



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

حل تشابهی معادلات انتقال حرارت از یک صفحه گرم در یک محیط متخلخل

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

استاد مشاور

دکتر محسن نظری

پژوهشگر

مرتضی نظری

تیر ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: نظری

نام: مرتضی

عنوان: حل تشابهی معادلات انتقال حرارت از یک صفحه گرم در یک محیط متخلخل

استاد راهنما: دکتر علیرضا ناظمی

استاد مشاور: دکتر محسن نظری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: تحقیق در عملیات

دانشگاه: دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ التحصیلی: تیر ۱۳۹۲

تعداد صفحات: ۸۳

واژگان کلیدی: عدم تعادل حرارتی، انتقال طبیعی گرما، محیط متخلخل، حل تشابهی

چکیده

این پایان نامه به لایه مرزی گرمایی جابجایی آزاد، در حالت عدم تعادل حرارتی، که ناشی از صفحه‌ای داغ عمودی قرار داده شده در یک محیط متخلخل اشباع شده است، مربوط می‌باشد. تاثیر مکش و یا تزریق روی لایه مرزی جابجایی آزاد نیز بررسی شده است. این صفحه دارای یک توزیع خطی از دما است، که این توزیع خطی دما، باعث ایجاد لایه مرزی‌ای با ضخامت ثابت می‌شود.

با فرض حاکم بودن جریان داری، حل‌های مشابه‌ای برای کنترل معادلات لایه مرزی جریان دائم، به دست آمده است. همچنین اعداد ناسلت، برای هر دو فاز جامد و سیال، برای محدوده‌ی وسیعی از پارامترها محاسبه شده و با حل‌های حدی ارائه شده، مقایسه گردیده است.

تقدیم به

پدرم،

اُسوه صبر و استقامت

مادرم،

اُسوه محبت و گذشت

برادرانم،

گنجینه دلگرمی و مهربانی

خدایا...^۱

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگی‌اش سوگوار نباشم...

خدایا چنین زیستن را تو به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم دانست...

ای خداوند...

ای خداوند! به علمای ما مسئولیت، و به عوام ما علم، و به مومنان ما روشنایی، و به روشنفکران ما ایمان و به متعصبین ما فهم و به فهمیدگان ما تعصب و به زنان ما شعور و به مردان ما شرف و به پیروان ما آگاهی و به جوانان ما اصالت و به اساتید ما عقیده و به دانشجویان ما نیز عقیده و به خفتگان ما بیداری و به دینداران ما دین و به نویسندگان ما تعهد و به هنرمندان ما درد و به شاعران ما شعور و به محققان ما هدف و به نومیدان ما امید و به ضعیفان ما نیرو و به محافظه‌کاران ما گستاخی و به نشستگان ما قیام و به راکدین ما تکان و به مردگان ما حیات و به کوران ما نگاه و به خاموشان ما فریاد و به مسلمانان ما قرآن و به شیعیان ما علی(ع) و به فرقه‌های ما وحدت و به حسودان ما شفاء و به خودبینان ما انصاف و به فحاشان ما ادب و به مجاهدان ما صبر و به مردم ما خودآگاهی و به همه ملت ما همت، تصمیم و استعداد فداکاری و شایستگی نجات و عزت ببخش!

^۱مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

از جناب آقای دکتر محسن نظری که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مرتضی نظری

تیر ۱۳۹۲

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. چاپ شده نهایی:

Mohsen Nazari, Esmaeel Shakerinejad, Morteza Nazari, and D. Andrew S. Rees., *Natural Convection Induced by a Heated Vertical Plate Embedded in a Porous Medium with-Transpiration: Local Thermal Non-equilibrium Similarity Solutions.*, I. J. of Transp Porous Med.(2012)

۲. ارسال اصلاحات نهایی برای داوران :

Mohsen NAZARI, Morteza NAZARI, Esmaeel SHAKERI, and Alireza NAZEMI. *Thermal Non-Equilibrium Similarity Solution of a Heated Plate in Homogeneous Porous Medium.* I. J. of Applied Mathematics and Mechanics.(2013)

فهرست علائم اختصاری

A	ثابت مثبت
B	ثابت مثبت
f	کاهش عملکرد جریان
f_w	متغیر مکش
g	نیروی گرانش
h	ضریب انتقال حرارت بینابینی
H	ضریب بی بعد شده انتقال حرارت بینابینی
k	رسانش گرمایی
K	نفوذپذیری
Le	عدد لوئیس
Nu	عدد ناسلت محلی
q	شار گرمایی
Ra_x	عدد دارسی-رایلی محلی
Sh	عدد شروود
T	دما
u	مولفه عمودی سرعت
v	مولفه افقی سرعت
x	محور عمودی
y	محور افقی
y	محور افقی
نمادهای یونانی	
α	ضریب نفوذ حرارتی
β	ضریب انبساط حرارتی
η	متغیر تشابهی
γ	تخلخل اصلاح شده نسبت هدایتی
ϵ	ضریب تخلخل
θ	دمای بدون بعد شده سیال
ν	ویسکوزیته سینماتیکی
ϕ	دمای بدون بعد شده جامد
ρ	جرم حجمی
ψ	تابع جریان
زیر نویس ها	
∞	شرایط اولیه محیط
f	سیال
s	جامد
w	دیواره

لیست تصاویر

۵	۱.۱	نمونه‌ای از مشعل‌های متخلخل [۳]
۱۴	۱.۲	ارتباط المان با اندازه ناحیه سیال و ناحیه متخلخل در المان حجم مشخص [۳]
۱۶	۲.۲	توزیع سرعت برای یک محیط متخلخل همگن [۳۵]
۲۰	۳.۲	عبور از ناحیه دارسی به ناحیه فورچهمیر برای یک محیط متخلخل [۳]
۲۲	۴.۲	المان یک بعدی برای قانون انرژی در محیط متخلخل همگن [۳۵]
۲۸	۱.۳	نمایش تصویری تکنیک پرتابی برای معادلات مقدار مرزی خطی
۳۳	۲.۳	نمایش تصویری تکنیک پرتابی برای معادلات مقدار مرزی غیرخطی
۴۰	۱.۴	فیزیک مسئله
	۲.۴	نمودار θ (خطوط یکسره) و نمودار ϕ (خطوط بریده) برای $H = \gamma = 1$ وقتی
۴۷		$f_w = -5, 0, 5, 10$
	۳.۴	نمودار θ (خطوط یکسره) و نمودار ϕ (خطوط بریده) برای $H = 10, \gamma = 1$ وقتی
۴۸		$f_w = -5, 0, 5, 10$ می‌باشد
	۴.۴	نمودار θ (خطوط یکسره) و نمودار ϕ (خطوط بریده) برای $H = 0.1, \gamma = 1$ وقتی
۴۹		$f_w = -5, 0, 5, 10$ می‌باشد
	۵.۴	تغییرات $Nu_f Ra_x^{-0.5}$ (خطوط پیوسته) و $Nu_s Ra_x^{-0.5}$ (خطوط بریده) و حالت
۵۱		حدی $H \gg 1$ (نقطه چین) در مقابل Log_{10}^H برای موارد $f_w = 1$ و $\gamma = 0.1, 1, 10$
	۶.۴	تغییرات $Nu_f Ra_x^{-0.5}$ (خطوط پیوسته) و $Nu_s Ra_x^{-0.5}$ (خطوط بریده) و حالت
		حدی $H \gg 1$ (نقطه چین) در مقابل Log_{10}^H برای موارد $f_w = -1$ و γ
۵۲		$0.1, 1, 10$

- ۷.۴ تغییرات $Nu_f Ra_x^{-0.5}$ (خطوط پیوسته) و $Nu_s Ra_x^{-0.5}$ (خطوط بریده) و حالت
 ۵۳ حدی $f_w \gg 1$ (نقطه چین) در مقابل f_w برای موارد $\gamma = 1$ و $H = 0.1, 1, 10$
- ۸.۴ تغییرات $Nu_f Ra_x^{-0.5}$ (خطوط پیوسته) و $Nu_s Ra_x^{-0.5}$ (خطوط بریده) و حالت
 ۵۴ حدی $f_w \gg 1$ (نقطه چین) در مقابل f_w برای موارد $H = 1$ و $\gamma = 0.1, 1, 10$
- ۱.۵ اثرات f_w بر روی ϕ (شکل بالا) و θ (شکل پایین) برای حالت $\gamma = H = N = 1$
 ۶۴
- ۲.۵ اثرات تغییرات f_w بر روی پروفیل دما برای مقادیر بزرگ H و مقادیر بزرگ γ
 ۶۵
- ۳.۵ تغییرات عدد ناسلت محلی در مقابل H برای مقادیر مختلف γ و f_w برای
 ۶۶ فازهای سیال و جامد
- ۴.۵ تغییرات عدد ناسلت محلی در مقابل γ برای مقادیر مختلف H و f_w برای فاز
 ۶۷ سیال (خطوط پیوسته) و فاز جامد (خطوط بریده)
- ۵.۵ تاثیرات مقادیر مختلف H, γ, f_w و عدد لوئیس بر روی عدد شروود
 ۶۸
- ۶.۵ اثرات تغییرات N, γ و H بر روی عدد ناسلت
 ۶۹

لیست جداول

- ۱۰۲ ضریب تخلخل و نفوذ پذیری برای برخی از مواد متخلخل [۳] ۱۸
- ۱۰۴ مقایسه مقادیر عددی، $-\theta'(0)$ ، با روش تحلیلی و روش‌های عددی دیگر در
- حالت $H = 0$ ۴۵

فهرست مطالب

ح	لیست تصاویر
د	لیست جداول
۱	۱ مقدمه
۲	۱.۱ مروری بر کارهای انجام شده در محیط‌های متخلخل
۲	۱.۱.۱ خنک‌کاری قطعات
۳	۲.۱.۱ تیغه متخلخل در مبدل‌های حرارتی
۴	۳.۱.۱ مشعل متخلخل
۱۳	۲ معادلات حاکم و شرایط مرزی در محیط‌های متخلخل
۱۳	۱.۲ مقدمه
۱۵	۲.۲ معادلات بقای جرم
۱۷	۳.۲ معادلات اندازه حرکت: قانون داریسی
۱۹	۴.۲ گسترش قانون داریسی
۱۹	۱.۴.۲ شتاب و اثرات درونی دیگر
۲۰	۲.۴.۲ معادله فورچهمیر
۲۰	۳.۴.۲ معادله برینکمن
۲۱	۵.۲ معادلات انرژی
۲۲	۱.۵.۲ حالت عدم تعادل حرارتی بین فازهای سیال و جامد
۲۳	۲.۵.۲ حالت تعادل حرارتی بین فازهای سیال و جامد
۲۵	۳ روش پرتابی

۲۵	روش تکنیک پرتابی برای مسائل خطی	۱.۳
۲۹	الگوریتم روش پرتابی برای مسائل خطی	۱.۱.۳
۳۱	روش پرتابی برای مسائل غیر خطی	۲.۳
۳۵	الگوریتم روش پرتابی برای مسائل غیر خطی	۱.۲.۳
۳۸	حل تشابهی معادلات انتقال حرارت در ماده متخلخل	۴
۳۸	مقدمه	۱.۴
۳۹	معادلات حاکم بر مسئله	۲.۴
۴۰	معادلات حاکم بر مسئله	۱.۲.۴
۴۳	حل عددی	۳.۴
۴۴	نتایج و تحلیل‌ها	۴.۴
۴۵	پروفیل دما	۱.۴.۴
۴۸	اعداد ناسلت	۵.۴
۵۱	تحلیل حدی	۶.۴
۵۱	تحلیل حدی برای مقادیر بزرگ f_w	۱.۶.۴
۵۵	تحلیل حدی برای مقادیر بزرگ H	۲.۶.۴
۵۸	حل تشابهی معادلات انتقال حرارت در ماده متخلخل با تاثیرات دوگانگی غلظت	۵
۵۸	معادلات حاکم بر مسئله	۳.۰.۵
۶۱	نتایج و تحلیل‌ها	۴.۰.۵
۷۰	نمایش کدهای <i>MATLAB</i>	آ
۷۰	نمایش کدهای <i>MATLAB</i> برای معادلات حاکم	۱.آ
۷۱	کدهای مربوط به خطا	۱.۱.آ
۷۱	کدهای مربوط به نمایش نتایج	۲.۱.آ
۷۴	مراجع	
۷۸	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۸۰	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فصل ۱

مقدمه

ماده‌ی متخلخل، محیط غیر همگنی است که بین ذرات تشکیل دهنده‌ی آن فضای خالی وجود دارد. در صورت وجود سیال بین ذرات جامد، محیط را اصطلاحاً محیط متخلخل اشباع می‌نامند. در محیط‌های متخلخل طبیعی، شکل و نحوه‌ی قرار گرفتن ذرات نسبت به هم کاملاً تصادفی بوده و هیچ قانون خاصی بر نحوه پراکندگی آن‌ها حاکم نیست. به عنوان مثال، می‌توان به ذرات ماسه در یک بستر شنی اشاره کرد. واضح است که در این محیط مشخصات سیال مانند سرعت، فشار و دما از دیدگاه میکروسکوپی^۱ کاملاً تصادفی می‌باشند. البته نتایج تجربی نشان می‌دهد که مقادیر ماکروسکوپی^۲ این متغیرها کاملاً قانونمند و قابل پیش‌بینی می‌باشند، این متغیرها را اصطلاحاً متغیرهای میانگین فضایی^۳ می‌نامند.

انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محیط متخلخل، در دو دهه اخیر به دلیل کاربردهای فراوان به صورت گسترده مورد بررسی قرار گرفته است.

برخی از کاربردهای محیط متخلخل مربوط به مدل‌سازی مبدل‌های فشرده حرارتی، مدل‌سازی سلول‌های خورشیدی، ساخت و بررسی عایق‌های حرارتی ساختمانی، طراحی راکتورهای هسته‌ای، طراحی سیستم‌های ژئوفرمال، نگهداری از دانه‌های غلات محصولات کشاورزی و جلوگیری از رشد آفات (مثل قارچ‌ها، کپک‌ها، جوانه‌زدن دانه‌ها) در انبارها و سیلوها، محکم کاری و استحکام ساحل‌ها، افزایش بازیافت مواد نفتی، استخرهای ذخیره سوخت، ذخیره‌سازی ضایعات هسته‌ای و خنک کاری در تجهیزات الکتریکی نام برد.

این پایان‌نامه در پنج فصل و یک ضمیمه تنظیم گردیده است. در فصل اول، مقدمه‌ی پایان‌نامه

^۱ Microscopic

^۲ Macroscopic

^۳ Space average quantities

بیان شده و به بررسی پژوهش‌های پیشین درباره‌ی انتقال حرارت و جریان جابجایی آزاد در محیط‌های متخلخل پرداخته شده است. در فصل دوم، معادلات حاکم بر محیط‌های متخلخل و شرایط مرزی حاکم بر روی دیواره و سطح مشترک دو محیط بیان شده است. در فصل سوم، مقدماتی از روش پرتابی که در حل معادلات مسئله از آن استفاده شده ارائه گردیده است. در فصل چهارم، به حل تشابهی معادلات انتقال حرارت در ماده متخلخل پرداخته شده و همچنین یک حل تحلیلی حدی نیز ارائه گردیده است. در فصل پنجم، به حل معادلات حاکم در مسئله‌ی مورد نظر با اثرات شناوری دوگانه پرداخته‌ایم. ضمناً برنامه‌ی رایانه‌ای این پایان نامه با استفاده از نرم افزار متلب^۴ نوشته شده.

