



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

آمار ریاضی، گرایش آمار ریاضی

عنوان

**مقایسه‌ی رفتار برآوردگرهای حساسیت**

**پارامتر مقیاس**

استاد راهنما

دکتر محمد آرشی

پژوهشگر

کلتوم میرابی

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: میرابی

نام: کلثوم

عنوان: مقایسه‌ی رفتار برآوردگرهای حساسیت  
پارامتر مقیاس

استاد راهنما: دکتر محمد آرشی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: آمار ریاضی گرایش: آمار ریاضی

دانشگاه: صنعتی شاهرود تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲  
دانشکده علوم ریاضی تعداد صفحات: ۱۲۸

واژگان کلیدی: برآوردگر حساسیت، IPA، SF، MVD، آمیخته مقیاس توزیع‌های نرمال

#### چکیده

این پایان‌نامه، به معرفی برآوردگرهای مشتق می‌پردازد، که این برآوردگرها حساسیت سیستم را نسبت به پارامتر مقیاس بدست می‌آورند. با در نظر گرفتن سیستم‌های گوسی که بسیار مهم و کاربردی می‌باشند برآوردگرها را بدست آورده و مقایسه‌ی آنها را بر مبنای واریانس انجام می‌دهیم. برای نشان دادن کاربرد آن به عنوان نمونه کاربرد در زمینه شبکه‌های تصادفی و نیز مالی آورده شده است.  
در نهایت محاسبه و مقایسه‌ی برآوردگرها برای مدل آمیخته مقیاسی انجام می‌دهیم.

تقدیم به مقدس ترین واژه مادر لغت نامه ی دلم

پدر و مادر م

## خدایا...۱

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است. تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بدانند، روزی کن.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

# سپاس گزارمی...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.  
وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر آرشی، صمیمانه  
تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.  
همچنین، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا،  
ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از خانواده و تمام دوستانم به پاس عاطفه سرشار  
و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

کوشم میرابی  
۱۳۹۲

## پیش‌گفتار

در این پایان‌نامه، به معرفی برآوردگرهای مشتق پرداخته شده است. که این برآوردگرها حساسیت سیستم را نسبت به یک پارامتر مشخص می‌کنند.

در فصل اول مفاهیم و تعاریف لازم و اولیه بیان شده است.

در فصل دوم به معرفی برآوردگرها و چگونگی بدست آوردن آنها پرداخته‌ایم.

در فصل سوم برآوردگرهای معرفی شده در فصل دو را در مورد سیستم‌های گوسی به کار برده و آنها را مقایسه می‌کنیم، سپس دو مثال کاربردی در زمینه‌ی شبکه‌های تصادفی و مالی آورده شده است.

در قسمت ضمیمه کدهای برنامه نویسی که در قسمت کاربردها استفاده شده است را آورده‌ایم.

و در فصل چهارم نتایج را برای مدل آمیخته مقیاسی نرمال تعمیم داده‌ایم.

در سرتاسر این پایان‌نامه مواردی که توسط \* مشخص شده است حاصل کار نویسنده بوده است.

## فهرست علائم

$\forall$	به ازای هر
$a.s$	قریب به یقین
$!!$	فاکتوریل دوگانه
$\ x\ $	نرم
$'$	مشتق
$\sup$	سوپریمم
$\rightarrow$	همگرایی در احتمال
$\sim$	هم‌توزیعی (برای دو متغیر تصادفی) و معادل بودن (برای دو اندازه)
$<$	پیوسته مطلق
$\otimes$	حاصل ضرب دکارتی
$\mathcal{L}$	اندازه لبگ
$\mathcal{B}$	$\sigma$ جبر بورل
$\mathcal{I}(A)$	تابع مشخصه روی مجموعه $A$
$\partial$	مشتق جزئی
$L(X; \cdot)$	برآوردگر عملکرد
$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$	امید ریاضی نسبت به اندازه احتمال
$\mathcal{F}_t$	$\sigma$ جبر فرآیندهای تصادفی
$\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$	توزیع یکنواخت در بازه $(0, 1)$
$Exp(\lambda)$	توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$
$Geo(\theta)$	توزیع هندسی
$\gamma(\cdot, \cdot)$	توزیع گاما
$Nb(\cdot, \cdot)$	توزیع دو جمله‌ای منفی
$\mathcal{DM}(\cdot, \cdot)$	توزیع ماکس ول دوگانه
$\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$	توزیع نرمال
$\Phi_{\mu, \sigma}$	تابع چگالی نرمال یک متغیره با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^2$
$\mathbf{m}_{\mu, \sigma}$	تابع چگالی ماکس ول دوگانه
$D_{\theta}^{IPA}$	برآوردگر مشتق تحلیل آشفتگی بینهایت کوچک
$D_{\theta}^{SF}$	برآوردگر تابع امتیاز
$D_{\theta}^{MVD}$	برآوردگر اندازه مقدار
$D_{\sigma}^{sm}$	برآوردگر ترکیبی دو مرحله‌ای

# فهرست مطالب

۱	مقدمات و پیش‌نیازها	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۱	۲.۱ تاریخچه	۱
۲	۳.۱ تعاریف و قضایا	۲
۱۲	۲ انواع برآوردهای حساسیت	۱۲
۱۲	۱.۲ مقدمه	۱۲
۱۲	۱.۱.۲ برآوردهای مشتق	۱۲
۱۳	۲.۱.۲ تحلیل آشفتگی بینهایت کوچک	۱۳
۱۴	۳.۱.۲ تابع امتیاز	۱۴
۱۶	۴.۱.۲ مشتق اندازه مقدار	۱۶
۱۹	۳ بررسی رفتار برآوردها در مدل گوسی	۱۹
۱۹	۱.۳ مقدمه	۱۹
۲۰	۲.۳ محاسبه برآوردهای مشتق	۲۰
۲۳	۳.۳ برآوردهای فانتوم جفت شده	۲۳
۲۹	۴.۳ رابطه‌ی بین تابع عملکرد و رفتار برآوردها**	۲۹
۳۱	۵.۳ برآوردهای ترکیبی دو مرحله‌ای	۳۱
۳۵	۶.۳ مثال‌های کاربردی	۳۵
۳۵	۱.۶.۳ شبکه‌ی فعال تصادفی	۳۵
۴۲	۲.۶.۳ کاربرد مالی	۴۲



۵۷	۴	بررسی رفتار برآوردگرها در مدل آمیخته مقیاسی**
۵۷	۱.۴	مقدمه
۵۷	۲.۴	توزیع آمیخته مقیاسی
۵۸	۳.۴	محاسبه واریانس برآوردگرها
۵۸	۱.۳.۴	IPA
۵۹	۲.۳.۴	SF
۶۰	۳.۳.۴	MVD
۶۱	۴.۳.۴	CP
۶۴	آ	کدهای برنامه‌نویسی برای شبکه‌ی فعال تصادفی
۶۴	۱.آ	SAN.m
۷۹	۲.آ	SANdet.m
۹۶	ب	کدهای برنامه‌نویسی مربوط به بخش مالی
۹۶	۱.ب	BSEurooption.m
۱۰۶	۲.ب	BSUrotest.m
۱۱۳	۳.ب	BSEurovanilla.m
۱۲۰	۴.ب	BSEurovega
۱۲۴		مراجع
۱۲۶		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی



# فصل ۱

## مقدمات و پیش‌نیازها

### ۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا تاریخچه‌ی مختصری درباره‌ی موضوع مورد بررسی در این مجموعه بیان می‌کنیم، سپس تعاریف و قضایای اصلی که در فصل‌های بعد استفاده می‌شوند و همچنین مفاهیم مربوط به آنالیز تابعی و نظریه اندازه و سایر قضایایی که در بدست آوردن برآوردهای مشتق لازم است را می‌آوریم. تعاریف ارائه شده در این بخش را می‌توان در رودین<sup>۱</sup> (۱۹۸۷) و آلن<sup>۲</sup> (۲۰۱۰) یافت.

### ۲.۱ تاریخچه

فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی باشد. برآوردر عملکرد سیستم را با  $L(X; \sigma)$  نشان می‌دهیم، که تابعی از متغیر تصادفی  $X$  و یک یا چند پارامتر می‌باشد. میانگین برآوردر عملکرد<sup>۳</sup> را نسبت به اندازه احتمال  $\mathbb{P}$  که برابر با  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L(X; \sigma)]$  است را تابع عملکرد<sup>۴</sup> می‌نامند. تغییرات تابع عملکرد نسبت به پارامتر را حساسیت سیستم یا حساسیت تابع عملکرد می‌نامند. بنابراین می‌خواهیم حساسیت تابع عملکرد را نسبت به پارامتر مقیاس مشخص کنیم تا بدانیم چه مقدار زمان (پول)

---

<sup>۱</sup>Rudin

<sup>۲</sup>Allen

<sup>۳</sup>performance estimator

<sup>۴</sup>performance function

برای برآورد این پارامتر لازم است. پس در نهایت می‌خواهیم مشتق امید ریاضی (تابع عملکرد) را نسبت به پارامتر مقیاس مورد بررسی قرار دهیم.

سه روش برآورد مشتق وجود دارد: اولین روش تحلیل آشفتگی بینهایت کوچک (IPA) <sup>۵</sup> است که یک واریانس کوچکی را نتیجه می‌دهد و توسط گلسمن <sup>۶</sup> (۱۹۹۱) ارایه شد، روش تابع عددی یا نسبت درست‌نمایی (SF/LR) <sup>۷</sup> که در کاربرد بسیار آسان است توسط رابینستین و شاپیرو <sup>۸</sup> (۱۹۹۳) بیان شد و سومین روش که خیلی مورد مطالعه واقع نشده روش مشتق اندازه مقدار (MVD) <sup>۹</sup> می‌باشد که توسط پی افلاگ <sup>۱۰</sup> (۱۹۹۶) برای توابع پیوسته و کراندار معرفی شده است و هیدرگات و وزکیوز <sup>۱۱</sup> (۲۰۰۵) برای توابع  $L^1(\mathbb{P})$  بیان کردند.

### ۳.۱ تعاریف و قضایا

در این قسمت تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصول آتی آمده‌اند.

**تعریف ۱.۳.۱.** (قریب به یقین همگرا  $(a.s)$ ) <sup>۱۲</sup> دنباله متغیرهای تصادفی  $\{X_n\}$  تقریباً همه جا همگرا به  $X$  است اگر داشته باشیم

$$\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1 \quad (1.1)$$

**تعریف ۲.۳.۱.** (همگرایی در احتمال) دنباله متغیرهای تصادفی  $\{X_n\}$  در احتمال همگرا به  $X$  است، اگر داشته باشیم

$$\forall \epsilon > 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}([X_n - X] \geq \epsilon) = 0 \quad (2.1)$$

<sup>۵</sup>Infinite Perturbation Analysis

<sup>۶</sup>Glasserman

<sup>۷</sup>Score Function

<sup>۸</sup>Rubinstein and Shapiro

<sup>۹</sup>Measure Valued Derivative

<sup>۱۰</sup>Pflug

<sup>۱۱</sup>Heidergott and Vazquez-Abad

<sup>۱۲</sup>almost surely

منظور از  $X \rightarrow Y$  همگرایی در احتمال دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  می‌باشد. هرگاه همگرایی دیگری مد نظر باشد نوع همگرایی قید می‌شود.

دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  را که هم‌توزیع هستند با رابطه ترتیبی  $X \sim Y$  نشان می‌دهیم.

**تعریف ۳.۳.۱. (فضای متریک)** یک فضای متریک مجموعه‌ای است مانند  $M$ ، به طوریکه برای هر دو نقطه  $x, y \in M$  و تابع فاصله  $d(.,.)$  شرایط زیر برقرار باشد:

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad ۱.$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad ۲.$$

$$\forall z \in M, d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \quad ۳.$$

**تعریف ۴.۳.۱. (فضای جداشدنی)** یک فضای جداشدنی، شامل یک زیرمجموعه‌ی چگال شمارش‌پذیر است.

**تعریف ۵.۳.۱. (همگرایی کوشی)** دنباله  $\{x_n\}$  همگرایی کوشی است اگر داشته باشیم

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall m, n \geq N. \in \mathbb{N}; \|x_m - x_n\| < \epsilon$$

**تعریف ۶.۳.۱. (فضای کامل)** یک فضای کامل به هر دنباله همگرایی کوشی که همگرا درون فضای متریک،  $M$ ، است اشاره دارد.

**تعریف ۷.۳.۱. (سیگما جبر<sup>۱۳</sup>)** یک  $\sigma$ -جبر  $\mathcal{F}$  یک گردایه از مجموعه‌های  $A \subset \Omega$  است، به طوریکه در سه شرط زیر صدق کند:

$$0, \Omega \in \mathcal{F} \quad ۱.$$

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \quad ۲.$$

---

<sup>۱۳</sup> $\sigma$ -Algebra

$$(A_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} .3$$

توجه:  $\sigma$  در  $\sigma$ -جبر به مفهوم اجتماعات شمارا اشاره دارد.  $\mathcal{F} = \sigma(X)$  را  $\sigma$ -جبر تولید شده توسط متغیر تصادفی  $X$  در نظر می‌گیریم.

**تعریف ۸.۳.۱. (تابع ساده<sup>۱۴</sup>)** تابع ساده تابعی به صورت زیر می‌باشد

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

که در آن  $\mathbb{1}_A$  تابع مشخصه مجموعه  $A$  می‌باشد.

**تعریف ۹.۳.۱. (فرآیند تصادفی)** یک فرآیند تصادفی خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است که به یک پارامتر متغیر مانند زمان وابسته است.

**تعریف ۱۰.۳.۱. (پیوسته مطلق و اندازه‌های معادل)** اندازه  $\mathbb{P}$  نسبت به  $\mathbb{Q}$  پیوسته مطلق است، اگر به ازای هر  $A \in \mathcal{B}(S)$  که  $\mathbb{Q}(A) = 0$  آنگاه  $\mathbb{P}(A) = 0$  وبا نماد  $\mathbb{P} \prec \mathbb{Q}$  نشان می‌دهیم. که  $\mathcal{B}(S)$  سیگما جبر بورل روی مجموعه‌ی  $S$  می‌باشد.

این دو اندازه (احتمال) معادلند،  $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ ، اگر و فقط اگر  $\mathbb{P} \prec \mathbb{Q}$  و  $\mathbb{Q} \prec \mathbb{P}$ .

یک خانواده از اندازه‌های احتمال  $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$  روی  $(S, \mathcal{B}(S))$  با یک اندازه،  $\mu$ ، معادل است؛ اگر و تنها اگر  $\forall \theta \in \Theta, \mathbb{P}_\theta \sim \mu$ .

**تعریف ۱۱.۳.۱. (صافی<sup>۱۵</sup>)** یک صافی یک دنباله از  $\sigma$ -جبرهای  $\{\mathcal{F}_t\}$  برای یک فرآیند تصادفی  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  است اگر برای هر  $s \leq t$ ،  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  باشد.

**تعریف ۱۲.۳.۱. (فرآیند تصادفی سازگار<sup>۱۶</sup>)** یک فرآیند تصادفی سازگار گفته می‌شود اگر  $X_t, \mathcal{F}_t$  -اندازه پذیر باشد، به عبارت دیگر به ازای هر  $0 \leq t \leq T$  داشته باشیم  $X_t \in \mathcal{F}_t$ .

<sup>۱۴</sup>simple function

<sup>۱۵</sup>Filtration

<sup>۱۶</sup>adapted

به طور کلی برای یک فرآیند تصادفی،  $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t)$  به عنوان  $\sigma$ -جبر انتخابی برای فرآیندهای تصادفی در نظر گرفته می‌شود.

لم ۱۳.۳.۱. (لم استاین<sup>۱۷</sup>) فرض کنید که  $X$  متغیر تصادفی نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  باشد. آنگاه (با فرض وجود امیدها)

$$\mathbb{E}(g(X)(X - \mu)) = \sigma^2 \mathbb{E}(g'(X)) \quad (۳.۱)$$

که در آن  $g'(x)$  مشتق اول تابع  $g$  نسبت به  $x$  است.

تعریف ۱۴.۳.۱. (حاصل ضرب دکارتی) حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  را با  $A \otimes B$  نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A \otimes B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\} \quad (۴.۱)$$

تعریف ۱۵.۳.۱. (فضای اندازه پذیر پولیش<sup>۱۸</sup>) یک فضای اندازه پذیر پولیش یک فضای متریک، جداشدنی و کامل است.

برای برآورد مشتق، فضایی که اندازه احتمال در آن قرار می‌گیرد اندازه پذیر پولیش است. در زیر قضیه نمایش اسکورخود را ارائه می‌دهیم. نمایش اسکورخود در ارزیابی برآوردگر مشتق تحلیل آشفتگی بینهایت کوچک مفید است. قضیه‌ی نمایش اسکورخود تناظر بین فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  و  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mathcal{L})$  را ارائه می‌دهد، که  $\mathcal{L}$  اندازه لبگ بوده و  $\mathcal{B}$  مجموعه‌ی بورل روی بازه‌ی  $[0, 1]$  است.

قضیه ۱۶.۳.۱. (نمایش اسکورخود<sup>۱۹</sup>) برای هر متغیر تصادفی اندازه پذیر  $X(\omega)$  روی  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  یک متغیر تصادفی  $Y(\omega)$  روی  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mathcal{L})$  وجود دارد به طوری که  $X \sim Y$ .

<sup>۱۷</sup>Stein's lemma

<sup>۱۸</sup>Polish Measurable Space

<sup>۱۹</sup>Skorohod Representation

به طور مثال، می‌توان متغیر تصادفی  $Y$  را معکوس تابع توزیع در نظر گرفت

$$X(\omega) = F_x^{-1}(\omega) := \sup\{x \in S : F(x) \leq u\}$$

که در آن  $(0, 1) \sim u \in \mathcal{U}$  (متغیر تصادفی یکنواخت روی  $[0, 1]$ ).

لم ۱۷.۳.۱. با استفاده از نمایش اسکوروخود  $X(\omega) = F_x^{-1}(\omega)$ ، تابع عملکرد می‌تواند به صورت

زیر نمایش داده شود

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L(X; \theta)] &= \int L(X(\omega); \theta) \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{\theta}(dx) \\ &= \int_{[0, 1]^n} L(X(\theta; u)) du_1 \cdots du_n \end{aligned} \quad (5.1)$$

که در آن  $[0, 1]^n := \bigotimes_{j=1}^n [0, 1]$  حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌های  $[0, 1]$  است.

برهان. طبق تعریف می‌توان نوشت

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L(X(\theta); \theta)] = \int L(X(\omega(\theta); \theta); \theta) \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(dx)$$

سپس با جایگذاری  $X(\omega) = F^{-1}(\omega)$  داریم

$$\mathbb{P}(dx) = \mathbb{P}(F^{-1}(du)) = du$$

همچنین

$$L(X; \theta) = L(X(\theta); u)$$

□

که این (5.1) را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۱۸.۳.۱. (قضیه همگرایی تسلطی)<sup>۲</sup> اگر  $(X_n)_{n=1}^{\infty}$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی روی یک

فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  باشد، بطوری که  $X_n \xrightarrow{a.s.} X$  همچنین داشته باشیم

$$\sup_n |X_n| < K \quad a.s. \quad (\mathbb{E}[K] < \infty)$$

<sup>۲</sup>Dominated Convergence Theorem



آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$$

تعریف ۱۹.۳.۱. (پیوسته لیپ شیتس<sup>۲۱</sup>) یک تابع از دستگاه متغیرهای تصادفی  $L(X(\theta), \theta)$  روی  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  تقریباً همه جا پیوسته لیپ شیتس است، اگر یک متغیر تصادفی  $K$  با شرط  $\mathbb{E}[K] < \infty$  و پارامترهای  $\theta, \theta + \Delta\theta \in \Theta$  که  $\Theta$  یک زیر مجموعه محدب در  $\mathbb{R}^k$  است وجود داشته باشند، بطوریکه

$$\sup_{\theta, \theta + \Delta\theta \in \Theta} \|L(X; \theta + \Delta\theta) - L(X; \theta)\| \leq K \Delta\theta \quad (۶.۱)$$

قضیه ۲۰.۳.۱. (رادون-نیکودیم<sup>۲۲</sup>) فرض کنید طبق تعریف ۱۰.۳.۱ برای دو اندازه احتمال  $\mathbb{P}(\cdot)$  و  $\mathbb{Q}$  داشته باشیم  $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ ، اگر یک تابع  $\mathbb{Q}$ -اندازه پذیر نامنفی (مشتق رادون-نیکودیم) وجود داشته باشد،  $f := \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$  یک تابع چگالی روی  $(S, \mathcal{B}(S))$  است، بطوریکه به ازای هر  $A \in \mathcal{B}(S)$  داشته باشیم:

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x) \mathbb{Q}(dx) \quad (۷.۱)$$

عکس قضیه رادون-نیکودیم نیز برقرار است: اگر اندازه های  $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$  همانند قضیه باشند آنگاه  $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ .

اگر  $\mathcal{L} = \mathbb{Q}$  اندازه لبگ باشد، مشتق رادون-نیکودیم با تابع چگالی احتمال یکی است. اگر  $\iota = \mathbb{Q}$  اندازه شمارشی باشد، مشتق رادون-نیکودیم برابر با جرم احتمال یک متغیر تصادفی گسسته است.

در زیر دو نتیجه مربوط به مشتق رادون-نیکودیم آمده که برای روش تابع عددی  $(SF)$  استفاده می شود.

<sup>۲۱</sup>Lipschitz Continuity

<sup>۲۲</sup>Radon-Nikodym

نتیجه ۲۱.۳.۱. فرض کنید  $g(\cdot)$  تابع  $\mathbb{Q}$ -اندازه پذیر روی  $(S, \mathcal{B}(S))$  باشد، به ازای هر  $C \in \mathcal{B}(S)$

داریم

$$\int_A g(x) \mathbb{P}(dx) = \int_A g(x) f(x) \mathbb{Q}(dx) \quad (۸.۱)$$

که  $f(x)$  مشتق رادون-نیکودیم در قضیه ۲۰.۳.۱ می باشد.

برهان. ابتدا اثبات را برای توابع مشخصه، ساده، نامنفی آورده، سپس به کمک آن‌ها برای حالت کلی توابع  $\mathbb{Q}$ -اندازه پذیر  $g(\cdot)$  کامل می‌کنیم.

۱. توابع مشخصه: با استفاده از قضیه ۲۱.۳.۱ برای مجموعه  $\mathbb{Q}$  اندازه پذیر  $A$  داریم

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \mathbb{P}(dx) = \int_A \mathbb{Q}(dx) = \int_A f(x) \mathbb{Q}(dx)$$

۲. توابع ساده: با فرض  $g(x) := \sum_{j=1}^n \mathbb{1}(A_j)$  به طوری که  $(A_j)_{j=1}^n$  مجموعه های دو بدو

مجزا هستند و با استفاده از ۱ داریم

$$\int g(x) \mathbb{P}(dx) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) = \sum_{j=1}^n \int \mathbb{1}(A_j) f(x) \mathbb{Q}(dx) = \int g(x) \mathbb{Q}(dx)$$

۳. توابع نامنفی: تابع نامنفی  $g(x)$  را می توان به صورت یک دنباله ی صعودی از توابع ساده

$g_j(x)$  نمایش داد. از قضیه همگرایی یکنوا و ۲ داریم

$$\begin{aligned} \int g(x) \mathbb{P}(dx) &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \mathbb{P}(dx) \\ &= \int f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \mathbb{Q}(dx) \\ &= \int f(x) g(x) \mathbb{Q}(dx) \end{aligned}$$

۴. توابع  $\mathbb{Q}$ -اندازه پذیر کلی: تابع  $g(x)$  می تواند به دو قسمت مثبت و منفی خود تجزیه شود

چون  $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$  که  $g^+(x) := \max(g(x), 0)$ ,  $g^-(x) := \max(-g(x), 0)$

$g^+, g^-$  توابع نامنفی هستند، می توان ۳ را برای بدست آوردن (۸.۱) به کار برد.

□

نتیجه ۲۲.۳.۱. اگر  $\mu \prec \mathbb{P}, \mathbb{Q}$  و  $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$  آنگاه

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}(x) = \left( \frac{d\mathbb{P}}{d\mu} \frac{d\mu}{d\mathbb{Q}} \right) (x) \quad (9.1)$$

برهان. برای یک تابع  $\mathbb{P}$ -اندازه پذیر  $g(\cdot)$  با استفاده از نتیجه‌ی ۹.۱ برای هر  $A \in \mathcal{B}(S)$  داریم

$$\int_A g(x) \mathbb{P}(dx) = \int_A g(x) \frac{d\mathbb{P}}{d\mu} \mu(dx) \quad (10.1)$$

همچنین داریم

$$\int_A g(x) \mathbb{P}(dx) = \int_A g(x) \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(dx) = \int_A g(x) \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mu} \mu(dx) \quad (11.1)$$

□

با مقایسه و مرتب سازی معادلات بالا، (۹.۱) نتیجه می شود.

تعریف ۲۳.۳.۱. (اندازه متناهی<sup>۲۳</sup>، اندازه معین<sup>۲۴</sup>) یک اندازه معین، یک مجموعه توابع حقیقی

مقدار  $\mu: A \rightarrow \mathbb{R}, A \in \mathcal{B}(S)$  است، بطوریکه دارای دو ویژگی زیر باشد:

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad .1$$

۲. اگر  $(A_i)_{i=1}^{\infty}$  گردایه ای از مجموعه های دو بدو مجزا باشد، آنگاه  $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

(اجتماع شمارا).

یک اندازه متناهی یک اندازه با ویژگی  $\sup_{A \in \mathcal{B}} |\mu(A)| = K < \infty$  می باشد.

تعریف ۲۴.۳.۱. (پیوستگی ضعیف اندازه، مشتق پذیری ضعیف اندازه)

<sup>۲۳</sup>Finite Measure

<sup>۲۴</sup>Signed Measure

یک خانواده از اندازه‌های احتمال،  $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ ، روی  $(S, \mathcal{B}(S))$  پیوسته ضعیف است اگر به ازای هر  $\mathbb{P}_\theta(\cdot)$  توابع  $\mathbb{P}_\theta$ -اندازه پذیر  $g \in L^1(S)$ ، (به عبارت دیگر  $\int_S |g(x)| \mathbb{P}(dx) < \infty$ ) و پارامترهای  $\theta, \theta + \Delta\theta \in \Theta$  وجود داشته باشند به طوریکه وقتی  $\Delta\theta \rightarrow 0$  داشته باشیم

$$\int_S g(x) \mathbb{P}(dx; \theta + \Delta\theta) \rightarrow \int_S g(x) \mathbb{P}(dx; \theta)$$

یک خانواده از اندازه‌های احتمال مشتق پذیر ضعیف است اگر به ازای هر  $\mathbb{P}_\theta(\cdot)$  توابع  $\mathbb{P}_\theta$ -اندازه پذیر  $g \in L^1(\mathbb{P})$  و  $\theta, \theta + \Delta\theta \in \Theta$  وجود داشته باشند به طوریکه:

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\theta} \left[ \int_S g(x) \mathbb{P}_{\theta+\Delta\theta}(dx) - \int_S g(x) \mathbb{P}_\theta(dx) \right] \rightarrow \int_S g(x) \mathbb{P}'_\theta(dx)$$

که در آن  $\mathbb{P}_\theta$  یک اندازه معین متناهی است.

تجزیه یک اندازه معین متناهی به صورت تفاضل دو اندازه احتمال یکتا نیست. هرچند همیشه وجود داشته که در زیر بوسیله قضیه تجزیه جردن-هان ارایه می‌شود.

**قضیه ۲۵.۳.۱.** (تجزیه جردن-هان<sup>۲۵</sup>) یک اندازه معین  $\nu$  در یک فضای پولیش  $S$  می‌تواند به صورت تفاضل دو اندازه  $\nu = \nu^+ - \nu^-$  تجزیه شود که مجموعه  $S$  می‌تواند بوسیله یک اجتماع مجزا از دو مجموعه  $S = S^+ \cup S^-$  نشان داده شود بطوریکه برای هر مجموعه  $\nu$  اندازه پذیر  $A \subset S^+$ ،  $\mu^+(A) \geq 0$  و  $\mu^-(A) = 0$ . به طور مشابه برای یک مجموعه  $\nu$  اندازه پذیر  $B \subset S^-$ ،  $\mu^+(B) = 0$  و  $\mu^-(B) \geq 0$ .

