۳.۳ نتیجه می‌شود که:

$$e_{۲n}(x) = -\frac{۸(-۱)^n t^{۲n+۴}}{c^۲(t^۴-۱)^۲}\left\{\frac{\theta}{c^۲(a^۲+x^۲)}\cos(۲n\theta)-\frac{\mu}{c^۲(a^۲+x^۲)}\sin(۲n\theta)\right\}. \tag{۵۴.۳}$$

حال اگر تعریف کنیم

$$F_۱(x) := \frac{x^۲(۲a^۲+c^۲)-a^۲c^۲}{c^۲(a^۲+x^۲}; \qquad x\in[-c,c]$$

$$F_۲(x) := \frac{۲\sqrt{a^۴+a^۲c^۲}\sqrt{x^۲c^۲-x^۴}}{c^۲(a^۲+x^۲)}; \qquad x\in[-c,c]$$

آنگاه داریم:

$$F_۱'(x) = \frac{۴xa^۴(a^۲+c^۲)}{c^۲(a^۲+x^۲)^۲}\begin{cases} <۰, & x\in[-c,۰) \\ =۰ & x=۰ \\ >۰ & x\in[۰,c] \end{cases} \tag{۵۵.۳}$$

$$F_۱(۰) = -۱ < F_۱(x) < ۱ = F_۱(-c); \quad x\in[-c,۰] \tag{۵۶.۳}$$

$$F_۱(۰) = -۱ < F_۱(x) < ۱ = F_۱(c); \quad x\in[۰,c] \tag{۵۷.۳}$$

$$F_۱^۲(x)+F_۲^۲(x) = ۱; \quad x\in[-c,c]. \tag{۵۸.۳}$$

روابط ۵۵.۳ -۵۸.۳ نتیجه می‌دهند که برای هر $x\in(-c,c)$، وجود دارد $\lambda_x\in(۰,\pi)$، به‌طوری که

$$\cos(\lambda_x) = F_۱(x) = \frac{x^۲(۲a^۲+c^۲)-a^۲c^۲}{c^۲(a^۲+x^۲} \tag{۵۹.۳}$$

و

$$\sin(\lambda_x) = F_۲(x) = \frac{۲\sqrt{a^۴+a^۲c^۲}\sqrt{x^۲c^۲-x^۴}}{c^۲(a^۲+x^۲)} \tag{۶۰.۳}$$

در نتیجه از روابط ۵۴.۳ و ۵۹.۳ و ۶۰.۳ داریم:

$$e_{2n}(x) = -\frac{8(-1)^n t^{2n+4}}{c^2(t^4-1)^2}\cos(2n\theta+\lambda_x).$$

بنابراین اگر x از $-c$ تا ۰ تغییر کند، آنگاه θ از π تا $\pi/2$ و λ_x از π تا ۰ و $\cos(2n\theta+\lambda_x)$ از $\cos(2n+1)\pi$ تا $\cos n\pi$ تغییر می‌کنند. واگر x از ۰ تا c تغییر کند، آنگاه θ از $\pi/2$ تا ۰ و λ_x از ۰ تا $-\pi$ و $\cos(2n\theta+\lambda_x)$ از $\cos(n\pi$ تا $\cos(-\pi$ تغییر می‌کند. از این رو زمانی که x از $-c$ تا c تغییر کند، $\cos(2n\theta+\lambda_x)$ از $\cos(2n+1)\pi$ تا $\cos(-\pi)$ تغییر می‌کند. ودر نتیجه $\cos(2n\theta+\lambda_x)$ حداقل دارای $2n+2$ نقطه اکسترمم است، که این نقاط مقادیر ± 1 را اختیار می‌کنند. در نتیجه داریم:

$$E_{2n}(f;[-c,c]) = \|e_{2n}(x)\|_\infty = \frac{8t^{2n+4}}{c^2(t^4-1)^2}.$$

بنابراین طبق گزاره‌های قبل برای $f(x)=1/(a^2+x^2)$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} E_{2n}(f;-c,c]) = \lim_{n\to\infty}\|f-p^*_{2n}\|_\infty = 0$$

به‌طور مثال بهترین تقریب تابع زیر را بررسی می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{1}{25+x^2},\qquad x\in[-5,5]\Rightarrow a=5\ ,\quad c=5$$