۱.۱ مروری بر کارهای انجام شده در محیط‌های متخلخل

۱.۱.۱ خنک‌کاری قطعات

در دنیای مدرن امروز از رایانه‌های شخصی گرفته تا رایانه‌های غول پیکر، به صورت‌های مختلف در کارهای روزمره و نیز پژوهش‌های علمی استفاده می‌شود. به این ترتیب از کار افتادن هر یک از سیستم‌های رایانه می‌تواند زیان‌های جبران ناپذیری را به بخش‌های مختلف وارد کند.

از مسائل عمده‌ای که سیستم‌های الکتریکی با آن مواجه هستند میزان حرارت تولیدی توسط اجزا سیستم و چگونگی دفع آن است. هر چه تعداد قطعات الکتریکی بیشتر باشد این مسئله حادث می‌شود. از سوی دیگر با پیشرفت علم الکترونیک از حجم این قطعات کاسته و قطعات متنوع‌تر با کارایی بالاتر ساخته شده‌اند. اما هنوز مسئله‌ی تولید حرارت در این قطعات با توجه به مقدار زیاد آن غیرقابل چشم‌پوشی است. جهت مشخص شدن اهمیت این موضوع می‌توان به این نکته اشاره کرد که حرارت تولیدی از هر برد الکتریکی، تا مرز یک مگاوات در هر مترمربع از سطح برد می‌رسد.

بنابراین کنترل دما و پایین نگه داشتن آن جهت افزایش عمر یک سیستم مسئله‌ای حیاتی است. با این وصف، نقش انتقال حرارت از قطعات با توجه به مقدار زیاد نرخ تولید حرارت و نحوه خنک کاری آن‌ها حائز اهمیت می‌باشد.

سطح خارجی قطعات الکتریکی اصولاً می‌تواند به کمک روش‌های اجباری یا طبیعی و یا مخلوطی از هر دو روش خنک شود. سیال خنک کن نیز می‌تواند هوا، آب یا روغن باشد.

^۴Matlab

۲.۱.۱ تیغه متخلخل در مبدل‌های حرارتی

یک کانال می‌تواند به‌طور کامل یا ناقص با محیط متخلخل پر شود. این محیط متخلخل می‌تواند به‌صورت لایه‌ای متخلخل یا به‌صورت بلوک‌های گسسته از هم باشد. اکثر مطالعات تجربی و عددی انجام شده پیرامون کانال پر شده با محیط متخلخل نشان می‌دهد که، همواره به‌طور ذاتی افت فشاری بالا در چنین کانال‌هایی اتفاق می‌افتد. این افت فشار در کانال‌هایی که به‌صورت ناقص با محیط متخلخل پر شده‌اند، کمتر است. بنابراین به منظور حداکثر انتقال حرارت، نیازی به پر کردن کامل کانال با محیط متخلخل نیست.

هوآنگ و وفایی^۵ [۱] نشان دادند که حضور بلوک‌های متخلخل در سطح خارجی صفحه در یک کانال، به‌طور قابل توجه ویژگی‌های جریان سیال و انتقال حرارت را تغییر می‌دهد. آن‌ها تأثیر کمیت‌های مختلف، مثل، اعداد دارسی، رینولدز و پرانتل را بر میدان جریان و انتقال حرارت بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که انتقال حرارت محلی، به میدان سرعت وابسته است. همچنین گردابه‌های تشکیل شده تأثیر زیادی بر ویژگی‌های انتقال حرارت دارد.

یک مقایسه بین یک کانال خالی و یک کانال پر شده با ماده متخلخل نشان می‌دهد که در کانال دوم می‌توان انتقال حرارت را افزایش داد. تارگویی و کاهالراس^۶ [۲] در یک تحقیق عددی، دو شکل مختلف از کانال‌های پر شده با محیط متخلخل را بررسی کردند. در یکی از کانال‌ها، محیط متخلخل در داخل یک سری شکاف حلقوی و در دیگری به صورت شطرنجی جاسازی شده بود. نتایج آن‌ها افزایش انتقال حرارت را نشان داد، اگر چه علاوه بر افت فشار بالا، خطوط جریان نیز از حالت طبیعی بسیار منحرف شده بودند.

تعداد زیادی از مقالات برای مدل‌سازی جریان آرام، درهم و انتقال حرارت، کاربرد سطوح گسترده، مثل فین‌ها و تیغه‌ها را گزارش می‌کنند. این مقالات پیرامون مساحت سطح بهینه، شکل‌ها و جهت فین‌ها به منظور افزایش انتقال حرارت در یک دبی جرمی مشخص بحث می‌کنند. در این مبحث هم، افرادی مثل بوهادف و همکاران^۷ [۳]، کام و آل نیمر^۸ [۴]، عملکرد حرارتی محیط متخلخل را در مبدل‌های حرارتی لوله‌ای بررسی کرده‌اند. امروزه استفاده از سطوح گسترش یافته متخلخل، مثل فین‌ها و بافل‌ها برای افزایش انتقال حرارت در کنار افت فشار، بسیار مورد توجه است.

^۵Huang and Vafai

^۶Targui and Kahalerras

^۷Bouhadeef et al.

^۸Al-Nimr and Al kam

۳.۱.۱ مشعل متخلخل

پیشرفت سریع در تکنولوژی و بهبود سطح اجتماعی، ملت‌ها را به استفاده گسترده از سوخت‌های فسیلی ملزم کرده است. همواره در استفاده از سوخت‌های فسیلی دو مشکل وجود دارد، یکی تقلیل منابع سوخت فسیلی و دیگری محیط زیست. احتراق در محیط‌های متخلخل^۹ یک روش موجه برای مهارکردن مشکلات فوق‌الذکر است که دامنه‌ی گسترده‌ای دارند. احتراق در محیط‌های متخلخل مزایای بسیار قابل توجهی دارد که آن را قابل مقایسه با احتراق معمولی^{۱۰} می‌کند. از آن جمله می‌توان به افزایش سرعت احتراق، افزایش رنج قدرت دینامیکی، گسترش محدوده‌ی اشتعال‌پذیری و کاهش پخش حرارت اشاره کرد. احتراق در محیط متخلخل به‌طور قابل ملاحظه‌ای متفاوت از اشتعال همگن است. این تفاوت به یک سری از فاکتورهای اصلی مربوط می‌شود که در زیر به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

- افزایش سطح داخلی محیط متخلخل جامد، که یک انتقال حرارت موثر را بین محیط قابل اشتعال و جامد نتیجه می‌دهد.

- پخش سیال واکنش دهنده از میان محیط متخلخل، قابلیت نفوذپذیری و انتقال حرارت را بین فازها، افزایش می‌دهد. این روش، فرآیند احتراق را درگستره‌ی وسیعی از سرعت واکنش دهنده‌ها و نسبت اکسیژن و سوخت تسهیل می‌کند. همچنین این روش امکان تشکیل ترکیبات نیتروژن^{۱۱} و منوکسیدکربن را به حداقل می‌رساند.

در سال‌های اخیر محققان زیادی به‌طور تجربی و تئوری بر روی گسترش تکنولوژی مشعل‌های محیط متخلخل متمرکز شده‌اند. تریمیس و دراست^{۱۲} [۵] در مورد پیشرفت‌ها و کاربردهای محیط‌های متخلخل بازبینی‌هایی انجام دادند.

الیورا و کاویانی^{۱۳} [۶] هم فرآیندهای نفوذپذیری در عدم تعادل حرارتی و شیمیایی را، در فرآیند احتراق میان محیط‌های متخلخل بررسی کردند.

استفاده از مشعل متخلخل مزایای بسیاری دارد و از آن جمله می‌توان به ترکیبات نیتروژن دار بسیار پایین، حتی خارج از محدوده‌ی کاری محصول، تولید بسیار پایین منوکسیدکربن، کم کردن هزینه‌ها و سرمایه اولیه و هزینه‌های بسیار پایین اشاره کرد.

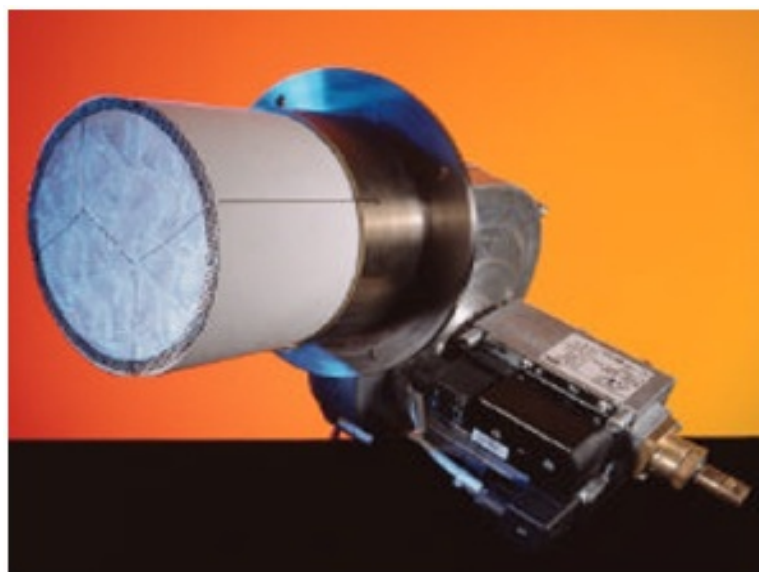
^۹Porous Medium Combustion-PMC

^{۱۰}Combustion Flame Free

^{۱۱}NOX

^{۱۲}Trimis and Drast

^{۱۳}Oloveria and Kavian



شکل ۱.۱: نمونه‌ای از مشعل‌های متخلخل [۳]

یکی از فاکتورهای مهم در انتخاب مشعل‌های متخلخل استفاده از آن‌ها برای گرمایش آرام^{۱۴} است. در مقایسه با سیستم‌های مشعل مرسوم، مشعل‌های متخلخل مزایای ویژه‌ای را به منظور گرمایش بدون شعله ارائه می‌کنند.

دمای بینهایت متغیر و همگن، امکان رفتار آرام گرمایی و کنترل شده‌ی یک ماده را فراهم می‌کند. احتراق به‌طور معمول به‌وسیله الکترود جرقه‌زن صورت می‌گیرد. همانند سایر مشعل‌ها از یک الکترود یونیزاسیون برای مشاهده‌ی شعله استفاده می‌کنند. در مشعل‌های متخلخل توزیع گرما می‌تواند در فاصله کوتاهی از سطح مشعل متخلخل اتفاق بیفتد. این حالت ما را از گرمایش کامل موضوع مورد نظر مطمئن می‌سازد.

در این‌جا به‌ترتیب پژوهش‌های انجام شده در چهار زمینه مختلف: انتقال حرارت در یک محیط متخلخل غیر همگن، روش تفاضل محدود، انتقال حرارت در محیط‌های نیمه متخلخل، اثر اِلِمان حرارتی بر انتقال حرارت و همچنین نتایج حاصل از این پژوهش‌ها را به‌ترتیب زمان تحقیق در هر مبحث، بررسی می‌کنیم.

هدف از انجام این بررسی، آشنایی با پژوهش‌های انجام شده در این زمینه‌ها، روش انجام و نتایج حاصل از آن‌ها می‌باشد. بیشتر مطالعات انجام شده در زمینه محیط‌های متخلخل بر پایه قانون داریسی و بین فازهای جامد و سیال می‌باشد. فرض تعادل حرارتی برای محیط‌های با خلل و فرج

^{۱۴}Gentel Heating

کوچک مثل مخازن زمین گرمایی و عایق‌های حرارتی صادق می‌باشد. برای محیط‌های متخلخل با سرعت بالای جریان سیال و یا محیط‌هایی که حرارت در یکی از فازهای جامد یا سیال تولید می‌شود، به‌مانند رآکتورهای هسته‌ای و ... به دلیل اختلاف دمای زیاد بین فازهای سیال و جامد، شرط عدم تعادل حرارتی می‌بایست در نظر گرفته شود.

شومان^{۱۵} در ۸۰ سال قبل مدل عدم تعادل حرارتی کلاسیک را پیشنهاد کرد. در سال‌های اخیر نیز توجه بیشتری به بررسی این مدل، در حل‌های عددی انتقال حرارت در محیط‌های متخلخل شده است. بیشتر فعالیت‌های انجام شده در زمینه محیط‌های متخلخل به‌طور مختصر در کتاب‌های اخیر کاویانی^{۱۶} [۷]، وفایی^{۱۷} [۸]، نیلد و بیژن^{۱۸} [۹] و اینگهام و پوپ^{۱۹} [۱۰] بیان شده است. بیتاس^{۲۰} و پاپ [۱۱]، عدم تعادل حرارتی را برای انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه مربعی با استفاده از روش حجم محدود^{۲۱} مدل‌سازی کردند. آن‌ها در این بررسی فرض کردند که محیط متخلخل از قانون دارسی پیروی کرده و بین فازهای جامد و سیال تعادل برقرار نمی‌باشد. بیتاس [۱۲] یک سال بعد، انتقال حرارت جابجایی آزاد در حالت پایا، برای یک مدل عدم تعادل حرارتی در یک محفظه متخلخل مربعی را با در نظر گرفتن حرارت تولیدی در فاز جامد مورد بررسی قرار داد. در این بررسی او معادلات ناویر استوکس را همراه با جمله‌های دارسی-فورچهمیر-بریکمن^{۲۲} در نظر گرفت و با استفاده از روش حجم محدود در الگوریتم سیمپل^{۲۳}، به حل معادلات پرداخت. او در این پژوهش به این نتیجه رسید که با افزایش ضریب انتقال حرارت جابجایی بین فازهای سیال و جامد، این دو فاز به حالت تعادل حرارتی می‌رسند.

ساتیامورتی^{۲۴} و همکارانش [۱۳] جابجایی آزاد در محفظه‌ی پر شده با محیط متخلخل، که دمای دیواره‌های آن به‌صورت خطی تغییر می‌کنند را مورد بررسی قرار دادند. مدل مورد بررسی آن‌ها از جملات دارسی-فورچهمیر پیروی کرده که با استفاده از روش تفاضل محدود^{۲۵} حل می‌گردد. آن‌ها اثر دیواره‌های خطی را بر انتقال حرارت و جریان سیال، برای عدد رایلی و دارسی‌های مختلف بررسی کردند.

^{۱۵}Schumann

^{۱۶}Kaviany

^{۱۷}Vafai

^{۱۸}Nield and Bejan

^{۱۹}Ingham and Pop

^{۲۰}Baytas

^{۲۱}Finite Volume

^{۲۲}Darcy-Forchheimer-Brinkman

^{۲۳}SIMPLE Algorithm

^{۲۴}athiyamoorthy

^{۲۵}Finite Element

ورال^{۲۶} و همکاران [۱۴] به مطالعه‌ی جابجایی آزاد در یک محفظه‌ی نیمه متخلخل، که پروفیل دمای دیواره‌ی پایینی آن به صورت سینوسی تغییر می‌کرد، پرداختند. قانون دارسی، حاکم بر محیط متخلخل بوده و فاز سیال و جامد در تعادل حرارتی هستند. آن‌ها با استفاده از روش تفاضل محدود به بررسی اثر پروفیل سینوسی بر روی انتقال حرارت و جریان سیال پرداختند.

