



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته  
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

# حل معادلات دیفرانسیل - جبری با روشهای نیمه تحلیلی

استاد راهنما

دکتر مهدی قوتمند

استاد مشاور

دکتر علی مس فروش

پژوهشگر

سعیده علی آبادیان

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: علی‌آبادیان

نام: سعیده

عنوان: حل معادلات دیفرانسیل - جبری با روش‌های نیمه تحلیلی

استاد راهنما: دکتر مهدی قوتمند

استاد مشاور: دکتر علی مس فروش

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی کاربردی

گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲

تعداد صفحات: ۷۸

واژگان کلیدی: معادله دیفرانسیل - جبری

### چکیده

با توجه به آن‌که بسیاری از مسائل فیزیک با معادلات دیفرانسیل - جبری مدل‌بندی می‌شوند، شایسته است که بتوان برای این مسائل جواب‌هایی با دقت بالا یافت. در سال‌های اخیر روش‌های عددی برای حل این معادلات به کار گرفته شده است. اما این روش‌ها برای مسائل با اندیس پایین مناسب هستند و برای مسائل با اندیس بالا نمی‌توان از آن‌ها استفاده کرد، پس لازم است برای این مسائل جواب‌هایی با دقت بالا پیدا کرد. در این پایان‌نامه سعی داریم معادلات دیفرانسیل - جبری را با روش‌های نیمه‌تحلیلی حل کنیم. به این منظور ابتدا از روش کاهش اندیس برای معادلات دیفرانسیل - جبری استفاده نموده، سپس دستگاه حاصل را با روش‌های نیمه‌تحلیلی وردشی، آدومیان و اختلال هموتوبی حل می‌کنیم. روش وردشی دنباله‌ای از توابع را فراهم می‌سازد که به پاسخ دقیق مسئله همگرا است. روش آدومیان و روش اختلال هموتوبی سری نامتناهی تولید می‌کنند که به پاسخ دقیق مسئله همگرا است. نتایج عددی حاصل از مثال‌های مختلف معادلات دیفرانسیل - جبری اندیس بالا توانایی و مناسب بودن این روش‌ها را نشان می‌دهند.

تقدیم به همه می کسانی که

می خوانند بیشتر بدانند

## خدایا...۱

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت. به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بدانند، روزی کن.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جان‌شین همه نداشتن هست...

## سپاس گزارمی...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی قوتمند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید. از جناب آقای دکتر علی مس فروش که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. همچنین لازم می دانم از پدید آورندگان بسته زی پرشین، مخصوصاً جناب آقای وفا خلیقی، که این پایان نامه با استفاده از این بسته، آماده شده است، کمال قدردانی را داشته باشم. در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از همسرم به پاس گرمای امیدبخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بود.

سعیده علی آبادیان  
۱۳۹۲

# فهرست مطالب

خ	لیست تصاویر
۲	۱ مقدمه و کاهش اندیس
۲	۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ تاریخچه
۳	۳.۱ کاهش اندیس
۸	۴.۱ مثال‌ها
۱۰	۲ روش تکرار وردشی
۱۰	۱.۲ مقدمه
۱۰	۲.۲ مبانی روش تکرار وردشی
۱۲	۳.۲ استفاده از روش تکرار وردشی در حل معادلات دیفرانسیل - جبری
۱۳	۴.۲ مثال‌ها
۳۲	۳ روش تجزیه آدومیان
۳۲	۱.۳ مقدمه
۳۲	۲.۳ مبانی روش تجزیه آدومیان
۳۴	۳.۳ استفاده از روش تجزیه آدومیان در حل معادلات دیفرانسیل - جبری
۳۵	۴.۳ مثال‌ها
۴۱	۴ روش اختلال هموتوبی
۴۱	۱.۴ مقدمه
۴۱	۲.۴ مبانی روش اختلال هموتوبی

۴۳	استفاده از روش اختلال هموتویی در حل معادلات دیفرانسیل - جبری
۴۵	مثال‌ها
۵۶	نتیجه‌گیری

## ۵ کاربردها

۶۰	آ کد مثال‌ها با Maple
۶۰	۱.آ کد Maple مثال‌های روش وردشی
۶۵	۲.آ کد Maple مثال‌های روش آدومیان
۶۸	۳.آ کد Maple مثال‌های روش اختلال هموتویی

## ۷۲ مراجع

۷۳ واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۷۵ واژه‌نامه انگلیسی به فارسی





## لیست تصاویر

- ۱.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۱.۴.۲) ۱۶
- ۲.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۱.۴.۲) ۱۶
- ۳.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۱.۴.۲) ۱۷
- ۴.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۱.۴.۲) ۱۷
- ۵.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۲.۴.۲) ۲۰
- ۶.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۲.۴.۲) ۲۰
- ۷.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۲.۴.۲) ۲۱
- ۸.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۲.۴.۲) ۲۱
- ۹.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۳.۴.۲) ۲۳
- ۱۰.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۳.۴.۲) ۲۳
- ۱۱.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۳.۴.۲) ۲۴
- ۱۲.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۳.۴.۲) ۲۴
- ۱۳.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $w$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۵.۴.۲) ۲۹
- ۱۴.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $w$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۵.۴.۲) ۲۹
- ۱۵.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $z$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۵.۴.۲) ۳۰
- ۱۶.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $z$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۵.۴.۲) ۳۰
- ۱۷.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $y$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۵.۴.۲) ۳۱
- ۱۸.۲ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $y$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۵.۴.۲) ۳۱
- ۱.۳ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۱.۴.۳) ۳۷
- ۲.۳ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۱.۴.۳) ۳۷
- ۳.۳ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۱.۴.۳) ۳۸

- ۴.۳ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۱.۴.۳) ۳۸
- ۱.۴ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۱.۴.۴) ۴۸
- ۲.۴ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۱.۴.۴) ۴۸
- ۳.۴ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۱.۴.۴) ۴۹
- ۴.۴ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۱.۴.۴) ۴۹
- ۵.۴ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۲.۴.۴) ۵۲
- ۶.۴ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۲.۴.۴) ۵۲
- ۷.۴ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۲.۴.۴) ۵۳
- ۸.۴ اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۲.۴.۴) ۵۳

# فصل ۱

## مقدمه و کاهش اندیس

### ۱.۱ مقدمه

گاهی در رشته‌های علوم، مهندسی، پزشکی، اقتصاد و ... ضرورت پیدا می‌کند که برای بیان مسئله معینی مدل ریاضی ساخته شود. اغلب این مدل‌های ریاضی معادلاتی شامل یک تابع مجهول و مشتقات تابع نسبت به متغیرهای مستقل هستند. چنین معادلاتی را معادلات دیفرانسیل می‌نامند. شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی به صورت زیر می‌باشد

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه  $n$  نامیده می‌شود که رابطه‌ای بین متغیر مستقل  $x$  و تابع  $y(x)$  و  $n$  مشتق اول آن  $(y', y'', \dots, y^{(n)})$  است. حال اگر همین معادلات دارای شرایطی باشند یا به طریقی مختلف مقید شده باشند، آنگاه مدل ریاضی آنها علاوه بر معادلات دیفرانسیل، شامل معادلات جبری برای توصیف این قیدها است. به این دسته معادلات، معادلات دیفرانسیل-جبری می‌گویند. حالت کلی این معادلات به صورت زیر است.

$$\begin{cases} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ g(x, y, \dots, y^{(n)}, z) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

### ۲.۱ تاریخچه

در سال ۱۹۸۴ گِیر<sup>۱</sup> و پترزولد<sup>۲</sup>، کارایی روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی را در حل معادلات دیفرانسیل-جبری، بررسی نموده و ثابت کردند که تمامی معادلات دیفرانسیل-جبری با اندیس

<sup>۱</sup>Gear

<sup>۲</sup>Petzold

نابیشتر از ۱ و معادلاتی با ضرایب ثابت و اندیس دلخواه، با روش‌های حل معادلات دیفرانسیل معمولی حل پذیرند.

در سال ۱۹۸۸ گوی‌پروشی را برای کاهش اندیس مسئله ارائه کرد. در این روش یک معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس بالا، می‌تواند با تکرار مشتق‌گیری از معادلات قید، به یک معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس ۱ یا به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شود.

در سال ۱۹۹۶ آشر<sup>۳</sup> و لین<sup>۴</sup> روش منظم‌سازی دنباله‌ای را برای معادلات دیفرانسیل-جبری خطی با اندیس ۲ ارائه کردند.

در سال ۲۰۰۳ بابلیان<sup>۵</sup> و حسینی<sup>۶</sup> روشی را برای کاهش اندیس معادلات دیفرانسیل-جبری معرفی کردند و در سال ۲۰۱۰ قوتمند<sup>۷</sup> این روش را گسترش داد.

### ۳.۱ کاهش اندیس

هر معادله دیفرانسیل-جبری یک اندیس دارد. اندیس‌ها نقش مهمی در حل معادلات دیفرانسیل-جبری دارند.

**تعریف ۱.۳.۱.** به تعداد مشتقات لازم به منظور تعیین منحصر به فرد  $y'$  بر حسب  $y$  و  $t$  اندیس معادلات دیفرانسیل-جبری می‌گویند.

برای مثال معادلات دیفرانسیل-جبری

$$y_1'(t) = y_1(t) + r_1(t),$$

$$0 = -y_2(t) + r_2(t),$$

اندیس دو دارد. زیرا با مشتق‌گیری اول داریم:

$$y_1''(t) = y_1'(t) + r_1'(t),$$

$$0 = -y_2'(t) + r_2'(t),$$

پس

$$y_1'(t) = r_1'(t), \quad \Rightarrow \quad r_1'(t) = y_1(t) + r_1(t),$$

<sup>۳</sup> Asher

<sup>۴</sup> Lin

<sup>۵</sup> Babolian

<sup>۶</sup> Hosseini

<sup>۷</sup> Ghovatmand

و با مشتق‌گیری دوم داریم:

$$y_2''(t) = r_2''(t), \quad y_1'(t) = r_2''(t) - r_1'(t),$$

پس مسئله اندیس دو دارد.

بسیاری از مسائلی که با آنها روبه‌رو هستیم اغلب دارای اندیس بالایی می‌باشند و حل کردن این مسائل به‌سادگی امکان‌پذیر نیست. بنابراین لازم است با روش‌هایی اندیس این معادلات را کاهش داد.

برای توضیح این روش مسئله خطی یا خطی شده زیر را در نظر بگیرید

$$X^{(m)} = \sum_{j=1}^m A_j X^{(j-1)} + By + q, \quad (2.1)$$

$$\circ = CX + r,$$

که  $A_j$ ،  $B$  و  $C$  توابع هموار از  $t$  روی  $t_0 \leq t \leq t_f$  هستند و  $A_j(t) \in R^{n \times n}$  برای  $j = 1 \dots m$ ،  $B(t) \in R^{n \times 1}$  و  $C(t) \in R^{1 \times n}$  برای  $n \geq 2$  هستند و  $C(t)B(t)$  برای هر  $t$  نامنفرد است.  $q(t) \in R^n$  و  $r(t) \in R$  عبارات ناهمگن هستند. می‌دانیم

$$CB(t) = \sum_{i=1}^n (c_i b_i)(t) \neq \circ, \quad \forall t \in [t_0, t_f],$$

بنابراین از نامنفرد بودن  $CB$  استفاده کرده و معادله (۲.۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$(CB)^{-1} X^{(m)} - (CB)^{-1} \sum_{j=1}^m A_j X^{(j-1)} - (CB)^{-1} By - (CB)^{-1} q = \circ.$$

با ضرب کردن  $C$  داریم:

$$(CB)^{-1} CX^{(m)} - (CB)^{-1} C \sum_{j=1}^m A_j X^{(j-1)} - (CB)^{-1} CBy - (CB)^{-1} Cq = \circ.$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$(B)^{-1} X^{(m)} - (B)^{-1} \sum_{j=1}^m A_j X^{(j-1)} - y - (B)^{-1} q = \circ.$$

حال  $y$  را در معادله (۲.۱) جایگذاری می‌کنیم

$$X^{(m)} = \sum_{j=1}^m A_j X^{(j-1)} + B(CB)^{-1} C[X^{(m)} - \sum_{j=1}^m A_j X^{(j-1)} - q] + q,$$

$$CX + r = \circ.$$

پس

$$X^{(m)} - \sum_{j=1}^m A_j X^{(j-1)} - B(CB)^{-1} C[X^{(m)} - \sum_{j=1}^m A_j X^{(j-1)} - q] - q = \circ,$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$[X^{(m)} - \sum_{j=1}^m A_j X^{(j-1)} - q][I - B(CB)^{-1}C] = 0,$$

بنابراین

$$[I - B(CB)^{-1}C][X^{(m)} - \sum_{j=1}^m A_j X^{(j-1)} - q] = 0, \quad (3.1)$$

$$CX + r = 0.$$

حال با استفاده از قضیه زیر دستگاه (۳.۱) به دستگاهی با  $n$  معادله و  $n$  مجهول با اندیس ۱ تغییر شکل خواهد داد.

**قضیه ۲.۳.۱.** دستگاه معادلات دیفرانسیل - جبری (۲.۱) با اندیس  $m+1$  و  $n=2$  هم‌ارز معادلات دیفرانسیل - جبری اندیس  $m$  زیر است

$$E_m X^m + E_{m-1} X^{m-1} + \dots + E_1 X' + E_0 X = \hat{q}, \quad (4.1)$$

به طوری که

$$E_0 = \begin{bmatrix} b_1 a_{21}^{(1)} - b_2 a_{11}^{(1)} & b_1 a_{22}^{(1)} - b_2 a_{12}^{(1)} \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} b_2 a_{11}^{(2)} - b_1 a_{21}^{(2)} & b_1 a_{22}^{(2)} - b_2 a_{12}^{(2)} \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \quad \dots$$

$$E_{m-1} = \begin{bmatrix} b_2 a_{11}^{(m)} - b_1 a_{21}^{(m)} & b_1 a_{22}^{(m)} - b_2 a_{12}^{(m)} \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \quad E_m = \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix},$$

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} b_2 q_1 - b_1 q_2 \\ -r \end{bmatrix}, \quad y = B(CB)^{-1}C[X^{(m)} - \sum_{j=1}^m A_j X^{(j-1)} - q],$$

و

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11}^{(j)} & a_{12}^{(j)} \\ a_{21}^{(j)} & a_{22}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

**برهان.** اثبات این قضیه در مرجع [۵] آمده است. □

در مورد  $n > 2$ ، برای تغییر شکل دستگاه فرامعین (۳.۱) به دستگاه رتبه کامل با اندیس  $m$  به یک

شرط دیگر در مسئله (۲.۱) نیاز داریم. ماتریس  $M_{n \times n}$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M = \sum_{i=0}^n c_i b_i (I - B(CB)^{-1}C), \quad (5.1)$$

و  $l$  امین سطر و  $(l, s)$  امین عنصر از ماتریس  $M$  به صورت  $M[l]$  و  $M[l, s]$  مشخص می‌شود که در آن  $s \leq n$

و  $1 \leq l$ .

قضیه ۳.۳.۱. مسئله (۲.۱) برای  $n > ۲$  را در نظر بگیرید، اگر

$$\exists k; 1 \leq k \leq n, \quad c_k(t) \neq 0, \quad \forall t \in [0, t_f], \quad (۶.۱)$$

آنگاه  $k$  امین سطر ماتریس  $I - B(CB)^{-1}C$  به دیگر سطرها وابسته است.

برهان. اثبات این قضیه در مرجع [۲] آمده است.  $\square$

حال اگر  $\bar{M}$  با حذف کردن  $k$  امین سطر  $M$  بدست آید در این صورت دستگاه فرامعین (۳.۱) می تواند

به دستگاه معادلات دیفرانسیل - جبری با  $n$  معادله و  $n$  مجهول زیر تبدیل شود

$$\bar{M}[X^{(m)} - \sum_{j=1}^m A_j X^{(j-1)} - q] = 0, \quad (۷.۱)$$

$$CX + r = 0.$$

باید نشان دهیم دستگاه رتبه کامل است و اندیس یک دارد.

قضیه ۴.۳.۱. اگر  $F = \begin{bmatrix} \bar{M} \\ c \end{bmatrix}$  و  $k$  از (۶.۱) بدست آمده باشد، آنگاه

$$|\det F(t)| = |c_k(t)| \left| \sum_{i=1}^n (c_i b_i)(t) \right|^{(n-1)}, \quad \forall t \in [0, t_f].$$

برهان. اثبات این قضیه در مرجع [۲] آمده است.  $\square$

حال قضیه (۲.۳.۱) و (۳.۳.۱) و دستگاه (۳.۱) می توانند به دستگاه معادلات دیفرانسیل - جبری،

با  $n$  معادله و  $n$  مجهول زیر تغییر شکل دهند

$$\bar{M}[X^{(m)} - \sum_{j=1}^m A_j X^{(j-1)} - q] = 0,$$

$$CX + r = 0,$$

که

$$\begin{bmatrix} \bar{M} \\ 0 \end{bmatrix} X^{(m)} + \begin{bmatrix} -\bar{M}A_m \\ 0 \end{bmatrix} X^{(m-1)} + \dots + \begin{bmatrix} -\bar{M}A_1 \\ c \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \bar{M}q \\ -r \end{bmatrix},$$

یا

$$E_m X^{(m)} + E_{m-1} X^{(m-1)} + \dots + E_1 X' + E_0 X = \hat{q}. \quad (۸.۱)$$

قضیه زیر اندیس  $m$  را به اندیس یک تبدیل می کند.

قضیه ۵.۳.۱. دستگاه (۸.۱) با اندیس  $m$  هم‌ارز مسئله اندیس ۱ زیر است

$$F_m X^{(m)} + F_{m-1} X^{(m-1)} + \dots + F_1 X' + F_0 X = \hat{q}^{(m-1)}.$$

که

$$F_m = \begin{bmatrix} \bar{M} \\ \circ \end{bmatrix}, \quad F_i = \begin{bmatrix} -\bar{M}A_{i+1} \\ \binom{m-1}{m-1-i} c^{(m-1-i)}(t) \end{bmatrix}, \quad i = m-1, \dots, 1, \circ.$$

که  $c^k(t)$  و  $\hat{q}^k(t)$  مشتق‌های مرتبه  $k$ ام هستند و  $k = \circ, 1, \dots, n$  ضرایب دو جمله‌ای نیوتن هستند.

برهان. اثبات این قضیه در مرجع [۵] آمده است. □

نتیجه ۶.۳.۱. دستگاه معادلات دیفرانسیل - جبری  $(m+1)$  اندیس (۲.۱) با  $n = 2$  هم‌ارز دستگاه

معادلات دیفرانسیل - جبری اندیس ۱ زیر است

$$\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} X^{(m)} + \begin{bmatrix} b_2 a_{11}^{(m)} - b_1 a_{21}^{(m)} & b_1 a_{22}^{(m)} - b_2 a_{12}^{(m)} \\ \binom{m-1}{\circ} c_1(t) & \binom{m-1}{\circ} c_2(t) \end{bmatrix} X^{(m-1)} + \dots \\ + \begin{bmatrix} b_2 a_{11}^{(1)} - b_1 a_{21}^{(1)} & b_1 a_{22}^{(1)} - b_2 a_{12}^{(1)} \\ \binom{m-1}{m-1} c_1^{(m-1)}(t) & \binom{m-1}{m-1} c_2^{(m-1)}(t) \end{bmatrix} X = \hat{q}(t)^{(m-1)}.$$

برای سادگی قضیه (۲.۳.۱) را برای مسئله اندیس ۲ با  $n = 2$  و  $k = 1$  به صورت زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۷.۳.۱. دستگاه معادلات دیفرانسیل - جبری اندیس ۲ مسئله (۲.۱) را با  $n = 2$  ملاحظه کنید.

دستگاه معادلات دیفرانسیل - جبری اندیس ۲، هم‌ارز دستگاه معادلات دیفرانسیل - جبری اندیس ۱ زیر است

$$E_1 X' + E_0 X = \hat{q}, \quad (9.1)$$

که

$$E_0 = \begin{bmatrix} b_1 a_{21} - b_2 a_{11} & b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \quad \hat{q} = \begin{bmatrix} b_2 q_1 - b_1 q_2 \\ -r \end{bmatrix}, \\ Y = (CB)^{-1} C[X' - AX - q]. \quad (10.1)$$

برهان. اثبات این قضیه در مرجع [۲] آمده است. □

و هم‌چنین قضیه (۵.۳.۱) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.



قضیه ۸.۳.۱. دستگاه (۲.۱) با اندیس ۲،  $n = ۳$  و  $k = ۲$  را در نظر بگیرید. این مسئله هم‌ارز دستگاه

معادلات دیفرانسیل - جبری اندیس ۱ به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \overline{M} \\ \circ \end{bmatrix} X' + \begin{bmatrix} -\overline{MA} \\ C \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \overline{Mq} \\ -r \end{bmatrix}, \quad (۱۱.۱)$$

که

$$M = [b_{۲۱}b_{۳۲} - b_{۲۲}b_{۳۱} \quad b_{۱۲}b_{۳۱} - b_{۱۱}b_{۳۲} \quad b_{۱۱}b_{۲۲} - b_{۱۲}b_{۲۱}]_{۱ \times ۳},$$

و

$$Y = (CB)^{-1}C[X' - AX - q].$$

□

برهان. اثبات این قضیه در مرجع [۲] آمده است.