به عنوان یک نتیجه از قضیه ۲۵.۳.۱ یک اندازه معین متناهی  $\nu_\theta$ ،  $\theta \in \Theta$  می‌تواند به صورت

$$\nu_\theta := c_1(\theta) \dot{\mathbb{P}}_\theta - c_2(\theta) \ddot{\mathbb{P}}_\theta$$

نمایش داده شود  $(\dot{\mathbb{P}}, \ddot{\mathbb{P}})$  اندازه احتمال می‌باشند، زیرا  $\sup_{A \in \mathcal{B}(S^+)} \nu^+(A) = K^+$ .

نمایش برای اندازه  $\nu^-(\cdot)$  نیز مشابه است.

<sup>۲۵</sup>Jordan-Hahn Decomposition

اگر  $A = S$  و  $g(x) = 1$  نمایش برای یک اندازه معین متناهی می‌تواند ساده‌تر شود، مانند آنچه در زیر مشاهده می‌شود.

نتیجه ۲۶.۳.۱. (نمایش اندازه معین متناهی) یک اندازه معین متناهی  $\nu_\theta$ ،  $(\theta \in \Theta)$  می‌تواند به صورت تفاضل دو اندازه احتمال ضرب شده در یک پیش عامل  $c(\theta)$  بیان شود.

برهان. با انتخاب  $A = S$  و  $g(x) = 1$  برای یک اندازه به طور ضعیف مشتق پذیر می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_S \mathbb{P}(dx) &= \int_S c_1(\theta) d\dot{\mathbb{P}}(dx) - c_2(\theta) d\ddot{\mathbb{P}}(dx) \\ &= c_1(\theta) - c_2(\theta) \end{aligned} \quad (12.1)$$

چون مقدار انتگرال روی  $S$  مساوی ۱ است، پس مشتق آن مساوی صفر می‌باشد، از اینرو

$$c_1(\theta) = c_2(\theta).$$

□

# فصل ۲

## انواع برآوردگرهای حساسیت

### ۱.۲ مقدمه

در این فصل نظریه برآورد مشتق و مباحث مربوط به آن بحث می‌شود. با توجه به مفاهیم و قضایایی که در فصل قبل بیان شد، ابتدا به تعریف برآوردگر مشتق پرداخته شده است. سپس در بخش ۲.۲-۴.۲ چگونگی بدست آوردن تحلیل آشفستگی بینهایت کوچک ( $IPA$ )، روش تابع امتیاز ( $SF$ ) و برآوردگر مشتق اندازه مقدار ( $MVD$ ) به ترتیب ارائه می‌شوند. در آخر هر بخش یک مثال درباره چگونگی به کار بردن برآورد مشتق و آشنایی بیشتر آمده است.

### ۱.۱.۲ برآوردگر مشتق

ابتدا به تعریف خود برآوردگر مشتق می‌پردازیم، که در [۲۱] به آن پرداخته شده است. سپس سه نوع برآوردگر مشتق ناریب را بیان می‌داریم.

**تعریف ۱.۱.۲. برآوردگر مشتق:** برآوردگر مشتق،  $D(X; \theta)$ ، یک تابع از دستگاه متغیرهای تصادفی روی یک فضای احتمال  $(\omega, F, \mathbb{Q})$  است، که بوسیله رابطه زیره برآوردگر عملکرد  $(\omega, F, \mathbb{P})$  مرتبط است.

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L(X; \sigma)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(X; \theta)] \quad (1.2)$$

که  $\mathbb{Q}$  ممکن است با  $\mathbb{P}$  مساوی باشد.

## ۲.۱.۲ تحلیل آشفتگی بینهایت کوچک

برآوردگر مشتق تحلیل آشفتگی بینهایت کوچک (IPA) یک برآوردگر مشتق بوده به طوری که

$$\int L(X(\theta), \theta) \mathbb{P}_\theta(dx) = \int L(X(\theta)) \mathbb{P}(dx)$$

منبع اصلی در این زمینه گلسرمن (۱۹۹۱) است.

قضیه ۲.۱.۲. (برآوردگر مشتق تحلیل آشفتگی بینهایت کوچک) برای یک تابع مشتق پذیر  $L(x(\theta))$

برآوردگر مشتق IPA به صورت زیر بدست می آید

$$D_\theta^{IPA}(X; \theta) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L(x(\theta))}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \theta} \Big|_{x_j(\theta)=X_j(\theta)} \quad (2.2)$$

برهان. با استفاده از لم ۱۶.۳ یک دنباله از متغیرهای تصادفی  $(Y_n)_{n=1}^\infty$  را تعریف می کنیم که  $Y_n := L(X(\theta + \Delta\theta_n); u)$  و  $Y = L(X(\theta); u)$  و  $(\theta, \theta + \Delta\theta_n \in \Theta \forall n)$  که  $\Delta\theta_n \rightarrow 0$  وقتی  $n \rightarrow \infty$  در نتیجه  $Y_n \xrightarrow{a.s.} Y$ . از قضیه ۱۸.۳.۱ نتیجه می شود که  $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[Y]$ . بنابراین با استفاده از تعریف مشتق داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}[L(X(\theta))] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n] - \mathbb{E}[Y]}{\Delta\theta_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^n} \frac{Y_n - Y}{\Delta\theta_n} du_1 \cdots du_n \\ &= \int_{[0,1]^n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_n - Y}{\Delta\theta_n} du_1 \cdots du_n \\ &:= \int_{[0,1]^n} \frac{\partial}{\partial \theta} L(X(\theta); u) du_1 \cdots du_n \end{aligned}$$

از آنجایی که بنا به پیوستگی لیپشیتس  $\frac{L(X; \theta + \Delta\theta_n) - L(X; \theta)}{\Delta\theta_n} < K$ ، انتگرال فوق موجود است.

حال با استفاده از قانون زنجیره‌ای می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L(X(\theta))] &= \int_{[0,1]^n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L(x(\theta))}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \theta} \Big|_{x_j(\theta)=X_j(\theta)} du_1 \cdots du_n \quad (3.2) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial L(X(\theta))}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \theta} \Big|_{x_j(\theta)=X_j(\theta)} \right] \end{aligned}$$

□ که معادل با برآوردگر مشتق ۲.۲ است.

مثال ۳.۱.۲. فرض کنید  $X \sim Wei(\alpha, \beta)$  (توزیع وایبل<sup>۱</sup> با پارامترهای  $(\alpha, \beta)$ ) با تابع چگالی

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha}$$

و  $Y \sim \gamma(r, \alpha)$  (توزیع گاما با پارامترهای  $r$  و  $\alpha$ ) با تابع چگالی

$$f(x) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-rx}$$

باشند. اگر  $W_0, W_1, \dots, W_k$  متغیرهای تصادفی با توزیع نمایی با  $\mathbb{E}[W_{(.)}] = 1$  در نظر گرفته

شوند،  $X, Y$  بوسیله عبارات زیر با  $W_{(.)}$  رابطه دارد

$$X \sim \left(\frac{W_{\cdot}}{\alpha}\right)^{1/\beta}$$

$$Y \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^r W_j$$

حال فرض کنید  $L(X(\alpha), Y(\alpha)) = \max(X, Y)$ . برآوردگر مشتق IPA برای این تابع به صورت

زیر می‌باشد:

$$D_{\alpha}^{IPA}(X(\alpha), Y(\alpha)) = \begin{cases} -\frac{1}{\beta} \frac{X}{\alpha} \equiv -\frac{1}{\beta} \frac{W_{\cdot}^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} & X(\omega) \geq Y(\omega) \\ -\frac{Y}{\alpha} \equiv -\frac{1}{\alpha^r} \sum_{j=1}^r W_j & Y(\omega) > X(\omega) \end{cases}$$

### ۳.۱.۲ تابع امتیاز

برآوردگر تابع امتیاز یا نسبت درست‌نمایی یک روش توزیعی برای برآورد مشتق است. یعنی

$$\int L(X(\theta), \theta) \mathbb{P}_{\theta}(dx) = \int L(X) \mathbb{P}_{\theta}(dx)$$

<sup>۱</sup>Weibull



اندازه احتمال یک مشتق رادون-نیکودیم  $f_\theta(x)$  دارد و مشتق گیری انجام می‌شود چون  $f(\cdot)$  در  $\theta$  مشتق پذیر است. رابینستین و شاپیرو (۱۹۹۳) نتایجی را در خصوص این روش برآورد مشتق ارائه داده‌اند.

**قضیه ۴.۱.۲.** (برآوردگر مشتق تابع امتیاز) فرض کنید  $L(X)$  یک تابع انتگرال پذیر  $L^1(\mathbb{P}_\theta)$  باشد، به عبارت دیگر  $\forall \theta \in \Theta; \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\theta} |L(X)| < \infty$ . همچنین خانواده اندازه‌های احتمال  $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}\}_{\theta \in \Theta}$  هم ارز با  $\mu$  که به  $\theta$  وابسته نیست با چگالی رادون-نیکودیم  $\frac{\mathbb{P}_\theta}{d\mu} := f_\theta(\cdot)$  که نسبت به  $\theta$  مشتق پذیر است را در نظر بگیرید بطوریکه  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} |D(X; \theta)| < \infty$  آنگاه

$$D_\theta^{SF}(X; \theta) = L(X) \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \ln(f_\theta(x_j)) |_{x_j=X_j} \} \quad (4.2)$$

برهان. از نتیجه ۲۱.۳.۱ می‌توان نتیجه گرفت

$$\int L(X) \bigotimes_{j=1}^n \mathbb{P}_{i,\theta}(dx) = \int L(X) \prod_{j=1}^n f_{\theta,j}(X_j) \mu^n(dx)$$

با استفاده از یک دنباله از مشتقات رادون-نیکودیم  $(f_j^{(k)})_{k=1}^\infty$  که  $f_j^{(k)} := f_{\theta+\Delta\theta_k,j}(x_j)$  و  $f_j = f_{\theta,j}(x_j)$  می‌باشد. که وقتی  $k \rightarrow \infty$  داریم  $\Delta\theta_k \rightarrow 0$ . در نتیجه  $f_j^{(k)} \rightarrow f_j, \forall j \in \{1, \dots, n\}$  حال بنا به قضیه ۱۸.۳.۱ و ۱۹.۳.۱ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\theta} [L(X)] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int L(X) \prod_{j=1}^n f_j^{(k)} \mu^n(dx) - \int L(X) \prod_{j=1}^n f_j \mu^n(dx)}{\Delta\theta_k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int L(X) \prod_{j=1}^n (f_j^{(k)} - f_j) \mu^n(dx)}{\Delta\theta_k} \\ &= \int L(X) \sum_{j=1}^n f'_{j,\theta}(x) \left( \prod_{l \neq j} f_l(x) \right) \mu^n(dx) \\ &= \int L(X) \left( \sum_{j=1}^n (\ln(f_j))' \right) \prod_{j=1}^n f_j(x) \mu^n(dx) \end{aligned}$$

□ خط آخر از نتیجه ۲۲.۳.۱ استفاده شده است. عبارت آخر با (۴.۲) معادل است.

برای فهم بیشتر دو مثال زیر را می‌آوریم.

مثال ۵.۱.۲. فرض کنید  $Y \sim Exp(\lambda)$  (توزیع نمایی) با تابع چگالی احتمال

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

باشد. در این صورت برآوردگر مشتق تابع امتیاز به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} D_{\theta}^{SF}(x) &= L(X) \frac{\partial}{\partial \lambda} \{ \ln(\lambda e^{-\lambda x}) \} \\ &= L(X) \frac{\partial}{\partial \lambda} \{ \ln(\lambda) - \lambda x \} \\ &= L(X) \left( \frac{1}{\lambda} - x \right) \end{aligned}$$

مثال ۶.۱.۲. فرض کنید  $W \sim Geo(\theta)$  (توزیع هندسی) با تابع جرم احتمال

$$\mathbb{P}(W = k) = (1 - \theta)^{k-1} \theta$$

باشد. برآوردگر تابع امتیاز برای توزیع هندسی به صورت زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} D_{\theta}^{SF}(x) &= L(X) \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \ln((1 - \theta)^{k-1} \theta) \} \\ &= L(X) \frac{\partial}{\partial \theta} \{ (k-1) \ln(1 - \theta) + \ln \theta \} \\ &= L(X) \left( \frac{1-k}{1-\theta} + \frac{1}{\theta} \right) \end{aligned}$$

#### ۴.۱.۲ مشتق اندازه مقدار

روش مشتق اندازه مقدار (MVD) برای برآورد مشتق روش توزیعی دیگری است اما در عوض مشتق یک اندازه را به عنوان اندازه معین متناهی بررسی می کنیم. پی افلاگ (۱۹۹۶) این روش را برای توابع پیوسته و کراندار معرفی کرده است. این تکنیک بعداً توسط هیدرگات و وزکیوز (۲۰۰۵) برای توابع انتگرال پذیر  $L^1(\mathbb{P})$  تعمیم داده شد.

قضیه ۷.۱.۲. (برآوردگر مشتق اندازه مقدار) اگر  $L(X)$  یک تابع انتگرال پذیر  $L^1(\mathbb{P}_{\theta})$  باشد

$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_{\theta}\}$  و  $\forall \theta \in \Theta, \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\theta}}[L(X)] < \infty$  یک خانواده به طور ضعیف مشتق پذیر از اندازه احتمال

باشد، آنگاه برآوردگر مشتق اندازه مقدار عبارتست از:

$$D_{\theta}^{MVD}(X; \theta) = c(\theta)[L(X^{(1)}) - L(X^{(2)})] \quad (5.2)$$

که  $X^{(1)}, X^{(2)}$  متغیرهای تصادفی  $X$  به ترتیب تحت اندازه‌های احتمال  $\mathbb{P}$  و  $\dot{\mathbb{P}}$  می‌باشند.

برهان. یک دنباله از اندازه‌های احتمال برای متغیر تصادفی  $X$  را به صورت  $(\mathbb{P}^{(k)})_{k=1}^{\infty}$  نشان می‌دهیم که  $\mathbb{P}^{(k)} := \mathbb{P}_{\theta + \Delta\theta_k}$  و  $\mathbb{P} := \mathbb{P}_{\theta}$  که وقتی  $k \rightarrow \infty$  آنگاه  $\Delta\theta_k \rightarrow 0$ . در نتیجه تقریباً همه جا  $\mathbb{P}^{(k)} \rightarrow \mathbb{P}_j$ . آنگاه با استفاده از قضیه همگرایی تسلطی (قضیه ۱۸.۳.۱) می‌توان انتگرال و مشتق را جابجا نمود. در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\theta}}[L(X)] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int L(X) \mathbb{P}^{(k)}(dx) - \int L(X) \mathbb{P}(dx)}{\Delta\theta_k} \\ &= \int L(X) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}^{(k)}(dx) - \mathbb{P}(dx)}{\Delta\theta_k} \\ &= \int L(X) \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}'_{\theta}(dx) \end{aligned}$$

خط آخر به این دلیل است که  $\mathbb{P}_{\theta}(\cdot)$  به طور ضعیف مشتق پذیر است. چون  $\mathbb{P}_{\theta}$  یک اندازه معین متناهی است. با توجه به نتیجه ۲۶.۳.۱ عبارت بالا می‌تواند به صورت زیر نشان داده شود، با وجود آن از تجزیه جردن-هان نیز تضمین می‌شود که

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\theta}}[L(X)] = \int L(X) c(\theta) (c(\theta) \dot{\mathbb{P}}_{\theta}(dx) - \ddot{\mathbb{P}}_{\theta}(dx))$$

□

که معادل با (۵.۲) است.

در زیر دو مثال در استفاده از برآوردگر مشتق اندازه مقدار ارایه می‌دهیم.

مثال ۸.۱.۲. فرض کنید  $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ . مشتق تابع چگالی به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{\lambda e^{-\lambda x}\} &= \frac{1}{\lambda} [\lambda e^{-\lambda x} - \lambda^2 x e^{-\lambda x}] \\ &:= \frac{1}{\lambda} [f_{X^{(1)}}(x; \lambda) - f_{X^{(2)}}(x; \lambda)] \end{aligned}$$

که  $X^{(1)} \sim Exp(\lambda)$  (توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda$ ) و  $X^{(2)} \sim \gamma(2, \lambda)$  (توزیع گاما با پارامترهای ۲ و  $\lambda$ ) می‌باشند. در نتیجه

$$D_{\lambda}^{WD}(X) = \frac{1}{\lambda} [L(X^{(1)}) - L(X^{(2)})]$$

با به کار بردن تجزیه هان-جردن برای متغیر تصادفی با توزیع نمایی می‌توان نوشت

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \{\lambda e^{-\lambda x}\} = \frac{1}{\lambda e} [\lambda e(1 - \lambda x)e^{-\lambda x} I(x \leq \frac{1}{\lambda}) - \lambda e(\lambda e - 1)e^{-\lambda x} I(x > \frac{1}{\lambda})]$$

که نشان می‌دهد نمایش مشتق یکتا نیست.

برای توزیع های احتمال گسسته، مشتق برآوردگر MVD به طور مشابه رفتار می‌کند؛ زیرا تابع جرم احتمال نسبت به پارامتر  $\theta$  پیوسته است.

مثال ۹.۱.۲. فرض کنید  $W \sim Geo(\theta)$ . مشتق تابع چگالی نسبت به  $\theta$  عبارتست از

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \{(1 - \theta)^{k-1} \theta\} &= \frac{1}{\theta} [(1 - \theta)^{k-1} \theta - \binom{k-1}{1} (1 - \theta)^{k-2} \theta^2] \\ &:= \frac{1}{\theta} [L(Y^{(1)}(x; \lambda)) - L(Y^{(2)})] \end{aligned}$$

که  $W^{(1)}$  دارای توزیع هندسی با پارامتر  $\theta$  بوده و  $W^{(2)}$  دارای یک توزیع دوجمله‌ای منفی با پارامتر  $(2, \theta)$  است. به عبارت دیگر  $Y^{(1)} \sim Geo(\theta), Y^{(2)} \sim Nb(2, \theta)$ . در نتیجه

$$D_{\theta}^{WD}(X) = \frac{1}{\theta} [L(Y^{(1)}) - L(Y^{(2)})]$$

# فصل ۳

## بررسی رفتار برآوردگرها در مدل گوسی

### ۱.۳ مقدمه

در این فصل هر سه روش برآورد مشتق که در فصل قبل بیان شد، را برای سیستم های گوسی (نرمال) به کار می‌بریم. این فصل هم به عنوان مکملی برای فصل قبل و هم به عنوان مقدمه‌ای برای فصل ۴ که بررسی در مورد مدل های آمیخته‌ی مقیاسی نرمال است، می‌باشد. بخش ۱.۳ برآوردگرهای مشتق برای حساسیت یک تابع عملکرد نسبت به انحراف استاندارد متغیر تصادفی با توزیع نرمال را ارائه می‌دهد. در بخش ۲.۳ از یک طرح شبیه سازی از برآوردگر مشتق اندازه مقدار استفاده می‌شود که برآوردگر حاصل به برآوردگر فانتوم جفت شده معروف است. سپس مقایسه برآوردگرها برای تابع عملکرد نمایی انجام می‌شود. در بخش ۳.۳ شرط کافی برای تابع عملکرد را بیان کرده‌ایم که با توجه به آن، برتری برآوردگرها نسبت به دیگری مشخص می‌شود. در بخش ۴.۳ برآوردگری جدید را برای سیستم‌های گوسی ارائه کرده و با انتخاب تابع عملکرد چندجمله‌ای مقایسه برآوردگرها انجام شده است. همچنین نشان می‌دهیم که این برآوردگر از سه نوع برآوردگر دیگر بهتر می‌باشد و در بخش آخر به بحث در مورد سیستم‌های گوسی که در تعیین یک شبکه فعال تصادفی<sup>۱</sup> به کار برده شده‌اند و محاسبه قیمت های اختیار تحت مدل بلک-شولز<sup>۲</sup> می‌پردازیم.

<sup>۱</sup>Stochastic Activity Network

<sup>۲</sup>Black-Scholes

نتایج این فصل عمدتاً از مرجع [۲۲] می‌باشند.

حوزه سیستم‌های گوسی حول این حقیقت است که توزیع مورد نظر برای یک دستگاه از متغیرهای تصادفی، نرمال است. برای یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال یک متغیره با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  تابع چگالی احتمال عبارتست از:

$$\Phi_{\mu, \sigma}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right); \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+ \quad (1.3)$$

و برای برآوردگر عملکرد مفروض  $L(X; \mu, \sigma)$  تابع عملکرد به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\mathbb{E}[L(X; \mu, \sigma)] = \int L(X; \mu, \sigma) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dx \quad (2.3)$$

فرض می‌کنیم که تابع عملکرد انتگرال پذیر است، به عبارتی  $\mathbb{E}|L(X; \mu, \sigma)| < \infty$ .

مشتق تابع عملکرد نسبت به  $\sigma$  برابر است با

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbb{E}[L(X; \sigma)] = \frac{\partial}{\partial \sigma} \int L(X; \mu, \sigma) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) \right) dx \quad (3.3)$$

برای سادگی در نوشتار وابستگی  $\mu$  به  $L(\cdot)$  حذف شده است.

## ۲.۳ محاسبه برآوردگرهای مشتق

در این بخش محاسبه هر سه برآوردگر مشتق نااریب برای یک برآوردگر عملکرد کلی از یک متغیر تصادفی نرمال آمده است. علاوه بر این عبارات واریانس برای تابع عملکرد نمایی  $L_1(x) = e^{\alpha x}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  و همچنین تابع عملکرد چندجمله‌ای  $L_2(y) = y^p$ ,  $p \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  تعیین شده‌اند. در زیر از این حقیقت که یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  می‌تواند به صورت  $X = \mu + \sigma Z$  بیان شود که در آن  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ، استفاده شده است.

### تحلیل آشفته‌گی بینهایت کوچک (IPA)

برای یک تابع مشتق پذیر  $L(X; \sigma)$  برآوردگر IPA با به کار بردن رابطه‌ی (۲.۲) به صورت زیر می‌باشد

$$D_{\sigma}^{IPA} = ZL'(X) = ZL'(\mu + \sigma Z) \quad (۴.۳)$$

به شرط اینکه  $L(X(\sigma))$  تقریباً همه جا پیوسته لیپ شیتس باشد، برآوردگر IPA نااریب است. واریانس برآوردگر IPA به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Var(D_{\sigma}^{IPA}) = Var(ZL'(X)) := \mathbb{E}[ZL'(\mu + \sigma Z)^2] - \mathbb{E}^2[ZL'(\mu + \sigma Z)] \quad (۵.۳)$$

بنابراین برای تابع عملکرد نمایی  $L(x) = e^{\alpha x}$  برآوردگر مشتق به صورت

$$D_{\sigma}^{IPA,1} = \alpha Z e^{\alpha(\mu + \sigma Z)}$$

و برای تابع عملکرد چندجمله‌ای برآوردگر IPA به صورت

$$D_{\sigma}^{IPA,2} = pZ(\sigma Z)^{p-1}$$

است. واریانس‌های برآوردگرهای مشتق پس از انجام یک سری محاسبات جبری به صورت زیر می‌باشند

$$Var(D_{\sigma}^{IPA,1}) = \alpha^2 (\mathbb{E}[Z^2 e^{2\alpha\sigma Z}] - \mathbb{E}^2[Z e^{\alpha\sigma Z}])$$

$$Var(D_{\sigma}^{IPA,2}) = p^2 \sigma^{2p-2} (\mathbb{E}[Z^{2p}] - \mathbb{E}^2[Z^p])$$

### تابع امتیاز (SF)

برای روش تابع امتیاز یا نسبت درست‌نمایی، با مشتق‌گیری از لگاریتم تابع توزیع تجمعی نرمال با

پارامترهای  $\mu$ ،  $\sigma$  که با  $\Phi_{\mu,\sigma}$  نشان می‌دهیم، نسبت به  $\sigma$  داریم

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ln \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} - 1 \right) \quad (۶.۳)$$

برآوردگر تابع امتیاز به شرط اینکه  $\sup_{\sigma \in \delta} \mathbb{E}[|L(X; \sigma) \frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_{\mu, \sigma}(x)|] < \infty$  به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbb{E}[L(X; \sigma)] &= \mathbb{E}\left[L(X) \left(\frac{X^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[L(\mu + \sigma Z) \frac{(Z^2 - 1)}{\sigma}\right]. \end{aligned} \quad (7.3)$$

همچنین

$$Var(D_{\sigma}^{SF}) = \mathbb{E}\left[L(X) \left(\frac{X^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma}\right)\right]^2 - \mathbb{E}^2\left[L(X) \left(\frac{X^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma}\right)\right] \quad (8.3)$$

برای هر دو تابع عملکرد نمایی و چندجمله‌ای، واریانس برآوردگرهای مشتق SF به ترتیب به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} Var(D_{\sigma}^{SF, 1}) &= \frac{1}{\sigma^2} (\mathbb{E}[Z^4 e^{2\alpha\sigma Z}] - 2\mathbb{E}[Z^2 e^{2\alpha\sigma Z}] + \mathbb{E}[e^{2\alpha\sigma Z}] \\ &\quad - \mathbb{E}^2[Z^2 e^{\alpha\sigma Z}] + 2\mathbb{E}[Z^2 e^{\alpha\sigma Z}]\mathbb{E}[e^{\alpha\sigma Z}] - \mathbb{E}^2[e^{\alpha\sigma Z}]). \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$Var(D_{\sigma}^{SF, 2}) = \sigma^{2p-2} (\mathbb{E}[Z^{2p+4}] - 2\mathbb{E}[Z^{2p+2}] + \mathbb{E}[Z^{2p}] - (\mathbb{E}[Z^{p+2}] - \mathbb{E}[Z^p])). \quad (10.3)$$

### مشتق اندازه مقدار (MVD)

برآوردگر MVD با مشتق‌گیری مستقیم از تابع چگالی یک متغیر تصادفی گوسی تعیین می‌شود. با

نمایش مشتق به صورت تفاضل دو تابع چگالی، مشتق  $\Phi_{\mu, \sigma}$  نسبت به  $\sigma$  عبارتست از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_{\sigma}(x) &= \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) \right] \\ &:= \frac{1}{\sigma} [\mathbf{m}_{\mu, \sigma}(x) - \Phi_{\mu, \sigma}(x)] \end{aligned} \quad (11.3)$$

که در آن  $\mathbf{m}_{\mu, \sigma}(\cdot)$  تابع چگالی احتمال ماکس ول دوگانه<sup>۲</sup> با پارامترهای  $\mu, \sigma$  به صورت زیر است

$$\mathbf{m}_{\mu, \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} (x - \mu)^2 \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

<sup>۲</sup>Double-Maxwell



به عبارت دیگر  $X^+ \sim DM(\mu, \sigma)$  با تابع چگالی احتمال  $m_{\mu, \sigma}(\cdot)$ . در نتیجه برآوردگر MVD به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} D_{\sigma}^{MVD} &= \frac{1}{\sigma}(L(X^+) - L(X^-)) \\ &= \frac{1}{\sigma}(L(\mu + \sigma Z^+) - L(\mu + \sigma Z)) \end{aligned} \quad (12.3)$$

تبدیل  $X^+ = \mu + \sigma Z^+$  برای توزیع ماکس ول دوگانه که در آن  $Z^+ \sim DM(0, 1)$ ، برقرار است. واریانس برآوردگر MVD با فرض مستقل بودن  $X, X^+$  به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} Var(D_{\sigma}^{MVD}) &= \frac{1}{\sigma^2}[Var(L(X^+)) - Var(L(X^-))] \\ &= \mathbb{E}[L^2(X^+)] - \mathbb{E}[L^2(X)] - (\mathbb{E}^2[L(X^+)] - \mathbb{E}^2[L(X)]) \end{aligned} \quad (13.3)$$

برای برآوردگرهای عملکرد نمایی و چندجمله‌ای داریم:

$$Var(D_{\sigma}^{MVD, 1}) = \frac{1}{\sigma^2}(\mathbb{E}[e^{2\alpha\sigma Z^+}] - \mathbb{E}^2[e^{\alpha\sigma Z^+}] + \mathbb{E}[e^{2\alpha\sigma Z}] - \mathbb{E}^2[e^{\alpha\sigma Z}]) \quad (14.3)$$

$$Var(D_{\sigma}^{MVD, 2}) = \sigma^{2p-2}(\mathbb{E}[(Z^+)^{2p}] - \mathbb{E}^2[(Z^+)^p] + \mathbb{E}[Z^{2p}] - \mathbb{E}^2[Z^p]) \quad (15.3)$$

### ۳.۳ برآوردگر فانتوم جفت شده

برآوردگر فانتوم جفت شده<sup>۴</sup> (CP) توسط هیدرگات، وزکیوز-آباد و ولک-میکروویکز<sup>۵</sup> (۲۰۰۷) به دست آمده است. آنها از رابطه بین متغیر تصادفی نرمال  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  با متغیر تصادفی ماکس ول دوگانه  $X^+ \sim DM(\mu, \sigma^2)$  برای برآوردگر مشتق اندازه مقدار بهره گرفتند. این رابطه بین متغیرهای تصادفی نرمال و ماکس ول دوگانه با عبارت  $X^+ \sim UX$  داده شده که  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$  متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت روی  $[0, 1]$  و مستقل از  $X$  می باشد و به صورت دقیق تر این نتیجه را در لم زیر بیان می کنیم.