روش حجم محدود بر پایه متغیرهای اولیه‌ی یکی از روش‌های مهم در محاسبات عددی برای حل مسائل جریان سیال و انتقال حرارت است. در این روش معادلات حاکم، شامل معادلات پیوستگی، اندازه حرکت و انرژی به صورت گسسته شده، بر روی حجم کنترل به کار گرفته می‌شوند. برای معادلات فوق در سال ۱۹۷۲ پتنکار و اسپالدینگ^{۲۷} [۱۵] یک روش نیمه ضمنی برای ارتباط بین معادلات پیوستگی و اندازه حرکت به نام سیمپل^{۲۸} ارائه کردند که بر اساس شبکه‌ی جابجا شده^{۲۹} بنا شده است.

آل فرهانی و توران^{۳۰} [۱۶] پخش دو بعدی انتقال حرارت و جرم جابجایی در یک حفره متخلخل مایل را به صورت عددی مورد تحلیل قرار دادند. دیواره‌های عرضی حفره در دما و غلظت ثابت ولی متفاوت با یکدیگر و دیواره‌های بالایی و پایینی عایق می‌باشند. از روش حجم کنترل برای حل معادلات حاکم بی بعد، و از الگوریتم سیمپل برای حل معادلات کوپله‌ی سرعت و فشار استفاده شده است. کانتورهای خطوط جریان، خطوط هم دما و خطوط هم غلظت و همچنین خطوط ناسلت و عدد شروود برای مقادیر مختلف از کمیت‌های مسئله‌ی مورد نظر رسم گردیده است. نتیجه‌ی مهم، اثر تغییر زاویه چرخش حفره بوده که با افزایش آن میزان جابجایی طبیعی کمتر و اثر هدایت بیشتر شده است.

گوین قوانگ^{۳۱} [۱۷] برای نخستین بار یک فرآیند زیستی را در محیط یک حفره متخلخل بررسی کرد. پارامتر نفوذپذیری غیر ایزوتروپ بوده و جهت مولفه‌های تانسور نفوذپذیری با جهت محورهای مختصات زاویه می‌سازد. آن‌ها تغییرات عدد رایلی بحرانی را که تابعی از سرعت شناوری ذرات (در جهت خلاف نیروی گرانش) و نسبت مؤلفه‌های نفوذپذیری و زاویه چرخش بوده را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها دریافتند که مقدار عدد رایلی بحرانی در سرعت شناوری بالا از مقدار آن در سرعت شناوری پایین کمتر است. همچنین هنگامی که سرعت شناوری بالا باشد، تغییر زاویه چرخش از صفر تا ۹۰ درجه باعث تغییر شدید در ساختار جریان می‌شود.

^{۲۶}Varol^{۲۷}Patankar and Spalding^{۲۸}SIMPLE^{۲۹}Staggered Grid^{۳۰}Al-Farhany and Turan^{۳۱}Nguyen quang

گوین^{۳۲} و همکاران [۱۸] در یک محفظه‌ی دو لایه‌ای سیال محیط متخلخل که دیواره‌های افقی آن عایق و دیواره‌های عمودی آن در دمای ثابت و مختلف قرار دارد، به بررسی جابجایی آزاد پرداختند. آن‌ها در این مقاله اثر ضخامت لایه متخلخل و نفوذ پذیری را بر ساختار جریان، انتقال حرارت و انتقال جرم نشان دادند. نتایج به دست آمده توسط آن‌ها با نتایج حاصل از حل تحلیلی در حالت ساده مورد تایید قرار گرفته است.

بیتاس و همکارانش [۱۹] موفق شدند جابجایی آزاد در محفظه‌ی متخلخل را به صورت عددی مورد مطالعه قرار دهند. محفظه شامل دو دیواره‌ی افقی با ضخامت محدود بوده و دیواره‌های عمودی آن در دمای یکنواخت ولی متفاوت قرار دارند. در این مقاله تمرکز بر روی نقش ضریب هدایت حرارتی دیواره‌های افقی بر روی انتقال حرارت و جریان سیال بود. نتایج به دست آمده توسط بیتاس نشان می‌دهد که با افزایش ضریب هدایت حرارتی دمای سطح مشترک سیال و دیواره افقی کاهش می‌یابد.

لیاقت^{۳۳} و بیتاس [۲۰] به کمک روش حجم کنترل، انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه‌ای که دارای تولید حرارت است را بررسی کردند. این محفظه از اطراف توسط دیواره‌هایی با ضخامت محدود اشغال شده‌اند و دیواره‌های بیرونی در دمای یکنواخت قرار دارند. در حالت‌های خاص، نتایج به دست آمده توسط آن‌ها با نتایج حاصل از پژوهشگران دیگر هم‌خوانی خیلی خوبی داشت.

ازتاپ و بیلجن^{۳۴} [۲۱] توانستند جابجایی آزاد را در محفظه‌ای که درون آن‌ها یک تیغه وجود داشت و دیواره‌های افقی و عمودی آن به ترتیب عایق و در دمای ثابت قرار داشتند را به صورت عددی مدل‌سازی کنند. در این مقاله به مطالعه‌ی اثر وضعیت اندازه و ضخامت این تیغه بر روی جریان سیال و انتقال حرارت پرداخته شد.

پرساد^{۳۵} و همکارانش [۲۲] اثر یک بلوک را درون یک محفظه بر روی انتقال حرارت مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها مسئله را برای حالت پایا و با استفاده از روش حجم کنترل و الگوریتم سیمپل حل کردند و به یک مقدار بهینه برای اندازه بلوک در محفظه، جهت بهتر شدن انتقال حرارت و جریان سیال دست یافتند.

نواف سعید^{۳۶} [۲۳] جابجایی آزاد در محفظه‌ای متخلخل، که توسط دو دیواره‌ی عمودی محدود شده است را، مورد مطالعه قرار داد. سطح بیرونی دیواره‌های عمودی در دمای ثابت ولی متفاوت

^{۳۲}Gobin

^{۳۳}Liaqat

^{۳۴}Oztop and Bi

^{۳۵}Prasad

^{۳۶}Nawaf H.Saeid

قرار داشته و دیواره‌های افقی آن عایق می‌باشند. مدل داری، حاکم بر محیط بوده و دو فاز در تعادل حرارتی با هم می‌باشند. معادلات حاکم با استفاده از روش حجم کنترل گسسته‌سازی شده‌اند. در این مقاله به بررسی اثر ضخامت دیواره و ضریب هدایت حرارتی دیواره، روی خصوصیات انتقال حرارت و جریان سیال پرداخته شده است.

نواف [۲۴] یک سال بعد همین مدل را برای حالتی که فازهای سیال و جامد در تعادل حرارتی با هم نبودند را نیز حل کرد. او همچنین در این مطالعه به بررسی اثر ضریب انتقال حرارت جابجایی و نسبت ضریب هدایت حرارتی فاز سیال به فاز جامد پرداخت و به این نتیجه رسید که با افزایش ضریب هدایت حرارتی جابجایی یا نسبت ضریب هدایت فاز سیال به جامد، دو فاز به تعادل حرارتی رسیده و پروفیل دمای آن‌ها بر هم منطبق می‌شود.

عبدالله الامیری و همکارانش [۲۵] به بررسی اثر هدایت حرارتی دیواره بر روی انتقال حرارت جابجایی، درون محفظه دو بعدی که با محیط متخلخل پر شده پرداختند. محفظه مورد بررسی آن‌ها دارای دیواره‌های افقی عایق و دو دیواره‌ی عمودی با دماهای ثابت ولی متفاوت می‌باشند. یکی از دیواره‌های افقی دارای ضخامت محدود است. معادلات ممتوم مدل شده دارای جمله‌های فورچهمیر، داری و بریکمن بوده و شرایط تعادل حرارتی بین فازهای جامد و سیال برقرار می‌باشد. برای حل از فرمولاسیون اجزاء محدود بر پایه روش گالرکین استفاده شد. خطوط جریان، خطوط دما ثابت، عدد ناسلت و... برای مقادیر مختلف از اعداد بدون بعد، رسم شده و مورد بررسی قرار گرفته است.

بی‌تاس و همکارانش [۲۶] توانستند با در نظر گرفتن مدل داری گسترش یافته برای محیط متخلخل به مطالعه جابجایی آزاد و انتقال جرم در محفظه‌ای با دو محیط سیال و محیط متخلخل بپردازند. مسئله برای دو حالت مختلف، یکی حالتی که سطح مشترک دو محیط به صورت افقی باشد و دیگری حالتی که این سطح مشترک دارای پله باشد، حل شد. جریان سیال، انتقال جرم و انتقال حرارت برای مقادیر مختلفی از ارتفاع پله، عدد رایلی و عدد داری مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که ارتفاع پله در سطح مشترک دو محیط اثر بسیار مهمی بر روی جریان، انتقال حرارت و انتقال جرم از دیواره‌ی سمت چپ به دیواره سمت راست دارد. معادلات نیز به روش حجم محدود گسسته‌سازی شده و با الگوریتم سیمپل بر روی یک شبکه متمرکز حل می‌شوند.

چن^{۳۷} و همکاران [۲۷] با استفاده از روش حجم محدود و الگوریتم سیمپل، انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه که دیواره‌های بالایی و پایینی آن توسط محیط متخلخل پر شده است را مدل‌سازی کردند. معادله ممتوم حاکم بر محیط متخلخل دارای ترم‌های بریکمن و فورچهمیر

بوده و فازهای جامد و سیال آن دارای تعادل حرارتی می‌باشند. شرایط مرزی اعمال شده برای جریان در سطح مشترک سیال-محیط متخلخل، از نوع شرط پرش تنش برشی^{۳۸} بوده که شامل هر دو اثر اینرسی و لزجت می‌باشد. خطوط دما ثابت، خطوط جریان، ناسلت محلی و متوسط و سرعت نقطه وسط برای مقادیر مختلف از کمیت‌های بدون بعد، مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج این بررسی نشان داد که وجود لایه متخلخل درون محفظه باعث کاهش شدید سرعت جریان و انتقال حرارت جابجایی آزاد می‌شود.

آیدین و یانگ^{۳۹} [۲۸] در یک محفظه متقارن مستطیلی که از هوا پر شده و از زیر توسط یک منبع حرارتی گرم و از اطراف خنک می‌شود، اثر انتقال حرارت را به صورت عددی مدل‌سازی کردند. محل منبع حرارتی در مرکز دیواره پایینی قرار داشته و برای آن چهار حالت طول مختلف در نظر گرفته‌اند. اثر کمیت‌های مختلف بر انتقال حرارت، جریان سیال، ناسلت‌های متوسط و محلی نیز مطالعه شده است.

ساریز^{۴۰} و همکاران [۲۹] انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک تانک مستطیلی که از زیر حرارت دریافت کرده را مورد بررسی قرار دادند. در آن مقاله اثر عدد رایلی، هندسه تانک و نوار حرارتی بر رفتار جریان و انتقال حرارت، مطالعه شد. مسئله با روش حجم محدود گسسته‌سازی شده و توسط الگوریتم سیمپل، کوپل سرعت و فشار روی یک شبکه جابجا شده حل می‌شود. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که با افزایش طول نوار حرارتی، شدت جریان سیال و دمای آن افزایش پیدا می‌کند.

نادر^{۴۱} و همکاران [۳۰] جابجایی آزاد در محفظه‌ی پر شده با هوا که به وسیله یک منبع حرارتی شار ثابت از پایین گرم شده و از بالا خنک می‌شود را به صورت عددی برای شرایط مرزی مختلف در دیواره‌های بالا و پایین شبیه‌سازی نمودند. این شبیه‌سازی برای دو نوع طول کوچک و بزرگ منبع حرارتی انجام شد. عدد رایلی نیز از 10^3 تا 10^6 تغییر می‌کند. معادلات حاکم با روش تفاضل محدود گسسته‌سازی شده‌اند. برای هر شرط مرزی خطوط دما و جریان و بیشینه دما در سطح گرم مورد بررسی قرار گرفت.

چی هُنْگ دِنْگ^{۴۲} [۳۱] اثر المان‌های حرارتی بر روی جریان و انتقال حرارت سیال در محفظه مربعی که دیواره‌های عمودی آن دارای یک جفت المان حرارتی هستند را به صورت عددی مورد بررسی قرار داد. تمرکز اصلی بر روی اثر اندازه و آرایش المان‌های حرارتی بر ویژگی‌های انتقال

^{۳۸}Shear Stress Jump Condition

^{۳۹}Aydin and Yang

^{۴۰}Sarris

^{۴۱}Nader

^{۴۲}Qi-Hung Deng

حرارت و جریان سیال بود. مسئله از روش حجم محدود و با استفاده از روش کوک^{۴۳} بر روی یک شبکه غیر یکنواخت گسسته‌سازی شده است. همچنین از الگوریتم سیمپل برای حل کوپل سرعت و فشار استفاده شده است. خطوط جریان و دما ثابت برای آرایش‌های مختلف المان‌های حرارتی مورد بررسی قرار گرفت.

پرادهم^{۴۴} و جاسمین^{۴۵} [۳۲] اثر فرم‌های مختلف گرمای تولیدی بر روی جریان سیال، انتقال حرارت و انتقال جرم در محفظه مربعی را به صورت عددی مورد بررسی قرار دادند. تمرکز اصلی آن‌ها روی اثر گرمای تولیدی بر انتقال حرارت و جریان سیال بود. همچنین خطوط جریان، خطوط دما ثابت و غلظت ثابت برای فرم‌های مختلف گرمای تولیدی مورد بررسی قرار گرفت.

کریشنا و باساک^{۴۶} [۳۳] انتقال حرارت جابجایی طبیعی در یک محفظه‌ی مربعی دو بعدی متخلخل که هم به صورت هیدرودینامیکی و هم به صورت دمایی غیر ایزوتروپ بوده را در حضور منبع گرمایی به وسیله‌ی مدل داریسی مورد بررسی قرار دادند. دیواره‌های بالایی و پایینی حفره عایق و دیواره‌های عمودی در دمای ثابت بوده است. آن‌ها خطوط جریان، خطوط دما ثابت و ماکزیمم دما در حفره را جهت تحلیل فیزیک جریان مورد تحلیل قرار دادند. در این بررسی مشاهده شد که ویژگی‌های غیر ایزوتروپیک تأثیر بسزایی بر روی رفتار جریان و انتقال حرارت دارند. همچنین محل بیشینه دما با تغییر کمیت‌های مسئله جابجا می‌شود.

آزمایش‌هایی که با مغز و ساقه گیاهان و کاغذ باطله توسط لارسن^{۴۷} و مکاردی^{۴۸} [۳۴] انجام شد و همچنین دیگر نتایج تأیید می‌کند که فرایندهای شامل مواد آلی و نباتی و کودهای مصرفی در اصل توسط گرمای داخلی از اکسیداسیون میکروبی کنترل می‌شود که یک رابطه قوی بین فعالیت میکروبی و نسبت حل شده شیمیایی وجود دارد. کنترل این پروسه نیازمند کنترل دما، غلظت و توزیع گرمای تولیدی در این سیستم است.