در نتیجه از رابطه ۵۰.۳ به‌دست می‌آوریم:

$$t=\frac{\sqrt{50}-5}{5}$$

علاوه بر این بهترین تقریب تابع $1/(25+x^2)$ روی بازه $[-5,5]$ در مجموعه چندجمله‌ای P_{2n} به فرم زیر است:

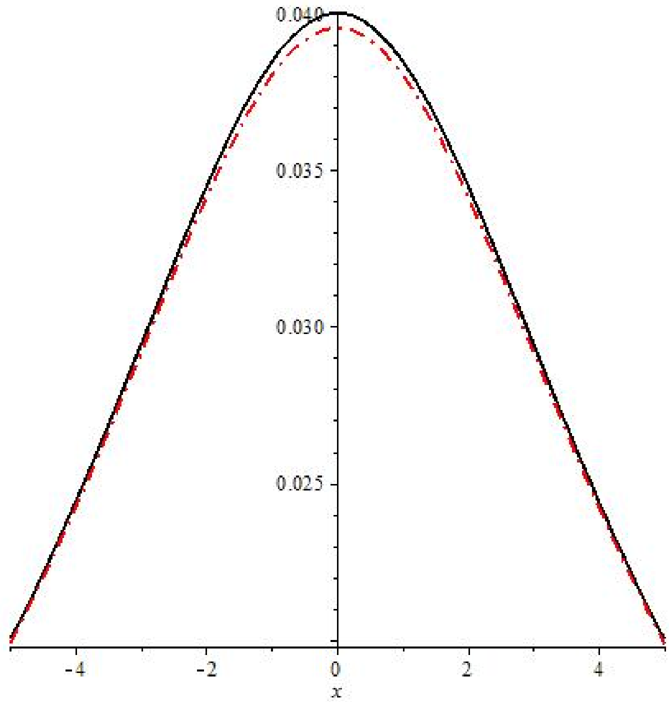
$$\begin{aligned}p^*_{2n}(x) &= \frac{(\sqrt{2}-1)^2\sqrt{2}}{50(2\sqrt{2}-3)} - \frac{(\sqrt{2}-1)^2\sqrt{2}}{25(2\sqrt{2}-3)}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{\sqrt{50}-5}{5}\right)^{2k}T^*_{2k}(x)\\ &+\frac{8(-1)^n(\sqrt{50}-5)^{2n+2}}{25\times 32(2\sqrt{2}-3)^2 5^{2n+2}}T^*_{2n}(x)\end{aligned}$$

که $x\in[-c,c]$ و $T^*_k(x)$ در روابط ۴۷.۳ تعریف شده است.

در شکل ۵.۳ تابع $\frac{1}{(25+x^2)}$ و بهترین تقریب این تابع توسط چندجمله‌ای‌ها، با خط‌چین نشان داده شده است.

نتیجه ۱۳.۵.۳. صفرهای چندجمله‌ای

$$T^{*\prime}_{2n}(x)(x^2(2a^2+c^2)-a^2c^2)+4nax(T^*_{2n}(x))\sqrt{a^2+c^2}$$



شکل ۵.۳: بهترین تقریب $\frac{۱}{(۲۵+x^۲)}$

زمانی که $x \in [-c, c]$ باشد، $-c$ و c هستند و نقاط متناوبی از ریشه‌های تابع $۱/(a^۲ + x^۲)$ می‌باشند.