## ۴.۱ مثال‌ها

مثال ۱.۴.۱. دستگاه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1'' = -vx_1' + (v - \frac{1}{v-t})x_1 + (2-t)vy + q_1(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ x_2'' = x_2' + \frac{v}{v-t}x_1' + \frac{v-1}{v-t}x_1 - x_2 + (v-1)y + q_2(t), \\ 0 = (t+2)x_1 + (t^2-4)x_2 + r(t), \end{cases}$$

و

$$q(t) = \begin{bmatrix} (\frac{t-3+vt-2v}{t-2})e^t \\ (\frac{t-2+v}{t-2})e^t \end{bmatrix}, \quad r(t) = -(t^2+t-2)e^t,$$

که مقادیر اولیه  $x_1(0) = x_2(0) = 1$  و جواب‌های واقعی  $x_1 = e^t$ ،  $x_2 = e^t$  و  $y = \frac{e^t}{t-2}$  و  $v = 100$  می‌باشند.

مسئله اندیس ۳ دارد. حال با استفاده از نتیجه (۶.۳.۱) آن را به دستگاهی با اندیس ۱ تبدیل می‌کنیم. پس داریم:

$$E_2 X'' + E_1 X' + E_0 X = \hat{q}',$$

که

$$E_2 = \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} b_2 a_{11}^{(2)} - b_1 a_{21}^{(2)} & b_1 a_{22}^{(2)} - b_2 a_{12}^{(2)} \\ \binom{1}{\circ} c_1(t) & \binom{1}{\circ} c_2(t) \end{bmatrix},$$

و

$$E_0 = \begin{bmatrix} b_2 a_{11}^{(1)} - b_1 a_{21}^{(1)} & b_1 a_{22}^{(1)} - b_2 a_{12}^{(1)} \\ \binom{1}{1} c_1'(t) & \binom{1}{1} c_2'(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{q} = \begin{bmatrix} b_2 q_1 - b_1 q_2 \\ -r \end{bmatrix},$$

با توجه به صورت مسئله در می‌یابیم که

$$A_1 = \begin{bmatrix} v - \frac{1}{v-t} & \circ \\ \frac{v-1}{v-t} & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -v & \circ \\ \frac{v}{v-t} & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} (2-t)v \\ v-1 \end{bmatrix},$$

و

$$C^T = \begin{bmatrix} t+2 \\ t^2-4 \end{bmatrix}.$$

حال با جایگذاری در روابط بالا داریم:

$$\begin{bmatrix} v-1 & v(t-2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v-2v^2 & (2-t)v \\ t+2 & t^2-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \frac{1-v}{v-t} & (t-2)v \\ 1 & 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-t)\frac{t-2+v}{t-2} - (v-1)\frac{t-2+vt-2v}{t-2} \\ 2t+1 \end{bmatrix}.$$

مثال ۲.۴.۱. دستگاه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1'' = x_1 - x_2 - \cos(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ x_2'' = x_2 + y - \sin(t), \\ 0 = x_1 + x_2 - e^t - e^t \sin(t), \end{cases}$$

که مقادیر اولیه ۱،  $x_1(0) = 1$ ،  $x_2(0) = 0$  و جواب‌های واقعی  $x_1 = \cos(t)$  و  $x_2 = \sin(t)$  و  $y = e^t \cos(t)$  می‌باشند.

مسئله اندیس ۲ دارد. حال با استفاده از قضیه (۷.۳.۱) آن را به دستگاهی با اندیس ۱ تبدیل می‌کنیم. پس داریم:

$$E_1 X' + E_0 X = \hat{q},$$

که

$$E_1 = \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_0 = \begin{bmatrix} b_1 a_{21} - b_2 a_{11} & b_1 a_{22} - b_2 a_{21} \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix},$$

و

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} b_2 q_1 - b_1 q_2 \\ -r \end{bmatrix},$$

با توجه به صورت مسئله در می‌یابیم که

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

و

$$q(t) = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}, \quad r(t) = -(e^t + e^t \sin(t)),$$

حال با جایگذاری در روابط بالا داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ e^t + e^t \sin(t) \end{bmatrix}.$$

# فصل ۲

## روش تکرار وردشی

### ۱.۲ مقدمه

در این فصل به معرفی و توضیح یک روش تکراری به نام روش تکرار وردشی که یک روش نیمه تحلیلی است، می پردازیم. این روش یک دنباله از توابع ایجاد می کند که به سری جواب دقیق مسئله همگرا است. در ادامه از این روش برای یافتن جواب تحلیلی معادلات دیفرانسیل - جبری استفاده می کنیم. بنابراین ابتدا از روش کاهش اندیس ارائه شده در فصل قبل استفاده کرده و دستگاه بدست آمده را با روش تکرار وردشی حل می کنیم.

### ۲.۲ مبانی روش تکرار وردشی

روش تکرار وردشی می تواند به آسانی و با دقت بالا برای حل دسته وسیعی از مسئله های خطی و غیر خطی به کار رود و جواب آنها به طور تقریبی و با سرعت همگرایی بالا، به جواب دقیق تعیین شود. این روش یک اصلاح از روش ضریب لاگرانژ پیشنهاد شده توسط اینکاتی<sup>۱</sup> می باشد. در این روش دستگاه غیر خطی عمومی

$$L[u(t)] + N[u(t)] = g(t), \quad (1.2)$$

را در نظر می گیریم که  $L$  عملگر خطی و  $N$  عملگر غیر خطی و  $g(t)$  یک تابع پیوسته است. تابع اصلاح گر

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\} ds, \quad (2.2)$$

معرفی می شود که  $\lambda$  ضریب لاگرانژ،  $u_n$ ،  $n$  امین تقریب جواب و  $\tilde{u}_n$  متغیر محدود است، به عبارت دیگر  $\delta \tilde{u}_n = 0$ . در این روش برای یافتن جواب ابتدا ضریب لاگرانژ  $\lambda$  باید طوری انتخاب شود که تابع اصلاح گر

<sup>۱</sup>Inokuti

پایا باشد. یعنی  $\delta u_{n+1}(u_n(t), t) = 0$ . پس با استفاده از هر تابع اولیه انتخاب شده  $u_0$  و ضریب لاگرانژ محاسبه شده  $\lambda$ ، تقریب‌های متوالی  $u_n$  برای  $n \geq 0$  بدست می‌آید. حال با حدگیری از این دنباله بدست آمده یعنی  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ، جواب  $u$  بدست می‌آید. برای مسئله خطی، جواب دقیق می‌تواند تنها با یک گام تکرار حاصل شود، چون ضریب لاگرانژ به‌طور دقیق مشخص می‌شود. برای مثال معادله زیر را در نظر بگیرید

$$u'' + \omega^2 u(t) = F(u, u', u''),$$

تابع اصلاح‌گر آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ u_n''(s) + \omega^2 u_n(s) - \tilde{F}(u, u', u'') \right\} ds.$$

توجه کنید که  $\delta u_n(0) = 0$  پس

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(s) \left\{ u_n''(s) + \omega^2 u_n(s) - \tilde{F}(s) \right\} ds \\ &= \delta u_n(t) + \lambda(s) \delta u_n'(s)|_{s=t} - \frac{\partial \lambda}{\partial s} \delta u_n(s)|_{s=t} + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} + \omega^2 \lambda(s) \right\} \delta u_n(s) ds \\ &= \left( 1 - \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) \delta u_n(s)|_{s=t} + \lambda(s) \delta u_n'(s)|_{s=t} + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} + \omega^2 \lambda(s) \right\} \delta u_n(s) ds = 0. \end{aligned}$$

با استفاده از شرط پایداری داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} + \omega^2 \lambda(t, s) = 0, \\ 1 - \frac{\partial \lambda(t, s)}{\partial s} |_{s=t} = 0, \\ \lambda(t, s)|_{s=t} = 0, \end{cases}$$

ضریب لاگرانژ  $\lambda = \frac{1}{\omega} \sin \omega(s-t)$  است. در نتیجه فرمول تکراری زیر را بدست می‌آوریم

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \frac{1}{\omega} \sin \omega(s-t) \left\{ u_n''(s) + \omega^2 u_n(s) - \tilde{F}(u, u', u'') \right\} ds.$$

با فرض  $u_0(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$  با ثابت‌های مناسب  $c_1$  و  $c_2$  تقریب اولیه به‌صورت زیر است

$$u_1(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t - \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(s-t) ds,$$

که حل عمومی مسئله می‌باشد.

توجه داریم که هرچه ضریب لاگرانژ با دقت بالاتری انتخاب شود، همگرایی جواب تقریبی به جواب واقعی سریع‌تر رخ می‌دهد. برای مثال سیستم خطی  $u''(t) + \omega u(t)$  را در نظر بگیرید، تابع اصلاح‌گر آن به‌صورت زیر است

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ u_n''(s) + \omega \tilde{u}_n(s) \right\} ds.$$

اینجا  $\tilde{u}_n$  متغیر محدود است. شرط پایداری را برای تابع اصلاح‌گر بالا به‌کار برده و  $\lambda = s-t$  بدست می‌آوریم، بنابراین فرمول تکراری زیر بدست می‌آید

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t (s-t) \left\{ u_n''(s) + \omega \tilde{u}_n(s) \right\} ds.$$

اگر برای مثال شرط اولیه  $u(0) = 1$  و  $u'(0) = 0$  باشد، جواب‌های تقریبی

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - \frac{1}{2!}\omega^2 t^2, \\ u_2 &= 1 - \frac{1}{2!}\omega^2 t^2 + \frac{1}{4!}\omega^4 t^4 + \dots, \\ &\vdots \\ u_n(t) &= 1 - \frac{1}{2!}\omega^2 t^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n!}, \end{aligned}$$

بدست می‌آید.

از روند حل بالا ملاحظه می‌شود که همگرایی جواب تقریبی به جواب واقعی  $\cos \omega t$  آهسته است و این به خاطر تعیین  $\lambda$  می‌باشد، اگر  $\lambda$  با دقت بیشتری انتخاب شود همگرایی سریع‌تر اتفاق می‌افتد. برای معادلات غیرخطی پیدا کردن ضریب لاگرانژ مشکل است، برای برطرف کردن این مشکل متغیر محدود را در جمله غیرخطی به کار می‌بریم.

### ۳.۲ استفاده از روش تکرار وردشی در حل معادلات دیفرانسیل - جبری

برای بیان چگونگی استفاده از روش وردشی در حل معادلات دیفرانسیل-جبری با توجه به قضیه (۷.۳.۱) دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری اندیس ۱ زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} c_1 x_1 + c_2 x_2 &= -r \quad t \in [t_0, t_f], \\ b_2 x_1' - b_1 x_2' + d_1 x_1 + d_2 x_2 &= b_2 q_1 - b_1 q_2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

که  $d_1 = b_1 a_{21} - b_2 a_{11}$  و  $d_2 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$ . با توجه به شرط نامنفرد بودن  $C(t)B(t)$  داریم:

$$CB(t) = (c_1 b_1 + c_2 b_2)(t) \neq 0, \quad t \in [t_0, t_f].$$

فرض کنید  $c_1(t)b_1(t) \neq 0$  برای  $t_0 \leq t \leq t_f$ . پس معادلات (۳.۲) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$x_1 = -\frac{c_2}{c_1} x_2 - \frac{r}{c_1}, \quad (4.2)$$

$$x_2' = \frac{b_2}{b_1} x_1' + \frac{d_1}{b_1} x_1 + \frac{d_2}{b_1} x_2 + \frac{b_1 q_2 - b_2 q_1}{b_1}. \quad (5.2)$$

حال برای حل کردن دستگاه بالا معادله (۴.۲) را به یک فرمول تکراری نسبت به  $x_1$  تبدیل می‌کنیم. یعنی

$$x_1^{n+1}(t) = -\frac{c_2}{c_1} x_2^n(t) - \frac{r}{c_1}, \quad (6.2)$$

و با استفاده از فرمول (۲.۲) یک تابع اصلاح‌گر نسبت به  $x_2$  برای معادلات دیفرانسیل (۵.۲) می‌سازیم،

بنابراین داریم:

$$x_1^{n+1}(t) = x_1^n(t) + \int_0^t \lambda(s) \left[ x_2^{(n)'}(s) - \frac{b_2}{b_1} \tilde{x}_1^{(n)'}(s) - \frac{d_1}{b_1} \tilde{x}_1^{(n)}(s) - \frac{d_2}{b_1} x_2^{(n)}(s) - \frac{b_1 q_2 - b_2 q_1}{b_1} \right] ds, \quad (7.2)$$

که  $\tilde{x}_1^{(n)}$  متغیر محدود است، یعنی  $\delta \tilde{x}_1^{(n)} = 0$ . توجه داریم اگر  $\frac{b_2}{b_1}$  ضریبی از  $t$  باشد برای ساده‌تر شدن محاسبات  $x_2$  را متغیر محدود در نظر می‌گیریم. پس روش تکرار وردشی بیان شده را برای (۷.۲) به کار

$$\delta x_2^{(n+1)}(t) = \delta x_2^n(t) + \delta \int_0^t \lambda(s) \left[ x_2^{(n)'}(s) - \frac{b_2}{b_1} \tilde{x}_1^{(n)'}(s) - \frac{d_1}{b_1} \tilde{x}_1^{(n)}(s) - \frac{d_2}{b_1} x_2^{(n)}(s) - \frac{b_1 q_2 - b_2 q_1}{b_1} \right] ds, \quad (۸.۲)$$

یا

$$\delta x_2^{n+1}(t) = \delta x_2^n(t) + \lambda(s) \delta x_2^{(n)}(s) - \int_0^t \left( \lambda'(s) + \frac{b_2}{b_1} \lambda(s) \right) x_2^{(n)}(s) ds. \quad (۹.۲)$$

از فرض ایستایی  $x_2$  استفاده می‌کنیم و دو شرط زیر را بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} 1 + \lambda(s)|_{s=t} = 0, \\ \lambda'(s) + \frac{b_2}{b_1} \lambda(s) = 0, \end{cases} \quad (۱۰.۲)$$

پس با حل کردن معادلات (۱۰.۲)،  $\lambda$  بدست می‌آید. پس  $\lambda$  بدست آمده را در معادله (۷.۲) قرار می‌دهیم. از حل کردن معادله بدست آمده و معادله (۶.۲) تقریب‌های متوالی  $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots$  و  $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots$  بدست می‌آید که با میل دادن  $n$  به بی‌نهایت بسط سری تیلور جواب‌های دقیق  $x_1$  و  $x_2$  حاصل می‌شود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = x_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = x_2.$$

توجه داریم که برای افزایش سرعت همگرایی می‌توان از  $x_1^{(n+1)}$  به جای  $x_1^{(n)}$  برای محاسبه  $x_2^{(n+1)}$  استفاده کرد.

## ۴.۲ مثال‌ها

در این بخش برای نشان دادن کارایی روش مذکور مثال‌هایی ارائه شده است. در مثال‌های زیر برای سهولت در محاسبات، از بسط سری تیلور  $g(t)$  به صورت زیر استفاده شده است

$$g(t) \approx \sum_{i=0}^v g_i(t),$$

که  $v$  یک عدد طبیعی دلخواه است. برنامه‌ها با نرم‌افزار میپل<sup>۲</sup> ۱۴ نوشته شده است.

**مثال ۱۰.۴.۲.** معادله دیفرانسیل - جبری با اندیس ۲ زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} X' = AX + By + q, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 = CX + r, \end{cases} \quad (۱۱.۲)$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 2e^t - \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

<sup>۲</sup>Maple

و

$$r(t) = -(e^t + \sin(t)),$$

شرایط اولیه مسئله  $x_1^{(0)}(t) = 0$  و  $x_2^{(0)}(t) = 0$  و جواب‌های دقیق  $x_1(t) = e^t$  و  $x_2(t) = \sin(t)$  و  $y(t) = \cos(t)$  هستند.

با استفاده از قضیه (۷.۳.۱)، معادله دیفرانسیل - جبری اندیس ۲ به معادله دیفرانسیل - جبری اندیس

۱ زیر تغییر شکل می‌دهد

$$\begin{cases} x_1' + x_1 - x_2 - 2e^t + \sin(t) = 0, \\ x_2 = e^t + \sin(t) - x_1. \end{cases}$$

ابتدا معادله جبری رابطه بالا را به یک فرمول تکراری نسبت به  $x_2$  تغییر شکل می‌دهیم و سپس تابع اصلاح‌گر مناسب با استفاده از (۲.۲) برای  $x_1$  می‌سازیم، بنابراین معادله دیفرانسیل بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$x_1^{(n+1)}(t) = x_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda(s) \{x_1^{(n)'}(s) + x_1^{(n)}(s) - \tilde{x}_2^{(n)}(s) - 2e^s + \sin(s)\} ds, \quad (12.2)$$

که  $\tilde{x}_2^{(n)}$  متغیر محدود است. یعنی  $\delta \tilde{x}_2^{(n)} = 0$ . اکنون می‌خواهیم مقدار  $\lambda$  را پیدا کنیم

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda(s) \{x_1^{(n)'}(s) + x_1^{(n)}(s) - \tilde{x}_2^{(n)}(s) - 2e^s + \sin(s)\} ds.$$

بنابراین

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \lambda(s) \delta x_1^{(n)}(s)|_{s=t} + \int_0^t (-\lambda'(s) + \lambda(s)) \delta x_1^{(n)}(s) ds,$$

با اعمال کردن شرط پایداری  $\delta x_1^{(n+1)}(t) = 0$  داریم:

$$\begin{cases} 1 + \lambda(s)|_{s=t} = 0, \\ -\lambda'(s) + \lambda(s) = 0, \end{cases}$$

پس مقدار بهینه ضریب لاگرانژ به صورت زیر است

$$\lambda(s) = -e^{t-s}.$$

با قرار دادن این مقدار در تابع اصلاح‌گر (۱۲.۲) داریم:

$$x_1^{(n+1)}(t) = x_1^{(n)}(t) - \int_0^t \left( x_1^{(n)'}(s) + x_1^{(n)}(s) - \tilde{x}_2^{(n)}(s) - 2e^s + \sin(s) \right) ds.$$

بنابراین فرمول‌های تکراری زیر را داریم:

$$\begin{cases} x_2^{(n+1)}(t) = -x_2^{(n)}(t) + e^t + \sin(t), \\ x_1^{(n+1)}(t) = x_1^{(n)}(t) - \int_0^t e^{t-s} \left( x_1^{(n)'}(s) + x_1^{(n)}(s) - \tilde{x}_2^{(n)}(s) - 2e^s + \sin(s) \right) ds, \end{cases} \quad (13.2)$$

توابع  $e^t$  و  $\sin(t)$  را با سری تیلور در  $t = 0$  و  $v = 10$  بسط می‌دهیم. از معادلات (۱۳.۲) بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{5040}t^7 + \dots, \\ x_2^1 = 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{30240}t^8 + \dots, \\ \\ x_1^2 = 1 + t + t^2 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{2520}t^7 + \frac{1}{30240}t^8 + \dots, \\ x_2^2 = t - \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{720}t^6 - \frac{1}{30240}t^8 - \frac{1}{362880}t^{10}, \\ \\ \vdots \\ \\ x_1^{10} = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 - \frac{1}{630}t^7 + \dots, \\ x_2^{10} = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{180}t^6 + \frac{1}{1260}t^7 + \frac{1}{5040}t^8 + \dots, \end{cases}$$

با ادامه دادن این روش وقتی  $n$  به بی‌نهایت میل می‌کند، سری بدست آمده، بسط تیلور جواب دقیق با  $x_1(t) = e^t$  و  $x_2(t) = \sin(t)$  است. همچنین از فرمول (۱۰.۱) بدست می‌آوریم  $y(t) = \cos(t)$ . حال

اگر در فرمول تکراری  $x_1^{(n+1)}(t)$  به جای  $x_1^{(n)}(t)$  استفاده کنیم داریم:

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{5040}t^7 + \dots, \\ x_2^1 = 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{30240}t^8 + \dots, \\ \\ x_1^2 = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6 - \frac{1}{2520}t^7 - \frac{1}{30240}t^8 + \dots, \\ x_2^2 = t - t^2 - \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{720}t^6 - \frac{1}{30240}t^8 - \frac{1}{362880}t^{10} + \dots, \\ \\ \vdots \\ \\ x_1^{10} = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{5040}t^7 + \dots, \\ x_2^{10} = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{180}t^6 + \frac{1}{1260}t^7 + \dots, \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده کردیم سرعت همگرایی بیشتر می‌شود. همچنین توجه داریم با افزایش  $v = 10$  و  $n = 10$  به  $n = 20$  و  $v = 20$  سرعت همگرایی بیشتر می‌شود. نتایج این عمل در نمودارهای (۱.۲)، (۳.۲)، (۲.۲) و (۴.۲) زیر مشخص است.