<sup>۴</sup>coupled phantom

<sup>۵</sup>Volk-Makarewicz

لم ۱.۳.۳. یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  می‌تواند به صورت ضرب یک متغیر تصادفی ماکسول دوگانه  $Z^+ \sim DM(0, 1)$  در یک متغیر تصادفی یکنواخت روی  $(0, 1)$  بیان شود به عبارت دیگر

$$Z \stackrel{d}{=} UZ^+$$

که  $Z^+, U$  مستقلند.

برهان. تابع توزیع تجمعی  $Z$  عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z^+U \leq z) &= F_{Z^+U}(z) = \int_0^1 \mathbb{P}(Z^+U \leq z; U = u) \mathbb{P}(U \in du) \\ &= \int_0^1 \mathbb{P}(Z^+ \leq \frac{z}{u}) f_U(u) du \\ &= \int_0^1 F_{Z^+}(\frac{z}{u}) du \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} f_{Z^+U}(z) &= \frac{d}{dz} F_{Z^+U}(z) = \int_{[0,1]} \frac{1}{u} f_{Z^+}(\frac{z}{u}) du \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} \left(\frac{z}{u}\right)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{u}\right)^2} du \end{aligned}$$

حال با استفاده از تغییر متغیر  $v = -\frac{1}{2}\left(\frac{z}{u}\right)^2$  داریم

$$\begin{aligned} f_{Z^+U}(z) &= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}z^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^v dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \end{aligned}$$

□

که تابع چگالی  $Z$  می‌باشد.

با استفاده از این طرح و روش مشتق اندازه مقدار یک برآورد واریانس برای برآوردگر MVD

با تابع عملکرد  $L(x; \sigma)$  به صورت زیر بدست می‌آید

$$\text{Var}(D_\sigma^{CP}) = \frac{1}{\sigma} [\text{Var}(L(X^+)) + \text{Var}(L(X)) - 2\text{Cov}(L(X^+), L(X))]$$

این طرح متغیرهای تصادفی همبسته مثبت تولید می‌کند. دلیل آن این است که

$$Cov(X^p, (X^+)^p) = \mathbb{E}[U^p]Var((X^+)^p) > 0$$

در نتیجه واریانس برآوردگر فانتوم جفت شده واریانسی کمتر از برآوردگر MVD خواهد داشت. برای توابع عملکرد نمایی و چندجمله‌ای به ترتیب با متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  واریانس برآوردگر مشتق CP به صورت زیر محاسبه شده است:

$$Var(D_{\sigma}^{CP,1}) = \frac{1}{\sigma^2} \{ \mathbb{E}[e^{\alpha\sigma Z^+}] - \mathbb{E}^2[e^{\alpha\sigma Z}] + \mathbb{E}[e^{\alpha\sigma Z}] - \mathbb{E}^2[e^{\alpha\sigma Z}] \\ - 2(\mathbb{E}[e^{\alpha\sigma Z^{+(1+U)}}] - \mathbb{E}[e^{\alpha\sigma Z^+}]\mathbb{E}[e^{\alpha\sigma Z}]) \}$$

$$Var(D_{\sigma}^{CP,2}) = \sigma^{2p-2} \{ \mathbb{E}[(Z^+)^{2p}] - \mathbb{E}^2[(Z^+)^p] + \mathbb{E}[Z^{2p}] - \mathbb{E}^2[Z^p] \\ - 2(\mathbb{E}[U^p](\mathbb{E}[(Z^+)^{2p}] - \mathbb{E}^2[(Z^+)^p]) \}$$

متغیر تصادفی ماکسول دو گانه  $DM(0, 1)$  با استفاده از روش رد-پذیرش<sup>۶</sup> شبیه سازی شده است. این عمل با استفاده از یک متغیر تصادفی با توزیع وایبل با پارامترهای  $\alpha = 2, \beta = 1/2$  انجام شده است. تولید یک متغیر تصادفی با توزیع وایبل می‌تواند بوسیله روش تبدیل معکوس  $Y = (-4 \ln U)^{1/2}$  بدست آید. برای آگاهی بیشتر در خصوص روش رد و پذیرش [۱۳] را ببینید. به عنوان نتیجه واریانس برآوردگرها در مورد تابع عملکرد نمایی  $L_1(x) = e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}$  در زیر آمده است. در محاسبه امید ریاضی برای یک متغیر تصادفی با توزیع ماکسول دوطرفه و تابع آزمون  $g(z)$  از عبارت  $\mathbb{E}[g(Z^+)] = \mathbb{E}[Z^2 g(Z)]$  استفاده شده است. به ازای مقادیر  $k = \{0, 1, \dots, 4\}$  واریانس برآوردگرهای مشتق برای هر سه روش به صورت دستی قابل محاسبه می‌باشند.

محاسبه عبارت  $\mathbb{E}[Z^k e^{tZ}], k = \{0, 1, \dots, 4\}$  با مشتق گیری مکرر از تابع مولد احتمال  $Z$ ، به صورت  $\mathbb{E}[e^{tZ}] = e^{\frac{1}{2}t^2}$  نتیجه می‌شود و سپس مقدار مناسب برای  $t$  را جایگذاری می‌کنیم.

<sup>۶</sup> acceptance-rejection method

جدول ۱.۳: واریانس برآوردگرها برای تابع نمایی

واریانس	برآوردگر
$\alpha^2[(4\alpha^2\sigma^2 + 1)e^{2\alpha^2\sigma^2} - \alpha^2\sigma^2 e^{\alpha^2\sigma^2}]$	IPA
$\frac{1}{\sigma^2}[(16\alpha^4\sigma^4 + 16\alpha^2\sigma^2 + 2)e^{2\alpha^2\sigma^2} - \alpha^4\sigma^4 e^{\alpha^2\sigma^2}]$	SF
$\frac{1}{\sigma^2}[(2 + 4\alpha^2\sigma^2)e^{2\alpha^2\sigma^2} - (2 + 2\alpha^2\sigma^2 + \alpha^4\sigma^4)e^{\alpha^2\sigma^2}]$	MVD
$\frac{1}{\sigma^2}[(4\alpha^2\sigma^2 - 2)e^{2\alpha^2\sigma^2} - \alpha^4\sigma^4 e^{\alpha^2\sigma^2} + 2e^{\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2}]$	CP

محاسبه  $Cov(e^{tZ^+}, e^{tZ})$  ساده نیست که در آخر این زیربخش آمده است. نتیجه کلی این که  $Cov(e^{tZ^+}, e^{tZ}) > 0$  در لم ۲.۳.۳ اثبات شده است. جدول ۱.۳ واریانس برآوردگرهای مشتق برای تابع عملکرد نمایی را ارائه می‌دهد.

همان طور که مشاهده می‌شود واریانس برآوردگرها تنها به حاصل ضرب  $\alpha^2\sigma^2$  وابسته‌اند و به هر عبارتی که تنها شامل  $\alpha$  یا  $\sigma$  باشد بویژه عباراتی به شکل  $\alpha^k$ ،  $k$  فرد که یک حاصل منفی برای  $\alpha < 0$  ارائه می‌دهد مربوط نیست. وابستگی واریانس به عامل  $\alpha^2\sigma^2$  به خاطر متقارن بودن توزیع نرمال حول صفر می‌باشد به عبارت دیگر  $e^{|\alpha|X} \sim e^{-|\alpha|X}$ .

با ضرب کردن واریانس برآوردگرهای مشتق در  $\sigma^2$ ، قسمت منفی واریانس برآوردگرهای IPA، SF و CP یکسان می‌باشد. IPA یک مولفه مثبت کوچکتر از روش تابع امتیاز دارد. مشابه واریانس MVD یک مولفه مثبت کوچکتر و مولفه منفی بزرگتر از برآوردگر SF برای متغیر تصادفی  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  دارد. روابط بین واریانس برآوردگرهای مشتق IPA، SF و CP روشن نیست. روابط ترتیبی بین چهار برآوردگر در لم ۳.۳.۳ داده شده است.

لم ۲.۳.۳

$$Cov(e^{tZ^+}, e^{tZ}) > 0$$

برهان. این نتیجه در لم ۳.۳.۳ برای نشان دادن  $Var(D^{CP}) \leq Var(D^{MVD})$  استفاده شده بود. با توجه به این که  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ،  $Z^+ \sim \mathcal{DM}(0, 1)$  و  $Z = UZ^+$  که  $U \sim U(0, 1)$  مستقل از

$Z^+$  می‌باشد. داریم

$$\text{Cov}(e^{tZ^+}, e^{tZ}) = \mathbb{E}[e^{t(Z^++Z)}] - \mathbb{E}[e^{tZ^+}]\mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{tZ^+(1+U)}] - \mathbb{E}[Z^\gamma e^{tZ}]\mathbb{E}[e^{tZ}]$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{tZ^+(1+U)}] &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(e^{tZ^+(1+U)} | Z^+ = x) f_{Z^+} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\gamma tx} - e^{tx}}{tx} f_{Z^+} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{\gamma} \pi t} [e^{-\frac{1}{\gamma}(x^\gamma - \gamma tx + \gamma t^\gamma - \gamma t^\gamma)} - e^{-\frac{1}{\gamma}(x^\gamma - \gamma tx + \gamma t^\gamma - t^\gamma)}] dx \\ &= e^{\gamma t^\gamma} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{\gamma} \pi t} e^{-\frac{1}{\gamma}(x - \gamma t)^\gamma} dx - e^{\frac{1}{\gamma} t^\gamma} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{\gamma} \pi t} e^{-\frac{1}{\gamma}(x - t)^\gamma} dx \\ &= e^{\gamma t^\gamma} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma t}{\sqrt{\gamma} \pi t} e^{-\frac{1}{\gamma}(x - \gamma t)^\gamma} dx - e^{\frac{1}{\gamma} t^\gamma} \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{\sqrt{\gamma} \pi t} e^{-\frac{1}{\gamma}(x - t)^\gamma} dx \\ &= \gamma e^{\gamma t^\gamma} - e^{\frac{1}{\gamma} t^\gamma} \end{aligned}$$

سطر دوم با توجه به استقلال و این که  $\mathbb{E}[Z^+] = 0$  به صورت زیر محاسبه شده است

$$\mathbb{E}[e^{tZ^+(1+U)} | Z^+ = x] = e^{tx} \mathbb{E}[e^{txU}] = e^{tx} \int_{[0,1]} e^{txu} du = \frac{e^{\gamma tx} - e^{tx}}{tx}$$

در نتیجه

$$\text{Cov}(e^{tZ^+}, e^{tZ}) = \gamma e^{\gamma t^\gamma} - e^{\frac{1}{\gamma} t^\gamma} - (1 + t^\gamma) e^{t^\gamma}$$

حال با استفاده از بسط سری تیلور  $e^{t^\gamma}$  داریم

$$\begin{aligned} \text{Cov}(e^{tZ^+}, e^{tZ}) &= \gamma e^{t^\gamma} - e^{\frac{1}{\gamma} t^\gamma} - (1 + t^\gamma) e^{t^\gamma} \geq \gamma e^{\gamma t^\gamma} - (\gamma + t^\gamma) e^{t^\gamma} \\ &= \gamma e^{t^\gamma} [e^{t^\gamma} - (1 - \frac{t^\gamma}{\gamma})] \geq t^\gamma e^{t^\gamma} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

و برهان کامل است.

لم ۳.۳.۳. فرض کنید  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  و  $g(x) = e^{\alpha x}$ . روابط ترتیبی زیر برای واریانس برآوردگرهای مشتق بدست می آید.

$$(۱) : \text{Var}(D^{CP}) \leq \text{Var}(D^{IPA}) \leq \text{Var}(D^{SF})$$

$$(۲) : \text{Var}(D^{CP}) \leq \text{Var}(D^{MVD}) \leq \text{Var}(D^{SF})$$

برهان. ابتدا فرض می کنیم  $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

۱. با توجه به مقادیر بدست آمده در جدول ۱.۳ داریم

$$\begin{aligned} \sigma^2 (\text{Var}(D^{IPA}) - \text{Var}(D^{CP})) &= (4\alpha^4 \sigma^4 - 3\alpha^2 \sigma^2 + 2)e^{2\alpha^2 \sigma^2} - 2e^{\frac{1}{2}\alpha^2 \sigma^2} \\ &:= (4u^2 - 3u + 2)e^{2u} - 2e^{\frac{1}{2}u} \end{aligned}$$

حال با استفاده از بسط تیلور  $h(x) = e^x$  می توان نوشت

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}u} \sigma^2 (\text{Var}(D^{IPA}) - \text{Var}(D^{CP})) &= ((4u^2 - 3u + 2)e^{\frac{1}{2}u} - 2) \\ &\geq ((4u^2 - 3u + 2)(1 + \frac{3}{2}u + \frac{9}{8}u^2) - 2) \\ &= \frac{9}{2}u^4 + \frac{21}{8}u^3 + \frac{7}{4}u^2 \geq 0. \end{aligned}$$

در نتیجه  $\text{Var}(D^{CP}) \leq \text{Var}(D^{IPA})$ .

با استدلال مشابه داریم  $\text{Var}(D^{IPA}) \leq \text{Var}(D^{SF})$ .

۲. با توجه به اینکه  $\text{Cov}(e^{tZ^+}, e^{tZ}) > 0$  بدیهی است  $\text{Var}(D^{CP}) \leq \text{Var}(D^{MVD})$ .

بعلاوه با همان روش قبل نتیجه می شود که  $\text{Var}(D^{MVD}) \leq \text{Var}(D^{SF})$ .

در مورد  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  واریانس برآوردگرهای مشتق برای تابع  $g(x) = e^{\alpha x}$  عبارتست از

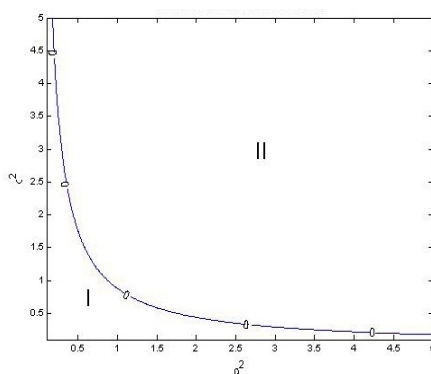
$$\mathbb{E}[Z^k e^{\alpha(\mu + \sigma Z)}] = e^{\alpha\mu} \mathbb{E}[Z^k e^{\alpha\sigma Z}]$$

و به طور مشابه

$$\mathbb{E}^2[Z^k e^{\alpha X}] = e^{2\alpha\mu} \mathbb{E}[Z^k e^{\alpha\sigma Z}]$$

. به عبارت دیگر میانگین غیرصفر، واریانس هر برآوردگر مشتق را با عامل  $e^{2\alpha\mu}$  وزن دار می کند و روابط ترتیبی حفظ می شود. □

هرچند هیچ رابطه ترتیبی بین واریانس برآوردگرهای IPA و MVD وجود ندارد، شکل زیر تفاضل واریانس مربوط به دو برآوردگر را برای انتخاب های متفاوت  $(\alpha^2, \sigma^2)$  نشان می دهد.



شکل ۱.۳: تفاضل واریانس IPA و MVD

قسمت I شکل ۱.۳ ناحیه ای را که برآوردگر مشتق IPA واریانس کمتری دارد را نشان می دهد و در قسمت II برآوردگر MVD واریانس کمتری برای تابع عملکرد نمایی تک متغیره دارد. منحنی، مکان نقاطی را که هر دو برآوردگر واریانس یکسانی دارند را مشخص می کند.

## ۴.۳ رابطه ی بین تابع عملکرد و رفتار برآوردگرها\*\*

در این قسمت رابطه ای کلی را برای توابع عملکرد بدست می آوریم که شرط کافی برای مشخص کردن برتری برآوردگری نسبت به دیگری می باشد. در این صورت می توان بدون محاسبه ی واریانس برآوردگرها و تنها با بررسی برقراری رابطه ی ارزیابی شده به مقایسه ی آنها پرداخت. این روابط به

صورت دو قضیه در زیر بیان شده است.

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنید  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . اگر به ازای هر تابع اندازه‌پذیر بول  $g$  داشته باشیم

$$2\sigma^2 g^{(4)}(X)g(X) + 4\sigma^2 g^{(3)}(X)g'(X) + 8g''(X)g(X) > 0 \quad (16.3)$$

آنگاه برآوردگر  $IPA$  واریانسی کمتر از برآوردگر  $SF$  دارد.

برهان. با تکرار لم استاین ۱۳.۳.۱ و با استفاده از رابطه‌ی (۸.۳) داریم

$$\begin{aligned} \text{Var}(D^{(SF)}[g(X)]) &= \frac{2}{\sigma^2} \mathbb{E}[g^2(\sigma Z)] + \frac{6}{\sigma} \mathbb{E}[Zg'(\sigma Z)g(\sigma Z)] \\ &\quad + 2\mathbb{E}[Z^2 g''(x)g(x)] + 2\mathbb{E}[Z^2 g'^2(\sigma Z)] \\ &\quad + \frac{2}{\sigma^2} \mathbb{E}^2[g(\sigma Z)] - \mathbb{E}^2[Zg'(\sigma Z)] \end{aligned}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی (۵.۳) می‌توان نتیجه گرفت

$$\text{Var}(SF) - \text{Var}(IPA) =$$

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\sigma^2} \mathbb{E}[g^2(\sigma Z)] + \frac{2}{\sigma^2} \mathbb{E}^2[g(\sigma Z)] \mathbb{E}[Z^2 g'^2(\sigma Z)] + 6\mathbb{E}[g'^2(\sigma Z)] + 2\sigma^2 \mathbb{E}[g''^2(\sigma Z)] \\ &+ 2\sigma^2 \mathbb{E}[g^{(4)}(\sigma Z)g(\sigma Z)] + 4\sigma^2 \mathbb{E}[g^{(3)}(\sigma Z)g'(\sigma Z)] + 8\mathbb{E}[g''(\sigma Z)g(\sigma Z)] \end{aligned}$$

عبارت فوق در صورتی مثبت است که داشته باشیم

$$2\sigma^2 \mathbb{E}[g^{(4)}(\sigma Z)g(\sigma Z)] + 4\sigma^2 \mathbb{E}[g^{(3)}(\sigma Z)g'(\sigma Z)] + 8\mathbb{E}[g''(\sigma Z)g(\sigma Z)] > 0 \quad (17.3)$$

□ بدیهی است اگر (۱۶.۳) برقرار باشد، عبارت بالا نتیجه می‌شود.

قضیه ۲.۴.۳. اگر  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  و به ازای هر تابع اندازه‌پذیر  $g$  داشته باشیم

$$\frac{1 + \sigma^2}{\sigma^2} g^2(x) + (1 - 2\sigma)g'(x) + (1 - 2\sigma)g(x)g''(x) < 0 \quad (18.3)$$

آنگاه  $\text{Var}(D^{IPA}) > \text{Var}(D^{MVD})$ .

□ برهان. مشابه اثبات قضیه ۱.۴.۳ می‌باشد.



### ۵.۳ برآوردگر ترکیبی دومرحله‌ای<sup>۷</sup>\*\*

در این قسمت برآوردگری را معرفی می‌کنیم که با استفاده از ترکیبی از روش بدست آوردن دو برآوردگر SF و MVD به دست می‌آید. بدین صورت که ابتدا عبارت داخل انتگرال در  $\sigma^2$  ضرب و تقسیم شده است سپس با استفاده از قاعده مشتق گیری ضرب دو تابع مشتق گیری انجام شده است و همچنین به جای مشتق یکی از توابع از تابع امتیاز آن استفاده شده است. در زیر چگونگی محاسبات آن آمده است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \int g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int g(x) \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) dx \quad (19.3) \\ &= \int g(x) \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sigma^2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \times \frac{1}{\sigma^2} \right) dx \end{aligned}$$

که می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sigma^2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \times \frac{1}{\sigma^2} \right) \\ &= 2\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \times \frac{1}{\sigma^2} + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) \\ &= 2\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \sigma^2 \left( \frac{-3}{\sigma} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left( \frac{-\sigma}{(x-\mu)^2} + \frac{1}{\sigma} \right) \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left( \frac{-\sigma}{(x-\mu)^2} + \frac{1}{\sigma} \right) \mathbf{m}_{\mu,\sigma} \end{aligned}$$

که در آن  $\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) \right\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( -3 \ln \sigma - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left( \frac{-3}{\sigma} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

<sup>۷</sup>Mixed Two-Stage

جدول ۲.۳: واریانس برآوردگرها برای تابع  $y^p$  با مقادیر فرد  $p$

واریانس	برآوردگر
$\sigma^{2p-2} p^2 (2p-1)!!$	IPA
$\sigma^{2p-2} [(2p+1)^2 + 1] (2p-1)!!$	SF
$\sigma^{2p-2} (2p+2)(2p-1)!!$	MVD
$\sigma^{2p-2} \frac{2p^2}{p+1} (2p-1)!!$	CP
$\sigma^{2p-2} (2p-3)!! (4p^2 - 4p + 2)$	SM

جدول ۳.۳: واریانس برآوردگرها برای تابع  $y^p$  با  $p$  زوج

واریانس	برآوردگر
$\sigma^{2p-2} [p^2 (2p-1)!! - p^2 [(p-1)!!]^2]$	IPA
$\sigma^{2p-2} [((2p+1)^2 + 1)(2p-1)!! - P^2 [(P-1)!!]^2]$	SF
$\sigma^{2p-2} [((2p+2)(2p-1)!! - [(P+1)^2 + 1][(P-1)!!]^2)]$	MVD
$\sigma^{2p-2} [\frac{2p^2}{p+1} (2p-1)!! - P^2 [(P-1)!!]^2]$	CP
$\sigma^{2P-2} ((2P-3)!! (4P^2 - 4P + 2) - (P-1)!!)^2 P^2$	SM

حال اگر  $\mu = 0$  برآوردگر حاصل به صورت زیر می‌باشد:

$$D_{\sigma}^{sm} := \frac{1}{\sigma} L(Z^+) \left[ 1 - \frac{1}{Z^{+2}} \right] \quad (20.3)$$

واریانس برآوردگر SM عبارتست از

$$\begin{aligned} \text{Var}(D_{\sigma}^{sm}) &= \text{Var}\left(\frac{1}{\sigma} \left[ 1 - \frac{1}{Z^{+2}} \right] g(\sigma Z^{+2})\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{1}{Z^{+2}}\right)^2 g^2(\sigma Z^{+2})\right) - \mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{1}{Z^{+2}}\right) g(\sigma Z^{+2})\right)^2 \end{aligned} \quad (21.3)$$

حال به عنوان نمونه، واریانس برآوردگرها برای تابع عملکرد  $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$   $L_2(y) = y^p, p \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

مقایسه شده است. که نتایج به ازای مقادیر فرد و زوج  $p$  در دو جدول جداگانه ۲.۳ و ۳.۳ آورده شده است.

جدول ۴.۳: محاسبه واریانس برای تابع  $y^p$  به ازای  $p = 1, \dots, 4$

IPA	SF	MVD	SM	CP	p
۱	۱	۱۰	۴	۲	۱
$۸\sigma^2$	$۷۴\sigma^2$	$۸\sigma^2$	$۶\sigma^2$	$۴\sigma^2$	۲
$۱۳۵\sigma^4$	$۷۵۰\sigma^4$	$۱۲۰\sigma^4$	$۷۸\sigma^4$	$۶۷/۵\sigma^4$	۳
$۱۵۳۶\sigma^6$	$۸۴۶۶\sigma^6$	$۸۱۶\sigma^6$	$۶۰۶\sigma^2$	$۵۲۸\sigma^6$	۴

نتایج با توجه به رابطه‌ی

$$\mathbb{E}[Z^k] = \begin{cases} (k-1)!! & , \text{زوج } k \\ 0 & , \text{فرد } k \end{cases} \quad (۲۲.۳)$$

تعیین شده‌اند. تابع  $h(p) = (p)!!$  تابع فاکتوریل دوگانه می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(p)!! = p.(p-2).\dots.3.1.$$

$$(-1)!! = (0)!! = 1.$$

جدول ۴.۳ یک محاسبه عددی برای واریانس برآوردگرهای مشتق به ازای  $p = 1, \dots, 4$  ارائه می‌دهد.

از نتایج جدول روشن است که برای  $p \geq 0$  برآوردگر مشتق فانتوم جفت شده کمترین واریانس را دارد، در حالیکه روش تابع امتیاز بیشترین واریانس را دارا می‌باشد. یک رابطه ترتیبی بین واریانس برآوردگرها در لم زیر ارائه شده‌است.

لم ۱.۵.۳. برای تابع  $g(x) = x^p, p \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  با  $p \geq 2$  رابطه ترتیبی زیر برای واریانس برآوردگرهای مشتق بدست می‌آید.

$$\text{Var}(D^{CP}) \leq \text{Var}(D^{SM}) \leq \text{Var}(D^{MVD}) \leq \text{Var}(D^{IPA}) \leq \text{Var}(D^{SF})$$

برای  $p = 0, 1$  ترتیب‌ها بدین صورت می‌باشد

$$\text{Var}(D^{CP}) < \text{Var}(D^{IPA}) < \text{Var}(D^{SM}) < \text{Var}(D^{MVD}) < \text{Var}(D^{SF})$$

برهان. برای  $p = 0, 1$  نتایج در جدول آمده است. حال مورد  $p \geq 2$  را بررسی می‌نماییم. بقیه اثبات با تفریق واریانس برآوردگرهای مشتق و ساده‌سازی عبارت حاصل انجام می‌شود. در زیر تنها گام‌های اساسی‌تر آمده است.

۱. از آنجایی که

$$\begin{aligned} Cov(X^p, X^{+p}) &= Cov(U^p X^{+p}, X^{+p}) = \mathbb{E}[U^p] Var(X^{+p}) \\ &= \frac{1}{p+1} Var(X^{+p}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

که  $U$  متغیر تصادفی یکنواخت روی  $[0, 1]$  می‌باشد. و با توجه به تعریف برآوردگر مشتق فانتوم جفت شده، داریم  $Var(D^{CP}) \leq Var(D^{MVD})$ .

۲. از آنجایی که برای  $p \geq 2$  داریم

$$\sigma^{2-2p} [Var(D^{MVD}) - Var(D^{SM})] = (2p-3)!!(6p-4) \geq 0$$

در نتیجه  $Var(D^{sm}) \leq Var(D^{MVD})$ .

۳. حال برای اثبات  $Var(D^{MVD}) \leq Var(D^{IPA})$  تفاضل واریانس‌ها را در دو حالت  $p$  فرد و

زوج جداگانه محاسبه کرده و نشان می‌دهیم که عبارت حاصل مثبت است.

برای مقادیر فرد  $p > 2$ :

$$\begin{aligned} \sigma^{2-2p} (Var(D^{IPA}) - Var(D^{WD})) &= (2p-1)!! [p^2 - 2(p+1)] \\ &= [(p-1)^2 - 3](2p-1)!! \geq 0 \end{aligned}$$

برای مقادیر زوج  $p > ۲$  :

$$\begin{aligned} & \sigma^{2-2p}(Var(D^{IPA}) - Var(D^{WD})) \\ &= ((p+1)^2 - 3)(2p-1)!! - (p^2 - (p+1)^2 - 1)[(p-1)!!]^2 \\ &= [(p-1)^2 - 3](2p-1)!! + 2(p+1)[(p-1)!!]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

۴. از آنجایی که برآوردگر مشتق SF و IPA مولفه‌های منفی یکسان دارند. در نتیجه

$$\begin{aligned} \sigma^{2-2p}(Var(D^{SF}) - Var(D^{IPA})) &\geq [(2p+1)^2 + 1 - p^2](2p-1)!! \\ &= (3p^2 + 4p + 2)(2p-1)!! > 0 \end{aligned}$$

بنابراین  $Var(D^{IPA}) \leq Var(D^{SF})$ .