در این زمینه مطالعات محدودی انجام شده که از آن جمله می‌توان به پرادهم و جاسمین [۳۵] اشاره کرد که میزان رشد میکروب‌ها و غلظت مصرفی آن‌ها به همراه گرمای تولیدی در یک محفظه مربعی را مورد بررسی قرار دادند. در این بررسی میکروب‌ها ثابت بوده و حرکتی نداشتند. همچنین از رابطه داریسی برای معادله ممنوم و از تعادل حرارتی بین دو فاز برای معادله انرژی استفاده شده است. آن‌ها پس از آن همین مساله را برای حالتی که میکروب‌ها دارای حرکت باشند را نیز مورد

^{۴۳}Quick^{۴۴}Prudhomme^{۴۵}Jasmin^{۴۶}Krishna and Basak^{۴۷}Larsen^{۴۸}Macartney

بررسی قرار دادند [۳۶].

فصل ۲

معادلات حاکم و شرایط مرزی در محیط‌های متخلخل

۱.۲ مقدمه

در این فصل، به بررسی معادلات حاکم بر محیط متخلخل و انواع شرایط مرزی حاکم بر این محیط پرداخته شده است. در سال‌های اخیر به علت کاربرد وسیع مسائل شامل جریان و انتقال حرارت در محیط‌های متخلخل، این گونه مسائل مورد توجه زیادی قرار گرفته اند. به عنوان مثال، جریان هوا در سیلوهای مواد کشاورزی از جمله کاربردهای محیط‌های متخلخل می باشد. بهینه سازی خصوصیات حرارتی عایق‌های ساختمانی نظیر بتن‌های سبک و کف‌های سدیم سیلیکات، از مسائل بسیار مورد توجه می باشد که در حوزه‌ی فوق قابل بررسی است. در محیط‌های متخلخل توزیع سرعت و فشار و کاملاً غیر منظم و پیچیده است، به همین دلیل برای این گونه محیط‌ها مقادیر فضایی (سطح-حجم) متوسط را تعریف می کنیم. دو راه برای انجام این متوسط گیری وجود دارد:

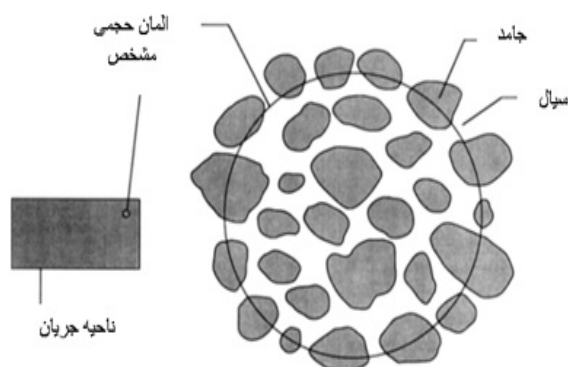
• فضایی :

در این روش، متغیرهای ماکروسکوپی به صورت متوسط روی یک المان حجمی مشخص^۱، تعریف می شوند و همچنین فرض می شود که، این مقادیر مستقل از اندازه‌ی حجم المان باشد. طول المان خیلی بزرگتر از طول خلل و فرج‌ها بوده، ولی از طول ماکروسکوپی ناحیه‌ی جریان، خیلی کمتر می باشد. (شکل ۱.۲)

• آماری :

^۱Representativ Elementary Volume(r.e.v.)

در این روش، متوسط‌گیری بر اساس دسته‌بندی ساختارها و محیط‌های متخلخل‌ای صورت می‌گیرد که، از لحاظ ماکروسکوپی باهم معادل می‌باشند. اشکال این روش این است که اطلاعات آماری دسته‌بندی شده با روش ساده جمع‌آوری می‌شوند. بنابراین برای انجام این متوسط‌گیری فرض می‌کنیم که ساختارهای آماری کاملاً همگن می‌باشند. 1a



شکل ۱.۲: ارتباط المان با اندازه ناحیه سیال و ناحیه متخلخل در المان حجم مشخص [۳]

با توجه به دو دیدگاه بیان شده و معادلات حاکم بر حرکت سیال درون محیط متخلخل، در بعضی منابع، برخی محققین از سرعت متوسط واقعی سیال^۲ و بعضی دیگر از سرعت داری استفاده می‌کنند. شکل معادلات در این دو دیدگاه یکسان نمی‌باشند.

ضریب تخلخل (ϕ)، به‌عنوان بخشی از حجم کل محیط متخلخل که به وسیله فضای خالی V_f اشغال شده است تعریف می‌شود، بنابراین، $(1 - \phi)$ نیز به‌عنوان بخشی از حجم محیط متخلخل که به وسیله فضای جامد V_s اشغال شده، تعریف می‌شود:

$$\phi = \frac{V_f}{V} = \frac{V_f}{V_f + V_s}. \quad (1.2)$$

البته به‌علت ایزوتروپ فرض کردن محیط متخلخل، ضریب تخلخل در همه راستاها یکسان می‌باشد. سرعت متوسط واقعی سیال، u_f ، به‌صورت حاصل تقسیم دبی عبوری سیال از یک سطح مقطع به مساحت فضاهای قابل عبور سیال، A_f ، تعریف می‌شود:

$$u_f = \frac{1}{A_f} \int u \, dA. \quad (2.2)$$

^۲Intrinsic average velocity

سرعت داری $\bar{u}$ ، به صورت حاصل تقسیم دبی عبوری سیال از یک سطح مقطع، به کل مساحت سطح مقطع یعنی A ، تعریف می شود. $(A = A_f + A_s)$:

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \int u \, dA. \quad (3.2)$$

این دو سرعت $\bar{u}$ و u_f توسط رابطه دوپیت-فورچهمی^۳ به هم مربوط می شوند:

$$\bar{u} = \phi u_f \quad (4.2)$$

شایان ذکر است که دبی عبوری از مقطع نشان داده شده در هر سه بخش شکل ۲.۲ یکسان می باشد.

۲.۲ معادلات بقای جرم

در حالت واقعی، جریان در این محیط به صورت سه بعدی است ولی برای بررسی، آن را دو بعدی در نظر می گیریم. مطابق شکل (۲.۲)، یک المان به حجم $(w\Delta x\Delta y)$ که $(w \gg \Delta x, \Delta y)$ است را در نظر می گیریم. با این فرض جریان در راستای x, y در صفحه های $w\Delta x$ و $w\Delta y$ خیلی بیشتر از جریان در راستای Z و در صفحه $\Delta x\Delta y$ می باشد. دبی جریان ورودی به المان $w\Delta x\Delta y$ را از سمت چپ و در صفحه x ثابت، به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\dot{m}_x = \rho \int_y^{y+\Delta y} \int_0^w u \, dz dy \quad (5.2)$$

که $u(y, z)$ توزیع سرعت بر روی سطح فضاهای خالی در صفحه x ثابت می باشد. با توجه به این که در یک سطح کنترل، $w\Delta y$ خیلی بزرگتر از خلل و فرج و قسمت های جامد سطح مقطع می باشد، یک سرعت متوسط داری در راستای x تعریف می کنیم:

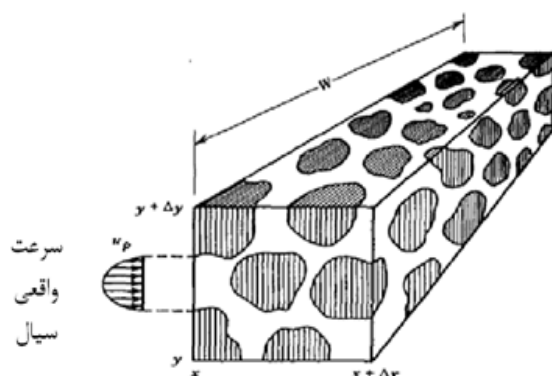
$$\bar{u} = \frac{1}{w\Delta y} \int_y^{y+\Delta y} \int_0^w u(y, z) \, dz dy \quad (6.2)$$

به عبارت دیگر:

$$\dot{m}_x = \rho \bar{u} (w\Delta y)$$

و سرعت متوسط داری در راستای y نیز چنین بیان می شود:

^۳Dupuit -Forchheimer



شکل ۲.۲: توزیع سرعت برای یک محیط متخلخل همگن [۳۵]

$$\bar{v} = \frac{1}{w\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \int_0^w v(x, z) dz dx \quad (۷.۲)$$

از این رو دبی جرمی در راستای y نیز بدین صورت تعریف می‌گردد:

$$\dot{m}_y = \rho \bar{v} (w\Delta x)$$

با استفاده از سرعت متوسط داری $\bar{u}$ و $\bar{v}$ ، تعاریف مربوط به دبی جریان در راستای x, y ، متوسط جریان شبیه به جریان یک سیال همگن می‌شود. از این رو قانون بقای جرم در المان $(w\Delta x\Delta y)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi w\Delta x\Delta y) + \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y}\Delta y = 0 \quad (۸.۲)$$

که ϕ ضریب تخلخل، $\phi w\Delta x\Delta y$ بخش اشغال شده توسط سیال و $\rho\phi w\Delta x\Delta y$ دبی جرمی سیال آنی قرار گرفته در المان می‌باشد. با ترکیب معادلات دبی جریان و معادله (۸.۲)، معادله بقای جرم خواهد شد:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi w\Delta x\Delta y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\bar{u}w\Delta y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\bar{v}w\Delta x) = 0 \quad (۹.۲)$$

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\bar{v}) = 0 \quad (۱۰.۲)$$

در حالت کلی می‌توان معادله بقای جرم در حالت سه بعدی را به صورت زیر نشان داد:

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{V}) = 0 \quad (11.2)$$

که $\bar{V} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ بردار سرعت متوسط حجم است. در صورتیکه $(\phi = 1)$ (سیال خالص^۴) باشد، همان معادله بقای جرم برای سیال همگن به دست می آید.

۳.۲ معادلات اندازه حرکت: قانون داریسی

در مکانیک سیالات اجسام متخلخل، معادلات مومنتوم یا بالانس نیروها به وسیله مشاهدات تجربی - عددی به دست می آیند، که از لحاظ ریاضی به عنوان داریسی شناخته می شوند. هنری داریسی بر اساس اندازه گیری هایی کشف کرد که سرعت متوسط سیال (سرعت داریسی) در یک ستون از مواد متخلخل با گرادین فشار همان ستون متناسب می باشد. آزمایش های تجربی بعدی نشان داد که سرعت متوسط در حالت یک بعدی برای جریان اجباری، با ویسکوزیته (μ) رابطه ی معکوس دارد یعنی:

$$\bar{u} = \frac{k}{\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (12.2)$$

در حالت سه بعدی داریم:

$$\bar{\mathbf{v}} = -\frac{k}{\mu} \cdot \vec{\nabla} P \quad (13.2)$$

که در رابطه بالا k ، ثابتی تجربی، به نام ضریب نفوذپذیری^۵ است، که نشان دهنده ی میزان نفوذ سیال در محیط می باشد. از لحاظ ابعادی:

$$[k] = \frac{[\mu][\bar{u}]}{\left[-\frac{\partial P}{\partial x}\right]} = (\text{Length})^p \quad (14.2)$$

این ضریب مستقل از طبیعت سیال است، اما به هندسه وابسته است. جدول ۱.۴ ضریب تخلخل و ضریب نفوذپذیری تعدادی از مواد متخلخل را نشان می دهد.

همچنین با استفاده از روابط ریاضی نیز می توان ضریب نفوذپذیری هندسه های ساده را به دست آورد. به عنوان مثال، کارمن-کازنی^۶ رابطه زیر را برای محاسبه ضریب نفوذپذیری در هندسه هایی

^۴Pure fluid

^۵Permeability

^۶Carman -Kazeny

جدول ۱۰۲: ضریب تخلخل و نفوذ پذیری برای برخی از مواد متخلخل [۳]

مواد متخلخل	ضریب تخلخل (ϕ)	ضریب نفوذ پذیری (K)
پودر ذغال سنگ سیاه	۰٫۵۷ - ۰٫۶۶	$۱۴٫۹ \times ۱۰^{-۱۰}$ - $۱٫۲ \times ۱۰^{-۹}$
آجر	۰٫۱۲ - ۰٫۴۴	$۴٫۸ \times ۱۰^{-۱۱}$ - $۲٫۲ \times ۱۰^{-۹}$
پودر مس فشرده	۰٫۰۹ - ۰٫۳۴	$۳٫۳ \times ۱۰^{-۶}$ - $۱٫۵ \times ۱۰^{-۵}$
ماسه سنگ	۰٫۰۸ - ۰٫۳۸	$۳٫۰ \times ۱۰^{-۱۶}$ - $۵٫۰ \times ۱۰^{-۱۲}$
سنگ آهک	۰٫۰۴ - ۰٫۱۰	$۲٫۰ \times ۱۰^{-۱۵}$ - $۴٫۵ \times ۱۰^{-۱۴}$
بتن	۰٫۰۲ - ۰٫۰۷	$۱٫۰ \times ۱۰^{-۱۳}$ - $۲٫۳ \times ۱۰^{-۱۱}$
شن	۰٫۳۸ - ۰٫۵۰	$۲٫۰ \times ۱۰^{-۱۱}$ - $۱٫۸ \times ۱۰^{-۱۰}$
خاک	۰٫۴۳ - ۰٫۵۴	$۲٫۹ \times ۱۰^{-۱۲}$ - $۱٫۴ \times ۱۰^{-۱۱}$
صخره ی شنی	۰٫۴۴ - ۰٫۴۵	
محیط متخلخل شامل دانه‌های کروی	۰٫۳۶ - ۰٫۴۳	
چرم	۰٫۵۶ - ۰٫۵۹	$۹٫۵ \times ۱۰^{-۱۴}$ - $۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۳}$
ذغال سنگ	۰٫۰۲ - ۰٫۱۲	

با قطر هیدرولیکی D_P به دست آورد [۳].

$$k = \frac{D_P^3 \phi}{180(1 - \phi)^3} \quad (۱۵.۲)$$

که D_P^3 برابر است با:

$$D_P^3 = \frac{\int_0^\infty D_P^3 h(D_P) dD_P}{\int_0^\infty h(D_P) dD_P} \quad (۱۶.۲)$$

مقدار عددی ۱۸۰ با تطبیق داده‌های تجربی به دست می‌آید.

همچنین ارگان^۷، رابطه زیر را برای ستون بستر کروی به قطر D و ضریب تخلخل ϕ ، ارائه کرد [۳]:

$$k = \frac{D^3 \phi^3}{150(1 - \phi)^3} \quad (۱۷.۲)$$

برای استفاده از شکل دارسی برای معادله مومنتوم، به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g \right) \quad (۱۸.۲)$$

^۷Ergun

با استفاده از تقریب بوزینسک، رابطه چگالی زیر را جایگزین می‌کنیم:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta T) \quad (۱۹.۲)$$

اگر از معادله مؤلفه‌های سرعت نسبت به x, y مشتق بگیریم و از هم کم کنیم معادله ممتوم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}, \quad (۲۰.۲)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{k}{\mu} \left(-\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \rho g \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (۲۱.۲)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{gk\beta}{\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (۲۲.۲)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (۲۳.۲)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{gk\beta}{\nu} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (۲۴.۲)$$

۴.۲ گسترش قانون داریسی

۱.۴.۲ شتاب و اثرات درونی دیگر

فورچهمیر و دوپیت جمله‌های جابجایی را به معادله داریسی اضافه کردند (از جمله نیروی حجمی صرف نظر شده است):

$$\rho_f \left[\phi^{-1} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \phi^{-2} (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \right] = -\nabla P - \frac{\mu}{K} \bar{V} \quad (۲۵.۲)$$

مشاهده می‌شود که معادله، کاملاً شبیه به معادله ناویراستوکس است. جمله $(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V}$ معمولاً کوچک بوده و در کارهای عددی از آن صرف نظر می‌شود. اما در سرعت‌های بالا و پدیده‌هایی مثل شوک^۸ برای یک سیال تراکم پذیر (در حالت غیر چرخشی) می‌بایست مد نظر واقع گردد.