**مثال ۲.۴.۲.** مسئله اندیس ۲ زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} X' = AX + By + q, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 = CX + r, \end{cases} \quad (14.2)$$

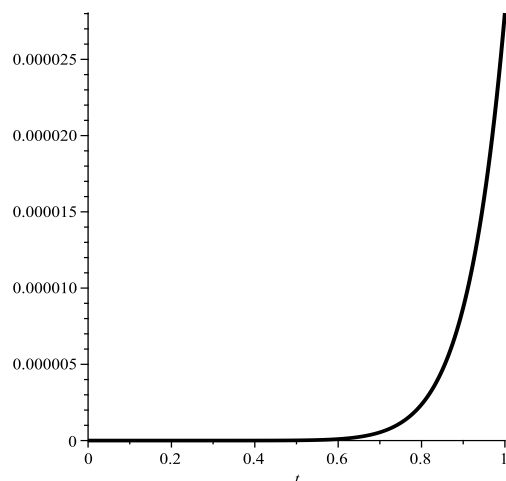
که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} -\cos(t) - e^t \\ -\cos(t) + e^t \end{bmatrix},$$

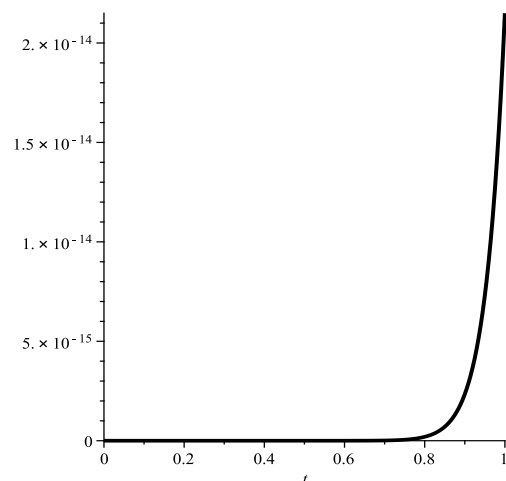
و

$$r(t) = -(\cos(t) - \sin(t) + e^t),$$

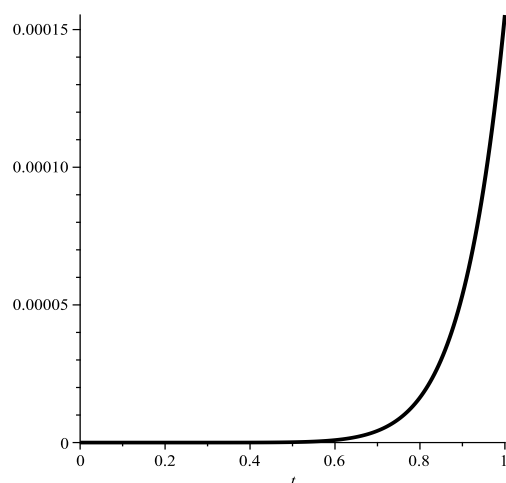




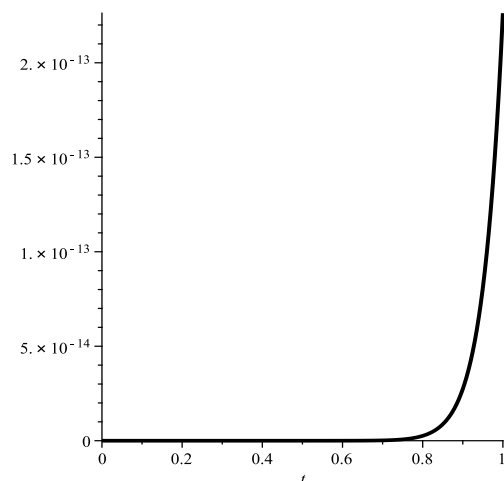
شکل ۱.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۱.۴.۲)



شکل ۲.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۱.۴.۲)



شکل ۳.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۱.۴.۲)



شکل ۴.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۱.۴.۲)

و مقادیر اولیه  $x_1(\circ) = 1$  و  $x_2(\circ) = 1$  و جواب‌های دقیق  $x_1(t) = \cos(t)$  و  $x_2(t) = -\sin(t) + e^t$  و  $y(t) = \sin(t) - e^t$  هستند.

با استفاده از قضیه (۷.۳.۱) مسئله (۱۴.۲) به معادلات دیفرانسیل - جبری اندیس ۱ به صورت زیر

تبدیل می‌شود

$$\begin{cases} x_1' - x_1 - x_2 + \cos(t) + e^t, \\ x_1 + x_2 = \cos(t) - \sin(t) + e^t. \end{cases}$$

با همان شرایط اولیه  $x_1(\circ) = 1$  و  $x_2(\circ) = 1$ . برای اینکه این مسئله را حل کنیم، معادله جبری بالا را به صورت تکراری نسبت به  $x_2$  می‌نویسیم و با استفاده از روش ذکر شده تابع اصلاح‌گر برای معادله دیفرانسیل بالا نسبت به  $x_1$  می‌نویسیم. پس داریم:

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)}(t) = \cos(t) - \sin(t) + e^t - x_1^{(n)}(t), \\ x_1^{(n+1)}(t) = x_1^{(n)}(t) + \int_{\circ}^t \lambda(s) \{x_1^{(n)}(s) - x_1^{(n)}(s) - \tilde{x}_1^{(n)}(s) + \cos(s) + e^s\} ds, \end{cases} \quad (15.2)$$

که  $\tilde{x}_1^{(n)}$  متغیر محدود است. یعنی  $\delta x_1^{(n)} = \circ$ . با اعمال شرط پایداری  $\delta x_1^{(n+1)}(t) = \circ$  داریم:

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \delta \int_{\circ}^t \lambda(s) \{x_1^{(n)}(s) - x_1^{(n)}(s) - \tilde{x}_1^{(n)}(s) + \cos(s) + e^s\} ds.$$

بنابراین

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \lambda(s) \delta x_1^{(n)}(t)|_{s=t} + \int_{\circ}^t (-\lambda'(s) - \lambda(s)) \delta x_1^{(n)}(s) ds,$$

پس معادلات زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} 1 - \lambda(s)|_{s=t} = \circ, \\ -\lambda'(s) - \lambda(s) = \circ. \end{cases}$$

با حل دستگاه بدست آمده ضرب‌گر لاگرانژ به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\lambda = -e^{t-s}.$$

با جایگذاری  $\lambda$  در (۱۵.۲) داریم:

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)}(t) = \cos(t) - \sin(t) + e^t - x_1^{(n)}(t), \\ x_1^{(n+1)}(t) = x_1^{(n)}(t) - \int_{\circ}^t e^{t-s} \{x_1^{(n)}(s) - x_1^{(n)}(s) - \tilde{x}_1^{(n)}(s) + \cos(s) + e^s\} ds, \end{cases}$$

که با  $n = 1, 2, \dots$  و مقادیر اولیه  $x_1(\circ) = 1$  و  $x_2(\circ) = 1$  و استفاده از سری تیلور توابع

$\cos(t) + e^t$  و  $\cos(t) - \sin(t) + e^t$  حول  $t = \circ$  و تابع  $-e^{t-s}$  حول  $t = s$  و انتخاب  $v = 20$  داریم:

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 - \frac{1}{1}t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{24}t^8 - \frac{1}{120}t^{10} + \dots, \\ x_1^2 = 1 + \frac{1}{1}t^3 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{24}t^6 + \dots, \\ x_1^3 = 1 - \frac{1}{1}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{6}t^5 - \frac{1}{24}t^6 - \frac{1}{120}t^7 + \dots, \\ x_1^4 = 1 + \frac{1}{1}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{24}t^5 + \frac{1}{120}t^6 + \frac{1}{720}t^7 + \dots, \end{cases}$$

⋮

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1 - \frac{1}{1!}t^2 + \frac{1}{2!}t^4 - \frac{1}{3!}t^6 + \frac{1}{4!}t^8 - \frac{1}{5!}t^{10} + \dots, \\ x_2^{(1)} = 1 + \frac{1}{1!}t^2 + \frac{1}{2!}t^4 + \frac{1}{3!}t^6 + \frac{1}{4!}t^8 + \frac{1}{5!}t^{10} + \dots, \end{cases}$$

که با ادامه این روش وقتی  $n$  را افزایش دهیم، سری حاصل بسط تیلور جواب دقیق  $x_1(t) = \cos(t)$  و  $x_2(t) = -\sin(t) + e^t$  را می‌باشد. همچنین از فرمول (۱۰.۱)،  $y(t) = \sin(t) - e^t$  را بدست می‌آوریم.

**مثال ۳.۴.۲.** مسئله اندیس ۲ زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} X' = AX + By + q, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 = CX + r, \end{cases} \quad (۱۶.۲)$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} t^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} e^t - \sin(t) \\ \cos(t) - e^t \end{bmatrix},$$

و

$$r(t) = -(e^t + \sin(t)),$$

و مقادیر اولیه  $x_1(0) = 1$  و  $x_2(0) = 0$  و  $x_1(t) = e^t$  و  $x_2(t) = \sin(t)$  و  $y(t) = -e^t$  جواب‌های دقیق هستند.

با استفاده از قضیه (۷.۳.۱) معادلات دیفرانسیل - جبری اندیس ۲ بالا به معادلات دیفرانسیل - جبری

اندیس ۱ زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = e^t + \sin(t), \\ x_2' - x_1 - (\cos(t) + e^t) = 0, \end{cases}$$

با همان شرایط اولیه  $x_1(0) = 1$  و  $x_2(0) = 1$ . برای اینکه این مسئله را حل کنیم، معادله جبری بالا را به صورت تکراری نسبت به  $x_1$  می‌نویسیم و با استفاده از روش مذکور تابع اصلاح‌گر برای معادله دیفرانسیل بالا نسبت به  $x_2$  می‌نویسیم. پس داریم:

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)}(t) = e^t + \sin(t) - x_2^{(n)}(t), \\ x_2^{(n+1)}(t) = x_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda(s) \{ x_2'^{(n)}(s) - \tilde{x}_2^{(n)}(s) - (\cos(s) + e^s) \} ds, \end{cases} \quad (۱۷.۲)$$

که  $\tilde{x}_2^{(n)}$  متغیر محدود است. یعنی  $\delta x_2^{(n)} = 0$ . پس شرط پایداری  $\delta x_2^{(n+1)}(t) = 0$  را اعمال می‌کنیم

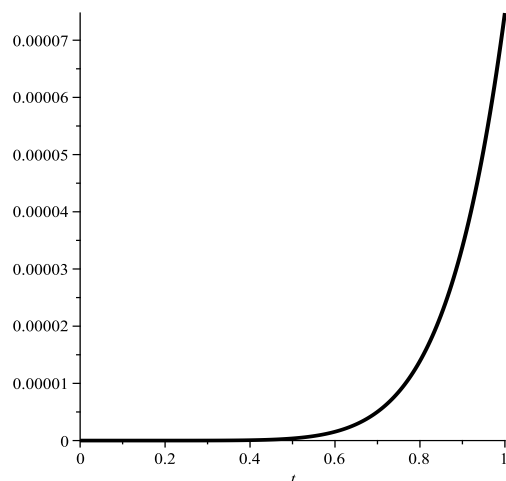
$$\delta x_2^{(n+1)}(t) = \delta x_2^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda(s) \{ x_2'^{(n)}(s) - \tilde{x}_2^{(n)}(s) - (\cos(s) + e^s) \} ds.$$

بنابراین

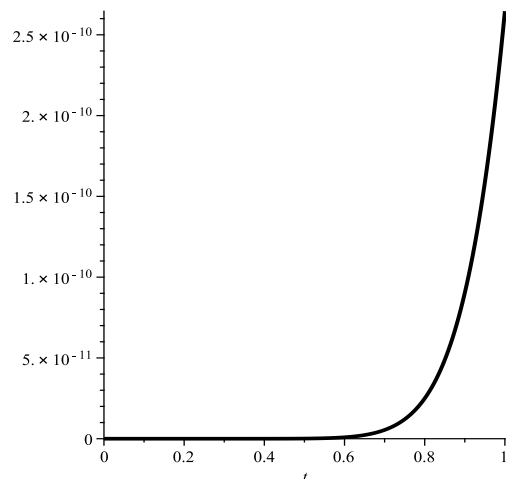
$$\delta x_2^{(n+1)}(t) = \delta x_2^{(n)}(t) + \lambda(s) \delta x_2^{(n)}(t)|_{s=t} + \int_0^t (-\lambda'(s)) \delta x_2^{(n)}(s) ds,$$

پس معادلات زیر بدست می‌آید

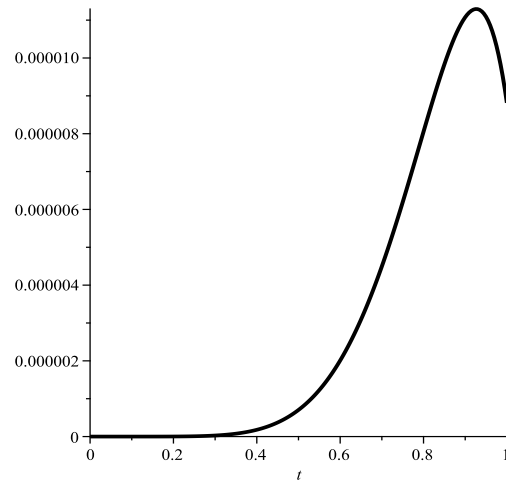
$$\begin{cases} 1 + \lambda(s)|_{s=t} = 0, \\ -\lambda'(s) = 0. \end{cases}$$



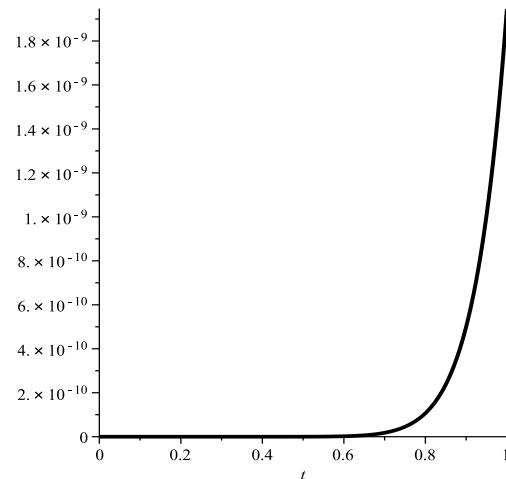
شکل ۵.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۲.۴.۲)



شکل ۶.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۲.۴.۲)



شکل ۷.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۲.۴.۲)



شکل ۸.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۲.۴.۲)

با حل دستگاه بدست آمده ضریب لاگرانژ به صورت زیر تعیین می شود

$$\lambda = -1.$$

با جایگذاری  $\lambda$  در (۱۷.۲) داریم:

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)}(t) = e^t + \sin(t) - x_1^{(n)}(t), \\ x_2^{(n+1)}(t) = x_2^{(n)}(t) - \int_0^t \{x_1^{(n)}(s) - \tilde{x}_1^{(n)}(s) - (\cos(s) + e^s)\} ds, \end{cases}$$

که با  $n = 1, 2, \dots$  و مقادیر اولیه  $x_1^{(0)} = x_1(\circ) = 1$  و  $x_2^{(0)} = x_2(\circ) = 0$  و استفاده از سری تیلور توابع

$\cos(t) + e^t$  و  $\sin(t) + e^t$  حول  $t = 0$  و انتخاب  $v = 20$  داریم:

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{60}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{40320}t^8 + \frac{1}{181440}t^9 + \dots, \\ x_2^1 = t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6 - \frac{1}{2520}t^7 - \frac{1}{40320}t^8 + \dots, \\ x_1^2 = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{60}t^5 + \frac{1}{360}t^6 + \frac{1}{5040}t^7 + \frac{1}{7200}t^8 + \frac{1}{181440}t^9 + \dots, \\ x_2^2 = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 - \frac{1}{5040}t^7 - \frac{1}{40320}t^8 + \frac{1}{362880}t^9 + \dots, \end{cases}$$

⋮

$$\begin{cases} x_1^{21} = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{5040}t^7 + \frac{1}{40320}t^8 + \frac{1}{362880}t^9 + \dots, \\ x_2^{21} = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{5040}t^7 + \frac{1}{362880}t^9 + \dots, \end{cases}$$

که مانند قبل با ادامه این روش وقتی  $n$  را افزایش دهیم، سری حاصل بسط تیلور جواب دقیق  $x_1(t) = e^t$  و  $x_2(t) = \sin(t)$  هست و همچنین از فرمول (۱۰.۱)،  $y(t) = -e^t$  را بدست می آوریم.

#### مثال ۴.۴.۲. مسئله

$$\begin{cases} X' = AX + By + q, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 = CX + r, \end{cases} \quad (18.2)$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & t \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & t \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

با  $x_1(\circ) = x_2(\circ) = x_3(\circ) = 0$  و  $q(t)$  و  $r(t)$  طوری تعیین می شوند که با جواب های دقیق

$$y_1(t) = y_2(t) = \frac{1}{t^2 + t + 1} \text{ و } x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = t^4 + t^5.$$

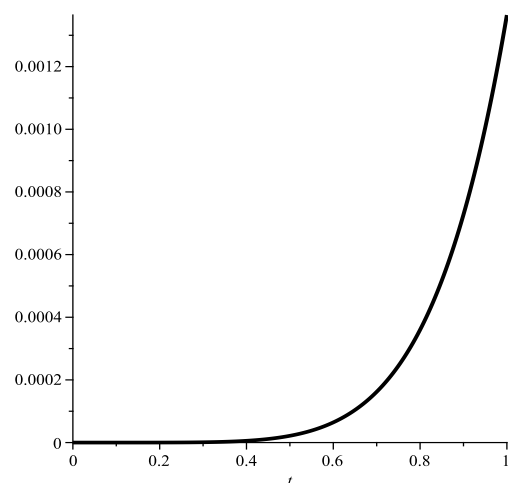
با استفاده از قضیه (۸.۳.۱)،  $\bar{M} = [t \quad 1 \quad t]$ ، معادلات دیفرانسیل-جبری اندیس ۲ بالا می تواند به

معادلات دیفرانسیل-جبری اندیس ۱ زیر تغییر شکل دهد

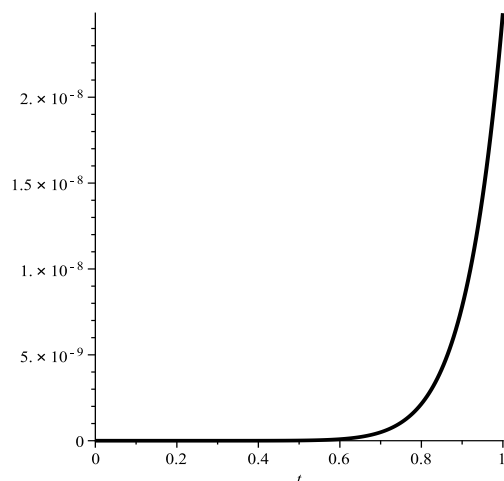
$$\begin{cases} -x_1 + tx_2 = g_1(t), \\ x_1 - x_3 = g_2(t), \\ tx_1' + x_2' + tx_3' - tx_1 - x_2 - t^2x_3 = g_3(t), \end{cases} \quad (19.2)$$

با همان شرایط اولیه  $x_1(\circ) = 1$  و  $x_2(\circ) = 1$  و  $x_3(\circ) = 0$  و  $g_1(t) = t^6 - t^4$  و  $g_2(t) = 0$  و  $g_3(t) = 4t^3 + 12t^4 + 8t^5 - 2t^6 - 2t^7$

را به صورت تکراری نسبت به  $x_1$  و

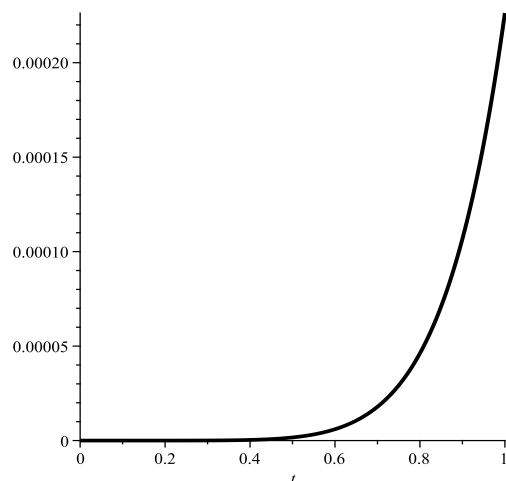


شکل ۹.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۳.۴.۲)

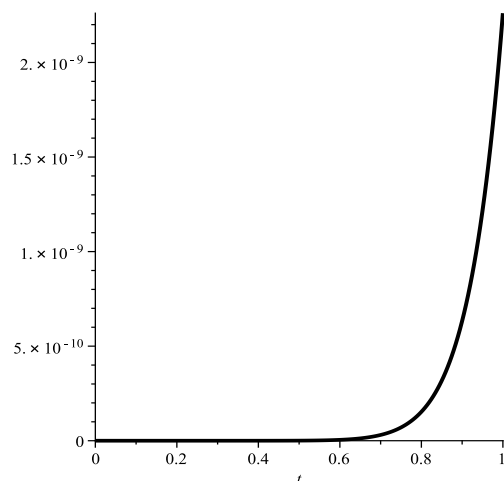


شکل ۱۰.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۳.۴.۲)





شکل ۱۱.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۳.۴.۲)



شکل ۱۲.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۳.۴.۲)

$x_۳$  می‌نویسیم و با استفاده از روش فوق تابع اصلاح‌گر برای معادله دیفرانسیل بالا نسبت به  $x_۳$  می‌نویسیم. پس داریم:

$$\begin{cases} x_۱^{(n+۱)}(t) = tx_۳^{(n)}(t) - g_۱(t), \\ x_۲^{(n+۱)}(t) = x_۱^{(n)}(t), \\ x_۳^{(n+۱)}(t) = x_۳^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda(s) \{x_۳'^{(n)}(s) - x_۳^{(n)}(s) + s\tilde{x}_۱'^{(n)}(s) + s\tilde{x}_۲'^{(n)}(s) - s^۲\tilde{x}_۳^{(n)}(s) - g_۳(s)\} ds, \end{cases} \quad (۲۰.۲)$$