۶.۳ نتیجه‌گیری

در این بخش، با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف و به‌کار بردن قضیه تناوبی چبیشف، بهترین تقریب یکنواخت رده‌ای از توابع گویا به فرم $۱/(T_q(a)\pm T_q(x))$ را در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_{qn} برای $x\in[-۱,۱]$ زمانی که $a^۲>۱$ است، تعیین کردیم. که $T_q(x)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از درجه q، است. همچنین قضایا و مجموعه‌های متناوبی برای خطای تقریب این رده از توابع ارائه دادیم. در نهایت به این نتیجه رسیدیم که ویژگی نوسانی خطای تقریب در مجموعه چندجمله‌ای‌ها شرایط لازم وکافی را برای به‌دست آوردن بهترین تقریب یکنواخت در مجموعه چندجمله‌ای‌ها فراهم می‌کند، و این بدین معنی است که یکتایی بهترین تقریب یکنواخت در مجموعه چندجمله‌ای‌ها برقرار می‌شود. هم‌چنین با به‌کار بردن قضیه تناوبی چبیشف بهترین تقریب یکنواخت رده‌ای از توابع گویا به فرم $۱/(a^۲-x^۲)$ با ($a^۲>۱$) را در مجموعه چندجمله‌ای‌های $P_{۲n}$ و نیز برای $۱/(a^۲+x^۲)$ با ($a>۰$) روی بازه $[-c,c]$ که $c>۰$ است، به‌دست آوردیم. و مجموعه‌های متناوبی را برای خطای تقریب رده‌های ذکر شده به‌دست آوردیم.

۷.۳ پیشنهادهایی برای ادامه

از آن جایی که الگوریتم دوم رمس یک الگوریتم مهم در تقریب توابع پیوسته است. کارهایی که در ادامه می‌توان انجام داد، بهسازی الگوریتم رمس با استفاده از روش EM (الکترومغناطیس) در محاسبه بهترین تقریب توابع پیوسته است.

هم‌چنین می‌توان کاربرد الگوریتم رمس را در سیستم‌های chebfun جستجو کرد.

(سیستم chebfun یک سیستم نرم‌افزاری توسعه یافته در Matlab است که به کاربر اجازه می‌دهد که توابع پیوسته را به گونه‌ای با روش‌های عددی تغییر دهد، تا برای بردارهای گسسته قابل اجرا باشد. که در این روش chebfun یک تابع پیوسته را به‌عنوان ورودی در نظر می‌گیرد، و خروجی chebfun بهترین تقریب این تابع است).

هم‌چنین موضوعات دیگری که برای ادامه این کار پیشنهاد می‌شود، استفاده از انواع دیگری از چندجمله‌ای‌های چبیشف (نوع دوم، سوم و چهارم) به‌جای چندجمله‌ای چبیشف نوع اول برای به‌دست آوردن بهترین تقریب یکنواخت رده‌های جدیدی از توابع است.

به‌علاوه اگر یک چندجمله‌ای در شرایط قضیه تناوبی چبیشف صدق کند، می‌توان روش‌های ساده‌تری را نسبت به روش‌های موجود برای تقریب توابع جستجو کرد.

مراجع

[1] T. J. Rivlin, An Introduction to the approximation of functions, Dover, New York, 1981.

[2] G. A. Watson, Approximation theory and numerical methods, John Wiley and Son, Ltd, Chichester, England, 1980.

[3] E. W. Cheney, Introduction to approximation theory, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1982, Chelsea, New York.

[4] S. Jokar, B. Mehri, The best approximation of some rational functions in uniform norm, Appl. Numer. Math. 55 (2005) 204-214.

[5] M.R. Eslahchi, M. Dehghan, The best uniform polynomial approximation to class of the form $1/(a^2 \pm x^2)$, Nonlinear Analysis., TMA 71 (2009) 740-750.

[6] D. S. Lubinsky, Best approximation and interpolation of $(1 + (ax)^2)^{-1}$ and its transforms, J. Approx. Theory 125 (2003) 106-115.

[7] D. J. Newman, T. J. Rivlin, Approximation of monomials by lower degree polynomials, Aeq. Math. 14 (1976) 451-455.

[8] S. N. Bernstein, Extremal Properties of Polynomials and the best approximation of continuous functions of single real variable, State united scientific and technical publishing house, 1973, (Translated from Russian).

[9] J. C. Mason, D. C. Handscomb, Chebyshev Polynomials, Chapman , Hall/ CRC, 2003.

[10] T. J. Rivlin, Chebyshev polynomials, Wiley, New York, 1990.

[11] H. Z. Ollin, Best polynomial approximation to certain rational functions, J. Approx. Theory 26 (1979) 389-392.

[12] T. J. Rivlin, An introduction to the approximation of function 19-22.

[13] G. Meinardus, Approximation of functions; theory and numerical methods. New york (1967).