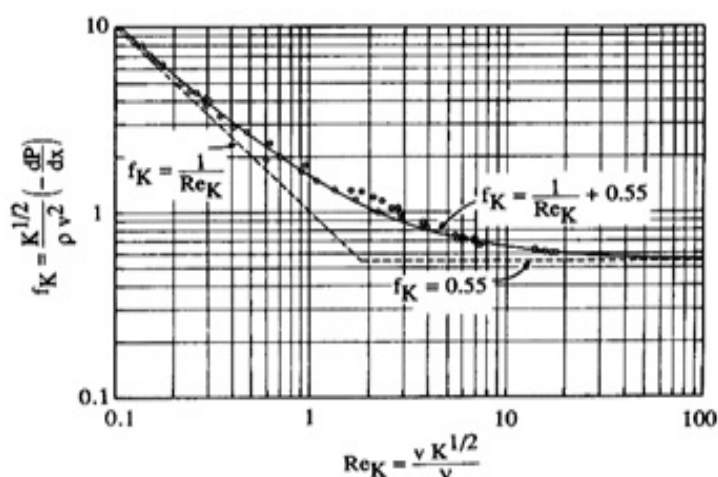
^۸Choching

۲.۴.۲ معادله فورچهمیر

در سرعت‌های بالا، جمله‌ای معروف به جمله فورچهمیر، به معادله‌ی دارسی اضافه می‌شود:

$$\nabla P = -\frac{\mu}{k}\bar{V} - C_E K^{-\frac{1}{p}} \rho_f |\bar{V}| \bar{V} \quad (26.2)$$

C_E ضریب ثابت بی بعد درگ است. مقدار آن بر حسب طبیعت سیال، با استفاده از روابط تجربی به دست می‌آید. جمله دارسی در سرعت‌های کم در تمام مواد متخلخل صادق است. با افزایش سرعت سیال افت فشار در محیط متخلخل از حالت خطی خارج شده و به صورت مرتبه دو ظاهر می‌گردد. شکل (۳.۲) بیانگر بازده صحیح عملکرد دو جمله دارسی و فورچهمیر در یک محیط متخلخل ایزوتروپ و همگن است. همان طور که در این شکل دیده می‌شود، جمله دارسی برای اعداد رینولدز کوچکتر از ۱۰ صحیح است. برای عدد رینولدز بالاتر، بایست از جمله فورچهمیر به همراه دارسی استفاده کرد.



شکل ۳.۲: عبور از ناحیه دارسی به ناحیه فورچهمیر برای یک محیط متخلخل [۳].

۳.۴.۲ معادله برینکمن

در جاهایی که اثرات لزجت زیاد باشد، جمله برینکمن به معادله دارسی اضافه می‌شود:

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}\bar{V} + \bar{\mu} \nabla^p \bar{V} \quad (27.2)$$

که $\bar{\mu}$ ، ویسکوزیته مؤثر است. حال دو جمله لزجت وجود دارد، جمله اول جمله معمولی داری و جمله دوم مشابه جمله لاپلاس در معادله ناویراستوکس است. مقدار $\bar{\mu}$ را معمولاً معادل با μ قرار می‌دهند، ولی در حالت کلی این دو ضریب یکی نبوده و با توجه به هندسه محیط متخلخل متفاوت می‌باشند. در سال ۱۹۹۰ پیر و بچمت^۹ برای محیط متخلخل ایزوتروپ رابطه زیر را ارائه کردند:

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{1}{\phi T^*} \quad (28.2)$$

که در رابطه بالا T^* ، کمیت پیچش محیط^{۱۰} می‌باشد. دورلوفسکی و بردی^{۱۱} در سال ۱۹۸۷ با استفاده از تابع گرین، جمله برینکمن را برای مواد متخلخل با ضریب تخلخل بزرگتر از ۰/۹۵، $\phi > 0.95$ ، و رابین استن^{۱۲} آن را برای مواد متخلخل با ضریب تخلخل به کوچکی ۸/۰. صحیح دانستند. دانشمندان اخیر جمله لاپلاس را به معادله فورچهمیر اضافه کرده و معادله برینکمن-فورچهمیر را به وجود آوردند.

هسو و چانگ^{۱۳} در سال ۱۹۹۰ معادله زیر را به دست آوردند:

$$\rho_f \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \nabla \cdot \left(\frac{\bar{V} \cdot \bar{V}}{\phi} \right) \right] = -\nabla P + \frac{\bar{\mu}}{\phi} \nabla^2 \bar{V} - \frac{\mu}{K} \bar{V} - \frac{C_E \rho_f}{K^{\frac{1}{\phi}}} |\bar{V}| \bar{V} \quad (29.2)$$

که برای یک سیال تراکم‌ناپذیر، $\nabla \cdot \bar{V} = 0$ و عبارت $\frac{1}{\phi} \nabla \cdot \left(\frac{\bar{V} \cdot \bar{V}}{\phi} \right)$ به عبارت $\frac{1}{\phi} \bar{V} \cdot \nabla \left(\frac{\bar{V}}{\phi} \right)$ کاهش پیدا می‌کند.

۵.۲ معادلات انرژی

حالت کلی دمای محلی فاز سیال و جامد در محیط متخلخل یکسان نمی‌باشد، که این حالت را اصطلاحاً عدم تعادل حرارتی محلی^{۱۴} می‌نامند. در این حالت معادله‌های انرژی فاز سیال و جامد در یک محیط متخلخل مجزا خواهند بود.

^۹Bear and Bachmat

^{۱۰}porosity of the medium

^{۱۱}Durlofsky and Brady

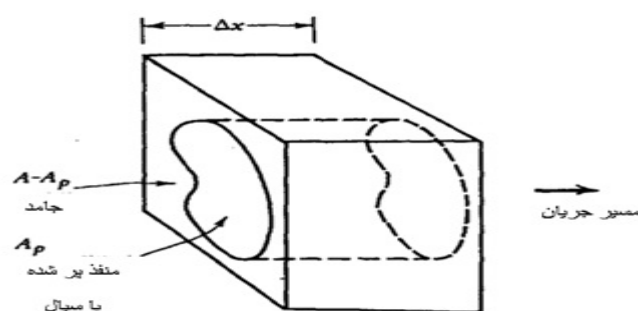
^{۱۲}Rubinstein

^{۱۳}Hsu and Chang

^{۱۴}Local Thermal Non- Equilibrium

۱.۵.۲ حالت عدم تعادل حرارتی بین فازهای سیال و جامد

ساده‌ترین راه برای به‌دست آوردن فرم دیفرانسیلی معادلات انرژی برای یک محیط متخلخل، از طریق فرض کردن یک بعدی انتقال حرارت و جریان سیال در شکل (۴.۲) می‌باشد. برای این کار محیط متخلخل همگن فرض می‌شود. در ابتدا معادله انرژی برای فاز جامد و سیال را جداگانه حل کرده و سپس از این معادلات در آلمان حجم $A\Delta x$ متوسط‌گیری می‌کنیم.



شکل ۴.۲: آلمان یک بعدی برای قانون انرژی در محیط متخلخل همگن [۳۵]

معادله انرژی در فاز جامد:

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} - K_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + q_s''' \quad (30.2)$$

$(\rho c_p, K)_s$ خصوصیات فاز جامد و q_s''' نرخ حرارت تولیدی داخلی بر واحد حجم در فاز جامد می‌باشند. فرض می‌کنیم که دمای جامد بدون تغییر است. با انتگرال‌گیری از معادله (۳۰.۲) بر فضای اشغال شده توسط جامد عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta x (A - A_f) \rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} - \Delta x (A - A_f) K_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \Delta x (A - A_f) q_s''' \quad (31.2)$$

با تقسیم کردن معادله (۳۱.۲) بر حجم $A\Delta x$ و استفاده از تعریف ضریب تخلخل، معادله انرژی برای فاز جامد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(1 - \phi)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} - (1 - \phi) K_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + (1 - \phi) q_s''' \quad (32.2)$$

همچنین معادله انرژی برای هر نقطه اشغال شده به‌وسیله سیال، برابر است با:

$$\rho_f c_{Pf} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_s \frac{\partial T}{\partial x} \right) = K_f \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mu \phi \quad (33.2)$$

$(\rho_f c_{pf}, K_f)$ ویژگی‌های سیال هستند. نرخ حرارت تولیدی داخلی بر واحد حجم در فاز سیال می‌باشد. با انتگرال‌گیری از معادله بالا بر روی حجم خالی محیط $A_f \Delta x$ داریم:

$$A_f \Delta x \rho_f c_{pf} \frac{\partial T_f}{\partial t} + A_f \Delta x \rho_f c_{pf} u \frac{\partial T_f}{\partial x} = A_f \Delta x K_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + A_f \Delta x q_f''' \quad (34.2)$$

با استفاده از تعریف سرعت متوسط داری برای جمله دوم سمت چپ معادله (34.2) داریم:

$$A \bar{u} = \iint_{A_f} u \, dA_f \quad (35.2)$$

با تقسیم کردن معادله (34.2) بر حجم $A_f \Delta x$ و استفاده از تعریف ضریب تداخل و معادله (35.2)، معادله انرژی برای فاز سیال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\phi(\rho c_P) \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c_P) \bar{u} \frac{\partial T_f}{\partial x} = \phi \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \phi q_f''' \quad (36.2)$$

۲.۵.۲ حالت تعادل حرارتی بین فازهای سیال و جامد

توصیف ماکروسکوپی انتقال حرارت در محیط متخلخل با یک معادله انرژی، با این فرض همراه است که دمای فازهای سیال و جامد یکسان باشد ($T_s = T_f = T$). به عبارت دیگر فرض می‌شود، فاز سیال و جامد با هم در تعادل حرارتی محلی می‌باشند. این فرض اگرچه برای محیط‌های متخلخل کوچک مثل مخازن زمین گرمایی^{۱۵} و فیبرهای عایق درست به نظر می‌رسد، ولی برای مطالعه راکتورهای هسته‌ای و سیم‌های الکتریکی که اختلاف دمای بین فازهای جامد و سیال تأثیر مهمی روی بقیه پارامترها می‌گذارد، غیر منطقی به نظر می‌رسد.

با جمع کردن معادلات (31.2) و (34.2) و تقسیم کردن آنها بر حجم $A_f \Delta x$ ، معادله انرژی کل ساختار متخلخل برای حالت تعادل حرارتی به دست می‌آید:

$$[\phi \rho_f c_{pf} + (1-\phi) \rho_s c_s] \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f c_{pf} u \frac{\partial T}{\partial x} = [\phi K_f + (1-\phi) K_s] \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + [(1-\phi) q_f'''] \quad (37.2)$$

ضریب هدایت حرارتی مؤثر K_{eff} در محیط متخلخل ترکیبی از ضریب هدایت در دو فاز می‌باشد:

$$K_{eff} = \phi K_f + (1-\phi) K_s \quad (38.2)$$

^{۱۵}Geothermal

این عبارت ساده در نتیجه مدل یک بعدی شکل (۴.۲) است که با مدل هدایتی موازی منطبق است و برای مدل هدایتی سری از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{1}{K_{eff}} = \frac{\phi}{K_f} + \frac{1-\phi}{K_s} \quad (39.2)$$

البته در حالت کلی ضریب هدایت حرارتی K_{eff} به صورت کاملاً تجربی اندازه‌گیری می‌شود. اینرسی حرارتی^{۱۶} محیط‌های متخلخل بستگی به اینرسی جامد و سیال دارد. این پیچیدگی با تعریف نسبت ظرفیت^{۱۷} تخمین زده می‌شود:

$$\sigma = \frac{\phi \rho_f c_{p_f} + (1-\phi) \rho_s c_s}{\rho_f c_{p_f}}. \quad (40.2)$$

^{۱۶}Thermal Inertia

^{۱۷}Capacity Ratio

فصل ۳

روش پرتابی

پایه و اساس روش پرتابی^۱، بر مبنای تبدیل مسائل مقدار مرزی، به مسائل مقدار اولیه معادل آن است. سپس یک دیدگاه صحیح و خطا برای حل نسخه مقدار اولیه مورد استفاده قرار می‌گیرد. در زیر کلیات این روش را برای مسائل خطی و غیرخطی بررسی می‌کنیم.

۱.۳ روش تکنیک پرتابی برای مسائل خطی

قضیه زیر، شرایط وجود جواب یکتا را برای یک مسئله شرط مرزی نوع دوم، بیان می‌کند:

قضیه ۱.۱.۳. فرض کنید تابع f در مسئله شرط مرزی زیر:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

بر روی مجموعه D ، پیوسته باشد.

مجموعه D ، به صورت زیر است:

$$D = \{(x, y, y') | a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < y' < \infty\}$$

و همچنین مشتقات جزئی f_x و f_y نیز روی مجموعه D پیوسته باشند و

۱. برای هر $(x, y, y') \in D$ داشته باشیم: $f_y(x, y, y') > 0$

۲. برای هر $(x, y, y') \in D$ ، یک ثابت مانند M ، وجود داشته باشد به طوریکه:

$$|f_{y'}(x, y, y')| \leq M$$

^۱Shooting Method

در این صورت، مسئله مقدار مرزی دارای یک جواب یکتا است.

برای نمونه می توان به مسئله مقدار مرزی :

$$y'' + e^{-xy} + \sin(y') = 0, 1 \leq x \leq 2, y(1) = y(2) = 0,$$

اشاره کرد. از آنجایی که طبق قضیه ۱.۱.۳ داریم :

$$f(x, y, y') = -e^{-xy} - \sin(y')$$

و

$$f_y(x, y, y') = xe^{-xy}, \quad |f_{y'}(x, y, y')| = |-\cos(y')| \leq 1$$

بنابراین، مسئله بالا دارای یک جواب یکتا می باشد.

هنگامیکه $f(x, y, y')$ به شکل

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x),$$

باشد، معادله دیفرانسیل :

$$y'' = f(x, y, y')$$

را، خطی می نامیم.

این گونه مسائل زیاد رخ می دهند. قضیه ۱.۱.۳ را برای این شکل مسائل می توان به صورت نتیجه ای که در زیر به آن اشاره می کنیم بیان کرد:

نتیجه ۲.۱.۳. اگر مسئله مقدار مرزی :

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

شرایط زیر را داشته باشد :

۱. توابع $p(x)$ و $q(x)$ و $r(x)$ روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشند

۲. در بازه $[a, b]$ داشته باشیم $q(x) > 0$

در این صورت مسئله دارای جواب یکتا است.