که  $\tilde{x}_۱^{(n)}$  و  $\tilde{x}_۲^{(n)}$  متغیرهای محدود هستند. یعنی  $\delta\tilde{x}_۱^{(n)} = \delta\tilde{x}_۲^{(n)} = 0$ . پس شرط پایداری  $\delta x_۳^{(n+۱)}(t) = 0$  را اعمال می‌کنیم

$$\delta x_۳^{(n+۱)}(t) = \delta x_۳^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda(s) \{x_۳'^{(n)}(s) - x_۳^{(n)}(s) + s\tilde{x}_۱'^{(n)}(s) + s\tilde{x}_۲'^{(n)}(s) - s^۲\tilde{x}_۳^{(n)}(s) - g_۳(s)\} ds.$$

بنابراین

$$\delta x_۳^{(n+۱)}(t) = \delta x_۳^{(n)}(t) + \lambda(s)\delta x_۳^{(n)}(t)|_{s=t} - \int_0^t (-\lambda'(s) + \lambda(s)) \delta x_۳^{(n)}(s) ds,$$

بنابراین معادلات زیر را داریم

$$\begin{cases} 1 + \lambda(s)|_{s=t} = 0, \\ -\lambda'(s) + \lambda(s) = 0. \end{cases}$$

با حل دستگاه بدست آمده، ضریب لاگرانژ به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\lambda = -e^{t-s}.$$

با جایگذاری  $\lambda$  در (۲۰.۲) داریم:

$$\begin{cases} x_۱^{(n+۱)}(t) = tx_۳^{(n)}(t) - g_۱(t), \\ x_۲^{(n+۱)}(t) = x_۱^{(n)}(t), \\ x_۳^{(n+۱)}(t) = x_۳^{(n)}(t) - \int_0^t e^{t-s} \{x_۳'^{(n)}(s) - x_۳^{(n)}(s) + s\tilde{x}_۱'^{(n)}(s) + s\tilde{x}_۲'^{(n)}(s) - s^۲\tilde{x}_۳^{(n)}(s) - g_۳(s)\} ds, \end{cases} \quad (۲۱.۲)$$

که با  $n = ۱, ۲, \dots$  و مقادیر اولیه  $x_۱(0) = x_۲(0) = x_۳(0) = 0$  و استفاده از سری تیلور  $e^{t-s}$  حول

$t = s$  با انتخاب  $v = ۲۰$  داریم:

$$\begin{cases} x_۱^۱ = t^۴ - t^۶, \\ x_۲^۱ = t^۴ + \frac{۱۲}{۵}t^۵ + \frac{۴}{۳}t^۶ - \frac{۲}{۷}t^۷ - \frac{۱}{۸}t^۸, \\ x_۳^۱ = 0, \\ x_۱^۲ = t^۴ + t^۵ + \frac{۷}{۵}t^۶ + \frac{۴}{۳}t^۷ - \frac{۲}{۷}t^۸ - \frac{۱}{۸}t^۹, \\ x_۲^۲ = t^۴ + \frac{۹}{۵}t^۵ + \frac{۱۹}{۱۰}t^۶ + \frac{۱۶}{۱۱}t^۷ - \frac{۲}{۷}t^۸ - \frac{۱}{۳۷}t^۹, \\ x_۳^۲ = t^۴ - t^۶, \end{cases}$$

⋮

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = t^4 + t^5 - \frac{3899519}{1663200}t^{12} - \frac{793475}{99792}t^{13} + \dots, \\ x_2^{(2)} = t^4 + t^5 - \frac{128}{231}t^{11} - \frac{16871597}{3991680}t^{12} + \frac{13305553}{5869800}t^{13} + \dots, \\ x_3^{(2)} = t^4 + t^5 - \frac{914327}{332640}t^{12} + \frac{15109}{16800}t^{11} - \frac{6764513}{907200}t^{13} + \dots, \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های دقیق  $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = t^4 + t^5$  را بدست می‌آوریم و از (۱۰.۱)،  $y_1(t) = \frac{t}{t^4+t^5+1}$  را بدست می‌آوریم. در اینجا برای افزایش سرعت همگرایی می‌توان در (۲۰.۲) به جای  $x_3^{(n+1)}$ ،  $x_3^{(n)}$  جایگذاری کرد.

**مثال ۵.۴.۲.** مسئله غیرخطی اندیس ۱ زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y' = z - tw + g_1(t), \\ z' = w + z + g_2(t), \\ \circ = y - w + g_3(t). \end{cases} \quad (22.2)$$

برای  $0 \leq t \leq 1$  با مقادیر اولیه  $w(0) = y(0) = z(0) = 0$  که

$$g_1(t) = \cos(t) - te^t, \quad g_2(t) = e^t - \sin(t), \quad g_3(t) = \sin(t) - t \cos(t),$$

و جواب‌های دقیق

$$y(t) = t \cos(t), \quad w(t) = \sin(t), \quad z(t) = te^t,$$

هستند.

برای حل کردن معادله (۲۲.۲) معادله جبری آن را به فرم تکراری نسبت به  $w$  تبدیل می‌کنیم و برای

معادلات دیفرانسیل آن تابع‌های اصلاح‌گر می‌سازیم، پس داریم:

$$\begin{cases} w^{(n+1)}(t) = y^{(n)}(t) + g_3(t), \\ z^{(n+1)}(t) = z^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_1(s) [z^{(n)'}(s) - z^{(n)}(s) - \tilde{w}^{(n)}(s) - g_2(s)] ds, \\ y^{(n+1)}(t) = y^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_2 [y^{(n)'}(s) - \tilde{z}^{(n)}(s) + s\tilde{w}^{(n)}(s) - g_1(s)] ds, \end{cases} \quad (23.2)$$

که  $\tilde{w}^{(n)}$  و  $\tilde{z}^{(n)}$  متغیر محدود هستند. یعنی  $\delta \tilde{z}^{(n)} = \delta \tilde{w}^{(n)} = 0$ . می‌خواهیم  $\lambda$  را بدست آوریم، پس

$$\delta z^{(n+1)}(t) = \delta z^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_1(s) [z^{(n)'}(s) - z^{(n)}(s) - \tilde{w}^{(n)}(s) - g_2(s)] ds,$$

پس

$$\delta z^{(n+1)}(t) = \delta z^{(n)}(t) + \lambda_1(s) \delta z^{(n)}(s)|_{t=s} - \int_0^t (\lambda_1'(s) + \lambda_1(s)) \delta z^{(n)}(s) ds,$$

و

$$\delta y^{(n+1)}(t) = \delta y^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_2 [y^{(n)'}(s) - \tilde{z}^{(n)}(s) + s\tilde{w}^{(n)}(s) - g_1(s)] ds,$$

پس

$$\delta y^{(n+1)}(t) = \delta y^{(n)}(t) + \lambda_2(s) \delta y^{(n)}(s)|_{s=t} - \int_0^t \lambda_2'(s) \delta y^{(n)}(s) ds.$$

شرط پایداری  $\delta y^{(n+1)}(t) = 0$  و  $\delta z^{(n+1)}(t) = 0$  را اعمال می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 1 + \lambda_1(s)|_{s=t} = 0, \\ \lambda_1'(s) + \lambda_1(s) = 0, \end{cases} \quad (24.2)$$

و

$$\begin{cases} 1 + \lambda_2(s) = 0, \\ -\lambda_2'(s) = 0, \end{cases} \quad (25.2)$$

بنابراین ضرایب لاگرانژ زیر را بدست می‌آوریم

$$\lambda_1(s) = -e^{t-s}, \quad (26.2)$$

و

$$\lambda_2(s) = -1. \quad (27.2)$$

با جایگذاری (۲۶.۲) و (۲۷.۲) در (۲۳.۲)، فرمول‌های تکراری زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} w^{(n+1)}(t) = y^{(n)}(t) + g_3(t), \\ z^{(n+1)}(t) = z^{(n)}(t) - \int_0^t e^{t-s} [z^{(n)'}(s) - z^{(n)}(s) - \tilde{w}^{(n)}(s) - g_2(s)] ds, \\ y^{(n+1)}(t) = y^{(n)}(t) - \int_0^t [y^{(n)'}(s) - \tilde{z}^{(n)}(s) + s\tilde{w}^{(n)}(s) - g_1(s)] ds, \end{cases} \quad (28.2)$$

با  $n = 0, 1, 2, \dots$  و  $y^{(0)} = y(0) = 0$  و  $z^{(0)} = z(0) = 0$  و  $w^{(0)} = w(0) = 0$ . تابع‌های  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$

و  $g_3(t)$  را در  $t = 0$  و  $-e^{t-s}$  در  $t = s$  با سری تیلور و  $v = 10$  بسط می‌دهیم. پس داریم:

$$\begin{cases} w^1 = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{30}t^5 + \frac{1}{840}t^7 - \frac{1}{45360}t^9, \\ z^1 = t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^5 + \frac{1}{120}t^7 + \frac{1}{5040}t^9 + \dots, \\ y^1 = t - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^5 - \frac{1}{80}t^7 - \frac{1}{400}t^9 - \frac{1}{1440}t^{11} + \dots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w^2 = t - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{6}t^5 - \frac{1}{8}t^7 - \frac{1}{120}t^9 - \frac{1}{1440}t^{11} + \dots, \\ z^2 = t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{5}{24}t^7 + \frac{1}{40}t^9 - \frac{1}{4320}t^{11} + \dots, \\ y^2 = t - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^5 - \frac{1}{30}t^7 - \frac{1}{180}t^9 + \frac{1}{5040}t^{11} + \dots, \end{cases}$$

⋮

$$\begin{cases} w^{10} = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{2520}t^7 + \dots, \\ z^{10} = t + t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{24}t^7 + \frac{1}{120}t^9 + \frac{1}{720}t^{11} + \frac{1}{4480}t^{13} + \dots, \\ y^{10} = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^5 - \frac{1}{720}t^7 - \frac{1}{10080}t^9 + \dots, \end{cases}$$

با ادامه این روش بسط سری تیلور جواب‌های دقیق

$$y(t) = t \cos(t), \quad w(t) = \sin(t), \quad z(t) = te^t,$$

بدست می‌آید. حال اگر به‌جای  $w^{(n)}$  در محاسبه  $y^{(n+1)}$  و  $z^{(n+1)}$  از  $w^{(n+1)}$  و به‌جای  $z^{(n)}$  در محاسبه

$y^{(n+1)}$  از  $z^{(n+1)}$  استفاده کنیم، جواب‌های زیر بدست می‌آید

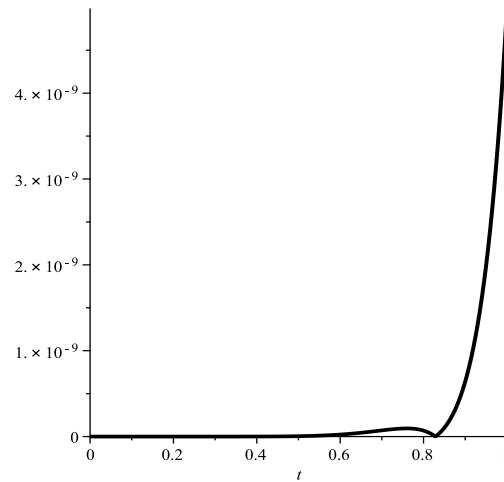
$$\begin{cases} w^1 = \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{30}t^5 + \frac{1}{840}t^7 - \frac{1}{45360}t^9, \\ z^1 = t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{180}t^6 + \dots, \\ y^1 = t - \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{180}t^6 + \dots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w^2 = t - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{180}t^6 + \dots, \\ z^2 = t + t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{40}t^5 - \frac{1}{120}t^6 + \dots, \\ y^2 = t - \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{40}t^5 + \frac{1}{90}t^6 + \frac{1}{720}t^7 + \dots, \end{cases}$$

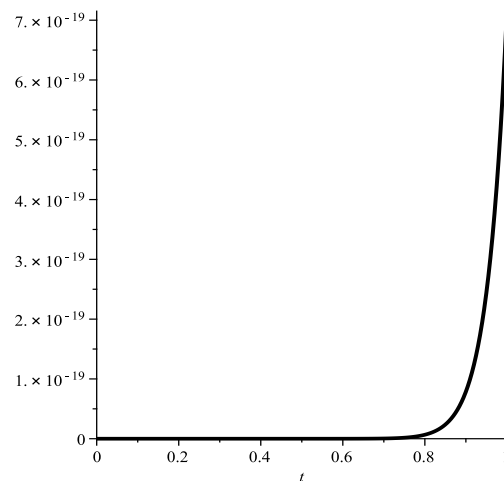
$$\vdots$$

$$\begin{cases} w^{10} = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{540}t^7 + \frac{1}{362880}t^9 + \dots, \\ z^{10} = t + t^2 + \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{24}t^5 + \frac{1}{120}t^6 + \frac{1}{720}t^7 + \dots, \\ y^{10} = t - \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{24}t^5 - \frac{1}{720}t^7 - \frac{1}{40320}t^9 + \dots. \end{cases}$$

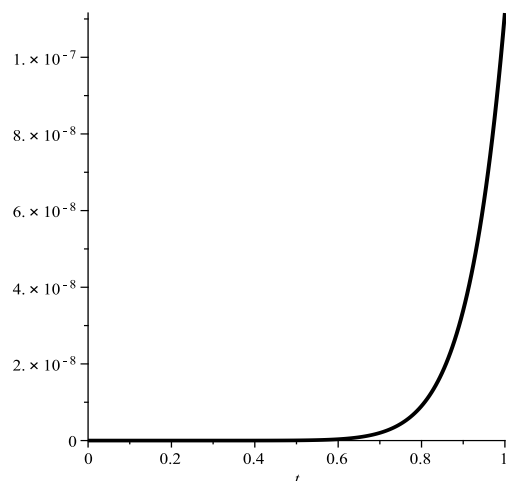
همان طور که مشاهده می کنیم سرعت همگرایی بیشتر می شود. هم چنین اگر  $v = 10$  و  $n = 10$  را به  $v = 20$  و  $n = 20$  افزایش دهیم سرعت همگرایی بیشتر می شود.



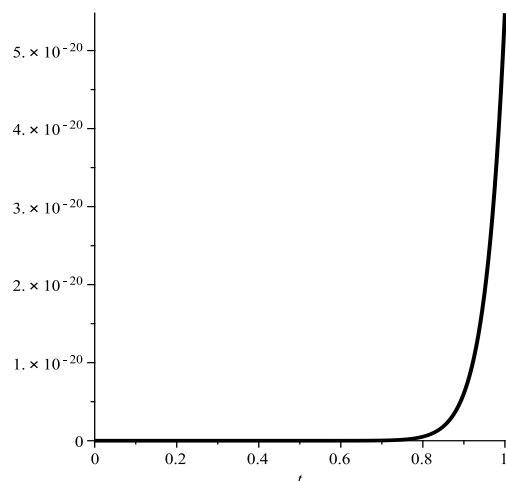
شکل ۱۳.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $w$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۵.۴.۲)



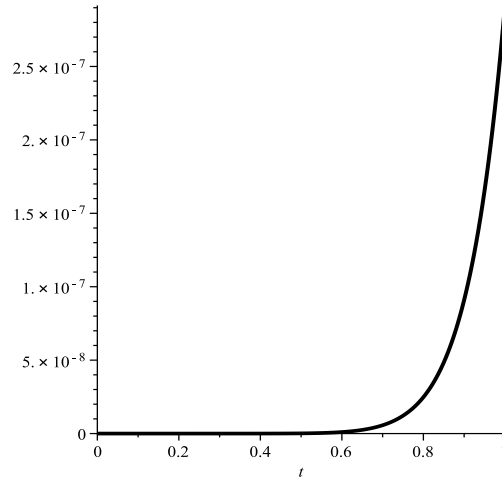
شکل ۱۴.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $w$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۵.۴.۲)



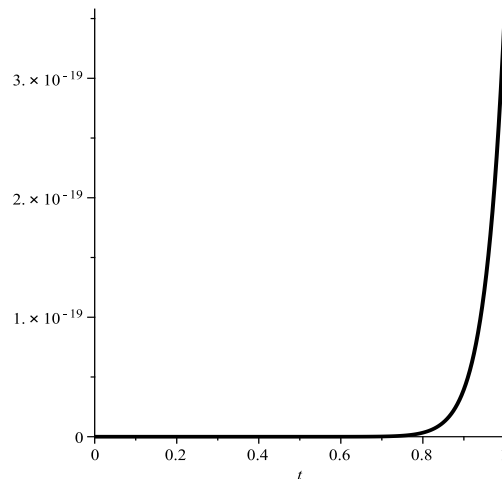
شکل ۱۵.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $z$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۵.۴.۲)



شکل ۱۶.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $z$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۵.۴.۲)



شکل ۱۷.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $y$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۵.۴.۲)



شکل ۱۸.۲: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $y$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۵.۴.۲)



# فصل ۳

## روش تجزیه آدومیان

### ۱.۳ مقدمه

در این فصل به معرفی و تشریح روش تجزیه آدومیان که هم‌چنین یک روش نیمه‌تحلیلی می‌باشد، پرداخته و با استفاده از این روش مسائل معادلات دیفرانسیل-جبری را حل می‌کنیم. به این منظور ابتدا از روش کاهش اندیس ارائه شده در (۳.۱) استفاده نموده و سپس دستگاه حاصل را با روش تجزیه آدومیان حل می‌کنیم.

### ۲.۳ مبانی روش تجزیه آدومیان

برای نشان دادن مفاهیم اصلی روش تجزیه آدومیان، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$Lu + Ru + Nu = g(x). \quad (1.3)$$

فرض می‌کنیم  $L$  عملگری معکوس‌پذیر و دارای بالاترین مرتبه مشتق است،  $R$  عملگر خطی از مرتبه کمتر از  $L$  است.  $N$  عملگر غیرخطی و  $g$  قسمت غیر همگن معادله را نشان می‌دهد. با به کار بردن عملگر  $L^{-1}$  در طرفین معادله (۱.۳) و با استفاده از شروط معلوم مسئله بدست می‌آوریم:

$$u = f(x) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu),$$

که تابع  $f(x)$  جمله حاصل شده از انتگرال  $g(x)$  و استفاده کردن از شرط‌های داده شده می‌باشد. عملگر غیرخطی

$$Nu = F(u),$$

معمولاً با سری نامتناهی

$$F(u) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k,$$

نمایش داده می‌شود که به چندجمله‌ای آدومیان معروف است. در این سری  $A_0$  وابسته به  $u_0$ ،  $A_1$  وابسته به  $u_0$  و  $u_1$  و  $A_i$  به  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_i$  وابسته است.

با الگوریتم زیر

$$A_0 = F(u_0), \quad (2.3)$$

$$A_1 = u_1 F'(u_0),$$

$$A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 F''(u_0),$$

$$A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F'''(u_0),$$

⋮

می‌توان چندجمله‌ایهای آدومیان را محاسبه کرد.