□

## ۶.۳ مثال‌های کاربردی

در این قسمت دو مثال کاربردی را در خصوص مطالب ارایه شده در فوق می‌آوریم.

### ۱.۶.۳ شبکه‌ی فعال تصادفی

یک شبکه‌ی فعال تصادفی گراف جهت‌داری است، که یک پروژه یا خط تولید را مدل‌بندی می‌کند. کمان‌ها مقادیر نامنفی دارند (زمان کامل سازی برای هر فعالیت). در مورد یک طرح یا خط تولید مفروض که تاثیرات مربوط، تصادفی هستند می‌توان مدل فرآیندهایی که تصادفی هستند را بررسی کرد و با تعمیم، مدل را به عنوان یک شبکه‌ی فعال تصادفی (SAN) مشخص کرد. به طور مثال یک SAN می‌تواند دنباله‌ای از گام‌های تولید در کارخانه‌ی ماشین برای تولید یک موتور یا قرارداد بستن با شرکت دیگر باشد. علاوه بر این تحلیل حساسیت پارامترها، به منظور مشاهده‌ی تاثیر روی

زمان کامل سازی و اینکه کدام مسیرها مسیر بحرانی می شوند دارای اهمیت است. زمان کامل سازی، زمان لازم برای رسیدن شبکه فعال تصادفی به گره آخر می باشد. مسیر با طولانی ترین مقدار زمانی، مسیر بحرانی نامیده می شود.

در این بخش روشهای برآورد مشتق برای تحلیل حساسیت دو گشتاور اول زمان کامل سازی،  $\mathbb{E}[\tau]$  و  $\mathbb{E}[\tau^2]$  نسبت به انحراف استاندارد به کار برده شده اند. در [۶] این کار برای تحلیل حساسیت شبکه‌ی تصادفی نسبت به میانگین زمان کامل سازی هر کمان انجام شده است.

شبکه فعال تصادفی مورد نظر شامل هفت کمان

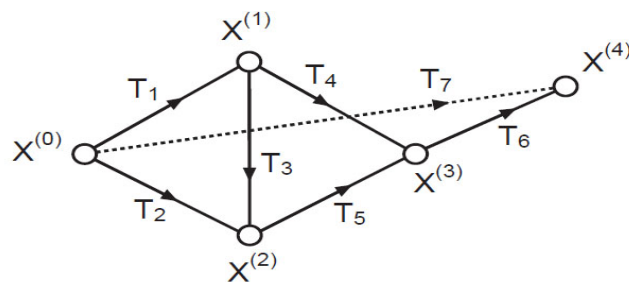
$$\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_7)$$

می باشد، که ۴ گره

$$X = (X^{(0)}, \dots, X^{(4)})$$

را به صورت شکل ۲.۳ به هم متصل کرده است.  $\mathbf{T}$  زمان کامل سازی برای هر فعالیت را نشان می دهد.  $X^{(0)}$  گره شروع و  $X^{(4)}$  گره آخر می باشد. کمان های  $T_1, \dots, T_6$  متغیرهای تصادفی نرمال با میانگین  $t_i < \infty$  و واریانس  $\sigma^2 < \infty$  می باشند، به عبارت دیگر  $T_i \sim \mathcal{N}(t_i, \sigma^2)$ . کمان خط چین  $T_7$  دارای مقدار معلوم  $t_7 > 0$  است.

$\tau$  نیز زمان لازم برای کامل شدن شبکه با گره آخر می باشد.



شکل ۲.۳: نمودار شبکه‌ی فعال تصادفی

برای تحلیل شبکه‌ی فعال تصادفی دو مورد بررسی شده‌اند:

۱. فقط شامل فعالیت‌های تصادفی که در شبکه حاضرند می‌باشد (SANs).

۲. شبکه‌ی کامل، شامل ارتباط قطعی می‌باشد (SAND).

با توجه به شکل، برآوردگر عملکرد برای مورد ۱ بدین صورت می‌باشد:

$$\tau_1 = \max(T_1 + T_4, T_1 + T_3 + T_5, T_2 + T_5) + T_6 \quad (23.3)$$

و برآوردگر عملکرد برای شبکه‌ی کامل به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \tau_2 &:= \max(\tau_1, T_7) \\ &= \max(\max(T_1 + T_4, T_1 + T_3 + T_5, T_2 + T_5) + T_6, T_7) \end{aligned} \quad (24.3)$$

در این مثال SANs زمان کامل‌سازی برای موتور را ارایه می‌دهد. SAND با فرض اینکه هزینه‌ی محاسبات یکسان باشد تصمیم برای اینکه کارخانه‌ی ماشین، خود موتور را تولید کند یا برای تولید با شرکت دیگری قرارداد ببندد را ارایه می‌دهد.

انتخاب متغیرهای تصادفی نرمال، امکان یک زمان منفی روی کمانی مفروض را بوجود می‌آورد. در صورتی که زمان‌های کامل‌سازی مثبت هستند و اما اگر طراح، زمان کامل‌سازی برای یک فعالیت مفروض برای ساخت موتور را مشاهده کند، زمان تکمیل می‌تواند بنا به قضیه حد مرکزی با یک توزیع نرمال تقریب زده شود.

### برآورد مشتق

از آنجایی که برآوردگر عملکرد، یک تابع از زمان‌های کامل‌سازی که مستقلند می‌باشد، برای هر دو شبکه‌ی فعال تصادفی، تابع چگالی حاصل ضرب ۶ متغیر تصادفی نرمال است، که به صورت زیر بدست می‌آید.

$$f_{\tau(\sigma)}(\mathbf{T}_t) = \prod_{i=1}^6 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(t - t_i)^2}{\sigma^2}\right) \quad (25.3)$$

## تحلیل آشفته‌گی بینهایت کوچک (IPA)

لازم به ذکر است در مورد SAN،  $\tau_1$  از بالا کراندار به تابع

$$K_1 := 2(T_1 + T_5) + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6$$

می‌باشد.

از طرفی فرض کنید  $T_i = t_i + \sigma Z$  و بعلاوه مسیرهای زیر مفروض هستند

$$\pi_1 = (1, 4), \quad \pi_2 = (1, 3, 5), \quad \pi_3 = (2, 5)$$

در نهایت  $a$  به عنوان اندیس مسیر بحرانی است، بنابراین برآوردگر IPA به صورت زیر محاسبه

می‌شود.

$$D_\sigma^{IPA}(\tau_1) = Z_6 + \begin{cases} Z_1 + Z_4 & ; a = 1 \\ Z_1 + Z_3 + Z_5 & ; a = 2 \\ Z_2 + Z_5 & ; a = 3 \end{cases} \quad (26.3)$$

برای شبکه‌ی کامل،  $\tau_2$  از بالا دارای کران

$$K_2 := \max(K_1, T_7)$$

است. علاوه بر این  $\tau_2$  پیوسته‌ی لیپ شیتس می‌باشد. همچنین فرض کنید

$$\pi_1 = (1, 4, 6), \quad \pi_2 = (1, 3, 5, 6), \quad \pi_3 = (2, 5, 6), \quad \pi_4 = (7)$$

برآوردگر مشتق IPA برای SAND به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$D_\sigma^{IPA}(\tau_2) = \begin{cases} Z_1 + Z_4 + Z_6 & ; a = 1 \\ Z_1 + Z_3 + Z_5 + Z_6 & ; a = 2 \\ Z_2 + Z_5 + Z_6 & ; a = 3 \\ 0 & ; a = 4 \end{cases} \quad (27.3)$$

## تابع امتیاز (SF)

از آنجایی که  $\tau_1$  و  $\tau_2$  پیوسته و کراندار می‌باشند و  $f_{\tau(\sigma)}$  نسبت به  $\sigma$  مشتق‌پذیر است، روش SF می‌تواند به کار رود. با توجه با اینکه لگاریتم حاصل ضرب چگالی‌ها مجموع لگاریتم توابع چگالی



است، برآوردگر مشتق SF برای شبکه‌ی تصادفی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$D_{\sigma}^{SF}(\tau_1) = \tau_1 \sum_{i=1}^6 \frac{Z_i^2 - 1}{\sigma} \quad (28.3)$$

برآوردگر مشتق SF برای SANd به طور مشابه بدست می‌آید.

### برآوردگر مشتق اندازه مقدار (MVD)

شرایطی که در مورد برآوردگر مشتق SF صدق می‌کند در مورد برآوردگر MVD نیز صادق است ( $L^1$ )

- مشتق‌پذیری چگالی رادون-نیکودیم، مشتق‌پذیری ضعیف اندازه احتمال را نتیجه می‌دهد). با

تعریف  $T_i^{(k)}$  به صورت

$$T_i^{(k)} := \begin{cases} T_i^+ & ; i = k \\ T_i & ; i \neq k \end{cases} \quad (29.3)$$

و با استفاده از تعریف این برآوردگر در مورد یک بعدی، برآوردگر MVD برای شبکه‌ی تصادفی

عبارتست از

$$D_{\sigma}^{MVD} = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{\sigma} [(max(T_1^{(k)} + T_4^{(k)}, T_1^{(k)} + T_3^{(k)} + T_5^{(k)}) + T_6^{(k)} - (max(T_1 + T_4, T_1 + T_3 + T_5) + T_6)] \quad (30.3)$$

در مورد شبکه‌ی فعال تصادفی کامل، برآوردگر MVD به طور مشابه بدست می‌آید.

### تحلیل نتایج

فرض کنید  $\sigma = 1$  و  $(t_1, \dots, t_6) = (6, 8, 5, 8, 4, 7)$ . دو سری شبیه‌سازی مونت کارلو انجام

شده است: یک شبیه‌سازی کوچک شامل  $N = 10^3$  و یک شبیه‌سازی بزرگتر شامل  $N = 10^5$

برای تعیین برآوردهای  $\mathbb{E} \frac{d\tau}{d\sigma}$  و  $\mathbb{E} \frac{d\tau^2}{d\sigma}$ .

برآوردهای مشتق برای روشهای بالا با استفاده از نرم‌افزار Matlab بدست آمده‌اند. کدهای

مربوطه در بخش ضمیمه آورده شده‌اند. برای تعیین  $Var \frac{d\tau}{d\sigma}$  و  $Var \frac{d\tau^2}{d\sigma}$  شبیه‌سازی وقتی  $N = 10^3$ ،

$M = 50$  بار تکرار شده است و  $M = 100$  تکرار برای  $N = 10^5$  می‌باشد که قضیه‌ی حد مرکزی

جدول ۵.۳: نتایج برای SANs با  $N = 10^3$  چرخه

MVD	SF	IPA	برآوردگر
$(6/8327 \pm 1/1101) \times 10^{-1}$	$(0/0478 \pm 4/8689) \times 10^0$	$(6/8552 \pm 1/1103) \times 10^{-1}$	$\mathbb{E} \frac{d\tau_1}{d\sigma}$
$(3/2115 \pm 0/0092) \times 10^0$	$(6/3579 \pm 0/0264) \times 10^3$	$(3/0729 \pm 0/0079) \times 10^0$	$Var \frac{d\tau_1}{d\sigma}$
$(3/6579 \pm 0/5074) \times 10^1$	$(0/3308 \pm 1/1211) \times 10^2$	$(3/6931 \pm 0/5154) \times 10^1$	$\mathbb{E} \frac{d^2\tau_1}{d\sigma^2}$
$(6/6746 \pm 0/0194) \times 10^3$	$(3/4109 \pm 0/0168) \times 10^6$	$(6/6615 \pm 0/0209) \times 10^3$	$Var \frac{d^2\tau_1}{d\sigma^2}$
$\mathbb{E}(\tau_1) = 22/36 \quad Var(\tau_1) = 3/43$			

جدول ۶.۳: نتایج  $N = 10^5$  شبیه‌سازی برای SANs

MVD	SF	IPA	برآوردگر
$(6/7358 \pm 0/1111) \times 10^{-1}$	$(5/6522 \pm 4/8435) \times 10^{-1}$	$(6/8745 \pm 0/1086) \times 10^{-1}$	$\mathbb{E} \frac{d\tau_1}{d\sigma}$
$(3/2112 \pm 0/0092) \times 10^0$	$(1/9479 \pm 0/0003) \times 10^3$	$(3/0892 \pm 0/0109) \times 10^0$	$Var \frac{d\tau_1}{d\sigma}$
$(3/6003 \pm 0/0508) \times 10^1$	$(3/3767 \pm 1/1199) \times 10^1$	$(3/6071 \pm 0/0505) \times 10^1$	$\mathbb{E} \frac{d^2\tau_1}{d\sigma^2}$
$(6/6901 \pm 0/0005) \times 10^3$	$(3/2813 \pm 0/0000) \times 10^6$	$(6/6682 \pm 0/0005) \times 10^3$	$Var \frac{d^2\tau_1}{d\sigma^2}$
$\mathbb{E}(\tau_1) = 22/32 \quad Var(\tau_1) = 3/25$			

برای بدست آوردن خطای واریانس به کار برده شده است.

در نتایج زیر  $N$  تعداد چرخه در شبیه‌سازی  $\mathbb{E}\tau$  و  $Var\tau$  میانگین و واریانس شبکه‌ی فعال تصادفی می‌باشد. برای شبکه‌ی فعال شامل کمان قطعی،  $T$  طول کمان قطعی یا زمانی که طول می‌کشد عمل قطعی کامل شود. و  $p$  احتمال اینکه کمان قطعی  $T_V$  مسیر بحرانی باشد است.

با توجه به نتایج بدست آمده در جدول‌های ۵.۳ و ۶.۳، برآوردگرهای IPA و SF رفتار مشابهی دارند. روش SF با این که مقدار برآورد پایین‌تری نسبت به IPA و MVD دارد ولی وقتی تعداد

جدول ۷.۳: نتایج برای SAND با  $N = 10^3$  و  $t_V = 21$

$Var \frac{d^2\tau_1}{d\sigma^2}$	$\mathbb{E} \frac{d^2\tau_1}{d\sigma^2}$	$Var \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	$\mathbb{E} \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	برآوردگر
$4/4482945e+003$	$4/9084149e+001$	$1/7688103e+000$	$1/0072028e+000$	IPA
$3/4168694e+006$	$5/6897842e+001$	$6/3264932e+003$	$1/3247921e+000$	SF
$4/8284316e+003$	$4/8918532e+001$	$2/1301063e+000$	$1/0042531e+000$	WD
$\mathbb{E}(\tau_1) = 22/55 \quad Var(\tau_1) = 2/19 \quad p = 0/2359$				

جدول ۸.۳: نتایج برای SAND با  $N = 10^5$  و  $t_V = 21$

$Var \frac{d\tau_1^Y}{d\sigma}$	$\mathbb{E} \frac{d\tau_1^Y}{d\sigma}$	$Var \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	$\mathbb{E} \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	برآوردگر
$4,4482945 \times 10^3$	$4,9084149 \times 10^1$	$1,7688103 \times 10^0$	$1,0072028 \times 10^0$	IPA
$3,4168694 \times 10^6$	$5,6897842 \times 10^1$	$6,3264932 \times 10^3$	$1,3247921 \times 10^0$	SF
$4,8284316 \times 10^3$	$4,8918532 \times 10^1$	$2,1301063 \times 10^0$	$1,0042531 \times 10^0$	MVD
$\mathbb{E}(\tau_1) = 22,55 \quad Var(\tau_1) = 2,19 \quad p = 0,2359$				

جدول ۹.۳: نتایج برای SAND با  $N = 10^3$  و  $t_V = 22$

$Var \frac{d\tau_1^Y}{d\sigma}$	$\mathbb{E} \frac{d\tau_1^Y}{d\sigma}$	$Var \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	$\mathbb{E} \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	برآوردگر
$3,7604615 \times 10^3$	$4,8037872 \times 10^1$	$1,4892424 \times 10^0$	$9,9328972 \times 10^{-1}$	IPA
$3,3446069 \times 10^6$	$2,9588905 \times 10^1$	$6,2298666 \times 10^3$	$4,9020258 \times 10^{-1}$	SF
$4,0801615 \times 10^3$	$4,4698373 \times 10^1$	$1,7266272 \times 10^0$	$9,1717790 \times 10^{-1}$	MVD
$\mathbb{E}(\tau_1) = 22,94 \quad Var(\tau_1) = 1,43 \quad p = 0,4340$				

جدول ۱۰.۳: نتایج برای SAND با  $N = 10^5$  و  $t_V = 22$

$Var \frac{d\tau_1^Y}{d\sigma}$	$\mathbb{E} \frac{d\tau_1^Y}{d\sigma}$	$Var \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	$\mathbb{E} \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	برآوردگر
$4,2056872 \times 10^3$	$4,9665472 \times 10^1$	$1,6396099 \times 10^0$	$1,0214098 \times 10^0$	IPA
$3,5744079 \times 10^6$	$5,7446882 \times 10^1$	$6,4960940 \times 10^3$	$1,3382434 \times 10^0$	SF
$4,2474112 \times 10^3$	$4,9597713 \times 10^1$	$1,8032089 \times 10^0$	$1,0207532 \times 10^0$	WD
$\mathbb{E}(\tau_1) = 22,88 \quad Var(\tau_1) = 1,41 \quad p = 0,4391$				

جدول ۱۱.۳: نتایج برای SAND با  $N = 10^3$  و  $t_V = 23$

$Var \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	$E \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	$Var \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	$E \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	برآوردگر
$4/0185088 \times 10^3$	$4/1352086 \times 10^1$	$1/5956924 \times 10^0$	$8/4539307 \times 10^{-1}$	IPA
$3/6723347 \times 10^6$	$2/5112988 \times 10^1$	$6/5524537 \times 10^3$	$3/9125201 \times 10^{-1}$	SF
$3/5738598 \times 10^3$	$3/9367291 \times 10^1$	$1/4516381 \times 10^0$	$7/9923748 \times 10^{-1}$	MVD
$E(\tau_1) = 23/40 \quad Var(\tau_1) = 0/61 \quad p = 0/6400$				

جدول ۱۲.۳: نتایج برای SAND با  $N = 10^5$  و  $t_V = 23$

$Var \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	$E \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	$Var \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	$E \frac{d\tau_1}{d\sigma}$	Estimator
$4/4746775e+003$	$4/1768305e+001$	$1/7444848e+000$	$8/4654301e-001$	IPA
$3/8635188e+006$	$4/9565389e+001$	$6/7803099e+003$	$1/1637515e+000$	SF
$3/7018445e+003$	$4/1529196e+001$	$1/5042224e+000$	$8/4212505e-001$	WD
$E(\tau_1) = 23/43 \quad Var(\tau_1) = 0/72 \quad p = 0/6555$				

شبیه‌سازی‌ها افزایش یابد به برآورد آن دو همگرا می‌شود. با توجه به جدول در تمامی حالات واریانس برآوردگر SF،  $10^3$  برابر بزرگتر از واریانس برآوردگرهای IPA و MVD می‌باشد، در نتیجه انتخاب مناسبی برای برآوردگر مشتق سیستم‌های گوسی نمی‌باشد. برای شبکه‌ی تصادفی در حالتی که تنها کمان‌های تصادفی حضور دارند، برآوردگر MVD در حالت خطی واریانسی بزرگتر از برآوردگر IPA دارد درحالی‌که در حالت درجه دو مشابه رفتار می‌کنند. برای شبکه‌های با کمان قطعی با افزایش زمان کامل‌سازی عمل قطعی  $(t_V)$ ، برای  $T = 21$  و  $T = 22$ ،  $Var[\frac{d\tau_1}{d\sigma}]$  و  $Var[\frac{d\tau_1}{d\sigma}]$  برای برآوردگر IPA کمتر از MVD می‌باشند. هرچند برای  $T = 23$  برآوردگر مشتق ضعیف واریانس کمتری دارد.

### ۲.۶.۳ کاربرد مالی

در صنعت مالی محاسبه‌ی حساسیت در قیمت گذاری بسیار مهم است، زیرا نشان می‌دهد که در برآورد پارامترها در مدل قیمت گذاری چه مقدار توجه لازم است. استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو

در ریاضیات مالی<sup>۸</sup> اولین بار توسط بویل<sup>۹</sup> (۱۹۷۷) معرفی شد، که قیمت یک معامله با استفاده از میانگین نمونه  $N$  بار تکرار شبیه‌سازی تحت اندازه مخاطره‌ای طبیعی برآورد شد. پایه و اساس مدرن شبیه‌سازی مونت کارلو در کاربردهای مالی توسط بویل، برودای<sup>۱۰</sup> و گلسرمن (۱۹۹۷) منتشر شد، که برخی از تکنیک‌های کاهش واریانس برای قیمت‌گذاری محصولات مالی را به کار برده‌اند. این کار روشهای مونت کارلو گوسی را در زمینه‌ی مالی نیز معرفی کرد. اصلی‌ترین منبع موجود در زمینه‌ی برآورد حساسیت قیمت‌ها کار برودای و گلسرمن می‌باشد که حساسیت‌ها را با استفاده از روش IPA و SF برای اختیار معامله‌های اروپایی تحت مدل بلک و شولز و یک مدل نوسانات تصادفی محاسبه کردند. در برودای و گلسرمن (۱۹۹۶) هدف آنها برنامه‌های کاربردی بود به منظور نشان دادن اینکه تکنیک‌های برآورد مشتق برای قیمت‌گذاری گریک‌ها<sup>۱۱</sup> (مشتق نسبت به پارامترها در یک مدل قیمت‌گذاری) می‌توانند استفاده شوند. و اینکه این روش‌ها نتایج پایدارتری (نااریبی و واریانس کمتر) در مقایسه با روشهای اختلاف متناهی در محاسبه‌ی حساسیت‌ها تولید می‌کنند.

نظریه‌ی مدرن قیمت‌گذاری اختیار معامله از منابع بلک-شولز (۱۹۷۳) و مرتون<sup>۱۲</sup> (۱۹۷۳) است. بلک و شولز یک عبارت تحلیلی برای اختیار خرید اروپایی<sup>۱۳</sup> با استفاده از اطلاعاتی که به راحتی درون یک بازار موجود است، ارائه دادند. این یک پیشرفت غیر منتظره بود که برای اولین بار به تاجران اجازه می‌داد که قیمت را به سرعت محاسبه کنند و با اطلاعات عمل کنند. مرتون با ارایه‌ی یک عبارت برای قیمت‌گذاری اختیارها به صورت تابعی از متغیرهای ورودی، یک چهارچوب کلی برای اینکه قیمت یک اختیار معامله می‌تواند محاسبه شود ایجاد کرد. او همچنین کار بلک و شولز را برای قیمت‌گذاری یک اختیار منع‌دار<sup>۱۴</sup> گسترش داد. اینها دو تحقیق اساسی بودند که رشته‌ی

---

<sup>۸</sup>financial mathematics

<sup>۹</sup>Boyle

<sup>۱۰</sup>Broadie

<sup>۱۱</sup>Greeks

<sup>۱۲</sup>Merton

<sup>۱۳</sup>European call option

<sup>۱۴</sup>barrier option

ریاضیات مالی را ایجاد کردند. یک اختیار معامله اروپایی مالکیت مشروطی است که به دارنده حق فروش یا خرید در زمان موعد  $T$  را می‌دهد. در مقابل اختیار معامله‌ی مدل امریکایی<sup>۱۵</sup> به دارنده این اجازه را می‌دهد که مالکیت را در هر زمان  $t \in [0, T]$  اعمال کند. یک اختیار برمودا<sup>۱۶</sup> به دارنده اجازه می‌دهد که در یکی از تاریخ‌های از قبل تعیین شده اعمال مالکیت کند. یک اختیار خرید<sup>۱۷</sup>، اختیار معامله‌ای است که به دارنده حق خرید می‌دهد. درحالی‌که اختیار فروش<sup>۱۸</sup> حق فروش می‌دهد، به صورتی که در قرارداد مشخص شده است. مشتق فرآیندهای قیمت‌گذاری در بیشتر کتاب‌های پایه در رشته‌ی ریاضی مالی مانند هال<sup>۱۹</sup> (۲۰۰۶)، کلبانر<sup>۲۰</sup> (۲۰۰۵) و شرو<sup>۲۱</sup> (۲۰۰۴) آمده است.

در این فصل بر روی چارچوب بلک-شولز بدون اربیتراژ<sup>۲۲</sup> برای قیمت‌گذاری مشتقات مالی تمرکز شده است. به زبان ساده اربیتراژ به معنی ورود هم‌زمان یک نفر به دو یا چند بازار می‌باشد، که کالایی را با قیمت پایین‌تر از یک بازار خریداری و در بازار دیگر با قیمت بالاتری به فروش برساند. اگرچه نتایج برای اختیارهای اروپایی برای یک موجودی بدون هیچ سود می‌باشد ولی طرح شبیه‌سازی به راحتی برای قیمت‌گذاری اختیارهای موجودی دارای سود نیز قابل انطباق است. در این چارچوب قیمت یک اختیار به صورت عبارتی از امید ریاضی تابع پرداخت نسبت به اندازه ریسک طبیعی بیان شده است، که بستگی به نرخ سود معلوم یک سند و نوسانات دارایی پرمیان در مدل دارد. بنابراین ارزیابی حساسیت چنین قیمت‌هایی نسبت به نوسانات به منظور تعیین اینکه چه مقدار زمان در برآورد دقیق این نوسانات باید سرمایه‌گذاری شود بسیار مهم است. اصل کار، برآورد وگای<sup>۲۳</sup> یک اختیار است که مشتق قیمت اختیار نسبت به نوسانات دارایی پرخطر

<sup>۱۵</sup>American style option

<sup>۱۶</sup>Bermudan option

<sup>۱۷</sup>call option

<sup>۱۸</sup>put option

<sup>۱۹</sup>Hull

<sup>۲۰</sup>Klebaner

<sup>۲۱</sup>Shreve

<sup>۲۲</sup>arbitrage

<sup>۲۳</sup>Vega

می‌باشد. در این فصل برآوردگر IPA مطالعه نشده است بدین دلیل که این بستگی به شکل خاصی از پرداخت به صورت تابعی از قیمت و برخی مشتقات تابعی سود مانند اختیارات دیجیتال که شامل ناپیوستگی است می‌باشد که موجب بوجود آمدن اریبی در IPA می‌شود. در مقابل SF و MVD که پارامترها در توزیع احتمال حضور دارند برآوردگرهای قوی‌تری فراهم می‌کنند که می‌تواند برای انواع گسترده‌ای از توابع پرداخت به کار برده شوند.

در این بخش، برآوردگر MVD با برآوردگر SF برای یک مدل یک بعدی با توابع آزمون ساده مقایسه شده است. در همه‌ی موارد MVD بر SF برتری دارد. سپس اعتبار برآوردگر MVD برای یک مدل یک متغیره با استفاده از اختیارات قیمت گذاری که یک عبارت تحلیلی دارد قبل از مقایسه آن در یک مثال چند متغیره که شامل پیچیدگی اضافی می‌باشد، بررسی شده است. در نهایت نتایج برآورد وگا برای اختیارات آسیایی ارایه شده است.

### قیمت گذاری مالکیت‌های مشروط بدون آربیتراژ

در زیر خلاصه‌ای از شرح قیمت گذاری مالکیت‌های مشروط<sup>۲۴</sup> بدون آربیتراژ آمده است. یک توصیف جزئی‌تر از یک مدل بازار در زمان پیوسته اولین بار توسط هریسون و کریس<sup>۲۵</sup> (۱۹۷۹) و مقاله‌هایی توسط هریسون و پلیسکا<sup>۲۶</sup> (۱۹۸۱) و (۱۹۸۳) ارایه شد. یک مدل بازاری تجزیه‌ی  $N$  دارایی پرخطر قابل معامله با قیمت‌های  $S(t) = (S^{(1)}, \dots, S^{(N)})$ ، با یک سند عاری از خطر  $\beta(t) = e^{r(t)}$  که  $t \in [0, T]$  می‌باشد. تابع  $r(t)$  به صورت نرخ بدون خطر برگشت<sup>۲۷</sup> تعریف می‌شود. هر دارایی پرخطر و سند بدون خطر می‌تواند به صورت پیوسته بدون هیچ عوارض یا هزینه‌ی اقتصادی دیگر معامله شود.