برای تقریب جواب یکتایی که، فرض‌های نتیجه ۲.۱.۳ را برآورده کند، مسئله‌های مقدار اولیه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y_1'' = p(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x), \quad a \leq x \leq b, y_1(a) = \alpha, y_1'(a) = \bullet, \quad (1.3)$$

$$y_p'' = p(x)y_p' + q(x)y_p, \quad a \leq x \leq b, y_p(a) = \bullet, y_p'(a) = 1. \quad (2.3)$$

فرض می‌کنیم $y_1(x)$ ، جواب معادله (۱.۳) و $y_p(x)$ ، جواب معادله (۲.۳) باشد. در این صورت اگر قرار دهیم:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_p(b)} y_p(x), \quad (3.3)$$

و اگر از معادله (۳.۳) مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$y'(x) = y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_p(b)} y_p'(x)$$

و

$$y''(x) = y_1''(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_p(b)} y_p''(x)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} y'' &= p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) + r(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_p(b)} (p(x)y_p'(x) + q(x)y_p(x)) \\ &= p(x)\left(y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_p(b)} y_p'(x)\right) + q(x)\left(y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_p(b)} y_p(x)\right) + r(x) \\ &= p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x). \end{aligned}$$

همچنین داریم:

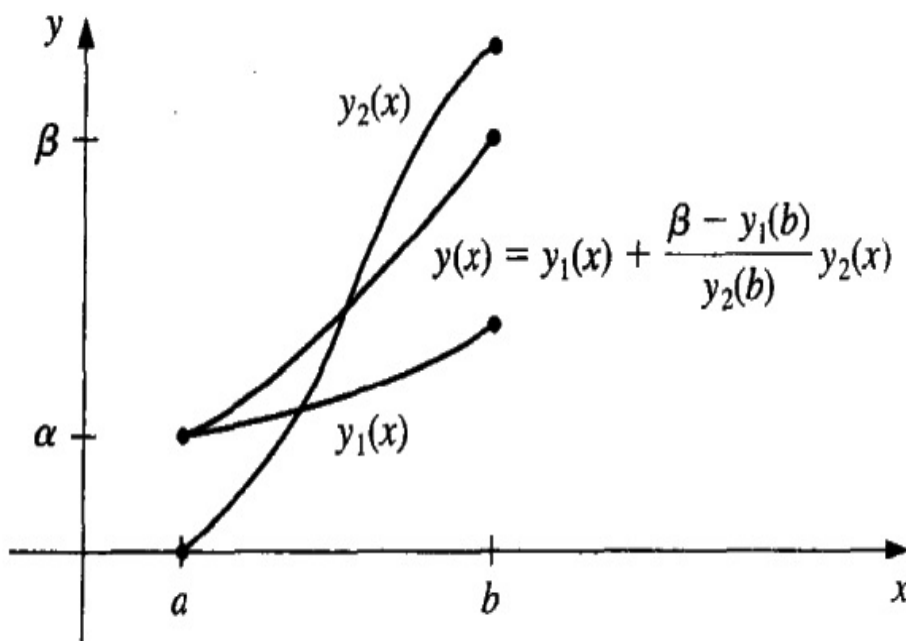
$$y(a) = y_1(a) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_p(b)} y_p(a) = \alpha + \frac{\beta - y_1(b)}{y_p(b)} \bullet = \alpha$$

و

$$y(b) = y_1(b) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_p(b)} y_p(b) = y_1(b) + \beta - y_1(b) = \beta$$

بنابراین از روابط بالا می‌توان گفت که، $y(x)$ ، یک جواب یکتا برای مسئله مقدار مرزی خطی است. قابل ذکر است که در روابط بالا باید $y_p(b) \neq 0$ باشد. (چون $y_p(b) = 0$ با فرضیات نتیجه ۲.۱.۳ در تناقض است).

روش پرتابی برای معادلات خطی، بر اساس تعویض مسئله مقدار مرزی با دو مسئله مقدار اولیه (۱.۳) و (۲.۳) است. باید اشاره کرد که روش‌های متعددی برای تقریب $y_1(x)$ و $y_p(x)$ وجود دارند. در این جا فقط به یک نمونه از آن‌ها اشاره شد. هنگامی که این تقریب‌ها موجود باشند، حل مسئله مقدار مرزی، با استفاده از معادله‌ی (۳.۳) تقریب زده می‌شود. شکل ۱.۳ به صورت تصویری این تکنیک را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۳: نمایش تصویری تکنیک پرتابی برای معادلات مقدار مرزی خطی

در این جا الگوریتم تکنیک پرتابی را برای یک مسئله مقدار مرزی خطی آورده‌ایم، برای پیدا کردن تقریب‌های $y_1(x)$ و $y_p(x)$ از روش رانگ کوتای مرتبه چهارم استفاده شده است. می‌توان از روش‌های دیگر نیز برای تقریب جواب مسئله استفاده نمود. این الگوریتم دارای ویژگی‌های اضافه‌ای برای تقریب پاسخ مشتق مسئله‌ی مقدار مرزی و خود

مسئله می‌باشد. استفاده از این الگوریتم برای تمام مسائلی که فرضیات نتیجه ۲.۱.۳ را ارضاء می‌کنند، قابل استفاده است.

۱.۱.۳ الگوریتم روش پرتابی برای مسائل خطی

این الگوریتم برای تقریب مسئله مقدار مرزی

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, y(a) = \alpha, y(b) = \beta.$$

می‌باشد.

ورودی‌های این الگوریتم نقاط ابتدایی و انتهایی بازه یعنی a و b ، شرایط مرزی α و β ، و تعداد زیر بازه‌ها، یعنی N ، می‌باشند.

خروجی این الگوریتم تقریب‌های $w_{1,i}$ برای $y(x_i)$ و $w_{p,i}$ برای $y'(x_i)$ به‌ازای $i = 0, 1, \dots, N$ می‌باشند.

Linear Shooting:

STEP 1: set $h=(b-a)/N$;

$$u_{1,0} = \alpha;$$

$$u_{2,0} = 0;$$

$$v_{1,0} = 0;$$

$$v_{2,0} = 1.$$

STEP 2: For $i=0, \dots, (N-1)$ do STEP 3 and STEP 4.

(The Runge-Kutta method for system is used Steps 3 and 4.)

STEP 3: set $x=a+ih$.

STEP 4 set

$$k_{1,1} = hu_{2,i};$$

$$k_{1,2} = h[p(x)u_{2,i} + q(x)u_{1,i} + r(x)];$$

$$k_{2,1} = h[u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}];$$

$$k_{2,2} = h[p(x + \frac{h}{2})(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}) + q(x + \frac{h}{2})(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{1,1}) + r(x + \frac{h}{2})];$$

$$k_{3,1} = h[u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}];$$

$$k_{3,2} = h[p(x + \frac{h}{2})(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}) + q(x + \frac{h}{2})(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{2,1}) + r(x + \frac{h}{2})];$$

$$k_{4,1} = h[u_{2,i} + k_{3,2}];$$

$$k_{4,2} = [p(x + h)(u_{2,i} + k_{3,2}) + q(x + h)(u_{1,i} + k_{3,1}) + r(x + h)];$$

$$u_{1,i+1} = u_{1,i} + \frac{1}{6}[k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}];$$

$$u_{2,i+1} = u_{2,i} + \frac{1}{6}[k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}];$$

$$k'_{1,1} = hv_{2,i};$$

$$k'_{1,2} = h[p(x)v_{2,i} + q(x)v_{1,i}];$$

$$k'_{2,1} = h[v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}];$$

$$\begin{aligned}
k'_{2,2} &= h[p(x + \frac{h}{2})(v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}) \\
&\quad + q(x + \frac{h}{2})(v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{1,1})]; \\
k'_{3,1} &= h[v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}]; \\
k'_{3,2} &= h[p(x + \frac{h}{2})(v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}) \\
&\quad + q(x + \frac{h}{2})(v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{2,1})]; \\
k_{4,1} &= h[v_{2,i} + k'_{3,2}]; \\
k_{4,2} &= [p(x + h)(v_{2,i} + k'_{3,2}) + q(x + h)(v_{1,i} + k'_{3,1})]; \\
v_{1,i+1} &= v_{1,i} + \frac{1}{6}[k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}]; \\
v_{2,i+1} &= v_{2,i} + \frac{1}{6}[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}];
\end{aligned}$$

STEP 5: set $w_{1,0} = \alpha$;

$$w_{0,2} = \frac{\beta - u_{1,N}}{v_{1,N}};$$

OUTPUT: $(\alpha, w_{1,0}, w_{2,0})$.

STEP 6: For $i=1, \dots, N$

$$\text{set } W_1 = u_{1,i} + w_{2,0} \cdot v_{1,i}$$

$$W_2 = u_{2,i} + w_{2,0} \cdot v_{2,i}$$

$$x = a + ih$$

OUTPUT: (x, W_1, W_2)

STEP 7: STOP.

۲.۳ روش پرتابی برای مسائل غیر خطی

روش پرتابی برای مسائل مرزی مرتبه دوم غیرخطی زیر :

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad (4.3)$$

مشابه تکنیک خطی است با این تفاوت که، حل مسئله غیر خطی را نمی‌توان با ترکیب خطی حل‌های دو مسئله مقدار اولیه، بیان کرد. در عوض حل مسئله مقدار مرزی را، با استفاده از حل‌هایی که، از یک سری مسئله‌های مقدار اولیه (که شامل پارامتر t هستند) به دست می‌آیند، تقریب می‌زنیم.

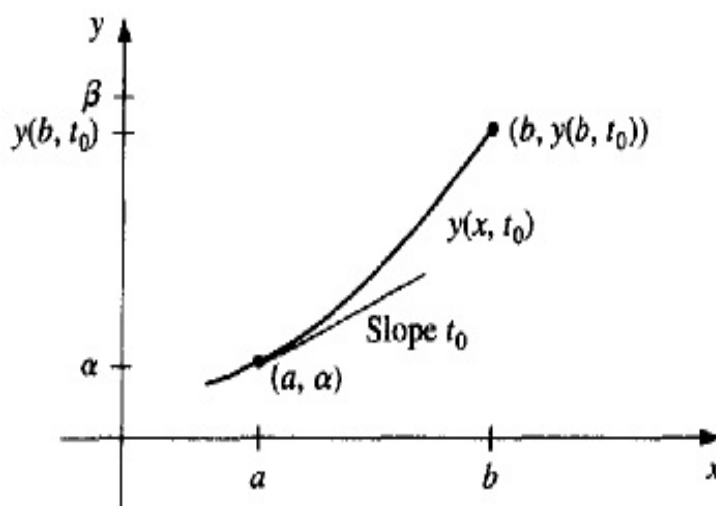
این مسائل به صورت زیر هستند :

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(b) = t. \quad (5.3)$$

این کار توسط انتخاب پارامتر $t = t_k$ انجام می شود، به شرطی که شرط زیر را برآورده کند :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta,$$

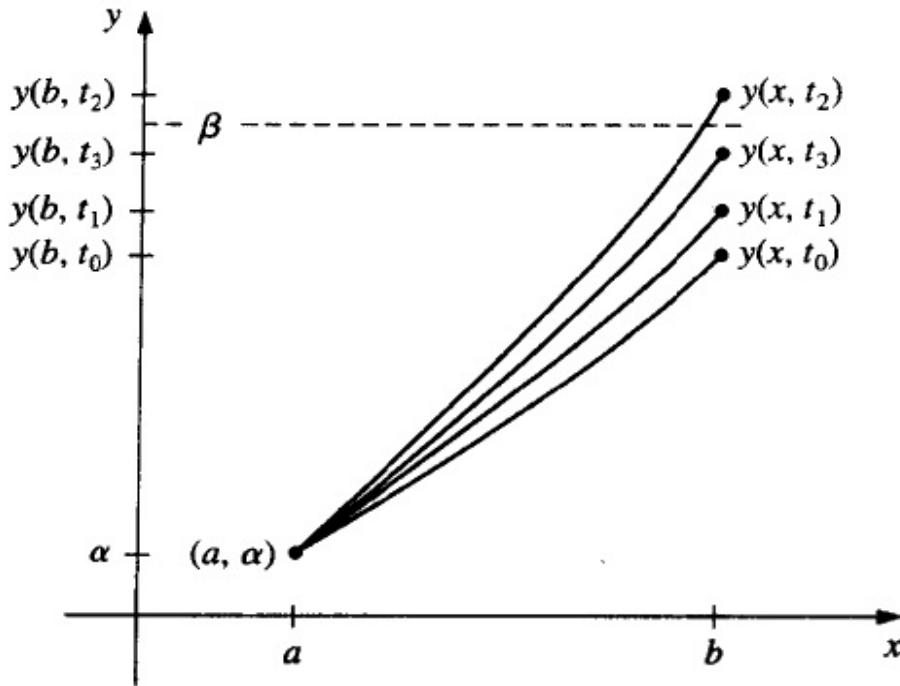
که $y(x, t_k)$ جواب مسئله مقدار اولیه (۵.۳) در $t = t_k$ را نشان می دهد. همچنین $y(x)$ جواب مسئله مقدار مرزی (۴.۳) می باشد.



این تکنیک را به وسیله مقیاس با فرایند شلیک یک تیر به هدف ثابت، پرتابی می نامند. در این روش با پارامتر t_0 ، که نشان دهنده ارتفاع اولیه ای است که جسم از نقطه (a, α) شلیک می شود، شروع می کنیم.

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(b) = t_0.$$

اگر $y(b, t_0)$ به اندازه ی کافی نزدیک β نباشد، تقریبمان را با انتخاب t_1 و t_2 و ... اصلاح کرده، و این کار را تا زمانی که $y(b, t_k)$ به اندازه ی کافی نزدیک β گردد ادامه می دهیم. این کار به صورت تصویری در شکل ۲.۳ نشان داده شده است.



شکل ۲.۳: نمایش تصویری تکنیک پرتابی برای معادلات مقدار مرزی غیرخطی

برای تعیین پارامتر t_k ، یک مسئله مقدار مرزی را به شکل (۴.۳)، که وضعیت تئوری ۱.۱.۳ را برآورده می‌کند، در نظر می‌گیریم. اگر $y(x, t)$ جواب مسئله مقدار اولیه (۵.۳) باشد، آنگاه، t را به وسیله‌ی معادله زیر تعیین می‌کنیم:

$$y(b, t) - \beta = 0. \quad (6.3)$$

معادله بالا معادله‌ای غیرخطی است. بنابراین روش‌های گوناگونی را می‌توان برای حل آن در نظر گرفت. برای تولید دنباله $\{t_k\}$ می‌توان از روش نیوتن استفاده کرد. به عبارت دیگر:

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{\frac{dy}{dt}(b, t_{k-1})} \quad (7.3)$$

در دنباله بالا نیاز به تقریب اولیه t_0 و دانستن $\frac{dy}{dt}(b, t_{k-1})$ می‌باشد. فرض کنید ما معادله (۵.۳) را با توجه به این که جواب به هر دو پارامتر x و t وابسته است، به صورت زیر نوشته‌ایم:

$$y''(x, t) = f(x, y(x, t), y'(x, t)), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a, t) = \alpha, \quad y'(a, t) = t. \quad (۸.۳)$$

از آنجایی که نیاز داریم $\frac{dy}{dt}(b, t_{k-1})$ را در $t = t_{k-1}$ مشخص کنیم، از معادله (۸.۳) نسبت به t مشتق می‌گیریم.
در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y''}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(x, y(x, t), y'(x, t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x, t) \end{aligned}$$

و از آنجایی که x و t مستقل از هم هستند، (یعنی $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$) داریم:

$$\frac{\partial y''}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x, t) \quad (۹.۳)$$

همچنین برای $a \leq x \leq b$ ، شرایط مرزی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(a, t) = 0, \quad \frac{\partial y'}{\partial t}(a, t) = 1.$$

با جایگذاری $z(x, t)$ به جای $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$ در معادله (۹.۳) مسئله مقدار اولیه بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial z''}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')z(x, t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')z'(x, t) \quad (۱۰.۳)$$

$$a \leq x \leq b, \quad z(a, t) = 0, \quad z'(a, t) = 1. \quad (۱۱.۳)$$

بنابراین معادله (۷.۳) به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{z(b, t_{k-1})} \quad (۱۲.۳)$$

۱.۲.۳ الگوریتم روش پرتابی برای مسائل غیر خطی

این الگوریتم برای تقریب مسئله مقدار مرزی زیر می‌باشد.

$$y'' = f(x, y, y') \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

ورودی‌های این الگوریتم نقاط ابتدایی و انتهایی بازه یعنی a و b ، شرایط مرزی α و β ، تعداد زیر بازه‌ها، $N \geq ۲$ ، خطای TOL و بیشترین تکرار M می‌باشند. خروجی این الگوریتم تقریب‌های $w_{1,i}$ برای $y(x_i)$ و $w_{۲,i}$ برای $y'(x_i)$ به‌ازای $i = ۰, 1, \dots, N$ می‌باشند.