در روش آدومیان استاندارد حل  $u(x)$  با سری

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad (3.3)$$

که مولفه‌های  $u_0, u_1, u_2, \dots$  با رابطه بازگشتی زیر محاسبه می‌شود، بدست می‌آید

$$u_0 = f(x), \quad (4.3)$$

$$u_1 = -L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(A_0),$$

⋮

$$u_{k+1} = -L^{-1}(Ru_k) - L^{-1}(A_k), \quad k \geq 0.$$

با جایگذاری (۲.۳) در (۴.۳) مولفه‌های  $u$  بدست می‌آید. با قرار دادن مولفه‌های بدست آمده در (۳.۳)

جواب حاصل می‌شود. در روش تجزیه آدومیان اصلاح شده که توسط وزواز<sup>۱</sup> ارائه شده است، فرض می‌شود

که  $f(x)$  را بتوان به دو قسمت به نامهای  $f_0(x)$  و  $f_1(x)$  تقسیم کرد. بنابراین داریم:

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x),$$

که به این ترتیب تنها مولفه‌های  $u_0$  و  $u_1$  تغییر می‌کنند. قسمت  $f_0(x)$  به مولفه صفرم،  $u_0$  نسبت داده می‌شود

و  $f_1(x)$  باقی‌مانده با مولفه  $u_1$  ترکیب می‌شود بنابراین داریم:

$$u_0 = f_0(x), \quad (5.3)$$

$$u_1 = f_1(x) - L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(A_0),$$

<sup>۱</sup>A. M. Wazwaz

⋮

$$u_{k+2} = -L^{-1}(Ru_{k+1}) - L^{-1}(A_{k+1}), \quad k \geq 0,$$

که در روش تجزیه آدومیان استاندارد مولفه صفرم  $u_0$  با  $f(x)$  تعریف شده است و در روش تجزیه آدومیان اصلاح شده مولفه صفرم  $u_0$  تنها با یک بخش از  $f(x)$ ،  $f_0(x)$  تعریف شده است و قسمت باقی مانده  $f(x)$  یعنی  $f_1(x)$  با مولفه اول ترکیب شده است و مانند روش تجزیه آدومیان استاندارد بقیه  $u_k$   $k = 2, \dots$  بدست می آوریم و در نهایت داریم:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

### ۳.۳ استفاده از روش تجزیه آدومیان در حل معادلات دیفرانسیل - جبری

برای بیان چگونگی استفاده از روش تجزیه آدومیان در حل معادلات دیفرانسیل - جبری با توجه به قضیه (۷.۳.۱) سیستم معادلات دیفرانسیل - جبری را به صورت معادلات دیفرانسیل - جبری اندیس ۱ زیر در نظر می گیریم

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = -r, \quad (۶.۳)$$

$$b_2 x_1' - b_1 x_2' + d_1 x_1 + d_2 x_2 = b_2 q_1 - b_1 q_2,$$

که  $d_2 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$  و  $d_1 = b_1 a_{21} - b_2 a_{11}$  هستند. با استفاده از نامفرد بودن  $CB$  داریم:

$$CB(t) = c_1(t)b_1(t) + c_2(t)b_2(t) \neq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_f,$$

برای ادامه کار به یک شرط جدید  $c_1(t)b_1(t) \neq 0$  یا  $c_2(t)b_2(t) \neq 0$  برای  $t_0 \leq t \leq t_f$  نیاز داریم. در

اینجا فرض می کنیم  $c_1(t)b_1(t) \neq 0$ . بنابراین از (۶.۳) بدست می آوریم:

$$x_1 = \frac{-c_2}{c_1} x_2 - \frac{r}{c_1}, \quad (۷.۳)$$

$$x_2' = \frac{b_2}{b_1} x_1' + \frac{d_1}{b_1} x_1 + \frac{d_2}{b_1} x_2 + \frac{b_2 q_1 + b_1 q_2}{b_1},$$

قرار می دهیم  $L = \frac{d}{dt}$  و  $L^{-1} = \int_0^t (\cdot) ds$ . برای عدد دلخواه  $v$  قرار می دهیم:

$$x_1 = \sum_{i=0}^v x_{1,i}, \quad x_2 = \sum_{i=0}^v x_{2,i}. \quad (۸.۳)$$

با استفاده از شرایط اولیه مسئله داریم:

$$x_{1,0} = x_1(0), \quad x_{2,0} = x_2(0).$$

حال با استفاده از (۷.۳) داریم:

$$x_{1,1} = \frac{-c_2}{c_1} x_{2,0} - \frac{r}{c_1},$$

$$x_{2,1} = x_{2,0} + \int_0^t \left( \frac{b_2}{b_1} x'_{1,1} + \frac{d_1}{b_1} (x_{1,0} + x_{1,1}) + \frac{d_2}{b_1} x_{2,0} + \frac{b_2 q_1 + b_1 q_2}{b_1} \right) ds,$$

و به همین ترتیب برای  $k = 1, 2, \dots$  داریم:

$$x_{1,k+1} = \frac{-c_2}{c_1} x_{2,k},$$

$$x_{2,k+1} = \int_0^t \left( \frac{b_2}{b_1} x'_{1,k+1} + \frac{d_1}{b_1} x_{1,k+1} + \frac{d_2}{b_1} x_{2,k} \right) ds,$$

و تکنیک مشابه می‌تواند برای معادلات دیفرانسیل - جبری قضیه (۸.۳.۱) به کار برده شود.

### ۴.۳ مثال‌ها

در این بخش برای نشان دادن کارآیی روش بالا مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم. در مثال‌های مذکور برای سهولت در محاسبات از بسط سری تیلور  $g(t)$  به صورت زیر استفاده شده است.

$$g(t) \approx \sum_{i=0}^v g_i(t),$$

که  $v$  عدد طبیعی دلخواه است.

**مثال ۱.۴.۳.** معادله دیفرانسیل جبری با اندیس ۲ زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} X' = AX + By + q, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 = CX + r, \end{cases} \quad (9.3)$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} e^t - \sin(t) \\ e^t \cos(t) \end{bmatrix},$$

و

$$r(t) = te^t + e^t \sin(t),$$

شرایط اولیه مسئله  $x_1^{(0)}(t) = 0$  و  $x_2^{(0)}(t) = 0$  و جواب‌های دقیق  $x_1(t) = te^t$  و  $x_2(t) = e^t \sin(t)$  و  $y(t) = \sin(t)$  هستند.

با استفاده از قضیه (۷.۳.۱)، معادله دیفرانسیل - جبری اندیس ۲ به معادله دیفرانسیل - جبری اندیس

۱ زیر تغییر شکل می‌دهد

$$\begin{cases} -x'_2 + x_2 = -e^t \cos(t), \\ x_1 + x_2 = te^t + e^t \sin(t), \end{cases}$$

حال از روش تجزیه آدومیان برای حل این معادلات استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} x_{1,0} = x_1(0) = 0, \\ x_{2,0} = x_2(0) = 0, \\ x_{1,1} = -x_{2,0} + te^t + e^t \sin(t), \\ x_{2,1} = x_{2,0} + \int_0^t x_{2,0} + e^t \cos(t), \end{cases}$$

و برای  $n = 1, 2, \dots$  داریم:

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = -x_{2,n}, \\ x_{2,n+1} = \int_0^t x_{2,n}. \end{cases}$$

توابع  $e^t \cos(t)$  و  $te^t + e^t \sin(t)$  را با سری تیلور در  $t = 0$  و  $v = 10$  بسط می‌دهیم. پس از معادلات بالا

بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} x_1^1 = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{72}t^5 + \frac{1}{216}t^6 - \frac{1}{504}t^7 + \frac{1}{4032}t^8 - \frac{1}{22680}t^9 + \dots, \\ x_2^1 = t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{30}t^5 - \frac{1}{18}t^6 + \frac{1}{504}t^8 + \frac{1}{2268}t^9 + \frac{1}{22680}t^{10} + \dots, \\ x_1^2 = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{18}t^6 + \frac{1}{126}t^7 - \frac{1}{4536}t^9 - \frac{1}{22680}t^{10} - \dots, \\ x_2^2 = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{6}t^5 - \frac{1}{18}t^6 - \frac{1}{126}t^7 + \frac{1}{4536}t^9 + \frac{1}{22680}t^{10} + \dots, \end{cases}$$

⋮

$$\begin{cases} x_1^{10} = -\frac{1}{362880}t^{10} - \frac{1}{3991680}t^{11} + \frac{1}{311351040}t^{13} + \frac{1}{2179457280}t^{14} + \dots, \\ x_2^{10} = \frac{1}{362880}t^{10} + \frac{1}{3991680}t^{11} - \frac{1}{311351040}t^{13} - \frac{1}{2179457280}t^{14} + \dots. \end{cases}$$

بنابراین با جمع کردن جواب‌های بدست‌آمده داریم:

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{10} x_{1,i} = t + t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{24}t^5 + \frac{1}{72}t^6 + \frac{1}{120}t^7 + \frac{1}{720}t^8 + \frac{1}{4032}t^9 + \dots,$$

و

$$x_2(t) = \sum_{i=0}^{10} x_{2,i} = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{30}t^5 - \frac{1}{90}t^6 - \frac{1}{630}t^7 + \frac{1}{22680}t^9 + \frac{1}{113400}t^{10} + \dots,$$

که بسط تیلور جواب‌های دقیق  $x_1(t) = te^t$  و  $x_2(t) = e^t \sin(t)$  می‌باشد. هم‌چنین از فرمول (۱۰.۱)

بدست می‌آوریم  $y(t) = \sin(t)$ . در نمودارهای (۲.۳)، (۳.۳)، (۴.۳) و (۱.۳) مشاهده می‌کنیم که با

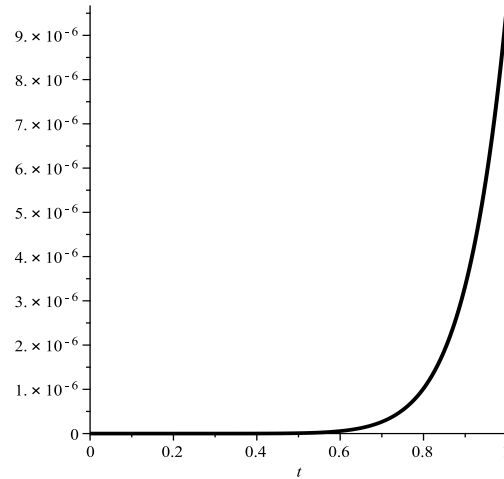
افزایش  $v = 10$  و  $n = 10$  به  $v = 20$  و  $n = 20$  سرعت همگرایی بیشتر می‌شود.

### مثال ۲.۴.۳. مسئله

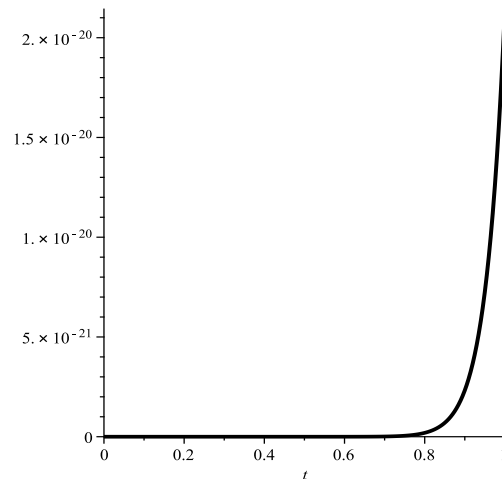
$$\begin{cases} X' = AX + By + q, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 = CX + r, \end{cases} \quad (10.3)$$

که در آن

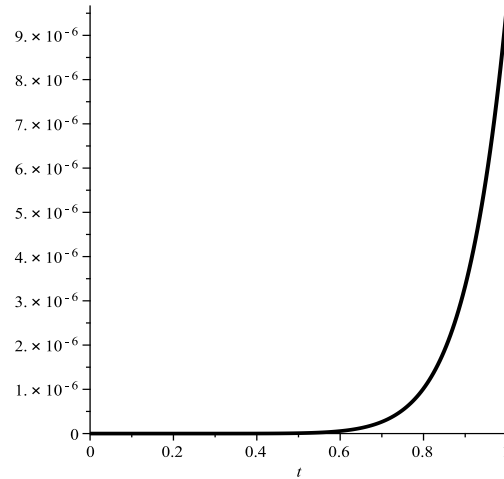
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & t \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & t \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$



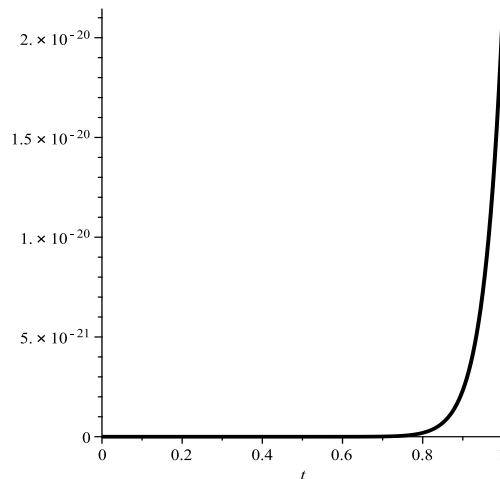
شکل ۱.۳: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۱.۴.۳)



شکل ۲.۳: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۱.۴.۳)



شکل ۳.۳: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۱.۴.۳)



شکل ۴.۳: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۱.۴.۳)

با  $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = t^4 + t^5$  و  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$  و  $y_1(t) = y_2(t) = \frac{1}{t^4+t^5+1}$  سازگار هستند، را ملاحظه کنید.

با استفاده از قضیه (۸.۳.۱)،  $\overline{M} = [t \ 1 \ t]$  بدست آمده پس داریم:

$$\begin{bmatrix} t & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t & -1 & -t^2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{bmatrix}, \quad (11.3)$$

با همان شرایط اولیه  $x_{1,0} = x_1(0) = 1$  و  $x_{2,0} = x_2(0) = 1$  وقتی  $g_1(t) = t^6 - t^4$ ،  $g_2(t) = 0$  و  $g_3(t) = 4t^3 + 12t^4 + 8t^5 - 2t^6 - t^7$  هستند. حال (۱۱.۳) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{cases} -x_1 + tx_2 = g_3(t), \\ x_1 - x_3 = g_2(t), \\ tx_1' + x_2' + tx_3' - tx_1 - x_2 - t^2x_3 = g_1(t). \end{cases}$$

معادلات بالا را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{cases} x_1 = tx_2 - g_3(t), \\ x_3 = x_1, \\ x_2(t) = g_1(t) - tx_1' - tx_3' + tx_1 + x_2 + t^2x_3. \end{cases}$$

حال قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_1^{(0)}(t) = tx_2^{(0)}(t) - g_3(t), \\ x_2^{(0)}(t) = x_1^{(0)}(t) + x_2^{(1)}(t) - g_2(t), \\ x_2^{(1)}(t) = x_2^{(0)}(t) + \int_0^t g_1(s) - s(x_1^{(0)'}(s) + x_2^{(1)'}(s)) - s(x_2^{(0)'}(s) + x_3^{(1)'}(s)) + s(x_1^{(0)}(s) + x_2^{(1)}(s)) + s^2(x_2^{(0)}(s) + x_3^{(1)}(s)) ds, \end{cases}$$

و برای  $n = 1, 2, \dots$  داریم:

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)}(t) = tx_2^{(n)}(t), \\ x_2^{(n+1)}(t) = x_1^{(n+1)}(t), \\ x_2^{(n+1)}(t) = \int_0^t -sx_1^{(n+1)'}(s) - sx_2^{(n+1)'}(s) + sx_1^{(n+1)}(s) + x_2^{(n)}(s) + s^2x_2^{(n+1)}(s) ds, \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x_1^{\downarrow} = t^4 - t^6, \\ x_2^{\downarrow} = t^4 + \frac{4}{5}t^5 + \frac{3}{4}t^6 - \frac{11}{4}t^7 - \frac{1}{4}t^8 - \frac{1}{9}t^9, \\ x_3^{\downarrow} = t^4 - t^6, \\ \\ x_1^{\uparrow} = t^5 + \frac{4}{5}t^6 + \frac{3}{4}t^7 + \frac{11}{4}t^8 - \frac{1}{4}t^9, \\ x_2^{\uparrow} = \frac{1}{5}t^5 - \frac{23}{15}t^6 - \frac{11}{4}t^7 - \frac{1}{4}t^8 - \frac{3233}{1260}t^9, \\ x_3^{\uparrow} = t^5 + \frac{4}{5}t^6 + \frac{3}{4}t^7 + \frac{11}{4}t^8 - \frac{1}{4}t^9, \end{cases}$$

⋮



$$\begin{cases} x_1^6 = \frac{1}{1680} t^9, \\ x_2^6 = \frac{1}{15120} t^9, \\ x_3^6 = \frac{1}{1680} t^9. \end{cases}$$

حال با جمع کردن جواب‌های بدست آمده داریم:

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^6 x_{1,i}(t) = t^4 + t^5,$$

و

$$x_2(t) = \sum_{i=1}^6 x_{2,i}(t) = t^4 + t^5,$$

و

$$x_3(t) = \sum_{i=1}^6 x_{3,i}(t) = t^4 + t^5.$$

بنابراین جواب‌های دقیق  $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = t^4 + t^5$  را بدست می‌آوریم. و از (۱۰.۱)،

$$y_1(t) = y_2(t) = \frac{t}{t^4 + t^5 + 1}$$

# فصل ۴

## روش اختلال هموتویی

### ۱.۴ مقدمه

در این فصل به معرفی روش اختلال هموتویی که یک روش نیمه تحلیلی است، می پردازیم و از آن برای حل معادلات دیفرانسیل-جبری استفاده می کنیم. به این منظور ابتدا از روش کاهش اندیس ارائه شده در (۳.۱) استفاده کرده و سپس مسئله حاصل را با روش اختلال هموتویی حل می کنیم. در پایان برای نشان دادن کارایی روش مثال هایی را ارائه خواهیم داد.

### ۲.۴ مبانی روش اختلال هموتویی

روش اختلال هموتویی در واقع ترکیبی از روش های اختلال و هموتویی می باشد. روش های اختلال جزء تکنیک های تحلیلی کاربردی است که مشابه تکنیک های تحلیلی دیگر دارای محدودیت هایی می باشند. محدودیت اول آنها این است که تقریباً همه روش های اختلال مبنی بر این فرض بنا شده اند که یک پارامتر کوچک باید در مسئله وجود داشته باشد. این پارامتر کوچک فرض شده، کاربرد تکنیک اختلال را محدود می کند. از طرفی اکثریت مسائل پارامتر کوچک ندارند و محدودیت دوم این است که تعیین پارامتر کوچک به خلاقیت و تکنیک خاص نیاز دارد. انتخاب مناسب پارامتر کوچک منجر به جواب ایده آل می شود و انتخاب نامناسب این پارامتر کوچک تاثیر نامناسب بر نتایج دارد. علاوه بر این حل تقریبی با روش های اختلال معمولاً برای مقادیر کوچک پارامتر معتبر هستند. روش اختلال هموتویی که ترکیبی از روش اختلال و هموتویی است، نیازی به پارامتر کوچک در مسئله ندارد، بنابراین محدودیت های روش اختلال را ندارد. این روش سری نامتناهی را فراهم می سازد که به جواب دقیق مسئله همگرا است و جملات این سری به سادگی قابل محاسبه می باشند. ایده اصلی این روش بر پایه معرفی پارامتر هموتویی  $p$  است که از صفر تا یک مقدار

می گیرد.

برای بیان این روش معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega, \quad (1.4)$$

با شرایط مرزی

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (2.4)$$

را در نظر بگیرید.  $A$  یک عملگر دیفرانسیل،  $f(r)$  یک تابع تحلیلی و  $B$  یک عملگر مرزی است.  $\Gamma$  مرز دامنه  $\Omega$  می باشد. عملگر  $A$  را می توان به دو بخش عملگر خطی  $L$  و عملگر غیرخطی  $N$  تقسیم کرد. بنابراین معادله (۱.۴) به صورت زیر نوشته می شود

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \quad (3.4)$$

برای استفاده از روش اختلال هموتوبی، هموتوبی  $v(r, p) = \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$  را به گونه ای در نظر می گیریم که در شرط زیر صدق کند

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad p \in [0, 1], r \in \Omega \quad (4.4)$$

یا

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0,$$

که  $p$  عملگر هموتوبی نامیده می شود و در  $[0, 1]$  مقدار می گیرد.  $u_0$  تقریب اولیه برای جواب معادله (۱.۴) می باشد که در شرط (۲.۴) صدق می کند. توجه کنید وقتی  $p = 0$  باشد

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0,$$

یک مسئله خطی است و به سادگی قابل حل است و وقتی  $p = 1$  باشد

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0,$$

که همان شکل مسئله اصلی را دارد. با تغییر  $p$  از صفر به یک،  $v(r, p)$  از  $u_0(r)$ ، جواب اولیه معادله، به  $u(r)$  جواب معادله تغییر می کند. در توپولوژی این تغییر شکل  $L(v) - L(u_0)$  به  $A(v) - f(r)$  یک هموتوپیک نامیده می شود. حال فرض کنیم جواب معادله (۴.۴) را می توان به صورت یک سری توانی از  $p$  به صورت زیر نوشت

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots. \quad (5.4)$$

با قرار دادن  $p = 1$  داریم:

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots, \quad (6.4)$$

که جواب تقریبی برای معادله (۱.۴) می باشد.