فرض کنید که موجودی پرخطر یک فرآیند تصادفی سازگار را ارایه دهد. برای این کار فرض می‌شود

<sup>۲۴</sup>contingent

<sup>۲۵</sup>Harrison and Kreps

<sup>۲۶</sup>Harrison and Pliska

<sup>۲۷</sup>risk-free rate of return

که همه‌ی اطلاعات و تصمیم‌های ایجاد شده بوسیله‌ی عوامل اقتصادی که در زمان  $t$  معلوم است در قیمت  $S^{(i)}$  در زمان  $t$  منعکس شده‌است. فیلتر را به صورت

$$\mathcal{F}_{S^{(i)}(t)} := \sigma(S^{(i)}(u), 0 \leq u \leq t)$$

در نظر می‌گیریم. برای سادگی  $r(t)$  را فرایند قطعی متاثر از اثرات اقتصادی در نظر می‌گیریم.

فرض کنید استراتژی معامله اقتصادی در زمان  $t$  به صورت زیر باشد

$$\pi(t) = (\pi^{(1)}(t), \dots, \pi^{(N)}(t))$$

که در آن سهم بودجه‌ای را که در  $N$  دارایی پرخطر و سند سرمایه‌گذاری شده است را نشان می‌دهد. فرآیند ارزش‌گذاری سبد سرمایه‌گذاری  $V(t)$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t r(u) V(u) du + \sum_{i=1}^N \int_0^t \pi^{(i)}(u) S^{(i)}(u) du \quad (31.3)$$

$$\sum_{i=1}^{N+1} \pi^{(i)}(t) = 1 \quad .$$

### برآوردگرهای وگا در مدل بلک-شولز

فرآیند قیمت‌گذاری یک موجودی  $S(t)$ ، تحت اندازه احتمال بدون ریسک برای مدل بلک-شولز می‌تواند به صورت

$$S(t) = S_0 e^{X(t)}$$

نوشته شود که  $X(t)_{t \in [0, T]}$  فرآیند برگشت<sup>۲۸</sup> بوده، و برای هر مقدار  $t$  متغیر تصادفی  $X(t)$  دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu(t) = (r - \frac{\sigma^2}{2})t$  و واریانس  $\nu(t) = \sigma^2 t$  با تابع چگالی احتمال به صورت زیر است.

$$f_{X(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - (r - \frac{\sigma^2}{2})t)^2}{\sigma^2 t}\right) \quad (32.3)$$

<sup>۲۸</sup>returns process



تابع پرداخت  $L(X(t); t \in [0, T]) \in \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید، در مدل بلک-شولز وگا به صورت مشتق قیمت اختیار نسبت به  $\sigma$ ، نوسانات موجودی، تعریف می‌شود. به عبارتی داریم

$$\vartheta = \frac{d}{d\sigma} \mathbb{E}[L(X(t); t \in [0, T])] \quad (۳۳.۳)$$

قضیه‌ی زیر برآوردگر MVD یا برآوردگر مشتق ضعیف (WD) را برای  $\vartheta$  برای تابع عملکرد یک متغیره که تنها به مقدار  $X(t)$  در زمان ثابت  $t$  بستگی دارد، ارائه می‌دهد.

**قضیه ۱.۶.۳.** (برآوردگر مشتق ضعیف-حالت یک متغیره) برای فرآیند برگشت  $X(t)$  به ازای یک  $t$  ثابت در مدل بلک-شولز تحت  $\mathbb{Q}$ ، برآوردگر مشتق ضعیف برای یک برآوردگر عملکرد کراندار

و پیوسته  $L(X(t); \sigma)$  به صورت زیر می‌باشد

$$D_{\sigma}^{WD}(X(t)) = \frac{1}{\sigma} \{L(X^+(t); \sigma) - (X(t) - \mu(t) + 1)L(X; \sigma)\} \quad (۳۴.۳)$$

که در آن  $X^+(t) = \mathcal{D}\mathcal{M}(\mu(t)\nu(t))$ .

**برهان.** مشتق تابع چگالی  $X(t)$  نسبت به  $\sigma$  به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}t\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - (r - \sigma^2/2)t)^2}{\sigma^2 t}\right) \right\} \quad (۳۵.۳) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}t\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - (r - \sigma^2/2)t)^2}{\sigma^2 t}\right) \left[ -\frac{1}{\sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x - (r - \sigma^2/2)t)^2}{\sigma^2 t} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{\sigma} \frac{(x - (r - \sigma^2/2)t)^2}{\sigma^2 t} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - (r - \sigma^2/2)t)^2}{\sigma^2 t}\right) \\ &\quad - \frac{1}{\sigma} (x - (r - \sigma^2/2)t + 1) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - (r - \sigma^2/2)t)^2}{\sigma^2 t}\right) \\ &\equiv \frac{1}{\sigma} \left( \frac{(x - \mu(t))^2}{\nu(t)} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu(t))^2}{\nu(t)}\right) - (x - \mu(t) + 1) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu(t))^2}{\nu(t)}\right) \right) \end{aligned}$$

ازینرو با توجه به تعریف روش مشتق ضعیف، برآوردگر WD برای فرآیند برگشت  $X(t)$  به صورت داده شده در رابطه‌ی (۳۴.۳) می‌باشد.  $\square$

برای اختیارهای اروپایی، آسیایی و ... پرداخت، تابعی از تمام فرآیندهای قیمت گذاری  $(S(t))_{t \in [0, T]}$  می‌باشد. در شبیه سازی مونت کارلو، فرآیند قیمت گذاری پیوسته را به بازه‌هایی به طول  $h$  تقسیم

می‌کنیم بنابراین عدد صحیح  $n = T/h$  بازه برای یک اختیار با زمان موعد  $T$  وجود دارد. با استفاده از تجزیه، افزایش در لگاریتم برگشت‌ها که با  $X_n$  نشان داده می‌شود متغیرهای تصادفی و مستقل نرمال می‌باشند. برآوردگر مشتق برای این مورد در نتیجه‌ی زیر داده شده است.

نتیجه ۲.۶.۳. (برآوردگر مشتق ضعیف- حالت چند بعدی) برآوردگر مشتق ضعیف وگا تحت مدل بلک- شولز برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل  $(X_1, \dots, X_n)$  به صورت زیر می‌باشد:

$$D_{\sigma}^{WD,m} = \sum_{i=1}^n L(X_1^{(i)}(t), \dots, X_n^{(i)}(t)) - (X(t) - \mu(t) + 1) L(X_1(t), \dots, X_n(t)) \quad (36.3)$$

برهان. برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل تابع چگالی، ضرب تابع چگالی‌های یک متغیره می‌باشد. مشتق‌گیری با توجه به قانون ضرب انجام می‌شود که عبارت حاصل مجموع توابع چگالی بوده که مشتق پذیرند و از عبارات (۳۵.۳) حاصل می‌شود. □

قضیه ۳.۶.۳. (برآوردگر تابع امتیاز - حالت یک متغیره) برآوردگر تابع امتیاز تحت  $\mathbb{Q}$  در مدل بلک- شولز به صورت زیر می‌باشد:

$$D_{\sigma}^{(SF)}(X(t)) = \frac{1}{\sigma} L(X; \sigma) \left[ \frac{(X - \mu(t))^2}{\nu} - (X - \mu(t) + 1) \right] \quad (37.3)$$

برهان. همانند قبل فرض کنید  $X(t)$  فرآیند برگشت باشد. داریم:

$$\ln f(x) = -\frac{1}{4} \ln 2\pi t - \ln \sigma - \frac{1}{4} \frac{x - (r - \sigma^2/2)t}{\sigma^2 t} \quad (38.3)$$

و مشتق آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(x)}{\partial \sigma} &= \frac{1}{\sigma} \left( \frac{x - (r - \sigma^2/2)t}{\sigma^2 t} - (x - (r - \sigma^2/2)t + 1) \right) \\ &= \frac{1}{\sigma} \left( \frac{(x - \mu(t))^2}{\nu(t)} - (x - \mu(t) + 1) \right) \end{aligned} \quad (39.3)$$

با استفاده از نتایج فصل ۲ ادعا حاصل می‌شود. □

در جدول ۱۳.۳ برآوردگرهای WD و SF برای توابع آزمون  $f(x) = x, x^2, e^x, e^{2x}$  آورده شده است. فرض می‌کنیم  $T = 0.1, \sigma = 0.1, r = 0.05, S(0) = 10$ . کد برنامه‌نویسی

واریانس		برآورد		$X = \ln(S(T))$
SF	WD	SF	WD	$f(x)$
$1/0.76 \times 10^3$	0/000	$0/090 \pm 0/203$	$-0/000 \pm 0/000$	$x$
$5/730 \times 10^3$	0/002	$0/208 \pm 0/469$	$0/000 \pm 0/000$	$x^2$
$2/041 \times 10^4$	0/010	$0/392 \pm 0/0885$	$0/000 \pm 0/000$	$e^x$
$2/060 \times 10^6$	3/017	$3/949 \pm 8/895$	$0/009 \pm 0/011$	$e^{2x}$

جدول ۱۳.۳: فواصل اطمینان ۹۵٪ برای میانگین و واریانس توابع آزمون داده شده با  $N = 10^5$  شبیه‌سازی

Matlab در ضمیمه آورده شده است. با توجه به نتایج جدول ۱۳.۳ برآوردگر مشتق SF برای توابع چندجمله‌ای واریانسی  $10^3$  برابر و برای توابع نمایی  $10^4$  و  $10^6$  بزرگتر از واریانس برآوردگر WD می باشد. از این رو برآوردگر WD طرح شبیه سازی بهتری نسبت به برآوردگر مشتق SF می باشد.

اعتبار سنجی مثال یک متغیره: وگای یک اختیار خرید یا فروش وانیل در مدل بلک-شولز

در این بخش طرح برآورد WD برای تحلیل نتایج وگای یک اختیار خرید یا فروش اروپایی وانیل<sup>۲۹</sup> در مدل بلک-شولز مقایسه شده است. پرداخت اختیار خرید وانیل به صورت

$$Y_C = (S(T) - K)^+$$

می‌باشد، و پرداخت اختیار فروش به صورت

$$Y_p = (K - S(T))^+$$

است. که  $K$  قیمت اعمال شده است یعنی قیمتی که دارنده‌ی اختیار می‌تواند موجودی را در زمان موعد  $T$  بخرد یا بفروشد. در این بخش  $C(t; \sigma)$  و  $P(t; \sigma)$  قیمت قرارداد خرید و فروش وانیل را نشان می‌دهند. در زیر ابتدا رابطه‌ی بین خرید و فروش را به صورت قضیه بیان کرده سپس نشان می‌دهیم که  $\vartheta(C(t; \sigma)) = \vartheta(P(t; \sigma))$ .

قضیه ۴.۶.۳. (تساوی خرید-فروش) روابط بین یک اختیار خرید اروپایی  $C(t; \sigma)$  و اختیار فروش

<sup>۲۹</sup>Vanilla

برای یک موجودی بدون سود، برای هر  $t \in [0, T]$  به صورت زیر می‌باشد

$$C(t) + Ke^{-r(T-t)} = P(t) + S(t) \quad (40.3)$$

نتیجه ۵.۶.۳. وگا برای یک اختیار خرید اروپایی با وگای یک اختیار فروش برابر است.

برهان. قیمت‌های اختیار خرید و فروش به صورت زیر می‌باشند

$$C(t; \sigma) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S(T) - K)^+ | \mathcal{F}]$$

$$P(t; \sigma) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(K - S(T))^+ | \mathcal{F}]$$

حال با تفاضل دو عبارت و با استفاده از مارتینگل بودن  $S(t)$ <sup>۳۰</sup> داریم

$$\begin{aligned} C(t; \sigma) - P(t; \sigma) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S(T) - K)^+ - (K - S(T))^+ | \mathcal{F}] \\ &= e^{-r(T-t)} (\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(T) | \mathcal{F}(t)] - K) \\ &= S(t) - Ke^{-r(T-t)} \end{aligned}$$

با مرتب سازی عبارات می‌توان به (۴۰.۳) دست یافت حال به ازای  $t$  ثابت قیمت  $S(t)$  معلوم می‌باشد بنابراین با مشتق گیری عبارت مطلوب حاصل می‌شود.  $\square$

حال برای بدست آوردن وگای خرید و فروش وانیل باید قیمت آن معلوم باشد. در قضیه‌ی زیر، قیمت یک اختیار خرید وانیل بیان شده است.

قضیه ۶.۶.۳. قیمت اختیار خرید وانیل در مدل بلک-شولز به صورت زیر می‌باشد

$$C(t; \sigma) = S(t)\Phi(h_1(t; \sigma)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(h_2(t; \sigma)) \quad (41.3)$$

که در آن

$$h_1(t; \sigma) = \frac{\ln(S(t)/K) + r(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

<sup>۳۰</sup>martingale

و

$$h_2(t; \sigma) = h_1(t; \sigma) - \sigma\sqrt{T-t}$$

می‌باشد.

نتیجه ۷.۶.۳. عبارت  $\vartheta(C(t; \sigma))$  به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \vartheta(t; \sigma) &= \frac{\partial C(t; \sigma)}{\partial \sigma} \\ &= -\frac{1}{\sigma} [S(t)\phi(h_1(t; \sigma))h_2(t; \sigma) - Ke^{-r(T-t)}\phi(h_2(t; \sigma))h_1(t; \sigma)] \quad (42.3) \end{aligned}$$

حال برآورد مشتق ضعیف برای وگای خرید یا فروش وانیل را با عبارت بلک-شولز مقایسه می‌کنیم. دو سری شبیه‌سازی برای تعیین تاثیر قیمت ابتدایی  $S(0)$  و نوسان  $\sigma$  انجام شده است. برای بررسی تاثیر  $S(0)$  مقادیر ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۳۵، ۴۰ با در نظر گرفتن  $K = 30$  انتخاب شده است. انتخاب‌های  $S(0)$  تاثیر اختیار خرید و فروش را زمانی که تفاوت بین اختیار خرید و فروش یکسان یا بطور قابل توجه‌ای جدا هستند را بررسی می‌کند. همچنین مقادیر ۱، ۰/۵، ۰/۳، ۰/۱ برای نوسان انتخاب شده‌اند. در جدول زیر مقادیر پارامترهای دیگر وقتی  $S(0)$  و  $\sigma$  تغییر می‌کنند آمده است.

مقادیر پارامترها	
$r = 0.05, \sigma = 0.30, K = 30$	$S(0)$
$r = 0.05, S(0) = 30, K = 30$	$\sigma$

نتایج برای اختیار خرید و فروش در جداول ۱۵.۳ و ۱۴.۳ آمده است. همانطور که از جداول

مشخص است نتایج برآوردگر MVD به نتایج مدل بلک-شولز نزدیک می‌باشد.

مقادیر				نتایج بلک-شولز		خرید وانیل
$N = 10^5$		$N = 10^3$		روز ۹۱	روز ۲۸	
روز ۹۱	روز ۲۸	روز ۹۱	روز ۲۸	روز ۹۱	روز ۲۸	$S$
$0.154 \pm 0.008$	$0.000 \pm 0.000$	$0.131 \pm 0.070$	$0.000 \pm 0.000$	$0.155$	$0.000$	۲۰
$2.825 \pm 0.39$	$0.296 \pm 0.008$	$2.820 \pm 0.376$	$0.261 \pm 0.075$	$2.842$	$0.300$	۲۵
$5.881 \pm 0.67$	$3.291 \pm 0.33$	$5.810 \pm 0.650$	$3.262 \pm 0.327$	$5.902$	$3.302$	۳۰
$3.433 \pm 0.89$	$0.578 \pm 0.053$	$3.538 \pm 0.861$	$0.776 \pm 0.512$	$3.446$	$0.586$	۳۵
$0.904 \pm 0.113$	$0.001 \pm 0.063$	$1.225 \pm 1.086$	$0.272 \pm 0.601$	$0.919$	$0.008$	۴۰
$5.739 \pm 0.058$	$3.267 \pm 0.031$	$5.724 \pm 0.058$	$3.252 \pm 0.0305$	$5.755$	$3.277$	$0.10$
$5.895 \pm 0.67$	$3.291 \pm 0.33$	$5.810 \pm 0.650$	$3.256 \pm 0.327$	$5.902$	$3.302$	$0.30$
$5.861 \pm 0.78$	$3.288 \pm 0.36$	$5.761 \pm 0.767$	$3.251 \pm 0.354$	$5.885$	$3.299$	$0.50$
$5.717 \pm 0.122$	$3.263 \pm 0.045$	$5.515 \pm 1.228$	$3.202 \pm 0.445$	$5.755$	$3.277$	$1.00$

جدول ۱۴.۳: نتایج اختیار خرید وانیل

مقادیر				نتایج بلک-شولز		فروش وانیل
$N = 10^5$		$N = 10^3$		روز ۹۱	روز ۲۸	
روز ۹۱	روز ۲۸	روز ۹۱	روز ۲۸	روز ۹۱	روز ۲۸	$S$
$0.202 \pm 0.081$	$0.025 \pm 0.046$	$-0.065 \pm 0.799$	$-0.136 \pm 0.446$	$0.155$	$0.000$	۲۰
$2.867 \pm 0.65$	$0.317 \pm 0.045$	$2.577 \pm 0.629$	$0.92 \pm 0.442$	$2.842$	$0.300$	۲۵
$5.916 \pm 0.47$	$3.308 \pm 0.28$	$5.519 \pm 0.445$	$3.060 \pm 0.260$	$5.902$	$3.302$	۳۰
$3.4461 \pm 0.36$	$0.590 \pm 0.11$	$3.199 \pm 0.340$	$0.541 \pm 0.105$	$3.446$	$0.586$	۳۵
$0.926 \pm 0.19$	$0.009 \pm 0.001$	$0.839 \pm 0.172$	$0.003 \pm 0.005$	$0.919$	$0.008$	۴۰
$5.765 \pm 0.050$	$3.281 \pm 0.029$	$5.322 \pm 0.472$	$3.015 \pm 0.272$	$5.755$	$3.277$	$0.10$
$5.792 \pm 0.47$	$3.308 \pm 0.28$	$5.519 \pm 0.445$	$3.054 \pm 0.260$	$5.902$	$3.302$	$0.30$
$5.905 \pm 0.45$	$3.307 \pm 0.26$	$5.578 \pm 0.428$	$3.083 \pm 0.250$	$5.885$	$3.299$	$0.50$
$5.784 \pm 0.45$	$3.289 \pm 0.025$	$5.608 \pm 0.441$	$3.117 \pm 0.239$	$5.755$	$3.277$	$1.00$

جدول ۱۵.۳: نتایج برای اختیار فروش وانیل

اعتبارسنجی برای مورد چند متغیره: اختیار خرید بازنگری

بعد از بررسی اختیارات وانیل علاقه‌مندیم که مشاهده کنیم آیا برآورد مشتق برای برآورد یک اختیار که عبارت پرداخت مشکل‌تری دارد کاراست یا خیر. پرداخت اختیار خرید بازنگری<sup>۳۱</sup> به صورت

$$Y_M = \max_{t \in [0, T]} S(t) - S(T)$$

تعریف شده است. عبارت بلک-شولز برای قیمت‌گذاری خرید بازنگری در زمان  $t = 0$  در [۷] به صورت عبارت زیر است.

$$M(0; \sigma) = S(0) \left[ \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) \Phi(k_1(\sigma)) - \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) e^{-rT} \Phi(k_2(\sigma)) - \frac{\sigma^2}{2r} \right] \quad (43.3)$$

<sup>۳۱</sup>Lookback

که در آن

$$k_1(\sigma) = \frac{\ln(K/S(\cdot)) + (\sigma^2 T)/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

و

$$k_2 = k_1 - \sigma\sqrt{T}$$

با توجه به اینکه

$$\frac{\partial k_1(t; \sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} k_2(t; \sigma), \quad \frac{\partial k_2(t; \sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} k_1(t; \sigma)$$

و با مشتق‌گیری و انجام یک سری محاسبات جبری ساده داریم

$$\begin{aligned} \vartheta(M(\cdot; \sigma)) &= S(\cdot) \left\{ \frac{\sigma}{r} [\Phi(k_1(\sigma)) + e^{-rT} \Phi(k_2(\sigma)) - 1] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sigma} \left[ \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) k_2(\sigma) \phi(k_1(\sigma)) - \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r} e^{-rT} k_1(\sigma)\right) \phi(k_2(\sigma)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (44.3)$$

در جدول زیر مقادیر پارامترها با تغییر  $S(\cdot)$  و  $\sigma$  آورده شده است. در جدول ۱۶.۳ نتایج زمانی که  $S(\cdot)$  و  $\sigma$  تغییر می‌کنند و جدول ۱۷.۳ نتایج به ازای  $h$  متفاوت آمده است.

مقادیر پارامترها	
$r = 0.05, \sigma = 0.30, h = 7/365$	$S(\cdot)$
$r = 0.05, S(\cdot) = 30, h = 7/365$	$\sigma$
$r = 0.05, S(\cdot) = 30, \sigma = 0.30$	$h$

با توجه به نتایج جدول ۱۷.۳ در بازه‌های زمانی ۱ هفته، وقتی تعداد متغیرهای تصادفی شبیه‌سازی شده کم است ممکن است نتایج سریعتر حاصل شود ولی وجود تفاوت زیاد بین نتایج برآورد شده و تحلیلی تاثیر آن را کم کرده و استفاده از یک متغیر کنترل را پیشنهاد می‌کند. همچنین نتایج نشان می‌دهد که نتایج برآوردگر مشتق ضعیف به نتایج مدل بلک-شولز نزدیک است.

مقادیر				نتایج بلک-شولز		
$N = 1.5$		$N = 1.3$		روز ۹۱	روز ۲۸	
روز ۹۱	روز ۲۸	روز ۹۱	روز ۲۸	روز ۹۱	روز ۲۸	خرید بازنگری
$6.035 \pm 0.045$	$2.990 \pm 0.023$	$6.368 \pm 0.446$	$3.231 \pm 0.232$	7/188	4/184	۲۰ S.
$7.543 \pm 0.056$	$0.738 \pm 0.029$	$7.960 \pm 0.558$	$4.039 \pm 0.290$	8/985	5/230	۲۵
$9.166 \pm 0.068$	$4.485 \pm 0.034$	$9.553 \pm 0.669$	$4.847 \pm 0.348$	10/782	6/276	۳۰
$10.561 \pm 0.078$	$5.233 \pm 0.040$	$11.145 \pm 0.781$	$5.655 \pm 0.406$	12/580	7/322	۳۵
$12.069 \pm 0.089$	$5.980 \pm 0.046$	$12.737 \pm 0.892$	$6.407 \pm 0.461$	14/376	8/368	۴۰
$9.371 \pm 0.065$	$4.540 \pm 0.033$	$9.766 \pm 0.648$	$4.890 \pm 0.339$	5/755	3/277	۰/۱۰ $\sigma$
$9.166 \pm 0.068$	$4.485 \pm 0.034$	$9.553 \pm 0.669$	$4.847 \pm 0.348$	5/902	3/302	۰/۳۰
$8.636 \pm 0.071$	$4.409 \pm 0.036$	$9.101 \pm 0.705$	$4.771 \pm 0.363$	5/885	3/299	۰/۵۰
$7.613 \pm 0.090$	$4.209 \pm 0.041$	$8.210 \pm 0.857$	$4.576 \pm 0.412$	5/755	3/277	۱/۰۰

جدول ۱۶.۳: نتایج برای اختیار خرید بازنگری بواسطه‌ی تغییر در قیمت ابتدایی و نوسان

مقادیر				
$N = 1.5$		$N = 1.3$		
روز ۹۱	روز ۲۸	روز ۹۱	روز ۲۸	خرید بازنگری
$9.201 \pm 0.215$	$4.641 \pm 0.109$	$9.553 \pm 0.669$	$4.847 \pm 0.348$	۱ هفته h
$10.168 \pm 0.236$	$5.604 \pm 0.118$	$10.402 \pm 0.747$	$5.555 \pm 0.369$	۱ روز
$10.408 \pm 0.253$	$5.673 \pm 0.124$	$10.589 \pm 0.805$	$5.689 \pm 0.418$	۱/۲ روز
$10.419 \pm 0.273$	$5.904 \pm 0.133$	$9.950 \pm 0.845$	$6.004 \pm 0.434$	۱/۴ روز
		10/782	6/276	نتایج بلک-شولز

جدول ۱۷.۳: نتایج برای اختیار خرید بازنگری بواسطه‌ی تغییر در بازه‌ی زمانی

### اختیار خرید آسیایی

در این بخش برآورد مشتق ضعیف برای وگا اختیارات آسیایی با قیمت اعمال شده‌ی ثابت و متغیر آورده شده است. پرداخت یک اختیار خرید آسیایی با یک قیمت اعمال شده‌ی ثابت عبارتست از

$$Y_k = \bar{S} - K$$

که در آن  $\bar{S}$  میانگین قیمت در طول زمان اختیار می‌باشد. اختیار خرید متناظر با یک قیمت

اعمال شده‌ی متغیر به صورت

$$Y_L = \bar{S} - LS(T)$$

می‌باشد که  $L$  یک عامل مقیاس و  $LS(T)$  قیمت شناور می‌باشد. یک شبیه سازی مونت کارلو از



مقادیر				خرید آسیایی
$N = 105$		$N = 103$		
روز ۹۱	روز ۲۸	روز ۹۱	روز ۲۸	
$-0.009 \pm 0.056$	$-0.004 \pm 0.031$	$0.443 \pm 0.559$	$0.430 \pm 0.318$	۲۰ S.
$-0.002 \pm 0.052$	$-0.002 \pm 0.028$	$0.463 \pm 0.528$	$0.364 \pm 0.296$	۲۵
$0.005 \pm 0.053$	$-0.001 \pm 0.028$	$0.484 \pm 0.532$	$0.298 \pm 0.294$	۳۰
$0.012 \pm 0.057$	$0.001 \pm 0.030$	$0.504 \pm 0.570$	$0.232 \pm 0.311$	۳۵
$0.019 \pm 0.064$	$0.002 \pm 0.034$	$0.524 \pm 0.636$	$0.166 \pm 0.346$	۴۰
$0.008 \pm 0.052$	$0.000 \pm 0.028$	$0.462 \pm 0.523$	$0.292 \pm 0.292$	۱۰ σ
$0.005 \pm 0.053$	$-0.001 \pm 0.028$	$0.484 \pm 0.532$	$0.298 \pm 0.294$	۳۰
$0.002 \pm 0.054$	$-0.002 \pm 0.029$	$0.506 \pm 0.546$	$0.304 \pm 0.296$	۵۰
$-0.009 \pm 0.062$	$-0.005 \pm 0.030$	$0.571 \pm 0.612$	$0.320 \pm 0.310$	۱۰۰

جدول ۱۸.۳: نتایج برای اختیار خرید آسیایی با یک قیمت اعمال شده ثابت با تغییر در قیمت ابتدایی و نوسان

مقادیر				خرید آسیایی
$N = 105$		$N = 103$		
روز ۹۱	روز ۲۸	روز ۹۱	روز ۲۸	
$0.197 \pm 0.169$	$0.115 \pm 0.089$	$0.355 \pm 0.522$	$0.184 \pm 0.288$	۱ هفته h
$0.125 \pm 0.171$	$0.034 \pm 0.093$	$0.491 \pm 0.535$	$0.152 \pm 0.289$	۱ روز
$0.036 \pm 0.170$	$0.036 \pm 0.094$	$0.571 \pm 0.531$	$0.390 \pm 0.293$	۱/۲ روز
$-0.006 \pm 0.171$	$0.079 \pm 0.094$	$0.129 \pm 0.533$	$0.310 \pm 0.300$	۱/۴ روز

جدول ۱۹.۳: نتایج اختیار خرید آسیایی با یک قیمت اعمال شده ثابت با تغییر در بازه زمانی

اختیار آسیایی در ضمیمه آورده شده است. مقادیر پارامترها همانند اختیار خرید بازنگری می‌باشد. جداول ۱۸.۳ و ۱۹.۳ نتایج را در حالت قیمت اعمال شده ثابت و جداول ۲۱.۳ و ۲۰.۳ برای حالت شناور تا سه رقم اعشار نشان می‌دهند.