Non-Linear Shooting:

STEP 1: set $h=(b-a)/N$;

$k = 1$;

$TK = (\beta - \alpha)/(b - a)$;

STEP 2: While ($k \leq M$) do STEP 3–10

STEP 3:

$w_{1,0} = \alpha$;

$w_{2,0} = TK$;

$u_1 = 0$;

$u_2 = 1$.

STEP 4: For $i=0, \dots, (N-1)$ do STEP 5 and STEP 6.

(The Runge-Kutta method for system is used Steps 5 and 6.)

STEP 5: set $x=a+(i-1)h$.

STEP 6 set

$$\begin{aligned}
k_{1,1} &= hw_{2,i-1}; \\
k_{1,2} &= hf(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1}); \\
k_{2,1} &= hf(w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,2}); \\
k_{2,2} &= hf(x + \frac{h}{2}, w_{1,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,1} + w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,2}); \\
k_{3,1} &= hf(w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,2}); \\
k_{3,2} &= hf(x + \frac{h}{2}, w_{1,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,1} + w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,2}); \\
k_{4,1} &= hf(w_{2,i-1} + k_{3,2}); \\
k_{4,2} &= hf(x + \frac{h}{2}, w_{1,i-1} + k_{3,1} + w_{2,i-1} + k_{3,2}); \\
w_{1,i} &= w_{1,i-1} + \frac{1}{6}[k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}]; \\
w_{2,i} &= w_{2,i-1} + \frac{1}{6}[k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}]; \\
k'_{1,1} &= hu_2; \\
k_{1,2} &= h[f_y(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_1 + f'_y(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_2]; \\
k'_{2,1} &= h[u_2 + \frac{1}{2}k'_{1,2}] \\
k'_{2,2} &= h[f_y(x + \frac{h}{2}, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + \frac{1}{2}k'_{1,1}) \\
&\quad + f'_y(x + \frac{h}{2}, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + \frac{1}{2}k'_{1,2})]; \\
k'_{3,1} &= h[u_2 + \frac{1}{2}k'_{2,2}]; \\
k'_{3,2} &= h[f_y(x + \frac{h}{2}, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + \frac{1}{2}k'_{2,1}) \\
&\quad + f'_y(x + \frac{h}{2}, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + \frac{1}{2}k'_{2,2})]; \\
k'_{4,1} &= h[u_2 + \frac{1}{2}k'_{3,2}]; \\
k'_{4,2} &= h[f_y(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + k'_{3,1}) \\
&\quad + f'_y(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + k'_{3,2})]; \\
u_1 &= u_1 + \frac{1}{6}[k'_{1,2} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}]; \\
u_2 &= u_2 + \frac{1}{6}[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}];
\end{aligned}$$

STEP 7: if $|w_{1,N} - \beta| \leq TOL$ then do STEP 8 and STEP 9;

STEP 8: For $i=1, \dots, N$

set $x = a + ih$;

OUTPUT: (x, W_1, W_2)

STEP 9: (The procedure is complete.)

STOP.

STEP 10: Set $TK = TK - \frac{w_{1,N} - \beta}{u_1}$

(Newton's method is used to compute TK)

$k=k+1$;

فصل ۴

حل تشابهی معادلات انتقال حرارت در ماده متخلخل

۱.۴ مقدمه

مطالعه‌ی جریان جابجایی طبیعی و انتقال گرما از سطوحی که، دمای آن‌ها با دمای محیط متخلخل اطراف خود متفاوت است، برای چندین دهه سهم قابل توجهی را در مسائل مهندسی وابسته به انرژی داشته است. اولین مقالاتی که جریان لایه مرزی در آن‌ها مطرح شد، توسط چنگ و مینکویچ^۱ [۳۷] در سال ۱۹۷۷ صورت گرفت که، جابجایی گرمایی را ناشی از یک صفحه‌ی داغ افقی در نظر گرفته است. چنگ و چانگ^۲ [۳۸] نیز در سال ۱۹۷۶ لایه مرزی افقی مربوط به یک صفحه افقی را مورد مطالعه قرار دادند. در هر دو این مقالات وضعیت حل‌ها مشابه یکدیگر بوده است.

سطح عمده‌ای از مقالات که چنین مسائلی را مورد مطالعه قرار داده‌اند، تنها یک معادله انرژی را برای محیط متخلخل برگرفته‌اند. تعدادی از کارهای اخیر با این فرض صورت گرفته است که، دمای محلی فازهای جامد و سیال برابر نباشند. یک مثال ساده که این شرایط به وجود می‌آیند، زمانی است که، یک سیال داغ به طور ناگهانی به محیط متخلخل سرد تزریق گردد، و این که زمان می‌برد تا دماهای فازها در هر نقطه متمایل به تعادل حرارتی برسد. برای چنین مثال‌هایی می‌توان به مقالات ریز و همکاران^۳ [۳۹] در سال ۲۰۰۸ و ریز و باسوم^۴ [۴۰] در سال ۲۰۱۰ اشاره کرد. به هر حال چنین عدم تعادل حرارتی محلی (LTE)، محدود به جریان‌های غیر دائمی نیست.

^۱Cheng and Minkowycz

^۲Cheng and Chang

^۳Rees and et al.

^۴Rees and Bassom

برای مثال‌های حالت دائم می‌توان به، جابجایی در محفظه‌های بسته که توسط بیتاس و پاپ^۵ [۴۱] و محمد^۶ [۴۲] انجام شده است، جابجایی گرمایی داری-بنارد^۷ که توسط کُمبرنوس و بوریس^۸ [۴۳] صورت گرفته است و حل غیر تعادلی لایه مرزی عمودی که توسط ریز و پاپ^۹ [۴۴]، چنگ و مینکویچ [۳۷] و ریز^{۱۰} [۴۵] انجام شده است، اشاره کرد.

در تمامی مقالات ذکر شده، عدم تعادل حرارتی محلی (LTNE)، توسط دو معادله جداگانه از جابجایی دما، یکی برای فاز سیال و دیگری برای فاز جامد مدل شده است. جابجایی بینابینی گرما بین فازها، با یک ترم منبع ساده که با اختلاف دمای بین فازها متناسب است، به صورت ماکروسکوپی مدل شده است. مروری بر این موضوعات را می‌توان در مقالات ریز و پاپ [۴۶] و کوزنت سو^{۱۱} [۴۷] دید.

در این فصل ما تاثیرات ترکیبی از عدم تعادل حرارتی محلی (LTE)، مکش/دمش سطح یکنواخت، و نیروی شناوری ناشی از حضور تغییرات خطی دما، بر روی جریان، روی یک سطح عمودی را بررسی می‌کنیم.

روش‌های تشابهی بیشتر باید به صورت عددی، تحلیل شوند. تمرکز این فصل بر همین شیوه حل می‌باشد. ولی زمانی که عدم تعادل حرارتی محلی، مکش/دمش و تغییرات دمای سطح را نداشته باشیم، معادلات حاکم ممکن است با روش‌های تحلیلی نیز حل شوند. کار ما در این فصل، توسعه و گسترش مقاله چنگ^{۱۲} [۴۸]، که در سال ۱۹۷۷ انجام شده است، می‌باشد.

۲.۴ معادلات حاکم بر مسئله

همان‌طور که در شکل ۱.۴ می‌بینید. صفحه عمودی غوطه‌ور در یک محیط متخلخل اشباع شده را، بررسی کرده‌ایم.

صفحه عمودی مورد نظر ممکن است نفوذپذیر ($v_w \neq 0$)، یا نفوذناپذیر ($v_w = 0$)، باشد. همچنین فرض شده است که، تغییرات دما روی سطح این صفحه، دارای توزیع خطی باشد.

^۵Baytas and Pop

^۶Mohamad

^۷Darcy-Benard

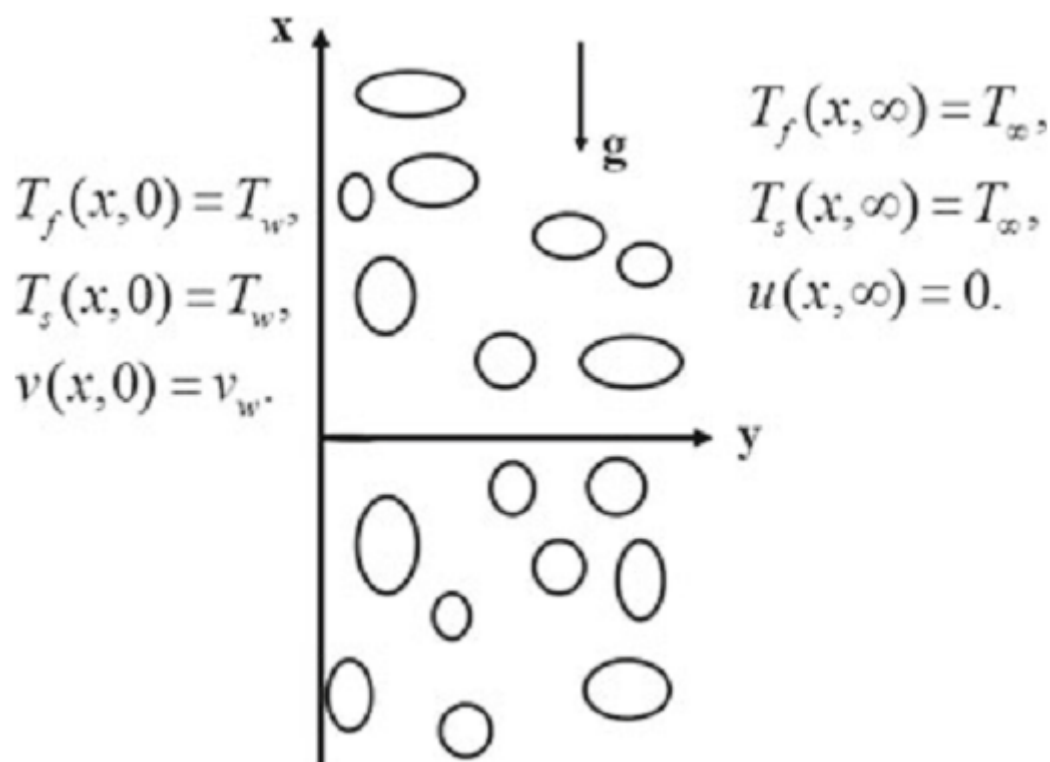
^۸Combarous and Bories

^۹Rees and Pop

^{۱۰}Rees

^{۱۱}Kuznetsov

^{۱۲}Cheng



شکل ۱.۴: فیزیک مسئله

به عبارت دیگر:

$$T_w = T_\infty + Ax. \quad (1.4)$$

که در معادله بالا مقدار T_∞ ، همان شرایط محیط دور از دیواره می باشد. A نیز عدد مثبتی است و می تواند مرتبط با صفحه گرم نفوذناپذیری باشد که، سیال از مقادیر بزرگ y به سمت دیواره جاری می شود، و در $x = 0$ یک نقطه سکون داریم. خصوصیات سیال ثابت فرض شده است به جز در تغییرات چگالی که از تقریب Boussinesq استفاده شده است.

۱.۲.۴ معادلات حاکم بر مسئله

معادلات حاکم بر مسئله حاضر، تاثیرات عدم تعادل حرارتی را شرح می دهد. همچنین فرض کرده ایم که جریان توسط مدل دارسی به خوبی شرح داده شده است.

بنابراین معادله کامل لایه مرزی، برای جریان ویسکوز تراکم ناپذیر، به صورت زیر است :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{gK}{\nu} \beta \frac{\partial T_f}{\partial y}, \quad (3.4)$$

$$u \frac{\partial T_f}{\partial x} + v \frac{\partial T_f}{\partial y} = \epsilon \alpha_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \frac{h}{(\rho c_P)_f} (T_s - T_f), \quad (4.4)$$

$$(1 - \epsilon) \alpha_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} + \frac{h}{(\rho c_P)_s} (T_f - T_s) = 0. \quad (5.4)$$

در این معادلات صفحات دکارتی x و y در امتداد صفحه قرار داده شده‌اند. u و v به ترتیب بردارهای سرعت در جهت‌های x و y هستند. T دما، ϵ تخلخل، ν ویسکوزیته حرکتی سیال، و β ضریب انبساط حرارتی می‌باشد.

در معادلات (۵.۴) و (۴.۴) مقدار h ، ضریب انتقال حرارتی بینابینی فازهای سیال و جامد می‌باشد.

وقتی h به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه اغلب اوقات مقادیر T_f و T_s با هم برابر می‌شوند و فازها به تعادل حرارتی محلی می‌رسند. در طرف دیگر، برای مقادیر دیگری از h ، دماهای فازها به طور محلی با هم متفاوت بوده و گفته می‌شود شرایط عدم تعادل حرارتی محلی غالب شده است. یک مجموعه کامل از تحلیل‌ها و مقادیر عددی h ، برای میکرو ساختارهای متخلخل با ضریب رسانش و ضرایب هدایتی مختلف در مقاله ریز [۴۵] آمده است. شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$y = 0: \quad T_f = T_s = T_w(x) = T_\infty + Ax, \quad v = v_w, \quad (6.4)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad T_f, T_s \rightarrow T_\infty \quad u \rightarrow 0. \quad (7.4)$$

متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\theta = \frac{T_f - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \phi = \frac{T_s - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad (8.4)$$

$$\psi = \epsilon \alpha_f Ra_x^{1/5} f(\eta), \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \epsilon \left(\frac{\alpha_f}{x} \right) Ra_x f'(\eta), \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\epsilon \left(\frac{\alpha_f}{x} \right) Ra_x^{1/5} f(\eta), \quad (9.4)$$

که عدد رایلی محلی به صورت زیر می باشد:

$$Ra_x = \frac{g \beta K (T_w - T_\infty) x}{\epsilon \nu \alpha_f} = \frac{g \beta K A x^5}{\epsilon \nu \alpha_f} \quad (10.4)$$

متغیر تشابهی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\eta = Ra_x^{1/5} \frac{y}{x} \quad (11.4)$$

با توجه به تعریف عدد رایلی و متغیر تشابهی η می فهمیم که η تابعی از y است و لایه های مرزی ضخامت ثابتی دارند .