### ۳.۴ استفاده از روش اختلال هموتویی در حل معادلات دیفرانسیل - جبری

برای بیان چگونگی استفاده از روش اختلال هموتویی در حل معادلات دیفرانسیل - جبری با توجه به قضیه (۷.۳.۱) دستگاه معادلات دیفرانسیل - جبری اندیس ۱ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = -r, \quad (۷.۴)$$

$$b_2 x_1' + d_1 x_1 + d_2 x_2 = b_2 q_1 - b_1 q_2, \quad t \in [t_0, t_f],$$

که  $d_2 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$  و  $d_1 = b_1 a_{21} - b_2 a_{11}$  با توجه به نامفرد بودن  $CB$  داریم:

$$CB(t) = (c_1 b_1 + c_2 b_2)(t) \neq 0, \quad t \in [t_0, t_f],$$

فرض کنید  $c_1(t)b_1(t) \neq 0$  برای  $t_0 \leq t \leq t_f$  بنابراین معادلات بالا را می توان به صورت زیر نوشت.

$$x_1 = -\frac{c_2}{c_1} x_2 - \frac{r}{c_1},$$

$$x_2' = \frac{b_2}{b_1} x_1' + \frac{d_1}{b_1} x_1 + \frac{d_2}{b_1} x_2 + \frac{b_1 q_2 - b_2 q_1}{b_1},$$

یا

$$x_1 = -\frac{c_2}{c_1} x_2 - \frac{r}{c_1},$$

$$x_2 = x_2(0) + \int_0^t \left[ \frac{b_2}{b_1} x_1' + \frac{d_1}{b_1} x_1 + \frac{d_2}{b_1} x_2 + \frac{b_1 q_2 - b_2 q_1}{b_1} \right] ds.$$

حال فرض کنید:

$$F(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} F_1(u_1, u_2) \\ F_2(u_1, u_2) \end{bmatrix}, \quad (۸.۴)$$

که

$$F_1(u_1, u_2) = u_1 + \frac{c_2}{c_1} u_2 + \frac{r}{c_1},$$

$$F_2(u_1, u_2) = u_2 - u_2(0) - \int_0^t \left[ \frac{b_2}{b_1} u_1' + \frac{d_1}{b_1} u_1 + \frac{d_2}{b_1} u_2 + \frac{b_1 q_2 - b_2 q_1}{b_1} \right] ds,$$

و

$$L(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} L_1(u_1, u_2) \\ L_2(u_1, u_2) \end{bmatrix},$$

که

$$L_1(u_1, u_2) = u_1 - u_1(0),$$

$$L_2(u_1, u_2) = u_2 - u_2(0),$$

و  $u_1(\circ)$  و  $u_2(\circ)$  تقریب‌های اولیه برای معادلات دیفرانسیل-جبری (۷.۴) هستند. مطابق روش اختلال هموتوبی، هموتوبی  $H(u_1, u_2, p)$  را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$H(u_1, u_2, p) = (1 - p)L(u_1, u_2) + pF(u_1, u_2) = \circ, \quad (9.4)$$

یا

$$H(u_1, u_2, p) = \begin{bmatrix} H_1(u_1, u_2, p) \\ H_2(u_1, u_2, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - p)L_1(u_1, u_2) + pF_1(u_1, u_2) \\ (1 - p)L_2(u_1, u_2) + pF_2(u_1, u_2) \end{bmatrix} = \circ, \quad (10.4)$$

که  $p \in [0, 1]$  پارامتر جایگزین شده است. وقتی  $p$  از صفر به یک تغییر می‌کند، مسئله  $L(u_1, u_2) = \circ$  به طور پیوسته به مسئله اصلی  $F(u_1, u_2) = \circ$  تغییر شکل می‌دهد. با استفاده از پارامتر هموتوبی  $p$ ، جواب‌های  $u_1$

و  $u_2$  را به صورت زیر بسط می‌دهیم

$$u_1 = u_{1,\circ} + pu_{1,1} + p^2u_{1,2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_{1,i}, \quad (11.4)$$

$$u_2 = u_{2,\circ} + pu_{2,1} + p^2u_{2,2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_{2,i}, \quad (12.4)$$

با قرار دادن  $p = 1$ ، جواب‌های معادلات (۷.۴) به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$x_1 = \lim_{p \rightarrow 1} u_1 = u_{1,\circ} + u_{1,1} + u_{1,2} + \dots, \quad (13.4)$$

و

$$x_2 = \lim_{p \rightarrow 1} u_2 = u_{2,\circ} + u_{2,1} + u_{2,2} + \dots. \quad (14.4)$$

اگر معادلات (۱۱.۴) و (۱۲.۴) را در معادلات (۱۰.۴) جایگزین می‌کنیم داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_{1,i} = u_{1,\circ} + p \left( -u_1(\circ) - \frac{c_2}{c_1} \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_{2,i} - \frac{r}{c_1} \right), \quad (15.4)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_{2,i} = u_{2,\circ} + p \left( \int_0^t \left( \frac{b_2}{b_1} \sum_{i=0}^{\infty} p^i u'_{1,i} + \frac{d_1}{b_1} \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_{1,i} + \frac{d_2}{b_1} \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_{2,i} + \frac{b_1 q_2 - b_2 q_1}{b_1} \right) ds \right), \quad (16.4)$$

حال جملات با توان مشابه  $p$  را دسته‌بندی کرده و معادلات زیر را بدست می‌آوریم.

$$p^0 : \begin{cases} u_{1,\circ} = u_1(\circ), \\ u_{2,\circ} = u_2(\circ), \end{cases} \quad (17.4)$$

$$p^1 : \begin{cases} u_{1,1} = -u_1(\circ) - \frac{c_2}{c_1} u_{2,\circ} - \frac{r}{c_1}, \\ u_{2,1} = \int_0^t \left[ \frac{b_2}{b_1} u'_{1,\circ} + \frac{d_1}{b_1} u_{1,\circ} + \frac{d_2}{b_1} u_{2,\circ} + \frac{b_1 q_2 - b_2 q_1}{b_1} \right] ds, \end{cases} \quad (18.4)$$

$$p^n : \begin{cases} u_{1,n} = -\frac{c_2}{c_1} u_{2,n-1}, \\ u_{2,n} = \int_0^t \left[ \frac{b_2}{b_1} u'_{1,n-1} + \frac{d_1}{b_1} u_{1,n-1} + \frac{d_2}{b_1} u_{2,n-1} \right] ds, \end{cases} \quad (19.4)$$

سپس با حل کردن معادلات (۱۷.۴) - (۱۹.۴) جواب‌های تقریبی مسئله معادلات دیفرانسیل-جبری (۷.۴) با استفاده از (۱۳.۴) و (۱۴.۴) بدست می‌آیند. توجه داریم برای افزایش سرعت همگرایی می‌توانیم در محاسبات  $u_{2,n}$  (۱۸.۴) و به‌جای استفاده از  $u_{1,n-1}$  از  $u_{1,n}$  استفاده کنیم. روش مشابهی را می‌توان برای معادلات دیفرانسیل-جبری (۸.۳.۱) استفاده کرد.

## ۴.۴ مثال‌ها

در این بخش برای نشان دادن توانایی و کارآیی روش مذکور مثال‌هایی ارائه شده است. در مثال‌های زیر برای سهولت در محاسبات، از بسط سری تیلور  $g(t)$  به‌صورت زیر استفاده شده است

$$g(t) = \sum_{i=0}^v \frac{t^i}{i!} g^{(i)}(0),$$

که  $v$  یک عدد طبیعی دلخواه است.

**مثال ۱.۴.۴.** مسئله اندیس ۲ زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} X' = AX + By + q, \\ 0 = Cx + r, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (20.4)$$

که

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 2e^t - \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

و  $r(t) = -(e^t + \sin(t))$  با  $x_1(0) = 1$  و  $x_2(0) = 0$  هستند. جواب‌های واقعی

$$x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = \sin(t), \quad y(t) = \cos(t),$$

هستند.

طبق قضیه (۷.۳.۱) مسئله معادله دیفرانسیل-جبری اندیس ۲ (۲۰.۴) به معادله دیفرانسیل-جبری

اندیس ۱

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 + e^t + \sin(t), \\ x_1' = -x_1 + x_2 + 2e^t - \sin(t), \end{cases} \quad (21.4)$$

با همان مقادیر اولیه  $x_1(0) = 1$  و  $x_2(0) = 0$  تبدیل می‌شود. برای حل معادله دیفرانسیل-جبری

(۲۱.۴)، بسط تیلور تابع‌های  $e^t$  و  $\sin(t)$  را در  $t = 0$  با  $v = 10$  به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$e^t \cong \sum_{n=0}^{10} \frac{t^n}{n!}, \quad (22.4)$$

$$\sin(t) \cong \sum_{n=0}^{10} (-1)^n \frac{t^{(2n+1)}}{(2n+1)!}. \quad (23.4)$$

طبق روش اختلال هموتوبی، تقریب‌های اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$x_1(\circ) = u_1(\circ) = 1, \quad x_2(\circ) = u_2(\circ) = \circ.$$

حال هموتوبی  $H(u_1, u_2, p)$  را برای معادله دیفرانسیل-جبری (۲۱.۴) به صورت زیر می‌نویسیم

$$H(u_1, u_2, p) = \left[ \begin{array}{c} u_2 + p(u_1 - e^t - \sin(t)) \\ u_1 - 1 + p \left( -\int_{\circ}^t [-u_1 + u_2 + 2e^s - \sin(s)] ds \right) \end{array} \right] = \circ, \quad (24.4)$$

با جایگذاری (۱۱.۴)، (۱۲.۴)، (۲۲.۴) و (۲۳.۴) در (۲۴.۴) داریم:

$$\sum_{i=\circ}^{\infty} p^i u_{2,i} = p \left( -\sum_{i=\circ}^{\infty} p^i u_{1,i} + \sum_{i=\circ}^{1\circ} \frac{t^n}{n!} + \sum_{i=\circ}^{1\circ} (-1)^n \frac{t^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \right), \quad (25.4)$$

$$\sum_{i=\circ}^{\infty} p^i u_{1,i} = 1 + p \left( \int_{\circ}^t \left[ -\sum_{i=\circ}^{\infty} p^i u_{1,i} + \sum_{i=\circ}^{\infty} p^i u_{2,i} + 2 \sum_{i=\circ}^{1\circ} \frac{t^n}{n!} - \sum_{i=\circ}^{1\circ} (-1)^n \frac{t^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \right] ds \right), \quad (26.4)$$

با دسته‌بندی جملات با توان مشابه  $p$ ، معادلات زیر را بدست می‌آوریم.

$$p^{\circ} : \begin{cases} u_{2,\circ} = \circ, \\ u_{1,\circ} = 1, \end{cases} \quad (27.4)$$

$$p^1 : \begin{cases} u_{2,1} = -u_{1,\circ} + \sum_{i=\circ}^{1\circ} \frac{t^n}{n!} + \sum_{i=\circ}^{1\circ} (-1)^n \frac{t^{(2n+1)}}{(2n+1)!}, \\ u_{1,1} = \int_{\circ}^t \left[ -u_{1,\circ} + u_{2,\circ} + 2 \sum_{i=\circ}^{1\circ} \frac{t^n}{n!} - \sum_{i=\circ}^{1\circ} (-1)^n \frac{t^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \right] ds, \end{cases} \quad (28.4)$$

$$p^n : \begin{cases} u_{2,n} = -u_{1,n-1}, \\ u_{1,n} = \int_{\circ}^t -u_{1,n-1} + u_{2,n-1} ds, \quad n \geq 2, \end{cases} \quad (29.4)$$

با حل کردن معادلات (۲۷.۴) - (۲۹.۴) داریم:

$$\begin{cases} u_{2,1} = 2t + \frac{1}{\circ} t^2 + \frac{1}{\circ} t^4 + \frac{1}{\circ} t^6 + \frac{1}{\circ} t^8 + \dots, \\ u_{1,1} = t + \frac{1}{\circ} t^2 + \frac{1}{\circ} t^3 + \frac{1}{\circ} t^4 + \frac{1}{\circ} t^5 + \frac{1}{\circ} t^6 + \dots, \\ u_{2,2} = -t - \frac{1}{\circ} t^2 - \frac{1}{\circ} t^3 - \frac{1}{\circ} t^4 - \frac{1}{\circ} t^5 - \frac{1}{\circ} t^6 + \dots, \\ u_{1,2} = \frac{1}{\circ} t^2 - \frac{1}{\circ} t^3 - \frac{1}{\circ} t^4 - \frac{1}{\circ} t^5 - \frac{1}{\circ} t^6 + \dots, \\ u_{2,3} = -\frac{1}{\circ} t^2 + \frac{1}{\circ} t^3 + \frac{1}{\circ} t^4 + \frac{1}{\circ} t^5 + \frac{1}{\circ} t^6 + \dots, \\ u_{1,3} = -\frac{1}{\circ} t^2 - \frac{1}{\circ} t^3 - \frac{1}{\circ} t^4 - \frac{1}{\circ} t^5 - \frac{1}{\circ} t^6 + \dots, \\ u_{2,4} = \frac{1}{\circ} t^2 + \frac{1}{\circ} t^3 + \frac{1}{\circ} t^4 + \frac{1}{\circ} t^5 + \frac{1}{\circ} t^6 + \dots, \\ u_{1,4} = \frac{1}{\circ} t^2 + \frac{1}{\circ} t^3 + \frac{1}{\circ} t^4 + \frac{1}{\circ} t^5 + \frac{1}{\circ} t^6 + \dots, \\ \vdots \\ u_{2,10} = -\frac{1}{\circ} t^5 + \frac{1}{\circ} t^6 + \frac{1}{\circ} t^7 + \frac{1}{\circ} t^8 + \dots, \\ u_{1,10} = -\frac{1}{\circ} t^5 - \frac{1}{\circ} t^6 + \frac{1}{\circ} t^7 + \frac{1}{\circ} t^8 + \dots, \end{cases}$$

بنابراین حل تقریبی مرتبه دهم معادلات دیفرانسیل-جبری (۲۱.۴)

$$\sum_{i=0}^{10} u_{1,i} = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{360}t^6 + \dots,$$

$$\sum_{i=0}^{10} u_{2,i} = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{180}t^6 + \frac{1}{1260}t^7 + \frac{1}{5040}t^8 + \dots,$$

هستند. حال با استفاده از روابط (۱۳.۴) و (۱۴.۴) سری تیلور جواب‌های دقیق  $x_1(t) = e^t$  و  $x_2(t) = \sin(t)$  حاصل می‌شود. همچنین از رابطه (۱۰.۱)،  $y = \cos(t)$  بدست می‌آید. حال اگر از  $u_{2,n}$  به جای  $u_{2,n-1}$  در محاسبه  $u_{1,n}$  معادلات (۲۸.۴) و (۲۹.۴) استفاده کنیم داریم:

$$\begin{cases} u_{2,1} = 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{60}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + \dots, \\ u_{1,1} = t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{24}t^3 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{40}t^5 + \dots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2,2} = -t - \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{40}t^5 + \dots, \\ u_{1,2} = -t^2 - t^3 - \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{40}t^5 - \frac{1}{120}t^6 + \dots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2,3} = t^2 + t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{40}t^5 + \frac{1}{120}t^6 + \dots, \\ u_{1,3} = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{40}t^5 + \frac{1}{60}t^6 + \frac{1}{420}t^7 + \dots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2,4} = -\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{40}t^5 - \frac{1}{60}t^6 - \frac{1}{420}t^7 + \dots, \\ u_{1,4} = -\frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{40}t^5 - \frac{1}{60}t^6 - \frac{1}{420}t^7 - \frac{1}{1680}t^8 + \dots, \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} u_{2,10} = -\frac{1}{2835}t^9 - \frac{1}{4725}t^{10} - \frac{1}{51975}t^{11} + \dots, \\ u_{1,10} = -\frac{1}{14175}t^{10} - \frac{1}{51975}t^{11} - \frac{1}{311850}t^{12} + \dots, \end{cases}$$

پس حل تقریبی مرتبه دهم معادلات دیفرانسیل-جبری (۲۱.۴) به صورت زیر است.

$$\sum_{i=0}^{10} u_{1,i} = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{5040}t^7 + \dots,$$

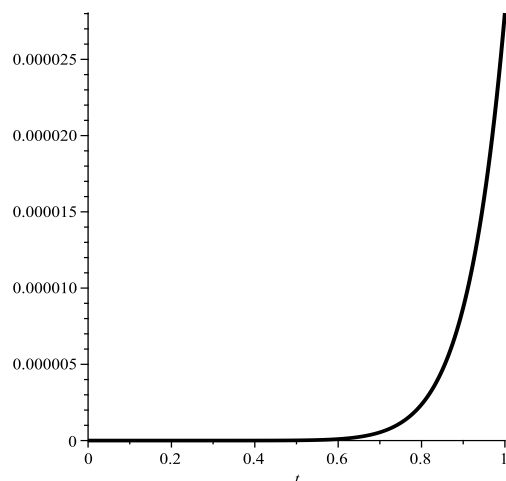
$$\sum_{i=0}^{10} u_{2,i} = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{5040}t^7 + \frac{1}{362880}t^9 - \frac{1}{39916800}t^{11} + \dots,$$

همان‌طور که مشخص است با انجام دادن این کار سرعت همگرایی به‌طور چشم‌گیری افزایش می‌یابد. همچنین توجه داریم که اگر  $v = 10$  و  $n = 10$  به  $v = 20$  و  $n = 20$  افزایش دهیم نتایج به‌صورت زیر بدست می‌آید.

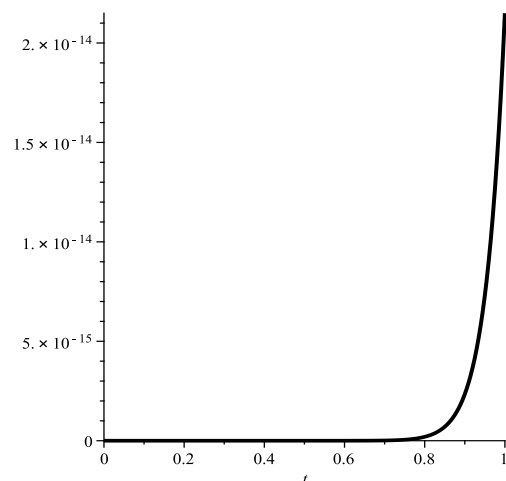
مثال ۲.۴.۴. مسئله اندیس ۲ زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} X' = AX + By + q, \\ 0 = CX + r, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (30.4)$$

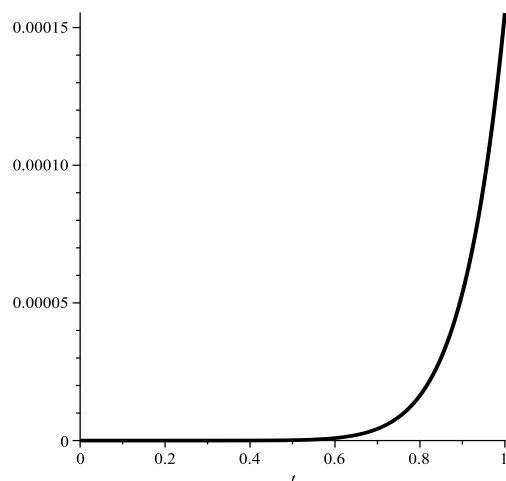




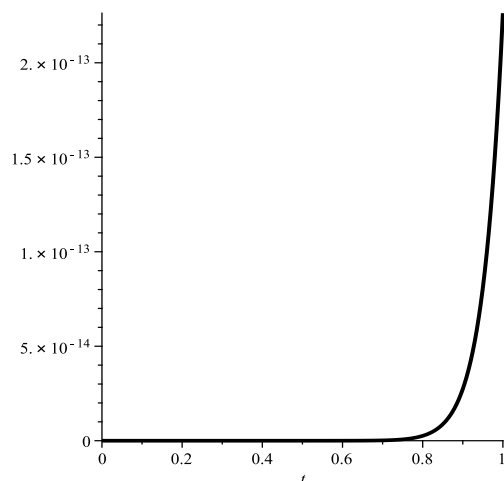
شکل ۱.۴: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۱.۴.۴)



شکل ۲.۴: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۱.۴.۴)



شکل ۳.۴: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۱.۴.۴)



شکل ۴.۴: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۱.۴.۴)

که

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix},$$

و  $r(t) = -(\cos(t) + \sin(t))$  با  $x_1(0) = 1$  و  $x_2(0) = 0$  هستند. جواب‌های واقعی

$$x_1(t) = \cos(t), \quad x_2(t) = \sin(t), \quad y(t) = e^t \cos(t),$$

هستند.

طبق قضیه (۷.۳.۱) مسئله معادله دیفرانسیل-جبری اندیس ۲ (۳۰.۴) به معادله دیفرانسیل-جبری

اندیس ۱

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 + \cos(t) + \sin(t), \\ x_1' = x_1 - x_2 - \cos(t), \end{cases} \quad (31.4)$$

با همان مقادیر اولیه  $x_1(0) = 1$  و  $x_2(0) = 0$  تبدیل می‌شود. برای حل کردن معادله دیفرانسیل-جبری

(۳۱.۴)، بسط تیلور تابع‌های  $\cos(t)$  و  $\sin(t)$  را در  $t = 0$  با  $v = 1$  به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\cos(t) \cong 1 + \sum_{n=1}^{1^{\circ}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{2n!}, \quad (32.4)$$

$$\sin(t) \cong \sum_{n=0}^{1^{\circ}} (-1)^n \frac{t^{(2n+1)}}{(2n+1)!}. \quad (33.4)$$

طبق روش اختلال هموتویی، تقریب‌های اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$x_1(0) = u_1(0) = 1, \quad x_2(0) = u_2(0) = 0.$$

حال هموتویی  $H(u_1, u_2, p)$  را برای معادله دیفرانسیل-جبری (۳۱.۴) به صورت زیر می‌نویسیم

$$H(u_1, u_2, p) = \begin{bmatrix} u_2 + p(u_1 - \cos(t) - \sin(t)) \\ u_1 - 1 + p \left( -\int_0^t [u_1 - u_2 - \cos(s)] ds \right) \end{bmatrix} = 0. \quad (34.4)$$

با جایگذاری (۱۱.۴)، (۱۲.۴)، (۳۲.۴) و (۳۳.۴) در (۳۴.۴) داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_{2,i} = p \left( -\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_{1,i} + 1 + \sum_{i=1}^{1^{\circ}} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{2n!} + \sum_{i=0}^{1^{\circ}} (-1)^n \frac{t^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \right), \quad (35.4)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_{1,i} = 1 + p \left( \int_0^t \left[ \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_{1,i} - \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_{2,i} - \left( 1 + \sum_{i=1}^{1^{\circ}} (-1)^{n+1} \frac{t^{(2n)}}{(2n)!} \right) \right] ds \right), \quad (36.4)$$

با دسته‌بندی جملات با توان مشابه  $p$ ، معادلات زیر را بدست می‌آوریم

$$p^0 : \begin{cases} u_{2,0} = 0, \\ u_{1,0} = 1, \end{cases} \quad (37.4)$$

$$p^1 : \begin{cases} u_{2,1} = -u_{1,0} + 1 + \sum_{i=1}^{1^{\circ}} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{2n!} + \sum_{i=0}^{1^{\circ}} (-1)^n \frac{t^{(2n+1)}}{(2n+1)!}, \\ u_{1,1} = \int_0^t \left[ u_{1,0} - u_{2,1} - \left( 1 + \sum_{i=1}^{1^{\circ}} (-1)^{n+1} \frac{t^{(2n)}}{(2n)!} \right) \right] ds, \end{cases} \quad (38.4)$$

$$p^n : \begin{cases} u_{2,n} = -u_{1,n-1}, \\ u_{1,n} = \int_0^t u_{1,n-1} + u_{2,n} ds, \quad n \geq 2. \end{cases} \quad (39.4)$$

با حل کردن معادلات (۳۷.۴) - (۳۹.۴) داریم:

$$\begin{cases} u_{2,1} = t - \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \dots, \\ u_{1,1} = -\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{60}t^5 - \frac{1}{720}t^6 + \dots, \\ u_{2,2} = \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{60}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + \dots, \\ u_{1,2} = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{60}t^5 - \frac{1}{180}t^6 - \frac{1}{2520}t^7 + \dots, \\ u_{2,3} = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{60}t^5 + \frac{1}{180}t^6 + \frac{1}{2520}t^7 + \dots, \\ u_{1,3} = -\frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{15}t^5 + \frac{1}{180}t^6 - \frac{1}{630}t^7 - \frac{1}{10080}t^8 + \dots, \\ u_{2,4} = \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{15}t^5 - \frac{1}{180}t^6 + \frac{1}{630}t^7 + \frac{1}{10080}t^8 + \dots, \\ u_{1,4} = -\frac{1}{15}t^5 + \frac{1}{45}t^6 + \frac{1}{630}t^7 - \frac{1}{2520}t^8 - \frac{1}{45360}t^9 + \dots, \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2,10} = \frac{1}{14175}t^{10} - \frac{1}{155925}t^{11} - \frac{1}{1871100}t^{12} + \dots, \\ u_{1,10} = -\frac{1}{155925}t^{11} + \frac{1}{46775}t^{12} + \frac{1}{12162150}t^{13} + \dots, \end{cases}$$

بنابراین حل تقریبی مرتبه دهم معادلات دیفرانسیل-جبری (۳۱.۴)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{10} u_{1,i} &= 1 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{40320}t^8 + \dots, \\ \sum_{i=0}^{10} u_{2,i} &= t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{5040}t^7 + \frac{1}{362880}t^9 + \dots, \end{aligned}$$

هستند. حال با استفاده از روابط (۱۳.۴) و (۱۴.۴) سری تیلور جواب‌های دقیق  $x_1(t) = \cos(t)$  و  $x_2(t) = \sin(t)$  حاصل می‌شود. همچنین از رابطه (۱۰.۱)،  $y = e^t \cos(t)$  بدست می‌آید.