مقادیر				خرید آسیایی
$N = ۱۰۵$		$N = ۱۰۳$		
روز ۹۱	روز ۲۸	روز ۹۱	روز ۲۸	
$-۰/۰۰۷ \pm ۰/۰۳۹$	$۰/۰۱۱ \pm ۰/۰۲۱$	$-۰/۰۲۱ \pm ۰/۰۳۹$	$-۰/۰۱۵ \pm ۰/۰۲۱$	۲۰ <i>S.</i>
$-۰/۰۰۹ \pm ۰/۰۴۸$	$۰/۰۱۴ \pm ۰/۰۲۵$	$-۰/۰۲۷ \pm ۰/۰۴۸$	$-۰/۰۱۸ \pm ۰/۰۲۶$	۲۵
$-۰/۰۱۱ \pm ۰/۰۵۸$	$۰/۰۱۷ \pm ۰/۰۳۱$	$-۰/۰۳۱ \pm ۰/۰۵۸$	$-۰/۰۲۲ \pm ۰/۰۳۱$	۳۰
$-۰/۰۱۳ \pm ۰/۰۶۸$	$۰/۰۲۰ \pm ۰/۰۳۶$	$-۰/۰۳۸ \pm ۰/۰۶۸$	$-۰/۰۲۶ \pm ۰/۰۳۶$	۳۵
$-۰/۰۱۵ \pm ۰/۰۷۸$	$۰/۰۲۳ \pm ۰/۰۴۱$	$-۰/۰۴۲ \pm ۰/۰۷۸$	$-۰/۰۳۰ \pm ۰/۰۴۱$	۴۰
$-۰/۰۱۵ \pm ۰/۰۵۷$	$۰/۰۱۵ \pm ۰/۰۳۱$	$-۰/۰۳۱ \pm ۰/۰۵۷$	$-۰/۰۲۲ \pm ۰/۰۳۱$	۰/۱۰ $\sigma$
$-۰/۰۱۱ \pm ۰/۰۵۸$	$۰/۰۱۷ \pm ۰/۰۳۱$	$-۰/۰۳۱ \pm ۰/۰۵۸$	$-۰/۰۲۲ \pm ۰/۰۳۱$	۰/۳۰
$-۰/۰۰۷ \pm ۰/۰۶۰$	$۰/۰۱۹ \pm ۰/۰۳۲$	$-۰/۰۳۸ \pm ۰/۰۶۰$	$-۰/۰۲۳ \pm ۰/۰۳۲$	۰/۵۰
$-۰/۰۰۳ \pm ۰/۰۷۲$	$۰/۰۲۳ \pm ۰/۰۳۴$	$-۰/۰۴۲ \pm ۰/۰۶۹$	$-۰/۰۲۴ \pm ۰/۰۳۴$	۱/۰۰

جدول ۲۰.۳: نتایج برای خرید آسیایی با یک قیمت اعمال شده‌ی شناور با تغییر در قیمت اولیه و نوسان

مقادیر شبیه‌سازی				خرید آسیایی
$N = ۱۰۵$		$N = ۱۰۳$		
روز ۹۱	روز ۲۸	روز ۹۱	روز ۲۸	
$-۰/۰۱۵ \pm ۰/۰۱۸$	$-۰/۰۱۵ \pm ۰/۰۰۹$	$-۰/۰۴۹ \pm ۰/۰۵۹$	$-۰/۰۳۹ \pm ۰/۰۳۲$	۱ هفته <i>h</i>
$-۰/۰۱۲ \pm ۰/۰۱۸$	$-۰/۰۱۱ \pm ۰/۰۱۰$	$-۰/۰۴۹ \pm ۰/۰۵۹$	$-۰/۰۴۱ \pm ۰/۰۳۳$	۱ روز
$-۰/۰۰۲ \pm ۰/۰۱۸$	$۰/۰۰۳ \pm ۰/۰۱۰$	$-۰/۰۵۴ \pm ۰/۰۵۸$	$-۰/۰۲۷ \pm ۰/۰۳۲$	۱/۲ روز
$-۰/۰۰۱ \pm ۰/۰۱۸$	$۰/۰۲۴ \pm ۰/۰۱۰$	$۰/۰۰۹ \pm ۰/۰۵۷$	$-۰/۰۳۱ \pm ۰/۰۳۱$	۱/۴ روز

جدول ۲۱.۳: نتایج برای اختیار خرید آسیایی با یک قیمت اعمال شده‌ی شناور که در نتیجه‌ی تغییر در بازه‌ی زمانی بدست آمده است

# فصل ۴

## بررسی رفتار برآوردگرها در مدل آمیخته مقیاسی\*\*

### ۱.۴ مقدمه

در این فصل قصد داریم واریانس برآوردگرهای معرفی شده را بدون بدست آوردن خود برآوردگرها برای مدل آمیخته‌ی مقیاسی نرمال محاسبه کنیم. بدین منظور ابتدا مختصری درباره‌ی توزیع‌های آمیخته مقیاسی بیان می‌کنیم سپس به محاسبه‌ی واریانس‌ها می‌پردازیم، که این کار را به کمک نتایج بدست آمده‌ی فصل قبل در مورد سیستم‌های گوسی، انجام می‌دهیم. در نهایت با انتخاب تابع عملکرد چندجمله‌ای به عنوان نمونه، مقایسه واریانس‌ها را انجام می‌دهیم.

### ۲.۴ توزیع آمیخته مقیاسی

فرض کنید  $Y$  دارای توزیع نرمال استاندارد بوده و  $\lambda$  یک متغیر تصادفی مثبت با تابع چگالی پیوسته یا گسسته  $h(\lambda)$  باشد، در این صورت  $X = Y\lambda$  دارای توزیع آمیخته مقیاسی نرمال است [۲۳]. کلاس گسترده‌ای از توزیع‌های متقارن، پیوسته و بدون مدل روی اعداد حقیقی می‌توانند به صورت آمیخته مقیاسی نرمال ساخته شده باشند. به طور مثال توزیع‌های لجستیک، لاپلاس،  $t$ -استیودنت و بسیاری از توزیع‌های دیگر متعلق به این خانواده از توزیع‌ها می‌باشند. در حالت کلی این توزیع

به صورت زیر است.

**تعریف ۱.۲.۴.** اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با پارامتر مکان  $\mu$  و پارامتر مقیاس  $\sigma$  باشد، تابع چگالی آمیخته مقیاس نرمال به صورت

$$f(x|\mu, \sigma) = \int_0^{\infty} \mathcal{N}(x|\mu, k(\lambda)\sigma^2)h(\lambda)d\lambda \quad (1.4)$$

تعریف می‌شود، که در آن  $\mathcal{N}(x|.,.)$  تابع چگالی نرمال،  $k$  تابعی مثبت و  $h(\lambda)$  تابع چگالی پارامتر آمیختگی  $\lambda$  روی فضای  $\mathbb{R}^+$  است. این توزیع را با نماد  $SMN(\mu, k(\lambda)\sigma^2, h)$  نشان می‌دهیم.

حال در این قسمت فرض می‌کنیم

$$X \sim SMN(\mu, \sigma^2, h)$$

که

$$X|U \sim N(\mu, u^{-1}\sigma^2) \quad \text{و} \quad U \sim \Gamma(\alpha, \beta)$$

می‌باشد. اگر  $\alpha = \beta = a/2$  آنگاه  $X$  دارای توزیع  $t$ -استیودنت با پارامتر مکان  $\mu$  و پارامتر مقیاس  $\sigma$  و درجه آزادی  $a$  می‌باشد. و با استفاده از رابطه‌ی  $\mathbb{E}X = \mathbb{E}\mathbb{E}[X|Y]$  می‌توان واریانس برآوردگرها را بدست آورد.

## ۳.۴ محاسبه واریانس برآوردگرها

### IPA ۱.۳.۴

با توجه به خاصیت امید ریاضی دوگانه و واریانس برآوردگر IPA برای مدل گوسی داریم

$$Var(D^{IPA}) = \mathbb{E}\mathbb{E}\left(\frac{Z^2}{U}g'(\frac{\sigma Z}{\sqrt{U}} + \mu)|U\right) - \mathbb{E}^2\mathbb{E}\left(\frac{Z}{\sqrt{U}}g'(\sigma Z + \mu)|U\right) \quad (2.4)$$

حال برای تابع عملکرد  $g(x) = x^p$  و با فرض  $\mu = 0$  داریم

$$g'(\frac{\sigma z}{\sqrt{u}}) = p^2 \frac{\sigma^{2p-2} z^{2p-2}}{u^{p-1}}$$

در نتیجه واریانس برآوردگر  $IPA$  با توجه به عبارت (۲.۴) به صورت زیر بدست می‌آید

$$\mathbb{E}\mathbb{E}\left[\frac{Z^\nu p^\nu \sigma^{\nu p - \nu} Z^{\nu p - \nu}}{U^{p-1}} | U\right] = p^\nu \sigma^{\nu p - \nu} \int u^{-p} h(u) du \int z^{\nu p} f(z) dz \quad (۳.۴)$$

$$= p^\nu \sigma^{\nu p - \nu} \beta^p (\nu p - 1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha)} \quad (۴.۴)$$

و مانند بالا داریم

$$\mathbb{E}\mathbb{E}\left[\frac{Z p \sigma^{p-1} Z^{p-1}}{\sqrt{U} U^{\frac{p-1}{\nu}}} | U\right] = p \sigma^{p-1} \beta^{\frac{p}{\nu}} (p - 3)!! \frac{\Gamma(\alpha - \frac{p}{\nu})}{\Gamma(\alpha)} \quad (۵.۴)$$

از (۳.۴) و (۵.۴) نتیجه زیر بدست می‌آید

$$Var(D^{IPA}) = p^\nu \sigma^{\nu p - \nu} \beta^p (\nu p - 1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha)} - p^\nu \sigma^{\nu p - \nu} \beta^p ((p - 3)!!)^2 \left(\frac{\Gamma(\alpha - \frac{p}{\nu})}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 \quad (۶.۴)$$

### SF ۲.۳.۴

به کمک واریانس بدست‌آمده در مورد سیستم‌های گوسی در فصل قبل داریم

$$\begin{aligned} Var(D^{SF}) &= \mathbb{E}\mathbb{E}\left(g^\nu(X) \left(\frac{X^\nu}{\sigma^\nu} - \frac{1}{\sigma}\right)^\nu | U\right) - \mathbb{E}^\nu \mathbb{E}\left(g(X) \left(\frac{X^\nu}{\sigma^\nu} - \frac{1}{\sigma}\right) | U\right) \\ &= \mathbb{E}\mathbb{E}\left(g^\nu\left(\frac{\sigma z}{\sqrt{U}}\right) \frac{(Z^\nu - U)^\nu}{U^\nu \sigma^\nu} | U\right) - \mathbb{E}^\nu \mathbb{E}\left(g\left(\frac{\sigma z}{\sqrt{u}} \frac{Z^\nu - U}{U \sigma}\right) | U\right) \end{aligned} \quad (۷.۴)$$

با فرض  $g(x) = x^p$  داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathbb{E}\left(\frac{\sigma^{\nu p} Z^{\nu p} (Z^\nu - U)^\nu}{U^p U^\nu \sigma^\nu} | U\right) &= \int \int \frac{\sigma^{\nu p - \nu}}{u^{p+\nu}} (z^{\nu p + \nu} + u^\nu z^{\nu p} - \nu u z^{\nu p + \nu}) f(z) h(u) dz du \\ &= \sigma^{\nu p - \nu} [(\nu p + 3)!! \int u^{-p-\nu} h(u) du \\ &\quad + (\nu p - 1)!! \int u^{-p} h(u) du - \nu (\nu p + 1)!! \int u^{-(p+1)} h(u) du] \\ &= I \end{aligned}$$

که در آن با فرض  $\alpha - p - \nu > 0$  می توان نوشت

$$I = \sigma^{\nu p - \nu} [(\nu p + \nu)!! \frac{\Gamma(\alpha - p - \nu)}{\Gamma(\alpha)} \beta^{p+\nu} + (\nu p - 1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha)} \beta^p - \nu(\nu p + 1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p - 1)}{\Gamma(\alpha)} \beta^{p+1}] \quad (۸.۴)$$

در نتیجه داریم

$$\mathbb{E}\mathbb{E}\left[\frac{\sigma^p Z^p}{U^{\frac{p}{\nu}}} \left(\frac{Z^\nu - U}{U\sigma}\right) | U\right] = \sigma^{p-1} [(p+1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p/\nu - 1)}{\Gamma(\alpha)} \beta^{\frac{p}{\nu}+1} - (p-1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p/\nu)}{\Gamma(\alpha)} \beta^{\frac{p}{\nu}}] \quad (۹.۴)$$

در نهایت با استفاده از روابط (۸.۴) و (۹.۴) واریانس برآوردگر  $SF$  به صورت زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} Var(D^{SF}) &= \sigma^{\nu p - \nu} \beta^{p+\nu} (\nu p + \nu)!! \frac{\Gamma(\alpha - p - \nu)}{\Gamma(\alpha)} + \sigma^{\nu p - \nu} \beta^p (\nu p - 1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha)} \\ &- \sigma^{\nu p - \nu} \beta^{p+1} \nu(\nu p + 1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p - 1)}{\Gamma(\alpha)} - \sigma^{\nu p - \nu} \beta^p ((p-1)!!)^2 \left(\frac{\Gamma(\alpha - p/\nu)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 \\ &+ \nu \sigma^{\nu p - \nu} \beta^{p+\nu} (p+1)!! (p-1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p/\nu - 1) \Gamma(\alpha - p/\nu)}{(\Gamma(\alpha))^2} \\ &- \sigma^{\nu p - \nu} \beta^{p+\nu} ((p+1)!!)^2 \left(\frac{\Gamma(\alpha - p/\nu - 1)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 \end{aligned} \quad (۱۰.۴)$$

### MVD ۳.۳.۴

واریانس برآوردگر MVD با استفاده از رابطه‌ی

$$Var(X) = \mathbb{E}Var(X|Y) + Var\mathbb{E}(X|Y)$$

به صورت زیر محاسبه می شود

$$\begin{aligned} Var(D^{MVD}) &= \frac{1}{\sigma^2} [Var(g(X^+) - Var(g(X))] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \{ \mathbb{E}[Var(g(\frac{\sigma Z^+}{\sqrt{U}}) | U)] + Var[\mathbb{E}(g(\frac{\sigma Z^+}{\sqrt{U}}) | U)] \\ &+ \mathbb{E}[Var(g(\frac{\sigma Z}{\sqrt{U}}) | U)] + Var[\mathbb{E}(g(\frac{\sigma Z}{\sqrt{U}}) | U)] \} \end{aligned} \quad (۱۱.۴)$$

و برای  $g(x) = x^p$  با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} \text{Var}(g(\frac{\sigma Z}{\sqrt{U}})|U) &= \text{Var}(\frac{\sigma^p Z^p}{U^{\frac{p}{2}}}|U) \\ &= \mathbb{E}(\frac{\sigma^{2p} Z^{2p}}{U^p}|U) - \mathbb{E}^2(\frac{\sigma^p Z^p}{U^{\frac{p}{2}}}|U) \\ &= \sigma^{2p} \beta^p (2p + 1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

و با جایگذاری در رابطه‌ی (۱۱.۴) داریم

$$\begin{aligned} \text{Var}(D^{MVD}) &= \sigma^{2p-2} \beta^p (2p - 1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha)} - \sigma^{2p-2} \beta^p ((p - 1)!!)^2 (\frac{\Gamma(\alpha - p/2)}{\Gamma(\alpha)})^2 \\ &\quad + \sigma^{2p-2} \beta^p (2p + 1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha)} - \sigma^{2p-2} \beta^p ((p + 1)!!)^2 (\frac{\Gamma(\alpha - p/2)}{\Gamma(\alpha)})^2 \end{aligned} \quad (12.4)$$

### CP ۴.۳.۴

واریانس برآوردگر CP برای تابع هزینه کلی  $g(x)$  به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} \text{Var}(D^{Cph}) &= \frac{1}{\sigma^2} [\text{Var}(g(X^+) + \text{Var}(g(X)) - 2\text{Cov}(g(X^+), g(X))] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \{ \mathbb{E}[\text{Var}(g(\frac{\sigma Z^+}{\sqrt{U}})|U)] + \text{Var}[\mathbb{E}(g(\frac{\sigma Z^+}{\sqrt{U}})|U)] \\ &\quad + \mathbb{E}[\text{Var}(g(\frac{\sigma Z}{\sqrt{U}})|U)] + \text{Var}[\mathbb{E}(g(\frac{\sigma Z}{\sqrt{U}})|U)] \\ &\quad - 2\mathbb{E}\mathbb{E}(g(\frac{\sigma Z^+}{\sqrt{U}})g(\frac{\sigma Z}{\sqrt{U}})|U) + 2\mathbb{E}\mathbb{E}(g(\frac{\sigma Z^+}{\sqrt{U}})|U)\mathbb{E}\mathbb{E}(g(\frac{\sigma Z}{\sqrt{U}})|U) \end{aligned}$$

و برای حالت خاص  $g(x) = x^p$  با توجه به نحوه‌ی محاسبات برآوردگر MVD داریم

$$\begin{aligned} \text{Var}(D^{Cph}) &= \sigma^{2p-2} \beta^p (2p + 1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha)} - \sigma^{2p-2} \beta^p ((p + 1)!!)^2 (\frac{\Gamma(\alpha - p/2)}{\Gamma(\alpha)})^2 \\ &\quad + \sigma^{2p-2} \beta^p (2p - 1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha)} - \sigma^{2p-2} \beta^p ((p - 1)!!)^2 (\frac{\Gamma(\alpha - p/2)}{\Gamma(\alpha)})^2 \\ &\quad - \frac{2}{p + 1} \sigma^{2p-2} \beta^p [(2p + 1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha)} - ((p + 1)!!)^2 (\frac{\Gamma(\alpha - p/2)}{\Gamma(\alpha)})^2] \end{aligned} \quad (13.4)$$

لم ۱.۳.۴. طبق مفروضات این بخش، رابطه‌ی زیر بین واریانس برآوردگرهای  $Cp$  و  $MVD$  و  $IPA$  برقرار است.

$$Var(D^{Cp}) < Var(D^{MVD}) < Var(D^{IPA}) \quad (۱۴.۴)$$

برهان. با توجه به عبارات بدست آمده در بالا و تفاضل هر دو واریانس می‌توان به رابطه‌ی فوق دست یافت.

$$Var(D^{IPA}) - Var(D^{MVD}) = (p^2 - 1 - (2p + 1))\sigma^{2p-2}\beta^p(2p - 1)!! \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha)} \\ + (-p^2(p - 3)^2 + 1 + (p + 1)^2(p - 3)^2)\sigma^{2p-2}\beta^p((2p - 3)!!)^2 \left(\frac{\Gamma(\alpha - p/2)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2$$

حال اگر  $p \geq 3$  داریم

$$p^2 - 2p - 2 > 0$$

$$2p^3 - 11p^2 + 12p + 10 > 0$$

در نتیجه

$$Var(D^{IPA}) - Var(D^{MVD}) > 0$$

حال برای اثبات قسمت اول نامساوی به آسانی می‌توان بدست آورد

$$Var(D^{MVD}) - Var(D^{Cp}) = \frac{2}{p + 1}\sigma^{2p-2}\beta^p[(2p + 1)!!] \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha)} \\ + ((p + 1)!!)^2 \left(\frac{\Gamma(\alpha - p/2)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 > 0$$

□

و نامساوی مطلوب حاصل می‌شود.



## پیشنهادات آینده

- در این پایان نامه به برآوردهای مشتق نااریب پرداخته شد و از نظر واریانس مقایسه شدند ، می توان به برآوردهای اریب پرداخته شود.
- پیشنهاد می شود در زمینه ی مالی حساسیت تابع قیمت گذاری نسبت به پارامترهای دیگر برآورد شود.
- می توان برآوردگری با واریانس کمتر بدست آورد.

# آپوست

## کدهای برنامه‌نویسی برای شبکه‌ی فعال تصادفی

### ۱.آ SAN.m

```
function[] = SAN (option,stdev,start,NN)

% This function is a simulation of a Stochastic Activity Network (SAN) which
% is presented by Fu, 'Sensitivity Analysis for Stochastic Activity
% Networks', (2005). This program calculates the the IPA, SF, WD derivatives
% of the SAN as well as the square of the Stochastic Activity Network (SAN2)

% Inputs:

%

% seed = initial value of pseudo random number generator (PRNG)

% N = number of trials

% ----- Simulation -----

seed = start;
```

---

```
N = NN;

rand('twister',seed);

% Mean operation times at each of the arcs
t1 = [6,8,5,8,4,7];

sigma = stdev;

% Initialization of the vectors for the SAN, SAN2, and the derivative
% estimators for SAN and SAN2

IPAComplete = [];
IPAComplete2 = [];
SFcomplete = [];
SFcomplete2 = [];
WDcomplete = [];
WDcomplete2 = [];
SANcomplete = [];
node1test = [];

% Simulating one run of the Stochastic Activity Network
%
% dm1 = vector of Double Maxwell (DM) RV parm. (ti,sigma^2)
% n1 = vector of Normal RV par, (t_i,sigma^2)
% dm1std = standard DM(0,1) RV
% n1std = standard N(0,1) RV
% w1 = Weibull RV (W(alpha,beta)) with parm alpha = 2, beta = 1/4
```

```

%
% node = Random Variable at each of the activity nodes
% node2 = Square of the RV at each of the activity nodes
% ESTIMATORnode = Derivative estimator at each of the nodes
% ESTIMATORnode2 = Derivative estimator for the square of each node
% SFfactor = D_sigma ln f_(x;sigma) for each of the activity arcs
% WD2(3,4)factor = calculation of the performance function at each node
% where of the RV is a double maxwell distributed for the WD estimator
% kdummy = dummy RV to ascertain WD estimator)
% WD2(3,4)factor2 = As for WD2(3,4)factor but for SAN2
%
% ESTIMATORmoment = Calculation of the first four moments of each of the
% derivative estimators (IPA,SF,WD). Row entries = given moments for each
% node. Column entries = all moments for a given node.
% ESTIMATORmoment2 = As for ESTIMATOR2 moment by for square of the
% Stochastic Activity Network
%
% SANmoment = Calculation of the first four moments of the Stochastic
% Activity Network.
%
% ESTIMATORcomplete = vector of the derivative estimator at node 4
% (completion) of the SAN

```

```
%  
  
% SANcomplete = vector of completion times of the Stochastic activity  
  
% network;  
  
dm1 = zeros([6,1]);  
  
n1 = zeros([6,1]);  
  
dm1std = zeros([6,1]);  
  
n1std = zeros([6,1]);  
  
node = zeros([4,1]);  
  
IPAnode = zeros([4,1]);  
  
IPAnode2 = zeros([4,1]);  
  
SFfactor = zeros([6,1]);  
  
SFnode = zeros([4,1]);  
  
SFnode2 = zeros([4,1]);  
  
WD2factor = zeros([3,1]);  
  
WD2factor2 = zeros([3,1]);  
  
WD3factor = zeros([5,1]);  
  
WD3factor2 = zeros([5,1]);  
  
WD4factor = zeros([6,1]);  
  
WD4factor2 = zeros([6,1]);  
  
kdummy = zeros([6,1]);  
  
WDnode = zeros([4,1]);  
  
WDnode2 = zeros([4,1]);
```

```
IPAmoment = zeros([4,4]);
IPAmoment2 = zeros([4,4]);
SFmoment = zeros([4,4]);
SFmoment2 = zeros([4,4]);
WDMoment = zeros([4,4]);
WDMoment2 = zeros([4,4]);
SANmoment = zeros([4,4]);
for i=1:N
for j=1:6
% Generation of Double Maxwell RV (dm1(j)) and Normal RV (norm1(j)) by
% acceptance-rejection method.
u1 = rand(1);
w1 = sqrt(-4.*log(u1));
u2 = rand(1);
while u2 > 1.16582199.*u1.*w1
u1 = rand(1);
w1 = sqrt(-4.*log(u1));
u2 = rand(1);
end
u3 = rand(1);
if u3 <= 0.5
dm1std(j) = -w1;
```

```
else

dm1std(j) = w1;

end

u4 = rand(1);

n1std(j) = dm1std(j).*u4;

dm1(j) = t1(j) + dm1std(j).*sigma;

n1(j) = t1(j) + n1std(j).*sigma;

end

% Calculation of the derivative estimators (IPA, SF, WD) of the completion

% times at each of the nodes (ESTIMATORnode1, ..., ESTIMATORnode4):

node(1) = n1(1);

node(2) = max(n1(2), n1(1) + n1(3));

node(3) = max(n1(1) + n1(3) + n1(5), max(n1(1) + n1(4), n1(2) + n1(5)));

node(4) = node(3) + n1(6);

node1test = [node1test;node(1)];

% IPA

IPANode(1) = n1std(1);

% Node 2

if n1(1) + n1(3) >= n1(2)

IPANode(2) = n1std(1) + n1std(3);

else

IPANode(2) = n1std(2);
```

```

end

% Node 3

if n1(1) + n1(3) + n1(5) >= max(n1(1) + n1(4), n1(2) + n1(5))

IPAnode(3) = n1std(1) + n1std(3) + n1std(5);

elseif n1(1) + n1(4) >= n1(2) + n1(5)

IPAnode(3) = n1std(1) + n1std(4);

else

IPAnode(3) = n1std(2) + n1std(5);

end

IPAnode(4) = IPAnode(3) + n1std(6);

% IPA2 - IPA estimator for the square of SAN

for k = 1:4

IPAnode2(k) = 2.*IPAnode(k).*node(k);

end

% SF

% Determination of D_sigma ln f(x;sigma)

for k=1:6

SFfactor(k) = ((n1std(k).^2)-1)./sigma;

end

SFnode(1) = node(1).*SFfactor(1);

SFnode(2) = node(2).*sum(SFfactor(1:3));

SFnode(3) = node(3).*sum(SFfactor(1:5));

```



```
SFnode(4) = node(4).*sum(SFfactor(1:6));

% SF2

for k=1:4

SFnode2(k) = SFnode(k).*node(k);

end

% WD & WD2

% node 1

WDnode(1) = (1./sigma).*(dm1(1)-n1(1));
WDnode2(1) = (1./sigma).*(dm1(1).^2-n1(1).^2);

%Node 2

for l=1:3

for m=1:3

if m == 1

kdummy(m) = dm1(m);

else

kdummy(m) = n1(m);

end

end

WD2factor(1) = max(kdummy(2),kdummy(1)+kdummy(3));
WD2factor2(1) = WD2factor(1).^2;

end

WDnode(2) = (1./sigma).*(sum(WD2factor)-3.*node(2));
```

```

WDnode2(2) = (1./sigma).*(sum(WD2factor2)-3.*(node(2).^2));

%Node 3 & 4

for l=1:5
for m=1:5
if m == 1
kdummy(m) = dm1(m);
else
kdummy(m) = n1(m);
end
end

WD3factor(1) = max(kdummy(1)+kdummy(3)+kdummy(5), max(kdummy(1)+kdummy(4)
,kdummy(2)+kdummy(5)));

WD3factor2(1) = WD3factor(1).^2;

WD4factor(1) = WD3factor(1) + n1(6);

WD4factor2(1) = WD4factor(1).^2;

end

WD4factor(6) = node(3) + dm1(6);

WD4factor2(6) = WD4factor(6).^2;

WDnode(3) = (1./sigma).*(sum(WD3factor)-5.*node(3));

WDnode2(3) = (1./sigma).*(sum(WD3factor2)-5.*(node(3).^2));

WDnode(4) = (1./sigma).*(sum(WD4factor)-6.*node(4));

WDnode2(4) = (1./sigma).*(sum(WD4factor2)-6.*(node(4).^2));

```

---

```

% Calculation of moments

for p=1:4
for r=1:4

IPAmoment(r,p) = IPAmoment(r,p) + IPANode(p).^r;

IPAmoment2(r,p) = IPAmoment2(r,p) + IPANode2(p).^r;

SFmoment(r,p) = SFmoment(r,p) + SFnode(p).^r;

SFmoment2(r,p) = SFmoment2(r,p) + SFnode2(p).^r;

WDmoment(r,p) = WDmoment(r,p) + WDnode(p).^r;

WDmoment2(r,p) = WDmoment2(r,p) + WDnode2(p).^r;

SANmoment(r,p) = SANmoment(r,p) + node(p).^r;

end

end

% Updating vectors for the completion and derivative estimators of node 4
% of the Stochastic Activity Network.

IPAcomplete = [IPAcomplete; IPANode(4)];

IPAcomplete2 = [IPAcomplete2;IPANode2(4)];

SFcomplete = [SFcomplete; SFnode(4)];

SFcomplete2 = [SFcomplete2;SFnode2(4)];

WDcomplete = [WDcomplete; WDnode(4)];

WDcomplete2 = [WDcomplete2;WDnode2(4)];

SANcomplete = [SANcomplete; node(4)];

end