[14] N. I. Achieser, Vorlesungen liber approximations theory. Berlin: Akademie-Verlag 1953.

[15] S. N. Bernstein, Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee surle calculdes probabilities. Comm. soc. math. Kharkov 13, 1-2 (1912).

[16] N. I. Achiezer (Akhiezer), Theory of approximation, F. Ungar, New York, 1956.

[17] A. F. Timan, Theory of approximation of functions of real variables [in Russian], Fizmatgiz, Moscow (1960).

[18] N. P. Korneichuk: Exact constant in approximation theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[19] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern techniques and their applications*, 2nd Edition, Wiley, 1999.

[20] J. L. Walsh, *An approximation to an analytic function by rational function of best approximation*, Math. Z. 38, 163-176 1943.

[21] A. O. Gelfond, *Differenzenrechnung*, Berlin: Deutscher verlag der wissenschaften, 1958.

[22] W. Rudin, *Real and complex analysis.* Mc Graw-Hill Book Comp. 1966.

[23] W. Rudin, *Functional analysis*, 2nd Edition, Mc Graw-Hill Book Comp. 1991.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اکسترمال .... Extremal
الگوریتم رمس .... Remez algoritm
بسط .... Expansion
بهترین تقریب .... Best approximation
بیضی‌گون .... Regularity ellipse
تابعک خطی .... Linear functional
تقریب اولیه .... Initial approximation
تابع گویا .... Rational function
چندجمله‌ای .... Polynomial
چندجمله‌ای چبیشف .... Chebyshev polynomial
خطای تقریب .... Error of approximation
رده .... Class
روش مستقیم .... Direct method
روش‌های تکراری .... Iterative methods
روش‌های عددی .... Numerical methods
صعودی .... Increasing
فضای تابعی .... Function Space
قضیه تناوبی چبیشف .... Chebyshev Alternation Theorem
مجموعه تقریب .... Proximinal Set
مجموعه متناوب .... Alternating Set
مرتب .... Ordered
مجموع جزیی .... Partial sum

مشتق‌پذیر .... Differentiable

منحنی هموار .... Smooth curve

یکنوا .... Monotone

یکنواخت .... Uniform

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Alternation theorem	قضیه تناوبی
Alternating Set	مجموعه متناوب
Best approximation	بهترین تقریب
Chebyshev polynomial	چندجمله‌ای چبیشف
Chebyshev Alternation Theorem	قضیه تناوبی چبیشف
Class	رده
Differentiable	مشتق‌پذیر
Direct method	روش مستقیم
Error of approximation	خطای تقریب
Extremal	اکسترمال
Expansion	بسط
Function Space	فضای تابعی
Increasing	صعودی
Initial approximation	تقریب اولیه
Iterative methods	روش‌های تکراری
Linear functional	تابعک خطی
Monotone	یکنوا
Numerical methods	روش‌های عددی
Ordered	مرتب
Partial sum	مجموع جزیی
Proximinal Set	مجموعه تقریب
Rational function	تابع گویا

بیضی‌گون .... Regularity ellipse

الگوریتم رمس .... Remez algoritm

منحنی هموار .... Smooth curve

یکنواخت .... Uniform

نمایه

Surname: Soheili Moghaddam | Name: Sakineh

Title: Best uniform polynomial approximation to class of polynomial

Supervisor: Dr.Mahdi Iranmanesh

Degree: Master of Science | Subject: Pure Mathematics

Field: Mathematical Analysis

Shahrood University of Technology | Faculty Of Mathematical Sciences

Date: Sep 2013 | Number of pages: 92

Keywords: Chebyshev polynomial; Alternating set; Best uniform polynomial approximation; Error of approximation; Remez algorithm

Abstract

In this thesis we used the numerical methods and with introduse Remez algoritm obtained explicitly the best polynomial approximation to functions. Then we use the Chebyshev polynomial properties and chebyshev alternation theorem and obtained explicitly the best uniform polynomial approximation to a class of rational functions. In the end we presented some theorems about the best approximation of this class of rational functions. Furthermore we obtained the alternating set of the mentioned class.

Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

Best uniform polynomial approximation to class of polynomial

Supervisor

Dr.Mahdi Iranmanesh

by

Sakineh Soheili Moghaddam

Sep 2013