**مثال ۳.۴.۴.** مسئله زیر را در نظر بگیرید

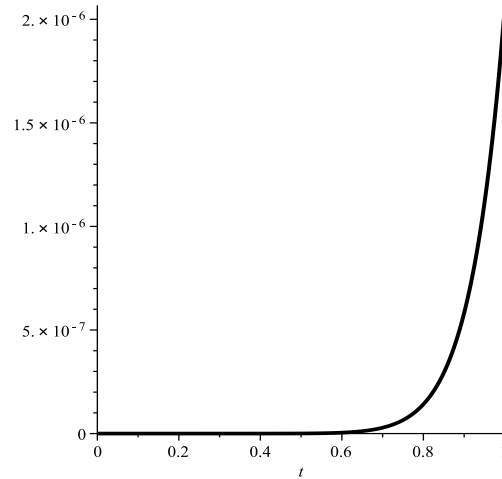
$$\begin{cases} X' = AX + By + q, \\ 0 = CX + r, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (40.4)$$

با  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$  و

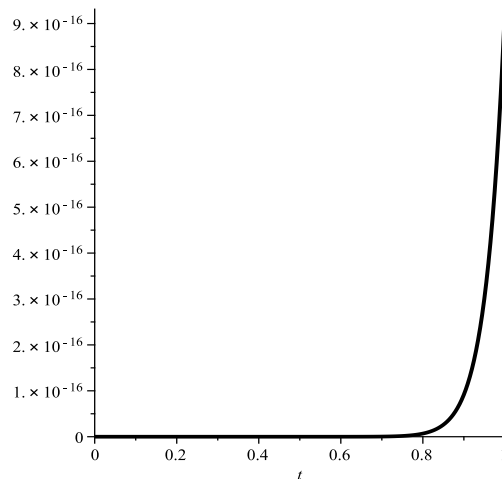
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}, \quad C^T = B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & t \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

که  $q$  و  $r$  با جواب‌های دقیق

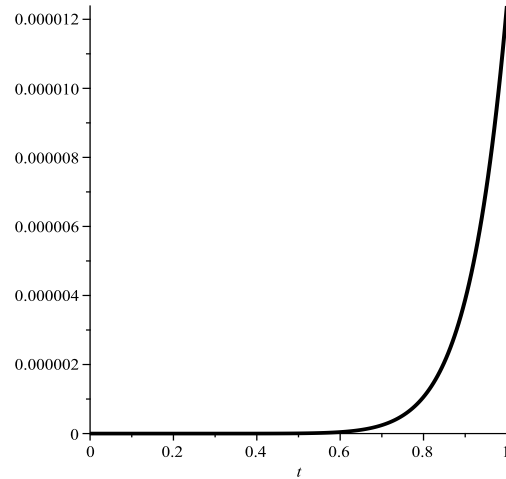
$$x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = t^4 + t^5, \quad y_1(t) = y_2(t) = \frac{t}{1+t^4+t^5},$$



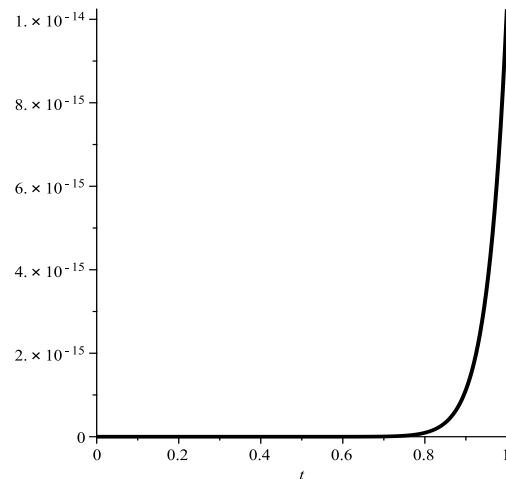
شکل ۵.۴: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۲.۴.۴)



شکل ۶.۴: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_1$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۲.۴.۴)



شکل ۷.۴: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 10$  و  $n = 10$  برای مثال (۲.۴.۴)



شکل ۸.۴: اختلاف بین جواب تقریبی و جواب دقیق  $x_2$  با  $v = 20$  و  $n = 20$  برای مثال (۲.۴.۴)

مطابق هستند. طبق قضیه (۸.۳.۱)،  $M = [t \ 1 \ t]$  بدست می‌آید. معادله دیفرانسیل-جبری اندیس ۲ (۴۰.۴) به معادله دیفرانسیل-جبری اندیس ۱

$$\begin{cases} x_1 = tx_2 - g_1(t), \\ x_3 = x_1 - g_2(t), \\ x'_3 = -tx'_1 - tx'_2 + tx_1 + x_2 + t^2x_3 + g_3(t), \end{cases} \quad (41.4)$$

با همان شرایط اولیه  $x_1(\circ) = x_2(\circ) = x_3(\circ) = \circ$  تغییر شکل می‌دهد. که  $g_1(t) = t^6 - t^4$ ،  $g_2(t) = \circ$  و  $g_3(t) = 4t^3 + 12t^4 + 8t^5 - 2t^6 - t^7$  هستند. طبق روش اختلال هموتوبی، تقریب‌های اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$u_1(\circ) = x_1(\circ) = \circ, \quad x_2(\circ) = u_2(\circ) = \circ, \quad x_3(\circ) = u_3(\circ) = \circ.$$

حال هموتوبی  $H(u_1, u_2, u_3, p)$  را برای معادله دیفرانسیل-جبری (۴۱.۴) به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H(u_1, u_2, u_3, p) = \begin{bmatrix} u_1 + p(-tu_2 + g_1(t)) \\ u_3 + p(-u_1 + g_2(t)) \\ u_2 + p\left(\int_{\circ}^t [su'_1 + su'_2 - su_1 - u_2 - s^2u_3 - g_3(s)]ds\right) \end{bmatrix} = \circ. \quad (42.4)$$

با جایگذاری

$$u_1 = \sum_{i=\circ}^{\infty} p^i u_{1,i}, \quad u_2 = \sum_{i=\circ}^{\infty} p^i u_{2,i}, \quad u_3 = \sum_{i=\circ}^{\infty} p^i u_{3,i},$$

در (۴۲.۴) و دسته‌بندی جملات با توان مشابه  $p$  داریم:

$$p^{\circ} : \begin{cases} u_{1,\circ} = \circ, \\ u_{2,\circ} = \circ, \\ u_{3,\circ} = \circ, \end{cases} \quad (43.4)$$

$$p^1 : \begin{cases} u_{1,1} = tu_{2,\circ} - g_1(t), \\ u_{3,1} = u_{1,\circ} - g_2(t), \\ u_{2,1} = \int_{\circ}^t [-su'_{1,\circ} - su'_{2,\circ} + su_{1,\circ} + u_{2,\circ} + s^2u_{3,\circ} + g_3(s)]ds, \end{cases} \quad (44.4)$$

$$p^n : \begin{cases} u_{1,n} = tu_{2,n-1}, \\ u_{3,n} = u_{1,n-1}, \\ u_{2,n} = \int_{\circ}^t [-su'_{1,n-1} - su'_{2,n-1} + su_{1,n-1} + u_{2,n-1} + s^2u_{3,n-1}]ds, \end{cases} \quad (45.4)$$

برای  $n \geq 2$ . حال معادلات (۴۳.۴) - (۴۵.۴) را حل می‌کنیم. مولفه‌های بدست آمده از روش اختلال

هموتوبی برای معادلات دیفرانسیل (۴۰.۴) به صورت زیر هستند

$$\begin{cases} u_{1,1} = t^4 - t^6, \\ u_{3,1} = \circ, \\ u_{2,1} = t^4 + \frac{12}{5}t^5 + \frac{4}{3}t^6 + \dots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{1,2} = t^5 + \frac{12}{5}t^6 + \frac{4}{3}t^7 + \dots, \\ u_{3,2} = t^4 - t^6, \\ u_{2,2} = -\frac{2}{5}t^5 + \frac{17}{30}t^6 + \frac{22}{31}t^7 + \dots, \\ \\ u_{1,3} = -\frac{2}{5}t^6 + \frac{17}{30}t^7 + \frac{22}{31}t^8 + \dots, \\ u_{3,3} = t^5 + \frac{12}{5}t^6 + \frac{4}{3}t^7 + \dots, \\ u_{2,3} = -\frac{4}{5}t^5 - \frac{14}{15}t^6 - \frac{5}{2}t^7 + \dots, \\ \\ u_{1,4} = -\frac{4}{5}t^5 - \frac{14}{15}t^6 - \frac{5}{2}t^7 + \dots, \\ u_{3,4} = -\frac{2}{5}t^6 + \frac{17}{30}t^7 + \frac{22}{31}t^8 + \dots, \\ u_{2,4} = -\frac{29}{30}t^6 - \frac{176}{105}t^7 - \frac{103}{60}t^8 + \dots, \\ \\ \vdots \\ \\ u_{1,10} = -\frac{64}{105}t^{10} - \frac{49123}{18900}t^{11} + \dots, \\ u_{3,10} = -\frac{21923}{15120}t^{10} - \frac{44839}{30240}t^{11} + \dots, \\ u_{2,10} = -\frac{15109}{16800}t^{10} + \frac{168029}{415800}t^{11} + \dots, \end{cases}$$

جواب تقریبی مرتبه دهم برای معادلات دیفرانسیل-جبری (۴.۴) به صورت زیر هستند

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{10} u_{1,i} &= t^4 + t^5 + \frac{15109}{16800}t^{11} + \dots, \\ \sum_{i=0}^{10} u_{2,i} &= t^4 + t^5 - \frac{3899519}{1663200}t^{11} + \dots, \\ \sum_{i=0}^{10} u_{3,i} &= t^4 + t^5 + \frac{64}{105}t^{10} + \dots. \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که جملات نویز<sup>۱</sup> در مولفه‌های بدست آمده ظاهر می‌شود. با محاسبه کردن مولفه‌های دیگر از روش اختلال هموتوبی و حذف کردن این جملات، به آسانی جواب‌های دقیق

$$x_1(t) = t^4 + t^5, \quad x_2(t) = t^4 + t^5, \quad x_3(t) = t^4 + t^5,$$

بدست می‌آیند. همچنین از رابطه (۱۰.۱) بدست می‌آوریم:

$$y_1(t) = y_2(t) = \frac{t}{1 + t^4 + t^5}.$$

مشابه مثال قبل اگر از  $u_{1,n}$  به جای  $u_{1,n-1}$  در محاسبه  $u_{3,n}$  و  $u_{1,n}$  و  $u_{3,n}$  به جای  $u_{3,n-1}$  و  $u_{1,n-1}$  برای

محاسبه  $u_{2,n}$  در معادلات (۴.۴) و (۴.۴) استفاده کنیم داریم:

$$\begin{cases} u_{1,1} = t^4 - t^6, \\ u_{3,1} = t^4 - t^6, \\ u_{2,1} = t^4 + \frac{4}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^6 + \dots, \end{cases}$$

<sup>۱</sup>noise



$$\begin{cases} u_{1,2} = t^5 + \frac{4}{5}t^6 + \frac{3}{7}t^7 + \dots, \\ u_{3,2} = t^5 + \frac{4}{5}t^6 + \frac{3}{7}t^7 + \dots, \\ u_{2,2} = \frac{1}{5}t^5 - \frac{23}{15}t^6 - \frac{71}{70}t^7 + \dots, \\ \\ u_{1,3} = \frac{1}{5}t^6 - \frac{23}{15}t^7 - \frac{71}{70}t^8 + \dots, \\ u_{3,3} = \frac{1}{5}t^6 - \frac{23}{15}t^7 - \frac{71}{70}t^8 + \dots, \\ u_{2,3} = \frac{1}{30}t^6 - \frac{59}{105}t^7 + \frac{4337}{1680}t^8 + \dots, \\ \\ u_{1,4} = \frac{1}{30}t^7 - \frac{59}{105}t^8 + \frac{4337}{1680}t^9 + \dots, \\ u_{3,4} = -\frac{1}{30}t^7 - \frac{59}{105}t^8 + \frac{4337}{1680}t^9 + \dots, \\ u_{2,4} = \frac{1}{210}t^7 - \frac{9}{70}t^8 + \frac{6499}{5040}t^9 + \dots, \\ \\ \vdots \\ \\ u_{1,10} = \frac{1}{199581400}t^{13} - \frac{103}{216216000}t^{14} + \dots, \\ u_{3,10} = \frac{1}{199581400}t^{13} - \frac{103}{216216000}t^{14} + \dots, \\ u_{2,10} = \frac{1}{259459200}t^{13} - \frac{787}{1816214400}t^{14} + \dots, \end{cases}$$

بنابراین جواب تقریبی مرتبه دهم معادلات دیفرانسیل-جبری (۴.۴) به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{10} u_{1,i} &= t^4 + t^5 - \frac{1}{259459200}t^{14} + \dots, \\ \sum_{i=0}^{10} u_{2,i} &= t^4 + t^5 - \frac{1}{3632228800}t^{14} + \dots, \\ \sum_{i=0}^{10} u_{3,i} &= t^4 + t^5 - \frac{1}{259459200}t^{14} + \dots. \end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم سرعت همگرایی بیشتر می‌شود.

## ۵.۴ نتیجه‌گیری

اگر مثال اول روش تکرار وردشی و روش اختلال هموتوبی را با هم مقایسه کنیم، مشاهده می‌کنیم که جواب تقریبی هر دو روش یکسان است، هم‌چنین می‌توان این مقایسه را با توجه به نمودارها انجام داد که در این صورت هم، نمودارها دقیقاً مشابه هم بوده و اختلافی ندارند. هم‌چنین می‌توان مثال سوم آن‌ها را با هم مقایسه کرد که در هر دو روش با حذف جملات نویز<sup>۲</sup> به جواب یکسانی می‌رسیم. پس می‌توان نتیجه گرفت که جواب تقریبی حاصل از هر دو روش تقریباً مشابه هم است و هر دو روش ابزارهای مناسب و دقیقی برای یافتن پاسخ دقیق معادلات دیفرانسیل-جبری هستند.

<sup>۲</sup>noise

# فصل ۵

## کاربردها

در این فصل برای این که اهمیت معادلات دیفرانسیل-جبری را در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی نشان دهیم، کاربردهایی از معادلات دیفرانسیل-جبری را ارائه می‌دهیم.

### فرآیند شیمیایی

مسئله شیمیایی آکزو-نوبل<sup>۱</sup> را در نظر بگیرید. در این فرآیند شیمیایی دو ماده  $ZLU$  و  $FLB$  با هم ترکیب می‌شوند و مرتباً دی‌اکسیدکربن به آن‌ها اضافه می‌شود. مهم‌ترین ماده تولید شده در این فرآیند  $ZLA$  است. برای این که مدل ریاضی این فرآیند بدست آید،  $[FLB]$ ،  $[CO_2]$ ،  $[FLBT]$ ،  $[ZHU]$ ،  $[ZLA]$  و  $[FLBZHU]$  را به ترتیب با  $y_1, y_2, \dots, y_6$  نمایش می‌دهیم.  $r_i$  و  $F_{in}$  متغیرهای کمکی هستند که

$$\begin{aligned} r_1 &= k_1 y_1^{\frac{1}{2}} y_2^{\frac{1}{2}}, & r_2 &= k_2 y_3 y_4, \\ r_3 &= \frac{k_3}{k} y_1 y_5, & r_4 &= k_4 y_1 y_4^{\frac{1}{2}}, \\ r_5 &= k_5 y_6^{\frac{1}{2}} y_2^{\frac{1}{2}}, & F_{in} &= KLA \left( \frac{p(CO_2)}{H} - y_2 \right), \end{aligned}$$

هستند.  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  و  $KLA$  و  $p(CO_2)$  و  $H$  پارامترهای ثابت می‌باشند. به این ترتیب می‌توان این

فرآیند را با معادلات دیفرانسیل-جبری غیرخطی اندیس ۱ به صورت زیر مدل‌بندی کرد

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} -2r_1 + r_2 - r_3 - r_4 \\ -\frac{1}{2}r_1 - r_4 - \frac{1}{2}r_5 + F_{in} \\ r_1 - r_2 + r_3 \\ -r_2 + r_3 - 2r_4 \\ r_2 - r_3 + r_5 \\ k_5 y_1 y_4^{\frac{1}{2}} - y_6 \end{bmatrix},$$

که  $y'(\circ) = t'$  و  $y(\circ) = y$ ،  $\circ \leq t \leq 180$ ،  $y \in R^6$  هستند.

<sup>۱</sup>Akzo Nobel

## سیستم‌های مکانیکی مقید

یکی از کاربردهای معادلات دیفرانسیل-جبری در مهندسی، مدل‌بندی دینامیکی دستگاه‌های مکانیکی مقید است. سیستم‌های چندجسمی یا سیستم‌های مکانیکی مقید را شرح می‌دهیم. سیستم‌های مکانیکی مقید دارای بردار  $p(t) \in R^n$  است که این بردار شامل متغیرهایی است که وضعیت و جهت حرکت اجزا را مشخص می‌کنند و سرعت‌های متناظر  $v(t) = p'(t)$  است. مختصات‌های وضعیت در هلونومیک مقید  $m$  به صورت زیر صدق می‌کنند.

$$\circ = g(p(t), t), \quad (1.5)$$

که به معادلات دینامیکی

$$M(p, t)p''(t) = f(p, p', t) - G^T(p, t)\lambda, \quad (2.5)$$

با  $n$  متغیر سرعت  $p'(t)$ ،  $n$  متغیر شتاب  $p''(t)$  و بردار نیرو مقید  $\lambda G^T$  با ماتریس ژاکوبی مقید  $m \times n$

$$G(p, t) = \left( \frac{\partial g}{\partial p} \right) (p, t),$$

و  $m$  ضرب‌گر لاگرانژ  $\lambda(t)$ ، ماتریس جرم  $n \times n$ ،  $M(p)$  و  $n$  نیروی خارجی  $f(p, p', t)$  پیوسته‌اند. معادلات (۱.۵) و (۲.۵) با هم نوعی از معادلات حرکت برای سیستم‌های مکانیکی هلونومیک مقید هستند که معادله دیفرانسیل-جبری مرتبه ۲ است.

## شبکه الکتریکی

شبه‌سازی پیشرفته شبکه‌های الکتریکی، بر پایه روش‌هایی از مدل‌سازی است که تولید خودکار معادلات مدل را فراهم می‌سازد. یکی از مهم‌ترین این روش‌ها، روش آنالیز گره‌ای اصلاح شده<sup>۲</sup> است که معمولاً در کاربردهای صنعتی برای تولید معادلات مدل شبکه به‌طور خودکار، از این روش استفاده می‌شود. قوانین جریان و ولتاژ کریچف<sup>۳</sup> با معادلات مشخصه برای هر المان پایه‌ای مبنی بر تشریح شارژ-ارینتد<sup>۴</sup> از ترانزیستور، منجر به معادلات دیفرانسیل-جبری زیر می‌شود.

$$\begin{cases} Az' = f(x), & t \in [t_0, t_m], \\ Z - q(x) = \circ, \end{cases}$$

که  $x(t_0) = x_0$  که  $x \in R^n$  پتانسیل‌های گره و  $f(x) \in R^n$  جریان‌های تولید شده با المان‌های استاتیک هستند. ماتریس وقوع

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \circ \\ \circ & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

<sup>۲</sup> modified nodal analysis method

<sup>۳</sup> Kirchhoff

<sup>۴</sup> charge - oriented

توپولوژی شبکه وابسته به المان‌های ذخیره شارژ را شرح می‌دهد و جریان شارژ  $z' = \frac{dq(x)}{dt}$  ناشی از این المان‌ها را به جریان استاتیک  $f(x)$  در هر گره، مربوط می‌سازد.