```

```
%average = toc/N

% ----- Analysis ----- %

% Statistics

% ESTIMATORmean = Gives the mean for the derivative estimator for all nodes
%in the stochastic activity network.

% Row entries = provides the statistics for a given node for the SAN.

%

% ESTIMATORmean2 = As for ESTIMATORstats but for the square of the
% Stochastic Activity Network.

%

% ESTIMATORconf(2) = Approximate 95% confidence interval for each node
% for each of the derivative estimators for the Stochastic Activity
% Network and SAN2 (mean - 2se, mean + 2se).

%

% SANstats = Gives the statistics for the for each node on the Stochastic
% Activity Network. Row and column entries are analogous to the above entry.

%

% SANconf = Approximate 95% confidence interval for each node of the SAN.
% (mean - 2se, mean + 2se)

IPAmean = zeros([2,4]);

IPAmean2 = zeros([2,4]);

SFmean = zeros([2,4]);
```

---

```

SFmean2 = zeros([2,4]);
WDmean = zeros([2,4]);
WDmean2 = zeros([2,4]);
IPAconf = zeros([2,4]);
IPAconf2 = zeros([2,4]);
SFconf = zeros([2,4]);
SFconf2 = zeros([2,4]);
WDconf = zeros([2,4]);
WDconf2 = zeros([2,4]);
SANstats = zeros([4,4]);
SANconf = zeros([2,4]);

fprintf(1, 'Estimator node SAN-mean variance SAN2-mean variance\n\n')
fprintf(1, 'Power = 0.95 Confidence Interval \n\n')
for s=1:4
% IPA mean and variance
IPAmean(1,s) = IPAmoment(1,s)./N;
IPAmean(2,s) = (IPAmoment(2,s) - (IPAmoment(1,s).^2)./N)./(N-1);
IPAmean2(1,s) = IPAmoment2(1,s)./N;
IPAmean2(2,s) = (IPAmoment2(2,s) - (IPAmoment2(1,s).^2)./N)./(N-1);
IPAconf(1,s) = IPAmean(1,s) - 1.96.*sqrt(IPAmean(2,s)./N);
IPAconf(2,s) = IPAmean(1,s) + 1.96.*sqrt(IPAmean(2,s)./N);
IPAconf2(1,s) = IPAmean2(1,s) - 1.96.*sqrt(IPAmean2(2,s)./N);

```

```

IPAconf2(2,s) = IPAmean2(1,s) + 1.96.*sqrt(IPAmean2(2,s)./N);
fprintf(1,'IPA %d %8.7e %8.7e %8.7e %8.7e \n',s, IPAmean(1,s),
IPAmean(2,s),IPAmean2(1,s),IPAmean2(2,s))
fprintf(1,'IPA (%8.7e , %8.7e) (%8.7e , %8.7e) \n\n', IPAconf(1,s),
IPAconf(2,s),IPAconf2(1,s), IPAconf2(2,s))
end

for s=1:4

% SF mean and variance
SFmean(1,s) = SFmoment(1,s)./N;
SFmean(2,s) = (SFmoment(2,s) - (SFmoment(1,s).^2)./N)./(N-1);
SFmean2(1,s) = SFmoment2(1,s)./N;
SFmean2(2,s) = (SFmoment2(2,s) - (SFmoment2(1,s).^2)./N)./(N-1);
SFconf(1,s) = SFmean(1,s) - 1.96.*sqrt(SFmean(2,s)./N);
SFconf(2,s) = SFmean(1,s) + 1.96.*sqrt(SFmean(2,s)./N);
SFconf2(1,s) = SFmean2(1,s) - 1.96.*sqrt(SFmean2(2,s)./N);
SFconf2(2,s) = SFmean2(1,s) + 1.96.*sqrt(SFmean2(2,s)./N);
fprintf(1,'SF %d %8.7e %8.7e %8.7e %8.7e\n',s, SFmean(1,s),SFmean(2,s)
,SFmean2(1,s),SFmean2(2,s))
fprintf(1,'SF (%8.7e , %8.7e) (%8.7e , %8.7e) \n\n', SFconf(1,s),
SFconf(2,s),SFconf2(1,s), SFconf2(2,s))
end

for s=1:4

```

---

```

% WD mean and variance

WDmean(1,s) = WDMoment(1,s)./N;

WDmean(2,s) = (WDMoment(2,s) - (WDMoment(1,s).^2)./N)./(N-1);

WDmean2(1,s) = WDMoment2(1,s)./N;

WDmean2(2,s) = (WDMoment2(2,s) - (WDMoment2(1,s).^2)./N)./(N-1);

WDconf(1,s) = WDmean(1,s) - 1.96.*sqrt(WDmean(2,s)./N);

WDconf(2,s) = WDmean(1,s) + 1.96.*sqrt(WDmean(2,s)./N);

WDconf2(1,s) = WDmean2(1,s) - 1.96.*sqrt(WDmean2(2,s)./N);

WDconf2(2,s) = WDmean2(1,s) + 1.96.*sqrt(WDmean2(2,s)./N);

fprintf(1,'WD %d %8.7e %8.7e %8.7e %8.7e\n',s, WDmean(1,s),WDmean(2,s)
,WDmean2(1,s),WDmean2(2,s))

fprintf(1,'WD (%8.7e , %8.7e) (%8.7e , %8.7e) \n\n', WDconf(1,s),
WDconf(2,s),WDconf2(1,s), WDconf2(2,s))

end

for s=1:4

% SAN statistics

SANstats(1,s) = SANmoment(1,s)./N;

SANstats(2,s) = (SANmoment(2,s) - (SANmoment(1,s).^2)./N)./(N-1);

SANconf(1,s) = SANstats(1,s) - 1.96.*sqrt(SANstats(2,s)./N);

SANconf(2,s) = SANstats(1,s) + 1.96.*sqrt(SANstats(2,s)./N);

fprintf(1, 'SAN %d %6.4f %6.4f (%6.4f , %6.4f)\n\n', s, SANstats(1,s),
SANstats(2,s),SANconf(1,s), SANconf(2,s))

```

```
end

if option == 1

% Empricial Distribution Functions (EDF)

figure (1)

ecdf(IPAcomplete)

title('EDF for the IPA derivative estimator of SAN')

xlabel('x'), ylabel('F_D_1(x)')

axis tight

figure (2)

ecdf(IPAcomplete2)

title('EDF for the IPA derivative estimator of SAN2')

xlabel('x'), ylabel('F_D_1(x)')

axis tight

figure (3)

ecdf(SFcomplete)

title('EDF for the SF derivative estimator of SAN')

xlabel('x'), ylabel('F_D_2(x)')

axis tight

figure (4)

ecdf(SFcomplete2)

title('EDF for the SF derivative estimator of SAN2')

xlabel('x'), ylabel('F_D_2(x)')
```



```
axis tight
figure (5)
ecdf(WDcomplete)
title('EDF for the WD derivative estimator of SAN')
xlabel('x'), ylabel('F_D_3(x)')
axis tight
figure (6)
ecdf(WDcomplete2)
title('EDF for the WD derivative estimator of SAN2')
xlabel('x'), ylabel('F_D_3(x)')
axis tight
figure (7)
ecdf(SANcomplete)
title('EDF for the Stochastic Activity Network')
xlabel('x'), ylabel('F_X^(4)')
axis tight
else
end
```

## **SANdet.m ٢.١**

```
function[] = SANdet (option,stdev,tcomp,scalar,start,NN)
% This function is a simulation of a Stochastic Activity Network (SAN) which
```

```
% is presented by Fu, 'Sensitivity Analysis for Stochastic Activity
% Networks', (2005). This program calculates the the IPA, SF, WD derivatives
% of the SAN as well as the square of the Stochastic Activity Network (SAN2)
% Inputs:
%
% seed = initial value of pseudo random number generator (PRNG)
% N = number of trials
% M = #(SAN <= T)
% prob = P(SAN <= T)
% ----- Simulation -----
seed = start;
N = NN;
M = 0;
T = tcomp;
sc = scalar;
rand('twister',seed);
% Mean operation times at each of the arcs
t1 = [6,8,5,8,4,7];
sigma = stdev;
% Initialization of the vectors for the SAN, SAN2, and the derivative
% estimators for SAN and SAN2
IPAcomplete = [];
```

```
IPAcomplete2 = [];  
SFcomplete = [];  
SFcomplete2 = [];  
WDcomplete = [];  
WDcomplete2 = [];  
SANcomplete = [];  
node1test = [];  
  
% Simulating one run of the Stochastic Activity Network  
%  
% dm1 = vector of Double Maxwell (DM) RV parm. (ti,sigma^2)  
% n1 = vector of Normal RV par, (t_i,sigma^2)  
% dm1std = standard DM(0,1) RV  
% n1std = standard N(0,1) RV  
% w1 = Weibull RV (W(alpha,beta)) with parm alpha = 2, beta = 1/4  
%  
% node = Random Variable at each of the activity nodes  
% node2 = Square of the RV at each of the activity nodes  
% ESTIMATORnode = Derivative estimator at each of the nodes  
% ESTIMATORnode2 = Derviative estimator for the square of each node  
% SFfactor = D_sigma lnf_(x;sigma) for each of the activity arcs  
% WD2(3,4)factor = calculation of the performance function at each node  
% where of the RV is a double maxwell distrubuted for the WD estimator
```

```
% kdummy = dummy RV to ascertain WD estimator)

% WD2(3,4)factor2 = As for WD2(3,4)factor but for SAN2

%

% ESTIMATORmoment = Calculation of the first four moments of each of the
% derivative estimators (IPA,SF,WD). Row entries = given moments for each
% node. Column entries = all moments for a given node.

% ESTIMATORmoment2 = As for ESTIMATOR2 moment by for square of the
% Stochastic Activity Network

%

% SANmoment = Calculation of the first four moments of the Stochastic
% Activity Network.

%

% ESTIMATORcomplete = vector of the derivative estimator at node 4
% (completion) of the SAN

%

% SANcomplete = vector of completion times of the Stochastic activity
% network;

dm1 = zeros([6,1]);

n1 = zeros([6,1]);

dm1std = zeros([6,1]);

n1std = zeros([6,1]);

node = zeros([4,1]);
```

```
IPAnode = zeros([4,1]);
IPAnode2 = zeros([4,1]);
SFfactor = zeros([6,1]);
SFnode = zeros([4,1]);
SFnode2 = zeros([4,1]);
WD2factor = zeros([3,1]);
WD2factor2 = zeros([3,1]);
WD3factor = zeros([5,1]);
WD3factor2 = zeros([5,1]);
WD4factor = zeros([6,1]);
WD4factor2 = zeros([6,1]);
kdummy = zeros([6,1]);
WDnode = zeros([4,1]);
WDnode2 = zeros([4,1]);
IPAmoment = zeros([4,4]);
IPAmoment2 = zeros([4,4]);
SFmoment = zeros([4,4]);
SFmoment2 = zeros([4,4]);
WDmoment = zeros([4,4]);
WDmoment2 = zeros([4,4]);
SANmoment = zeros([4,4]);
for i=1:N
```

```
for j=1:6

% Generation of Double Maxwell RV (dm1(j)) and Normal RV (norm1(j)) by
% acceptance-rejection method.

u1 = rand(1);

w1 = sqrt(-4.*log(u1));

u2 = rand(1);

while u2 > 1.16582199.*u1.*w1

u1 = rand(1);

w1 = sqrt(-4.*log(u1));

u2 = rand(1);

end

u3 = rand(1);

if u3 <= 0.5

dm1std(j) = -w1;

else

dm1std(j) = w1;

end

u4 = rand(1);

n1std(j) = dm1std(j).*u4;

dm1(j) = t1(j) + dm1std(j).*sigma;

n1(j) = t1(j) + n1std(j).*sigma;

end
```

---

```

% Calculation of the derivative estimators (IPA, SF, WD) of the completion
% times at each of the nodes (ESTIMATORnode1, ..., ESTIMATORnode4):
node(1) = n1(1);
node(2) = max(n1(2), n1(1) + n1(3));
node(3) = max(n1(1) + n1(3) + n1(5), max(n1(1) + n1(4), n1(2) + n1(5)));
node(4) = max(node(3) + n1(6),T);

if node(4) <= T

M = M + 1;

end

node1test = [node1test;node(1)];

% IPA
IPANode(1) = n1std(1);

% Node 2
if n1(1) + n1(3) >= n1(2)
IPANode(2) = n1std(1) + n1std(3);
else
IPANode(2) = n1std(2);
end

% Node 3
if n1(1) + n1(3) + n1(5) >= max(n1(1) + n1(4),n1(2) + n1(5))
IPANode(3) = n1std(1) + n1std(3) + n1std(5);
elseif n1(1) + n1(4) >= n1(2) + n1(5)

```

```
IPAnode(3) = n1std(1) + n1std(4);

else

IPAnode(3) = n1std(2) + n1std(5);

end

%Node 4

if node(3) + n1(6) >= T

IPAnode(4) = IPAnode(3) + n1std(6);

else

IPAnode(4) = 0;

end

% IPA2 - IPA estimator for the square of SAN

for k = 1:4

IPAnode2(k) = 2.*IPAnode(k).*node(k);

end

% SF

% Determination of D_sigma ln f(x;sigma)

for k=1:6

SFfactor(k) = ((n1std(k).^2)-1)./sigma;

end

SFnode(1) = node(1).*SFfactor(1);

SFnode(2) = node(2).*sum(SFfactor(1:3));

SFnode(3) = node(3).*sum(SFfactor(1:5));
```



---

```

SFnode(4) = node(4).*sum(SFfactor(1:6));

% SF2

for k=1:4

SFnode2(k) = SFnode(k).*node(k);

end

% WD & WD2

% node 1

WDnode(1) = (1./sigma).*(dm1(1)-n1(1));
WDnode2(1) = (1./sigma).*(dm1(1).^2-n1(1).^2);

%Node 2

for l=1:3

for m=1:3

if m == 1

kdummy(m) = dm1(m);

else

kdummy(m) = n1(m);

end

end

WD2factor(1) = max(kdummy(2),kdummy(1)+kdummy(3));
WD2factor2(1) = WD2factor(1).^2;

end

WDnode(2) = (1./sigma).*(sum(WD2factor)-3.*node(2));

```

```

WDnode2(2) = (1./sigma).*(sum(WD2factor2)-3.*(node(2).^2));

%Node 3 & 4

for l=1:5
    for m=1:5
        if m == 1
            kdummy(m) = dm1(m);
        else
            kdummy(m) = n1(m);
        end
    end
end

WD3factor(1) = max(kdummy(1)+kdummy(3)+kdummy(5), max(kdummy(1)+kdummy(4)
,kdummy(2)+kdummy(5)));

WD3factor2(1) = WD3factor(1).^2;

WD4factor(1) = max(WD3factor(1) + n1(6),T);

WD4factor2(1) = WD4factor(1).^2;

end

WD4factor(6) = max(node(3) + dm1(6),T);

WD4factor2(6) = WD4factor(6).^2;

WDnode(3) = (1./sigma).*(sum(WD3factor)-5.*node(3));

WDnode2(3) = (1./sigma).*(sum(WD3factor2)-5.*(node(3).^2));

WDnode(4) = (1./sigma).*(sum(WD4factor)-6.*node(4));

WDnode2(4) = (1./sigma).*(sum(WD4factor2)-6.*(node(4).^2));

```

---

```

% Calculation of moments

for p=1:4
for r=1:4

IPAmoment(r,p) = IPAmoment(r,p) + IPANode(p).^r;

IPAmoment2(r,p) = IPAmoment2(r,p) + IPANode2(p).^r;

SFmoment(r,p) = SFmoment(r,p) + SFnode(p).^r;

SFmoment2(r,p) = SFmoment2(r,p) + SFnode2(p).^r;

WDmoment(r,p) = WDmoment(r,p) + WDnode(p).^r;

WDmoment2(r,p) = WDmoment2(r,p) + WDnode2(p).^r;

SANmoment(r,p) = SANmoment(r,p) + node(p).^r;

end

end

% Updating vectors for the completion and derivative estimators of node 4
% of the Stochastic Activity Network.

IPAcomplete = [IPAcomplete; IPANode(4)];

IPAcomplete2 = [IPAcomplete2;IPANode2(4)];

SFcomplete = [SFcomplete; SFnode(4)];

SFcomplete2 = [SFcomplete2;SFnode2(4)];

WDcomplete = [WDcomplete; WDnode(4)];

WDcomplete2 = [WDcomplete2;WDnode2(4)];

SANcomplete = [SANcomplete; node(4)];

end

```

```
prob = M/N

% ----- Analysis ----- %

% Statistics

% ESTIMATORmean = Gives the mean for the derivative estimator for all nodes
%in the stochastic activity network.

% Row entries = provides the statistics for a given node for the SAN.

%

% ESTIMATORmean2 = As for ESTIMATORstats but for the square of the
% Stochastic Activity Network.

%

% ESTIMATORconf(2) = Approximate 95% confidence interval for each node
% for each of the derivative estimators for the Stochastic Activity
% Network and SAN2 (mean - 2se, mean + 2se).

%

% SANstats = Gives the statistics for the for each node on the Stochastic
% Activity Network. Row and column entries are analogous to the above entry.

%

% SANconf = Approximate 95% confidence interval for each node of the SAN.
% (mean - 2se, mean + 2se)

IPAmean = zeros([2,4]);

IPAmean2 = zeros([2,4]);

SFmean = zeros([2,4]);
```

---

```

SFmean2 = zeros([2,4]);
WDmean = zeros([2,4]);
WDmean2 = zeros([2,4]);
IPAconf = zeros([2,4]);
IPAconf2 = zeros([2,4]);
SFconf = zeros([2,4]);
SFconf2 = zeros([2,4]);
WDconf = zeros([2,4]);
WDconf2 = zeros([2,4]);
SANstats = zeros([4,4]);
SANconf = zeros([2,4]);

fprintf(1, 'Estimator node SAN-mean variance SAN2-mean variance\n\n')
fprintf(1, 'Power = 0.95 Confidence Interval \n\n')
for s=1:4
% IPA mean and variance
IPAmean(1,s) = IPAmoment(1,s)./N;
IPAmean(2,s) = (IPAmoment(2,s) - (IPAmoment(1,s).^2)./N)./(N-1);
IPAmean2(1,s) = IPAmoment2(1,s)./N;
IPAmean2(2,s) = (IPAmoment2(2,s) - (IPAmoment2(1,s).^2)./N)./(N-1);
IPAconf(1,s) = IPAmean(1,s) - 1.96.*sqrt(IPAmean(2,s)./N);
IPAconf(2,s) = IPAmean(1,s) + 1.96.*sqrt(IPAmean(2,s)./N);
IPAconf2(1,s) = IPAmean2(1,s) - 1.96.*sqrt(IPAmean2(2,s)./N);

```

```

IPAconf2(2,s) = IPAmean2(1,s) + 1.96.*sqrt(IPAmean2(2,s)./N);
fprintf(1,'IPA %d %8.7e %8.7e %8.7e %8.7e \n',s, IPAmean(1,s),IPAmean(2,s)
,IPAmean2(1,s),IPAmean2(2,s))
fprintf(1,'IPA (%8.7e , %8.7e) (%8.7e , %8.7e) \n\n', IPAconf(1,s),
IPAconf(2,s),IPAconf2(1,s), IPAconf2(2,s))
end
for s=1:4
% SF mean and variance
SFmean(1,s) = SFmoment(1,s)./N;
SFmean(2,s) = (SFmoment(2,s) - (SFmoment(1,s).^2)./N)./(N-1);
SFmean2(1,s) = SFmoment2(1,s)./N;
SFmean2(2,s) = (SFmoment2(2,s) - (SFmoment2(1,s).^2)./N)./(N-1);
SFconf(1,s) = SFmean(1,s) - 1.96.*sqrt(SFmean(2,s)./N);
SFconf(2,s) = SFmean(1,s) + 1.96.*sqrt(SFmean(2,s)./N);
SFconf2(1,s) = SFmean2(1,s) - 1.96.*sqrt(SFmean2(2,s)./N);
SFconf2(2,s) = SFmean2(1,s) + 1.96.*sqrt(SFmean2(2,s)./N);
fprintf(1,'SF %d %8.7e %8.7e %8.7e %8.7e\n',s, SFmean(1,s),SFmean(2,s)
,SFmean2(1,s),SFmean2(2,s))
fprintf(1,'SF (%8.7e , %8.7e) (%8.7e , %8.7e) \n\n', SFconf(1,s),
SFconf(2,s),SFconf2(1,s), SFconf2(2,s))
end
for s=1:4

```

```

% WD mean and variance

WDmean(1,s) = WDMoment(1,s)./N;

WDmean(2,s) = (WDMoment(2,s) - (WDMoment(1,s).^2)./N)./(N-1);

WDmean2(1,s) = WDMoment2(1,s)./N;

WDmean2(2,s) = (WDMoment2(2,s) - (WDMoment2(1,s).^2)./N)./(N-1);

WDconf(1,s) = WDmean(1,s) - 1.96.*sqrt(WDmean(2,s)./N);

WDconf(2,s) = WDmean(1,s) + 1.96.*sqrt(WDmean(2,s)./N);

WDconf2(1,s) = WDmean2(1,s) - 1.96.*sqrt(WDmean2(2,s)./N);

WDconf2(2,s) = WDmean2(1,s) + 1.96.*sqrt(WDmean2(2,s)./N);

fprintf(1,'WD %d %8.7e %8.7e %8.7e %8.7e\n',s, WDmean(1,s),WDmean(2,s)
,WDmean2(1,s),WDmean2(2,s))

fprintf(1,'WD (%8.7e , %8.7e) (%8.7e , %8.7e) \n\n', WDconf(1,s),
WDconf(2,s),WDconf2(1,s), WDconf2(2,s))

end

for s=1:4

% SAN statistics

SANstats(1,s) = SANmoment(1,s)./N;

SANstats(2,s) = (SANmoment(2,s) - (SANmoment(1,s).^2)./N)./(N-1);

SANconf(1,s) = SANstats(1,s) - 1.96.*sqrt(SANstats(2,s)./N);

SANconf(2,s) = SANstats(1,s) + 1.96.*sqrt(SANstats(2,s)./N);

fprintf(1, 'SAN %d %6.4f %6.4f (%6.4f , %6.4f)\n\n', s, SANstats(1,s)
,SANstats(2,s), SANconf(1,s), SANconf(2,s))

```

```
end

if option == 1

% Empricial Distribution Functions (EDF)

figure (1.*sc)

ecdf(IPAcomplete)

title('EDF for the IPA derivative estimator of SAN')

xlabel('x'), ylabel('F_D_1(x)')

axis tight

figure (2.*sc)

ecdf(IPAcomplete2)

title('EDF for the IPA derivative estimator of SAN2')

xlabel('x'), ylabel('F_D_1(x)')

axis tight

figure (3.*sc)

ecdf(SFcomplete)

title('EDF for the SF derivative estimator of SAN')

xlabel('x'), ylabel('F_D_2(x)')

axis tight

figure (4.*sc)

ecdf(SFcomplete2)

title('EDF for the SF derivative estimator of SAN2')

xlabel('x'), ylabel('F_D_2(x)')
```



```
axis tight

figure (5.*sc)

ecdf(WDcomplete)

title('EDF for the WD derivative estimator of SAN')

xlabel('x'), ylabel('F_D_3(x)')

axis tight

figure (6.*sc)

ecdf(WDcomplete2)

title('EDF for the WD derivative estimator of SAN2')

xlabel('x'), ylabel('F_D_3(x)')

axis tight

figure (7.*sc)

ecdf(SANcomplete)

title('EDF for the Stochastic Activity Network')

xlabel('x'), ylabel('F_X^(4)')

axis tight

else

end
```

# پیوست ب

## کدهای برنامه‌نویسی مربوط به بخش مالی

### ب.۱ BSEurooption.m

```
function[] = BSEurooption(start,NN,data)

% Inputs: start = seed no. for random number generator

% NN = Number of iterations

% data = vector of parameters (S(0),r,sigma,h,K,L,ts)

% h = Time increment (years),

% K = the exercise price at the maturity of the option,

% L = a scale factor for the floating exercise price (LS(T) is the

% floating exercise price at maturity).

% ts = Number of time steps

% This program is a test program to determine vega, the sensitivity of the spot

% volatility derivative (sigma) w.r.t price of different European exotic options

% using the Black-Scholes (Merton) model using the Weak Derivative estimator

% under example situations.
```

%

% Under the risk neutral measure the Black-Scholes (Merton) SDE is given by

%

$$% d(\ln S(t)) = (r - (1/2)\sigma^2)dt + \sigma dW(t)$$

%

% where  $S(t)$  = The price of a non-dividend paying stock,

%  $r$  = The risk-free (from default) rate of interest (per annum),

%  $\sigma$  = Spot volatility of the paying stock,

%  $W(t)$  = The Wiener process (o/w known as Brownian Motion)

%

% given a time interval  $[t, t+h)$ ,  $\ln(S(t+h))$  is given by

%

$$% \ln(S(t+h)) = \ln S(t) + (r - (1/2)\sigma^2)h + \sigma W(h)$$

%

% Hence  $S(t+h)$  is given by

%

$$% S(t+h) = S(t)\exp((r - (1/2)\sigma^2)h + \sigma W(h))$$

%

% by stationarity of the Wiener process as  $W(t)$  is normally distributed.

% Given  $S(t)$  is known, I can denote  $S(t+h) = S(t)\exp(X)$ , where  $X$  is normally

% distributed with mean  $(\mu)$  and variance  $(s^2)$  i.e  $X \sim N(\mu, s^2)$  where:

%

---

```

% mu = (r-(1/2)sigma^2)h
% s^2 = (sigma^2)h
%
% Note: X can be observed as the return process
%
% Dentoing L = as the price of the option of ther underlying stock, the purpose
% of this program is determine vega := dL/dsigma for a European option under
% the Black-Scholes (Merton) model by (simple) Monte Carlo simulation.
%
% Using derivative estimation techniques, the WD Estimator for logS(t) under
% the Black-Scholes (Merton) model, given a pay-off functional V(X;sigma) is
%
% WD estimator = (1/sigma) [L(X+)-(X-mu+1)L(X)]
%
% where X+ is the Double Maxwell distribution with parameters (mu, s^2)
%
% e.g For the price process S(t+h)=S(t)exp(X), for fixed S(t), the WD
% estimator is given by
%
% WD estimator = (1/sigma) [S(t)exp(X+)-(X-mu+1)S(t)exp(X)]
%
% where X+ is as before.