### کنترل بهینه

مسئله کنترل بهینه زیر را ملاحظه می‌کنید.

$$\text{minimize } J[x, u] = \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, s) ds,$$

به طوری که

$$x' = f(x, u, t),$$

که بردار  $n$  تایی  $x(t)$  مشخص کننده متغیرهای حالت و بردار  $n$  تایی  $u(t)$  مشخص کننده متغیرهای کنترل هستند. فرض کنید  $x(t_0) = x_0$  و  $x(t_1) = x_1$ . تابع  $u(t)$  روی  $t_0 \leq t \leq t_1$  را طوری انتخاب می‌کنیم که تابع  $J$  مینیمم شود و معادلات حالت  $x' = f(x, u, t)$  برقرار باشند. برای حل این دسته از معادلات کنترل با استفاده از حساب تغییرات، معادلات اوایلر لاگرانژ می‌توانند به صورت معادلات دیفرانسیل-جبری زیر بیان شود.

$$x' = f(x, u, t),$$

$$\lambda' = -\frac{\partial g}{\partial x}(x, u, t) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda,$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial u}(x, u, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \lambda,$$

# پیوست آ

## کد مثال‌ها با *Maple*

### ۱.آ کد *Maple* مثال‌های روش وردشی

در اینجا کد مثال‌های روش وردشی با *Maple* را ارائه می‌دهیم. مثال اول

```
restart;  
m := 10;  
q1 := -2*exp(t)+sin(t);  
w1 := mtaylor(q1, t = 0, m);  
g1 := unapply(w1, t);  
q2 := exp(t)+sin(t);  
w2 := mtaylor(q2, t = 0, m);  
g2 := unapply(w2, t);  
q3 := -exp(t-s);  
w3 := mtaylor(q3, t = s, m);  
g3 := unapply(w3, t);  
x1[0] := 1;  
unapply(x1[0], t);  
x2[0] := 0;  
unapply(x2[0], t);  
for n from 0 to m do
```

```

x2[n+1] := g2(t)-x1[n](t);
x2[n+1] := unapply(x2[n+1], t);
x1[n+1] := x1[n](t)+int(g3(s)*(diff(x1[n](s), s)+x1[n](s)
-x2[n+1](s)+g1(s)), s = 0 .. t);
x1[n+1] := unapply(x1[n+1], t)
end do;
x11 := x1[m](t);
x1 := mtaylor(exp(t), t = 0, 2*m);
plot(abs(x11-x1), t = 0 .. 1);
x22 := x2[m](t);
x2 := mtaylor(sin(t), t = 0, 2*m);
plot(abs(x22-x2), t = 0 .. 1);

```

مثال دوم

```

restart;
m := 10;
q1 := cos(t)-sin(t)+exp(t);
w1 := mtaylor(q1, t = 0, m);
g1 := unapply(w1, t);
q2 := cos(t)+exp(t);
w2 := mtaylor(q2, t = 0, m);
g2 := unapply(w2, t);
q3 := -exp(t-s);
w3 := mtaylor(q3, t = s, m);
l := unapply(w3, t);
x1[0] := 1;
unapply(x1[0], t);

```

```

x2[0] := 1;
unapply(x2[0], t);
for n from 0 to m do
  x2[n+1] := g1(t)-x1[n](t);
  x2[n+1] := unapply(x2[n+1], t);
  x1[n+1] := x1[n](t)+int(1(s)*(diff(x1[n](s), s)-x1[n](s)-x2[n](s)
+g2(s)), s = 0 .. t);
  x1[n+1] := unapply(x1[n+1], t)
end do;
x1 := x1[m+1](t);
x1e := mtaylor(cos(t), t = 0, 2*m);
plot(abs(x1-x1e), t = 0 .. 1);
x2 := x2[m+1](t);
x2e := mtaylor(-sin(t)+exp(t), t = 0, 2*m);
plot(abs(x2-x2e), t = 0 .. 1);

```

مثال سوم

```

restart;
m := 10;
w1 := exp(t)+sin(t);
q1 := mtaylor(w1, t = 0, m);
g1 := unapply(q1, t);
w2 := cos(t)-exp(t);
q2 := mtaylor(w2, t = 0, m);
g2 := unapply(q2, t);
x1[0] := 1;
unapply(x1[0], t);
x2[0] := 0;

```

```

unapply(x2[0], t);
for n from 0 to m do
  x1[n+1] := g1(t)-x2[n](t);
  x1[n+1] := unapply(x1[n+1], t);
  x2[n+1] := x2[n](t)-(int(diff(x2[n](s), s)-x1[n](s)-g2(s), s = 0 .. t));
  x2[n+1] := unapply(x2[n+1], t)
end do;
x1 := x1[m](t);
x1e := mtaylor(exp(t), t = 0, 2*m);
plot(abs(x1-x1e), t = 0 .. 1);
x2 := x2[m](t);
x2e := mtaylor(sin(t), t = 0, 2*m);
plot(abs(x2-x2e), t = 0 .. 1);

```

مثال چهارم

```

restart;
m := 10;
w := -exp(t-s);
p := mtaylor(w, t = s, m);
l := unapply(p, t);
x1[0] := 0;
unapply(x1[0], t);
x2[0] := 0;
unapply(x2[0], t);
x3[0] := 0;
unapply(x3[0], t);
for n from 0 to m do
  x1[n+1] := t*x2[n](t)-t^6+t^4;

```



```

x1[n+1] := unapply(x1[n+1], t);
x3[n+1] := x1[n](t);
x3[n+1] := unapply(x3[n+1], t);
x2[n+1] := x2[n](t)+int(1(s)*(diff(x2[n](s), s)-x2[n](s)
+s*(diff(x1[n](s), s))-s*x1[n](s)+s*(diff(x3[n](s), s))
-s^2*x3[n](s)-4*s^3-12*s^4-8*s^5+2*s^6+s^7), s = 0 .. t);
x2[n+1] := unapply(x2[n+1], t)
end do;

```

### مثال پنجم

```

restart;
m := 10;
q1 := cos(t)-exp(t)*t;
w1 := mtaylor(q1, t = 0, m);
g1 := unapply(w1, t);
q2 := exp(t)-sin(t);
w2 := mtaylor(q2, t = 0, m);
g2 := unapply(w2, t);
q3 := sin(t)-t*cos(t);
w3 := mtaylor(q3, t = 0, m);
g3 := unapply(w3, t);
q4 := -exp(t-s);
w4 := mtaylor(q4, t = s, m);
l := unapply(w4, t);
y[0] := 0;
unapply(y[0], t);
w[0] := 0;
unapply(w[0], t);

```

```

z[0] := 0;
unapply(z[0], t);
for n from 0 to m do
  w[n+1] := y[n](t)+g3(t);
  w[n+1] := unapply(w[n+1], t);
  z[n+1] := z[n](t)+int(1(s).(diff(z[n](s), s)-z[n](s)-w[n+1](s)-g2(s)),
  s = 0 .. t);
  z[n+1] := unapply(z[n+1], t);
  y[n+1] := y[n](t)-(int(diff(y[n](s), s)+s*w[n+1](s)-z[n+1](s)-g1(s),
  s = 0 .. t));
  y[n+1] := unapply(y[n+1], t)
end do;
y := y[m](t);
ye := mtaylor(t*cos(t), t = 0, 2*m);
plot(abs(y-ye), t = 0 .. 1);
z := z[m](t);
ze := mtaylor(exp(t)*t, t = 0, 2*m);
plot(abs(z-ze), t = 0 .. 1);
w := w[m](t);
we := mtaylor(sin(t), t = 0, 2*m);
plot(abs(w-we), t = 0 .. 1);

```

## ۲.آ کد Maple مثال‌های روش آدومیان

در اینجا کد Maple مثال‌های روش آدومیان را ارائه می‌دهیم. مثال اول

```

restart;
m := 10;
q1 := t*exp(t)+exp(t)*sin(t);

```

```

w1 := mtaylor(q1, t = 0, m);
g1 := unapply(w1, t);
q2 := exp(t)*cos(t);
w2 := mtaylor(q2, t = 0, m);
g2 := unapply(w2, t);
x1[0] := 0;
unapply(x1[0], t);
x2[0] := 0;
unapply(x2[0], t);
x2[1] := x2[0](t)+int(x2[0]*s+g2(s), s = 0 .. t);
x2[1] := unapply(x2[1], t);
x1[1] := -x2[1](t)+g1(t);
x1[1] := unapply(x1[1], t);
for i from 2 to m do
  x2[i] := int(x2[i-1](s), s = 0 .. t);
  x2[i] := unapply(x2[i], t);
  x1[i] := -x2[i](t);
  x1[i] := unapply(x1[i], t)
end do;
x11 := sum(x1[k](t), k = 0 .. m);
x1e := mtaylor(t*exp(t), t = 0, m);
plot(abs(x11-x1e), t = 0 .. 1);
x22 := sum(x2[k](t), k = 0 .. m);
x2e := mtaylor(exp(t)*sin(t), t = 0, m);
plot(abs(x22-x2e), t = 0 .. 1);

```

```

restart;
m := 10;
q1 := 4*t^3+12*t^4+8*t^5-2*t^6-t^7;
g1 := unapply(q1, t);
q2 := 0;
g2 := unapply(q2, t);
q3 := t^6-t^4;
g3 := unapply(q3, t);
x1[0] := 0;
unapply(x1[0], t);
x2[0] := 0;
unapply(x2[0], t);
x3[0] := 0;
unapply(x3[0], t);
x1[1] := t*x2[0](t)-g3(t);
x1[1] := unapply(x1[1], t);
x3[1] := x1[0](t)+x1[1](t)-g2(t);
x3[1] := unapply(x3[1], t);
x2[1] := x2[0]+int(g1(s)-s*(diff(x1[0](s), s))-s*(diff(x1[1](s), s))-
s*(diff(x3[0](s), s))-s*(diff(x3[1](s), s))+s*x1[0](s)+s*x1[1](s)
+x2[0](s)+s^2*x3[0](s)+s^2*x3[1](s), s = 0 .. t);
x2[1] := unapply(x2[1], t);
for i from 2 to m do
  c[i] := t*x2[i-1](t);
  x1[i] := mtaylor(c[i], t = 0, m);
  x1[i] := unapply(x1[i], t);
  x3[i] := x1[i](t);
  x3[i] := unapply(x3[i], t);
  z[i] := int(-s*(diff(x1[i](s), s))-s*(diff(x3[i](s), s))+s*x1[i](s)

```

```

+x2[i-1](s)+s^2*x3[i](s), s = 0 .. t);
x2[i] := mtaylor(z[i], t = 0, m);
x2[i] := unapply(x2[i], t)
end do;
x1e := sum(x1[k](t), k = 0 .. m);
x2e := sum(x2[k](t), k = 0 .. m);
x3e := sum(x3[k](t), k = 0 .. m);

```

### آ.۳ کد Maple مثال‌های روش اختلال هموتوبی

در اینجا کد Maple مثال‌های روش آدومیان را ارائه می‌دهیم. مثال اول

```

restart;
m := 10;
q1 := mtaylor(exp(t), t = 0, m);
g1 := unapply(q1, t);
q2 := mtaylor(sin(t), t = 0, m);
g2 := unapply(q2, t);
x1[0] := 1;
unapply(x1[0], t);
x2[0] := 0;
unapply(x2[0], t);
x2[1] := -x1[0](t)+g1(t)+g2(t);
x2[1] := unapply(x2[1], t);
x1[1] := int(-x1[0](s)+x2[1](s)+2*g1(s)-g2(s), s = 0 .. t);
x1[1] := unapply(x1[1], t);
for i from 2 to m do
    x2[i] := -x1[i-1](t);
    x2[i] := unapply(x2[i], t);

```

```

x1[i] := int(-x1[i-1](s)+x2[i](s), s = 0 .. t);
x1[i] := unapply(x1[i], t)
end do;
x1 := sum(x1[n](t), n = 0 .. m);
x1e := mtaylor(exp(t), t = 0, 2*m);
plot(abs(x1-x1e), t = 0 .. 1);
x2 := sum(x2[n](t), n = 0 .. m);
x2e := mtaylor(sin(t), t = 0, 2*m);
plot(abs(x2-x2e), t = 0 .. 1);

```

مثال دوم

```

restart;
m := 10;
q1 := mtaylor(cos(t), t = 0, m);
g1 := unapply(q1, t);
q2 := mtaylor(sin(t), t = 0, m);
g2 := unapply(q2, t);
x2[0] := 0;
unapply(x2[0], t);
x1[0] := 1;
unapply(x1[0], t);
x2[1] := -x1[0](t)+g1(t)+g2(t);
x2[1] := unapply(x2[1], t);
x1[1] := int(x1[0](s)-x2[1](s)-g1(s), s = 0 .. t);
x1[1] := unapply(x1[1], t);
for i from 2 to m do
  x2[i] := -x1[i-1](t);
  x2[i] := unapply(x2[i], t);

```

```

x1[i] := int(x1[i-1](s)-x2[i](s), s = 0 .. t);
x1[i] := unapply(x1[i], t)
end do;
x1 := sum(x1[n](t), n = 0 .. m);
x1e := mtaylor(cos(t), t = 0, 2*m);
plot(abs(x1-x1e), t = 0 .. 1);
x2 := sum(x2[n](t), n = 0 .. m);
x2e := mtaylor(sin(t), t = 0, 2*m);
plot(abs(x2-x2e), t = 0 .. 1);

```

مثال سوم

```

restart;
m := 10;
g1 := unapply(t^6-t^4, t);
g3 := unapply(4*t^3+12*t^4+8*t^5-2*t^6-t^7, t);
x1[0] := 0;
unapply(x1[0], t);
x2[0] := 0;
unapply(x2[0], t);
x3[0] := 0;
unapply(x3[0], t);
x1[1] := t*x2[0](t)-g1(t);
x1[1] := unapply(x1[1], t);
x3[1] := x1[1](t);
x3[1] := unapply(x3[1], t);
x2[1] := int(-s*(diff(x1[1](s), s))-s*(diff(x3[1](s), s))+s*x1[1](s)
+x2[0](s)+s^2*x3[1](s)+g3(s), s = 0 .. t);
x2[1] := unapply(x2[1], t);
for i from 2 to m do

```

```
x1[i] := t*x2[i-1](t);
x1[i] := unapply(x1[i], t);
x3[i] := x1[i](t);
x3[i] := unapply(x3[i], t);
x2[i] := int(-s*(diff(x1[i](s), s))-s*(diff(x3[i](s), s))+s*x1[i](s)
+x2[i-1](s)+s^2*x3[i](s), s = 0 .. t);
x2[i] := unapply(x2[i], t)
end do;
x1 := sum(x1[n](t), n = 0 .. m);
x2 := sum(x2[n](t), n = 0 .. m);
x3 := sum(x3[n](t), n = 0 .. m);
```



# مراجع

- [1] U. Asher and P. Lin *Sequential regularization methods for higher index DAEs with constraint singularities: The linear index-2 case*, SIAM. J. Numer. Anal. 33 (1996) 1921 - 1940.
- [2] E. Bobolian and M. M. Hosseini *Reducing index, and pseudospectral methods for differential-algebraic equations*, Appl. Math. Comput. 140 (2003) 77 – 90.
- [3] C. W. Gear and L. Petzod *ODE methods for solution of differential-algebraic systems*, SIAM. J. Numer. Anal. 21 (1984) 716 - 728.
- [4] C. W. Gear *Differential-algebraic equation index transformations* , SIAM. J. Sci. Statist. Comput. 9 (1988) 39 - 47.
- [5] M. Ghovatmand, M. M. Hosseini and M. Jafari, *Reducing index, and pseudospectral method for high index differential-algebraic equations*, Journal of Advanced Research in Name Vol. 00 No. (2010) 1 - 14.
- [6] J. H. He, *Variational iteration method-some recent results and new interpretations*. J. Comput. Appl. Math. 207 (2007) 3 - 17.
- [7] J. H. He, *Homotopy perturbation technique*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg 178 (1999) 257 - 262.
- [8] M. M. Hosseini, *Adomian decomposition method for solutions of differential-algebraic equations*, J. Comput. Appl. Math. 197 (2006) 459 – 501.
- [9] F. Soltanian, S. M. Karbassi and M. M. Hosseini, *Application of He's variational iteration method for solution of differential-algebraic equations*, Chaos, Solitons and Fractals 41 (2009) 436 – 445.
- [10] F. Soltanian, M. Dehghan and S. M. Karbassi, *Solution of the differential algebraic equations via homotopy perturbation method and their engineering applications*, Int. J. Comput. Math 87:9 (2009) 1950 - 1974
- [11] T. Ozis and A. Yildirim, *Comparison between Adomian's method and He's homotopy perturbation method*, Comput. Math. Appl. 56 (2008) 1216 - 1224.
- [12] A. M. Wazwas, *A comparison between the Variational iteration method and Adomian decomposition method*, J. Comput. Appl. Math. 207 (2007) 129 - 136
- [13] A. M. Waswas and salah M. El-Sayed, *A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators*, Appl. Math. Comput. 122 (2001) 393 - 405.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Nodal analysis	آنالیز گره‌ای
Perturbation	اختلال
Index	اندریس
Initial	اولیه
Infinite	بی‌نهایت
Invariant	پایا
Adomian decomposition	تجزیه آدومیان
Analytical	تحلیلی
Correction	تصحیح
Approximation	تقریب
Topology	توپولوژی
Linear	خطی
Arbitrary	دلخواه
Sequence	دنباله
Differential algebraic	دیفرانسیل-جبری
Dynamical	دینامیکی
Series	سری

Electrical network	شبکه الکتریکی
Coefficient	ضریب
Non linear	غیرخطی
Chemical process	فرآیند شیمیایی
Overdetermined	فرامعین
Reduction	کاهش
Auxiliary	کمکی
Optimal control	کنترل بهینه
Lagrange	لاگرانژ
Jacobian matrix	ماتریس ژاکوبی
Variation	متغیر
Constraint	محدودیت
Order	مرتبّه
Boundary	مرزی
Invertible	معکوس پذیر
Variational	وردشی
Equivalent	هم‌ارز
Convergence	همگرایی
Homogeneous	همگن
Smooth	هموار
Homotopy	هموتوبی

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adomian decomposition	تجزیه آدومیان
Analytical	تحلیلی
Approximation	تقریب
Arbitrary	دلخواه
Auxiliary	کمکی
Boundary	مرزی
Chemical process	فرآیند شیمیایی
Coefficient	ضریب
Component	مؤلفه
Constraint	محدودیت
Convergence	همگرایی
Correction	تصحیح
Differential algebraic	دیفرانسیل-جبری
Dynamical	دینامیکی
Electrical network	شبکه الکتریکی
Equivalent	هم‌ارز
Homogeneous	همگن

Homotopy	هموتوبی
Index	اندیس
Infinite	بی‌نهایت
Initial	اولیه
Invariant	پایا
Invertible	معکوس‌پذیر
Jacobian matrix	ماتریس ژاکوبی
Lagrange	لاگرانژ
Linear	خطی
Nodal analysis	آنالیز گره‌ای
non-linear	غیرخطی
Optimal control	کنترل بهینه
order	مرتبّه
Overdetermined	فرامعین
perturbation	اختلال
Reduction	کاهش
Sequence	دنباله
Series	سری
Smooth	هموار
Topology	توپولوژی
Variation	متغییر
Variational	وردشی

Surname: Aliabadian

Name: Saeide

---

Title: Solving Differential-Algebraic Equations By Semi-Analytical Methods

---

Supervisor: Dr.Mahdi Ghovatmand

Advisor: Dr.Ali Mesforush

---

Degree: Master of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Numbrical Analysis

---

Technology University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2012

Number of pages: 78

---

Keywords: Differential-algebraic equations

---

### **Abstract**

Due to many problems of physics which are modeled by differential-algebraic equations .It is appropriate to find the answers with high accuracy. In recent years numerical methods are used to solve the equations. But these methods are just suitable for the problems with low index and they can not be used for high index so it is necessary to find answers with a high accuracy. In this thesis we are going to solve the differential-algebraic equation by using the semi analytic methods. In order to solve the differential-algebraic problems we can use the index reduction methods, then we can solve its income system with the semi-analytical Variational iteration ,Adomian decomposition and Homotopy perturbation method. The Variational iteration method provides a sequence of function which converge to the exact solution of the problem. The Adomian decomposition method and Homotopy perturbation method generates an infinite series with converge to the exact solution. The numerical results of solving several examples of high-index shows the efficiency and necessity of using these methods.



Technology University of Shahrood  
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial  
Fulfillment of The Requirements For The  
Degree of Master of Science in  
Applied Mathematics

# **Solving Differential-Algebraic Equations By Semi-Analytical Methods**

Supervisor

**Dr.Mahdi Ghovatmand**

Advisor

**Dr.Ali Mesforush**

by

**Saeide Aliabadian**

2012