```

```

%
% Note: the WD estimator is able to determine the spot volatility
% derivative of any functional of the share price process.
%
% The options that are calculated in this program (Payoff function)
%
% (1) Lookback call ( $S(T) - \min_{t \in [0, T]} S(t)$ )
% (2,3) Asian call option with fixed or floating strike price
%  $((\text{mean}_{t \in [0, T]} S(t) - K)^+)$ ,
%  $(\text{mean}_{t \in [0, T]} S(t) - LS(T))^+$ 
%
% where: T = Time to the maturity date (years),
% K = the exercise price at the maturity of the option,
% L = a scale factor for the floating exercise price (LS(T) is the
% floating exercise price at maturity).
%
%  $(f)^+ = \max(f, 0)$ 
%
% The price process in this program is discretized into fixed time steps
% (parameter given by h), and functional of the process are determined by
% these data points. given  $X_j$  as an increment in  $(t_{j-1}, t_j]$  of the
% return process,  $S(t_j)$  can be given by

```

```

%
%  $S(t_j) = S(0)\exp(\sum_{l=1}^j X_l)$ ,  $l = 1, \dots, ts$ 
%
% where ts := Number of time steps
% ----- Initialization -----
seed = start;
N = NN;
rand('twister',seed);
% parms = (S(0),r,sigma,h,K,L,ts) ----
% Note: sigma = parms(3)
% ts = parms(7)
parms = data;
ts = parms(7);
if length(parms) ~= 7
error('Number of data inputs == 7')
end
%WDoutput = zeros([3,N]);
WDbmoment = zeros([3,2]);
%Note (column): WDbmoment(1) = Lookback call,
% (2,3) = Asian call option with (fixed,floating) exercise price
%Note (row): Row 1 \Sigma WDboutput, Row 2 \Sigma WDboutput^2
% Calculating mean and variance of X

```

```
mean = (parms(2) - (1/2).*parms(3).^2).*parms(4);
var = (parms(3).^2).*parms(4);
% ----- Simulation -----
for i=1:N
% The price process
% n1store = a vector of generated normal RV with mean = m, variance = s^2
% dm1 = a vector of generated double maxwell RV with mean = m, variance = s^2
% Sinter = Vector of the price process (excluding S(0))
% Sinterph = Vector of the price process with
n1store = zeros([ts,1]);
dm1store = zeros([ts,1]);
Sinter = zeros([ts+1,1]);
Sinter(1) = parms(1);
Sinterph = cell([ts,1]);
for h = 1:ts
Sinterphh = zeros([1,h]);
end
for j=1:ts
% Generation of Double Maxwell RV (dm1(j)) and Normal RV (norm1(j)) by
% acceptance-rejection method.
u1 = rand(1);
w1 = sqrt(-4.*log(u1));
```

```
u2 = rand(1);

while u2 > 1.16582199.*u1.*w1

u1 = rand(1);

w1 = sqrt(-4.*log(u1));

u2 = rand(1);

end

u3 = rand(1);

if u3 <= 0.5

dm1std = -w1;

else

dm1std = w1;

end

u4 = rand(1);

n1std = dm1std.*u4;

dm1store(j) = mean + dm1std.*sqrt(var);

n1store(j) = mean + n1std.*sqrt(var);

end

% ----- Calculation of vega -----

WDevalfunc = zeros([3,1]);

for k=1:ts

Sinter(k+1) = Sinter(k).*exp(n1store(k));

end
```



```
for m=1:ts
for p=1:m
Sinterphm(p) = parms(1).*exp(sum(n1store(1:m)) - n1store(p) + dm1store(p));
end
end
% Note: S(0) = parms(1), sigma = parms(3), K = parms(5), L = parms(6), ts = parms(7)
Smature = Sinter(ts+1);
% Lookback call (1)
Smin = min(Sinter);
% phantom min
Sminph = zeros([ts,1]);% There are ts increments. I am phantomizing on the increments
Sinterpriceph = zeros([ts,ts+1]); % ts + 1, number of elements in the price process
Sinterpriceph(:,1) = parms(1);
for qq = 1:ts
for uu =1:ts
if qq >= uu
Sinterpriceph(uu,qq+1) = Sinter(uu);
else
Sinterpriceph(uu,qq+1) = Sinter(qq+1);
end
end
end
end
```

```

for ss = 1:ts

Sminph(ss) = min(Sinterpriceph(ss,:));

end

WDevalfunc(1) = (1./parms(3)).*exp(-parms(2).*parms(4).*parms(7)).*

((sum(Sinterphts)-sum(Sminph))- (sum(n1store)-ts.*(mean-1)).*(Smature - Smin));

WDbmoment(1,1) = WDbmoment(1,1) + WDevalfunc(1);

WDbmoment(1,2) = WDbmoment(1,2) + WDevalfunc(1).^2;

% Asian call option with fixed strike price (2), floating strike price (3)

Smean = sum(Sinter)./(ts+1);

Smeanph = zeros([ts,1]);

% phantom mean

for yy = 1:ts

Smeanph(yy) = sum(Sinterpriceph(yy,:))./(ts+1);

end

if Smean >= parms(5)

WDevalfunc(2) = (1./parms(3)).*exp(-parms(2).*parms(4).*parms(7)).*

((sum(Smeanph) -ts.*parms(5)) - (sum(n1store)-ts.*(mean-1)).*(Smean - parms(5)));

WDbmoment(2,1) = WDbmoment(2,1) + WDevalfunc(2);

WDbmoment(2,2) = WDbmoment(2,2) + WDevalfunc(2).^2;

elseif Smean >= parms(6).*Smature

WDevalfunc(3) = (1./parms(3)).*exp(-parms(2).*parms(4).*parms(7)).*

((sum(Smeanph) -parms(6).*sum(Sinterphts)) - (sum(n1store)-ts.*(mean-1)))

```

```

.*(Smean - parms(6).*Smature));

WDMoment(3,1) = WDMoment(3,1) + WDevalfunc(3);
WDMoment(3,2) = WDMoment(3,2) + WDevalfunc(3).^2;

else

end

end

% ----- Analysis -----

WDstats = zeros([3,2]);

% Column 1 = mean
% Column 2 = variance

WDerror = zeros(3);

% Two-sided 95CI = 1.96*sqrt(var)

WDbound = zeros([3,2]);

%Column 1 = lower bound
%Column 2 = upper bound

data'

fprintf(1, 'WD estimator for the spot volatility derivative of,
C(t;sigma) for three \n')

fprintf(1, 'European style exotic options for a stock with no dividend using the\n')
fprintf(1, 'Black-Scholes (Merton) model.\n\n')

fprintf(1, '(1)Lookback call, (2,3) Asian call option with
fixed/floating exercise price\n\n')

```

```

fprintf(1, 'mean +- error ----- (lower bound , upper bound)\n\n')
for m = 1:3
WDstats(m,1) = WDMoment(m,1) ./N;
WDstats(m,2) = (WDMoment(m,2)-(WDMoment(m,1).^2) ./N) ./ (N-1);
WDerror(m) = 1.96.*sqrt(WDstats(m,2) ./N);
WDbound(m,1) = WDstats(m,1) - WDerror(m);
WDbound(m,2) = WDstats(m,1) + WDerror(m);
fprintf(1,'WD %d %8.7f +- %8.7f ----- (%8.7f , %8.7f)\n\n',m,
WDstats(m,1), WDerror(m),WDbound(m,1),WDbound(m,2));
fprintf(1,'WD variance %8.7f\n\n',WDstats(m,2));
end

```

## BSUrotest.m ۲.ب

```

function[] = BSEurotest(start,NN,data)
% This program is a test program to determine the vega, the sensitivity of the
% spot volatility (sigma) to the price an European Black-Scholes (Merton)
% option under example situations.
% Under the risk neutral measure the Black-Scholes (Merton) SDE is given by
%
%  $d(\ln S(t)) = (r - (1/2)\sigma^2)dt + \sigma dW(t)$ 
%
% where  $S(t)$  = The price of a non-dividend paying stock,

```

---

```

% r = The risk-free (from default) rate of interest (per annum),
% sigma = Spot volatility of the paying stock,
% W(t) = The Wiener process (o/w known as Brownian Motion)
%
% given a time interval [t,t+h), ln(S(t+h)) is given by
%
%  $\ln(S(t+h)) = \ln S(t) + (r - (1/2)\sigma^2)h + \sigma W(h)$ 
%
% by stationarity of the Wiener process. as W(t) is normally distributed, and
% denoting X as the RV for lnS(t), X is normally distributed with mean (mu) and
% variance (s^2) i.e  $X \sim N(\mu, s^2)$  where:
%
%  $\mu = \ln S(t) + (r - (1/2)\sigma^2)h$ 
%  $s^2 = (\sigma^2)h$ 
%
% Denoting L = as the price of the option of the underlying stock, the purpose
% of this program is determine vega := dL/dsigma for a European option under
% the Black-Scholes (Merton) model by (simple) Monte Carlo simulation.
%
% Using derivative estimation techniques, the WD Estimator for S(t) under
% the Black-Scholes (Merton) model, given a pay-off functional L(X;sigma) is
%
```

```

% WD estimator = (1/sigma) [L(X+)-(X-mu+1)L(X)
%
% where X+ is the Double Maxwell distribution with parameters (mu, s^2)
%
% The SF Estimator for logS(t) under the Black-Scholes (Merton) model, given a
% pay-off functional L(X;sigma) is:
%
% SF estimator = (1/sigma)L(X) [((X-mu)^2)/(h*sigma^2) - (X-mu+1)]
%
% = (1/sigma)L(X) [Z^2 - (X-mu+1)]
%
% where Z is the standard normal distribution
% ----- Simulation -----
seed = start;

N = NN;

rand('twister',seed);

% The pay-off functionals
Lfunc = (@(x) x),(@(x) x.^2),(@(x) exp(x)),(@(x) exp(2.*x));

%WDoutput = zeros([length(Lfunc),N]);

%SFoutput = zeros([length(Lfunc),N]);

Wdmoment = zeros([length(Lfunc),2]);

SFmoment = zeros([length(Lfunc),2]);

```

```
% parms = (lnS(0),r,sigma,h) ---- Note: sigma = parms(3)

parms = data;

if length(parms) ~= 4
error('Number of data inputs == 4')
end

% Calculating mean and variance of lnS(t+h)

mean = parms(1) + (parms(2) - (1/2).*parms(3).^2).*parms(4);

var = (parms(3).^2).*parms(4);

for i=1:N

% Generation of Double Maxwell RV (dm1(j)) and Normal RV (norm1(j)) by
% acceptance-rejection method.

u1 = rand(1);

w1 = sqrt(-4.*log(u1));

u2 = rand(1);

while u2 > 1.16582199.*u1.*w1

u1 = rand(1);

w1 = sqrt(-4.*log(u1));

u2 = rand(1);

end

u3 = rand(1);

if u3 <= 0.5

dm1std = -w1;
```

```
else

dm1std = w1;

end

u4 = rand(1);

n1std = dm1std.*u4;

dm1 = mean + dm1std.*var;

n1 = mean + n1std.*var;

% Calculation of the SF and WD estimators of the functionals

Levalfunc = zeros([length(Lfunc),2]);

% Column 1 = pay-off functional from DM distribution

% Column 2 = pay-off functional from N distribution

WDevalfunc = zeros(length(Lfunc));

SFevalfunc = zeros(length(Lfunc));

for j=1:length(Lfunc)

Levalfunc(j,1) = feval(Lfuncj,dm1);

Levalfunc(j,2) = feval(Lfuncj,n1);

end

% Calculation of the derivative estimators

% Note: sigma = parms(3)

for k=1:length(Lfunc)

WDevalfunc(k) = (1./parms(3)).*exp(-parms(2)).*parms(4))

.*(Levalfunc(k,1)-(n1-mean+1).*Levalfunc(k,2));
```



---

```

SFevalfunc(k) = (1./parms(3)).*exp(-parms(2).*parms(4))
.*Levalfunc(k,2).*((n1std.^2)-(n1-mean+1));

WDmoment(k,1) = WDmoment(k,1) + WDevalfunc(k);
WDmoment(k,2) = WDmoment(k,2) + WDevalfunc(k).^2;
SFmoment(k,1) = SFmoment(k,1) + SFevalfunc(k);
SFmoment(k,2) = SFmoment(k,2) + SFevalfunc(k).^2;

WDoutput(k,i) = WDevalfunc(k);
SFoutput(k,i) = SFevalfunc(k);

end

end

% ----- Analysis -----

WDstats = zeros([length(Lfunc),2]);
SFstats = zeros([length(Lfunc),2]);

% Column 1 = mean
% Column 2 = variance

WDerror = zeros(length(Lfunc));
SFerror = zeros(length(Lfunc));

% Two-sided 95CI = 1.96*sqrt(var)

WDbound = zeros([length(Lfunc),2]);
SFbound = zeros([length(Lfunc),2]);

%Column 1 = lower bound
%Column 2 = upper bound

```

```

fprintf(1, 'WD and SF estimators for the spot volatility
derivative of log(S(t))of an\n')
fprintf(1, 'European Black-Scholes (Merton) option of an
underlying stock with no dividend\n\n')
fprintf(1, '1: x, 2: x^2, 3: exp(x), 4: exp(2x)\n\n')
fprintf(1, 'mean +- error ----- (lower bound , upper bound)\n\n')
for m = 1:length(Lfunc)
WDstats(m,1) = WDMoment(m,1)./N;
SFstats(m,1) = SFmoment(m,1)./N;
WDstats(m,2) = (WDMoment(m,2)-(WDMoment(m,1).^2)./N)./(N-1);
SFstats(m,2) = (SFmoment(m,2)-(SFmoment(m,1).^2)./N)./(N-1);
WDerror(m) = 1.96.*sqrt(WDstats(m,2)./N);
SFerror(m) = 1.96.*sqrt(SFstats(m,2)./N);
WDbound(m,1) = WDstats(m,1) - WDerror(m);
WDbound(m,2) = WDstats(m,1) + WDerror(m);
SFbound(m,1) = SFstats(m,1) - SFerror(m);
SFbound(m,2) = SFstats(m,1) + SFerror(m);
fprintf(1,'WD %d %8.7f +- %8.7f ----- (%8.7f , %8.7f)\n\n',m,
WDstats(m,1), WDerror(m),WDbound(m,1),WDbound(m,2));
fprintf(1,'WD variance %8.7f\n\n',WDstats(m,2));
fprintf(1,'SF %d %8.7f +- %8.7f ----- (%8.7f , %8.7f)\n\n',m,

```

```
SFstats(m,1), SFerror(m),SFbound(m,1),SFbound(m,2));
fprintf(1,'SF variance %8.7f\n\n',SFstats(m,2));
end
```

## BSEurovanilla.m ب.٣

```
function[] = BSEurovanilla(start,NN,data)
% Inputs: start = seed no. for random number generator
% NN = Number of iterations
% data = vector of parameters (S(0),r,sigma,T,K)
% T = Time to the maturity date (years),
% K = the exercise price at the maturity of the option,
% This program is a test program to determine vega, the sensitivity of the spot
% volatility derivative (sigma) w.r.t price of European vanilla call and put
% option under European Black-Scholes (Merton) model
% using the Weak Derivative estimator under example situations.
%
% Under the risk neutral measure the Black-Scholes (Merton) SDE is given by
%
%  $d(\ln S(t)) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW(t)$ 
%
% where  $S(t)$  = The price of a non-dividend paying stock,
%  $r$  = The risk-free (from default) rate of interest (per annum),
```

```

% sigma = Spot volatility of the paying stock,
% W(t) = The Wiener process (o/w known as Brownian Motion)
%
% given a time interval [0,T), ln(S(T)) is given by
%
% ln(S(T)) = lnS(0) + (r-(1/2)sigma^2)T + sigma W(T)
%
% or
%
% S(T) = S(0)exp((r-(1/2)sigma^2)T + sigma W(T))
%
% by stationarity of the Wiener process as W(t) is normally distributed.
% Given an initial price S(0), I can denote S(T) = S(0)exp(X), where X is normally
% distributed with mean (mu) and variance (s^2) i.e X ~ N(mu, s^2) where:
%
% mu = (r-(1/2)sigma^2)T
% s^2 = (sigma^2)T
%
% Note: X can be observed as the return process
%
% Denoting L = as the price of the option of the underlying stock, the purpose
% of this program is determine vega := dL/dsigma for a European option under

```

---

```

% the Black-Scholes (Merton) model by (simple) Monte Carlo simulation.
%
% Using derivative estimation techniques, the WD Estimator for logS(t) under
% the Black-Scholes (Merton) model, given a pay-off functional V(X;sigma) is
%
% WD estimator = (1/sigma) [L(X+)-(X-mu+1)L(X)]
%
% where X+ is the Double Maxwell distribution with parameters (mu, s^2)
%
% e.g For the price process S(T)=S(0)exp(X), for an initial S(0), the WD
% estimator is given by
%
% WD estimator = (1/sigma) [S(0)exp(X+)-(X-mu+1)S(0)exp(X)]
%
% where X+ is as before.
%
% The payoff functions for the vanilla call/put is given by
%
% (1,2) Vanilla call/put ((S(T)-K)^+, (K-S(T))^+)
%
% where: T = Time to the maturity date (years),
% K = the exercise price at the maturity of the option,

```

```

% L = a scale factor for the floating exercise price (LS(T) is the
% floating exercise price at maturity).
%
% (f)^+ = max(f,0)
% ----- Initialization -----
seed = start;
N = NN;
rand('twister',seed);
% parms = (S(0),r,sigma,T,K) ----
% Note: sigma = parms(3)
parms = data;
if length(parms) ~= 5
error('Number of data inputs == 5')
end
%WDoutput = zeros([2,N]);
WDbmoment = zeros([2,2]);
%Note (column): WDbmoment(1) = Vanilla call option,
% (2) = Vanilla put option
%Note (row): Row 1 \Sigma WDboutput, Row 2 \Sigma WDboutput^2
% Calculating mean and variance of X
mean = (parms(2) - (1/2).*parms(3).^2).*parms(4);
var = (parms(3).^2).*parms(4);

```

```
% ----- Simulation -----  
  
for i=1:N  
  
% Generation of Double Maxwell RV and Normal RV by acceptance-rejection method.  
  
% n1 = generated normal RV with mean = m, variance = s^2  
  
% dm1 = generated double maxwell RV with mean = m, variance = s^2  
  
u1 = rand(1);  
  
w1 = sqrt(-4.*log(u1));  
  
u2 = rand(1);  
  
while u2 > 1.16582199.*u1.*w1  
  
u1 = rand(1);  
  
w1 = sqrt(-4.*log(u1));  
  
u2 = rand(1);  
  
end  
  
u3 = rand(1);  
  
if u3 <= 0.5  
  
dm1std = -w1;  
  
else  
  
dm1std = w1;  
  
end  
  
u4 = rand(1);  
  
n1std = dm1std.*u4;  
  
dm1 = mean + dm1std.*sqrt(var);
```

```

n1 = mean + n1std.*sqrt(var);

% ----- Calculation of vega -----

WDevalfunc = zeros([2,1]);

Smature = parms(1).*exp(n1);

Smatphant = parms(1).*exp(dm1);

% Vanilla call (1), Vanilla put (2)

if Smature > parms(5)

WDevalfunc(1) = (1./parms(3)).*exp(-parms(2).*parms(4)).*
((Smatphant-parms(5))-(n1-mean+1).*(Smature-parms(5)));

WDbmoment(1,1) = WDbmoment(1,1) + WDevalfunc(1);

WDbmoment(1,2) = WDbmoment(1,2) + WDevalfunc(1).^2;

WDevalfunc(2) = 0;

elseif Smature < parms(5)

WDevalfunc(1) = 0;

WDevalfunc(2) = (1./parms(3)).*exp(-parms(2).*parms(4)).*
((parms(5)-Smatphant)-(n1-mean+1).*(parms(5)-Smature));

WDbmoment(2,1) = WDbmoment(2,1) + WDevalfunc(2);

WDbmoment(2,2) = WDbmoment(2,2) + WDevalfunc(2).^2;

else

WDevalfunc(1) = 0;

WDevalfunc(2) = 0;

end

```



```

end

% ----- Analysis -----

WDstats = zeros([2,2]);

% Column 1 = mean

% Column 2 = variance

WDerror = zeros([2,1]);

% Two-sided 95CI = 1.96*sqrt(var)

WDbound = zeros([2,2]);

%Column 1 = lower bound

%Column 2 = upper bound

fprintf(1, 'WD estimator for the spot volatility derivative of,
C(t;sigma) for the\n')

fprintf(1, 'European vanilla options for an underlying stock with no dividend\n')
fprintf(1, 'using the Black-Scholes (Merton) model\n\n')
fprintf(1, '(1)Vanilla call, (2) Vanilla put\n\n')
fprintf(1, 'mean +- error ----- (lower bound , upper bound)\n\n')

for m = 1:2

WDstats(m,1) = WDMoment(m,1)./N;

WDstats(m,2) = (WDMoment(m,2)-(WDMoment(m,1).^2)./N)./(N-1);

WDerror(m) = 1.96.*sqrt(WDstats(m,2)./N);

WDbound(m,1) = WDstats(m,1) - WDerror(m);

WDbound(m,2) = WDstats(m,1) + WDerror(m);

```

```
fprintf(1,'WD %d %8.7f +- %8.7f ----- (%8.7f , %8.7f)\n\n',m, WDstats(m,1)
, WError(m),WDbound(m,1),WDbound(m,2));
fprintf(1,'WD variance %8.7f\n\n',WDstats(m,2));
end
```

## BSEurovega ب.۴

```
function[] = BSEurovega(data)
% Inputs: data = vector of parameters (S(0),r,sigma,T,K)
% S(0) = initial price of the underlying asset,
% r = The (constant) risk-free (from default) rate of interest (per annum),
% sigma = Spot volatility of the paying stock,
% T = Time to the maturity date (years),
% K = the exercise price at the maturity of the option,
% This program determines vega - the spot volatility derivative (sigma) of the
% value on option for different types of European options of an underlying stock
% with no dividend according to the Black-Scholes (Merton) model.
% Under the risk neutral measure the Black-Scholes (Merton) SDE is given by
%
% 
$$dS(t) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

%
% where S(t) = The price of a non-dividend paying stock,
% r = The (constant) risk-free (from default) rate of interest (per annum),
```

---

```

% sigma = Spot volatility of the paying stock,
% W(t) = The Wiener process (o/w known as Brownian Motion)
%
% given a time interval [0,T], the SDE for  $(S(t))_{t \in [0,T]}$  can be
% written in the form of the stochastic exponential  $dS(t) = S(t)dU(t)$  where
%
%  $dU(t) = (r - (1/2)\sigma^2)dt + \sigma dW(t)$ 
%
% given an initial price  $S(0)$ ,  $S(t)$  can be written in the form as
%
%  $S(t) = S(0)\exp((r - (1/2)\sigma^2)t + \sigma W(t))$ 
%
% Given a payoff functional  $X$  (of  $(S(t))_{t \in [0,T]}$ ,  $K$ ,  $\sigma$ ), the price of
% the option at time  $t = 0$ , given the option matures at time  $T$  is given by
% the Miller-Modigliani Th.
%
%  $C(t;\sigma) = \exp(-rT)E(X)$ 
%
% and vega is given by
%
%  $\text{vega} := dC/d\sigma = \exp(-rT)E[dX/d\sigma]$ 
%
```

```

% The payoffs for which the sensitivity of the (known) option price w.r.t sigma is
% given by
%
% (1) Vanilla call/put option  $(S(T) - K)^+$ 
% (3) Lookback call option  $(S(T) - \min_{t \in [0,T]} S(t))$ 
%
% Note: From the put call-parity relationship for European options, the
% volatility derivative for the price of a Vanilla call is the same as a
% Vanilla put.
% ----- Preliminaries -----
%Note data = (S(0),r,sigma,T,K)
parms = data;
if length(parms) ~= 5
error('Number of data inputs == 5')
end
% Vanilla call/put
h1 = (log(parms(1)./parms(5))+parms(2).*parms(4))./(parms(3)
.*sqrt(parms(4))) +(1/2).*parms(3).*sqrt(parms(4));
h2 = h1 - parms(3).*sqrt(parms(4));
% Lookback call
k1 = (parms(2).*sqrt(parms(4)))./(parms(3)) + (1/2).*parms(3).*sqrt(parms(4));
k2 = k1 - parms(3).*sqrt(parms(4));

```

```

% Pricing of volatilities

vegavanilla = -(1./parms(3)).*(parms(1).*normpdf(h1,0,1).*h2
-parms(5).*exp(-parms(2).*parms(4)).*normpdf(h2,0,1).*h1);

vegaloookback = parms(1).*((parms(3)./parms(2)).*(normcdf(k1,0,1)
+exp(-parms(2).*parms(4)).*normcdf(k2,0,1)-1) - (1./parms(3))
.*(1+(parms(3).^2)./(2.*parms(2))).*normpdf(k1,0,1).*k2 -(1-(parms(3).^2)
./(2.*parms(2))).*exp(-parms(2).*parms(4)).*normpdf(k2,0,1).*k1));

data'

fprintf(1,'Calculation of Vega - the spot volatility derivative of,
C(t;sigma) for\n')

fprintf(1, 'the European style options for an stock with no dividend using the\n')
fprintf(1, 'Black-Scholes (Merton) model.\n\n')
fprintf(1, '(1) Vanilla call/put, (2) Lookback call\n\n')
fprintf(1, '1 Vega = %8.7f\n\n',vegavanilla)
fprintf(1, '2 Vega = %8.7f\n\n',vegaloookback)

%pricecall = parms(1).*normcdf(h1)-parms(5).*exp(-parms(2).*parms(4)).*normcdf(h2)
%pcalllb = parms(1).*((1+(parms(3).^2)./(2.*parms(2))).*normcdf(k1,0,1) -
(1-(parms(3).^2)./(2.*parms(2))).*exp(-parms(2).*parms(4)).*normcdf(k2,0,1)
- (parms(3).^2)./(2.*parms(2)))

```

## مراجع

- [1] J.S.Allen. *An Introduction to Stochastic Models with Applications to Biology*. Second Edition. Chapman and Hall, 2010.
- [2] F. Black, M. Scholes. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy, 81(3), pp. 637-654, 1973.
- [3] P. Boyle. *Options: Monte Carlo Approach*. *Journal of Financial Economics*, 4(3), pp. 323- 338, 1977.
- [4] P. Boyle, M. Broadie, P. Glasserman. *Monte Carlo Methods for Security Pricing*. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 21(8/9), pp. 1267-1321, 1997.
- [5] M. Broadie, P. Glasserman. *Estimating Security Price Derivative using Simulation*. *Management Science*, 42(2), pp.269-85, 1996.
- [6] M.C. Fu, J.-Q. Hu. *Conditional Monte Carlo: Gradient Estimation and Optimization Applications*. Kluwer Academic, Boston, 1997.
- [7] M.B. Goldman, H.B. Sosin, and M.A. Gatto. *Path Dependent Options: "Buy at the Low, Sell at the High"*. *Journal of Finance*, 34(5), pp. 1111-1127,1979.
- [8] P. Glasserman. *Gradient Estimation Via Perturbation Analysis*. Kluwer Academic, Boston, 1991.
- [9] J.M. Harrison, D. M. Kreps. *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*. *Journal of Economic Theory*, 20(), pp. 381-408, 1979.
- [10] J.M. Harrison, S.L. Pliska. *Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading*. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(3), pp. 215-260, 1981.
- [11] J.M. Harrison, S.L. Pliska. *A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets*. *Stochastic Processes and their Applications*, 15(3), pp. 313-316, 1983.
- [12] B. Heidergott, F.J. V´azquez-Abad. *Measure Valued Differentiation for Markov Chains*. *Journal of Optimization and Applications*, 2005.
- [13] B. Heidergott, F.J. V´azquez-Abad, W.M. Volk-Makarewicz. *Sensitivity Estimation for Gaussian Systems*. *Journal of Operational Research*, 187, pp. 193-207, 2008.

- 
- [14] J.C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Sixth edition. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2006.
- [15] F.C. Klebaner. *Introduction to Stochastic Calculus and Applications*. Second edition. Imperial College Press, London, 2005.
- [16] R.C. Merton. *Theory of Rational Option Pricing*. The Bell Journal of Economics and Management Science, 4(1), pp. 141-183, 1973.
- [17] G. Pflug. *Optimisation of Stochastic models*. Kluwer Academic, Boston, 1996.
- [18] R. Rubinstein, A. Shapiro. *Discrete Event Systems: Sensitivity Analysis and Optimization by the Score Function Method*. Wiley, 1993.
- [19] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Third edition. 1987.
- [20] S. Shreve. *Stochastic Calculus and Finance*. New York, Springer-Verlag, 2004.
- [21] F.J. V´azquez-Abad. *A Course on Sensitivity Analysis for Gradient Estimation of DES Performance Measures*.
- [22] W. Volk-Makarewicz. *Reduced Variance Sensitivity Estimators for Gaussian Systems*. Honours Thesis in Stochastic processes, The University of Melbourne, 2006.
- [23] M. West. *On Scale Mixtures of Normal Distribution*. Biometrika, Vol. 74(3), pp.646-648, 1987.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

a.s	.....	قریب به یقین
→	.....	همگرایی در احتمال
~	.....	هم‌توزیع بودن دو متغیر تصادفی
~	.....	معادل بودن دو اندازه
↖	.....	پیوسته مطلق
⊗	.....	حاصل ضرب دکارتی
$\mathcal{L}$	.....	اندازه لبگ
$B$	.....	$\sigma$ جبر بورل



Surname: Mirabi

Name: Kolsoom

---

Title: Comparing the performance of sensitivity estimators of scale parameter

---

Supervisor: Dr. Mohammad Arashi

---

Degree: Master of Science

Subject: Statistic

Field: Mathematical Statistic

---

Shahrood University of technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2013

Number of pages: 128

---

Keywords: Sensitivity estimation; Infinitesimal perturbation analysis; Score function; Measure-valued derivatives; Scale Mixture of Normal distributions

---

### **Abstract**

In this thesis, we define derivative estimators. These estimators can be used to measure the system sensitivity with respect to a specific parameter.

The derivative estimator are obtained for Gaussian systems and compared with respect to their variances. Applications are reviewed in stochastic networks and finance. The approach is extended for scale mixture of normal distribution.



Shahrood University of technology  
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial  
Fulfillment of The Requirements For The  
Degree of Master of Science in  
Statistic

# Comparing the performance of sensitivity estimators of scale parameter

Supervisor

Dr. Mohammad Arashi

by

Kolsoom Mirabi

2013