با جایگذاری کردن معادلات (۸.۴) تا (۱۱.۴) در معادلات (۳.۴) تا (۵.۴) به معادلات بی بعد شده زیر می رسیم :

$$f'' = \theta', \quad (12.4)$$

$$\theta'' + f\theta' - f'\theta = H(\theta - \phi), \quad (13.4)$$

$$\phi'' = H\gamma(\phi - \theta), \quad (14.4)$$

و شرایط مرزی نیز به صورت زیر تغییر می کند :

$$\eta = 0 : \quad f = f_w, \theta = \phi = 1, \quad (15.4)$$

$$\eta \rightarrow \infty : \quad f', \theta, \phi \rightarrow 0. \quad (16.4)$$

معادلات (۱۲.۴) تا (۱۶.۴)، یک دستگاه سه پارامتری از معادلات است، که پارامترهای آن f_w ، H و γ می باشند.

در روابط بالا داریم:

$$H = \frac{hx^5}{\epsilon k_f Ra_x}, \quad \gamma = \frac{\epsilon k_f}{(1 - \epsilon)k_s} \quad (17.4)$$

که H و γ به ترتیب پارامترهای انتقال حرارت بی بعد و نسبت ضریب هدایتی حرارتی دو فاز می باشند.

همچنین شار گرمایی صفحات، به صورت ریز قابل محاسبه می باشد:

$$q_f = -k_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad q_s = -k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (18.4)$$

بعد از مقداری عملیات ریاضی داریم:

$$q_f = -\frac{k_f(T_w - T_\infty)Ra_x^{0.5}}{x} \theta'(\phi), \quad q_s = -\frac{k_s(T_w - T_\infty)Ra_x^{0.5}}{x} \phi'(\phi). \quad (19.4)$$

همچنین اعداد ناسلت را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Nu_f Ra_x^{-0.5} = \frac{x}{k_f(T_w - T_\infty)} q_f = -\theta'(\phi), \quad Nu_s Ra_x^{-0.5} = \frac{x}{k_s(T_w - T_\infty)} q_s = -\phi'(\phi). \quad (20.4)$$

۳.۴ حل عددی

سیستم معادلات حاکم و شرایط مرزی معادلات، (۱۲.۴) تا (۱۶.۴)، با دو روش عددی متفاوت برای نشان دادن دقت کد عددی حل شده اند. یکی از این روش ها، روش کلاسیک مرتبه چهارم رانگ کوتا است که با روش تکنیک پرتابی^{۱۳} تلفیق شده است در حالی که روش دیگر ویرایشی از روش کلر باکس^{۱۴} است.

حل روش رانگ کوتا با تعداد ۱۰۰ نقطه و با فواصل یکنواخت در نظر گرفته شده است در حالیکه روش کلر باکس (یک روش مرتبه دوم) بیشتر از ۴۰۰ نقطه شبکه، بر روی یک شبکه غیر یکنواخت استفاده می کند، که از نقطه $\eta = 0$ شروع شده و با یک فاکتور توسعه گرید ۱.۰۴ افزایش می یابد. این حل ها با هم مقایسه شده اند و خیلی به هم نزدیک می باشند.

بیشتر محاسبات حاضر در این جا، مخصوصاً آن هایی که برای مقادیر کم H (لایه مرزی دو فاز از لحاظ ضخامت بسیار متفاوت هستند)، با روش کلر باکس نیز انجام شده اند.

حل عددی مقادیر مختلف f_w ، H و γ را اتخاذ می کنند. باید توجه شود که ضخامت لایه مرزی به بزرگی پارامترهایمان بستگی دارد، بنابراین، مقادیر کم H یا γ باعث می شود که، ضخامت لایه

^{۱۳}Shooting technique

^{۱۴}Keller box

مرزی فاز جامد بسیار بزرگتر از فاز سیال شود. مکش قوی در سطح باعث نازک شدن ضخامت لایه مرزی حرارتی فاز سیال در مقایسه با فاز جامد می‌شود. دمش از سطح در مقایسه با مکش، ضخامت لایه مرزی را افزایش می‌دهد. بنابراین مقدار مشخص η_{max} که در محاسباتمان استفاده شده است به مقادیر پارامترهایمان بستگی دارد و مقادیر η_{max} باید به گونه‌ای انتخاب شود که لایه مرزی، به‌طور کامل در ناحیه جواب قرار گیرد.

آزمایشی از دقت شبیه‌سازی عددی حاضر با در نظر گرفتن $H = 0$ ، در معادلات (۱۲.۴) و (۱۴.۴) و نادیده گرفتن از اثرات ϕ انجام شده است. که از فرض تعادل حرارتی نیز استفاده کرده‌ایم. این کار به ما اجازه می‌دهد تا دو روش عددی متفاوت را، با داده‌های منتشر شده از مقالات و حل زیر:

$$f(\eta) = f_w + \frac{1 - e^{-\tau\eta}}{\tau}, \quad \theta = e^{-\tau\eta}, \quad (21.4)$$

که در آن τ به شکل زیر است :

$$\tau = \frac{f_w + \sqrt{f_w^2 + 14}}{14} \quad (22.4)$$

مقایسه کنیم.

حل بالا توسط گوپتا و گوپتا^{۱۵} [۴۹] انجام شده است. بنابراین عدد ناسلت برای این مورد دقیقاً τ است.

جدول ۱.۴ امکان مقایسه بین روش‌های عددی استفاده شده در این فصل، و حل تحلیلی بالا و روش‌های عددی دیگر را فراهم می‌سازد.

۴.۴ نتایج و تحلیل‌ها

در این بخش نتایج عددی به‌طور مفصل ارائه شده است. سه پارامتر f_w ، H و γ در معادلات ظاهر شده است.

^{۱۵}Gupta and Gupta

جدول ۱.۴: مقایسه مقادیر عددی، $(\theta')^-$ ، با روش تحلیلی و روش‌های عددی دیگر در حالت $H = 0$

تحلیلی	کلر باکس	رانگ کوتا	علی [۵۱]	چنگ [۴۸]	[۵۰] کلر و مگیاری	f_w
۰٫۶۱۸۰۳۳۹۹	۰٫۶۱۸۰۳۴۰۴	۰٫۶۱۸۰۳۴۰۴	۰٫۶۱۸۰۳	۰٫۶۱۸۰	۰٫۶۱۸۰	-۱
۰٫۹۷۷۰۳۲۹۶	۰٫۶۷۷۰۳۲۹۹	۰٫۶۷۷۰۳۲۹۹	۰٫۶۷۷۰۳	۰٫۶۷۷۰	۰٫۶۷۷۰	-۰٫۸
۰٫۸۱۹۸۰۳۹۰	۰٫۸۱۹۸۰۳۹۱	۰٫۸۱۹۸۰۳۹۱	۰٫۸۱۹۸۰	۰٫۸۱۹۸	۰٫۸۱۹۸	-۰٫۴
۱٫۰۰۰۰۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰۰۰۰۰	۰٫۹۹۹۹۹۹۸۵	۱٫۰۰۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۰
۱٫۶۱۸۰۳۳۹۹	۱٫۶۱۸۰۳۳۹۹	۱٫۶۱۸۰۳۳۹۸	۱٫۶۱۸۰۳	۱٫۶۱۸۰	۱٫۶۱۸۰	۱

۱.۴.۴ پروفیل دما

تأثیرات تغییرات پارامترهای مکش/دمش در پروفیل دمای بی بعد در شکل ۲.۴ آمده است. موارد $H = \gamma = 1$ ، که مواردی هستند که حالت عدم تعادل حرارت محلی انتظار می‌رود. این تأثیرات برای چهار مورد $f_w = -5, 0, 5, 10$ نمایش داده شده‌اند.

خطوط ممتد پروفیل دمای سیال، یعنی θ ، و منحنی خط بریده پروفیل دمای جامد یعنی ϕ را نشان می‌دهند.

واضح است که با تغییرات f_w ، پروفیل‌ها تغییر قابل ملاحظه‌ای در ضخامتشان صورت می‌گیرد. زمانی که f_w ، بزرگ و منفی باشد، ضخامت لایه مرزی نیز زیاد است، و فازها تقریباً در حالت تعادل حرارتی محلی قرار دارند. از طرف دیگر وقتی که f_w به مقادیر بزرگ و مثبت افزایش می‌یابد، لایه مرزی گرمایی سیال به طور پیوسته نازکتر می‌شود، در مقابل لایه مرزی فاز جامد به سمت یک ضخامت ثابت به پیش می‌رود.

زمانی که f_w مقدار زیادی داشته باشد و منفی نیز باشد، یک دمش قوی از سطح وجود دارد و مطابق شکل‌ها، ضخامت لایه مرزی به‌طور آشکاری افزایش می‌یابد. در اثر کاهش گرادیان دما فازها به سمت یک دمای محلی یکسان پیش می‌روند. این شرایط را می‌توان با جایگذاری $f(\eta) + f_w$ به‌جای $f(\eta)$ در معادلات (۱۲.۴) تا (۱۴.۴)، تحلیل کرد.

بنابراین داریم:

$$f'' = \theta', \quad (23.4)$$

$$\theta'' + f_w \theta' + f \theta' - f' \theta = H(\theta - \phi), \quad (24.4)$$

$$\phi'' = H\gamma(\phi - \theta) \quad (25.4)$$

اگر معادله (۲۴.۴) را در γ ضرب کنیم و با معادله (۲۵.۴) جمع کنیم و همچنین با توجه به شواهد عددی $\theta = \phi$ باشد، در این صورت معادلات (۲۴.۴) و (۲۵.۴) به معادله زیر کاهش پیدا می‌کنند:

$$\frac{1+\gamma}{\gamma} \theta'' + f_w \theta' + f \theta' + f' \theta = 0. \quad (26.4)$$

این شکل معادله‌ی بالا به همراه معادله (۲۳.۴) دارای جوابی به شکل زیر است :

$$f = \frac{1 - e^{-\delta\eta}}{\delta}, \quad \theta = e^{-\delta\eta}, \quad (27.4)$$

که در رابطه بالا داریم:

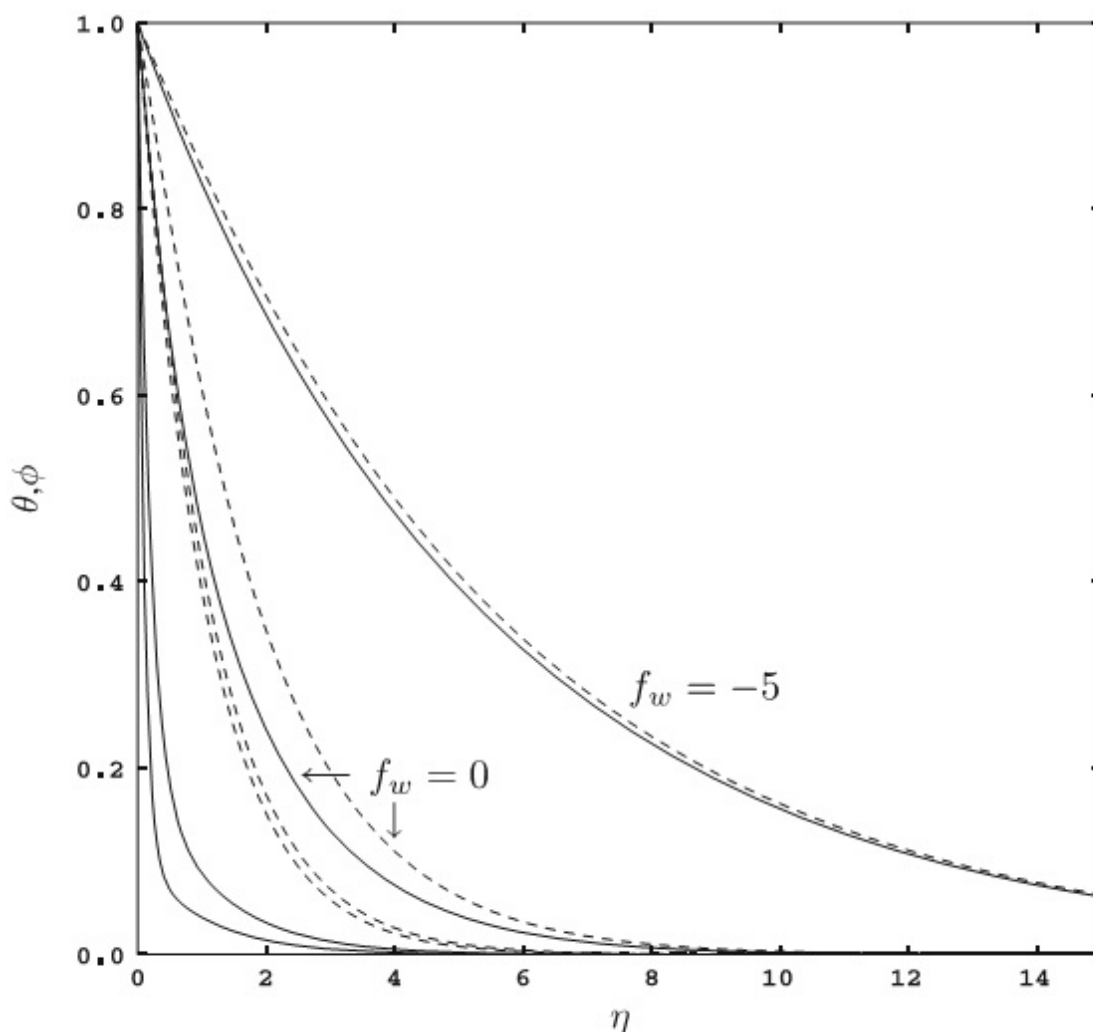
$$\delta = \frac{f_w + \sqrt{f_w^2 + 4\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)}}{2\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)}. \quad (28.4)$$

شباهت بین این حل و حلی که در معادلات (۲۱.۴) و (۲۲.۴) آمده است، وجود دارد. همان‌طور که در شکل ۲.۴ می‌بینیم وقتی $-1 \ll f_w$ ، در نتیجه $\delta \sim \frac{-1}{f_w}$ ، که حاصل آن یک کاهش آرام نمایی می‌باشد. حل معادله (۲۷.۴) برای $f_w = -5$ و $H = \gamma = 1$ در شکل ۲.۴ برای مقایسه θ مربوطه قابل تمایز نیست.

زمانی که پارامتر دمش/مکش، f_w ، بزرگ و مثبت باشد، حرکت سیال به سوی سطح به‌طور طبیعی باعث نازک‌تر شدن لایه مرزی گرمایی می‌شود.

به هر حال معادله (۱۴.۴) نشان می‌دهد که دمای فاز جامد مستقیماً با سرعت مکش تحت تاثیر قرار نمی‌گیرد و تنها به طور غیر مستقیم از طریق جمله چشمه/چاه که شامل θ می‌شود، تحت تاثیر قرار می‌گیرد. شکل ۲.۴ پیشنهاد می‌کند که، وقتی $1 \ll f_w$ ، ضخامت لایه مرزی حرارتی فاز جامد از f_w مستقل است.

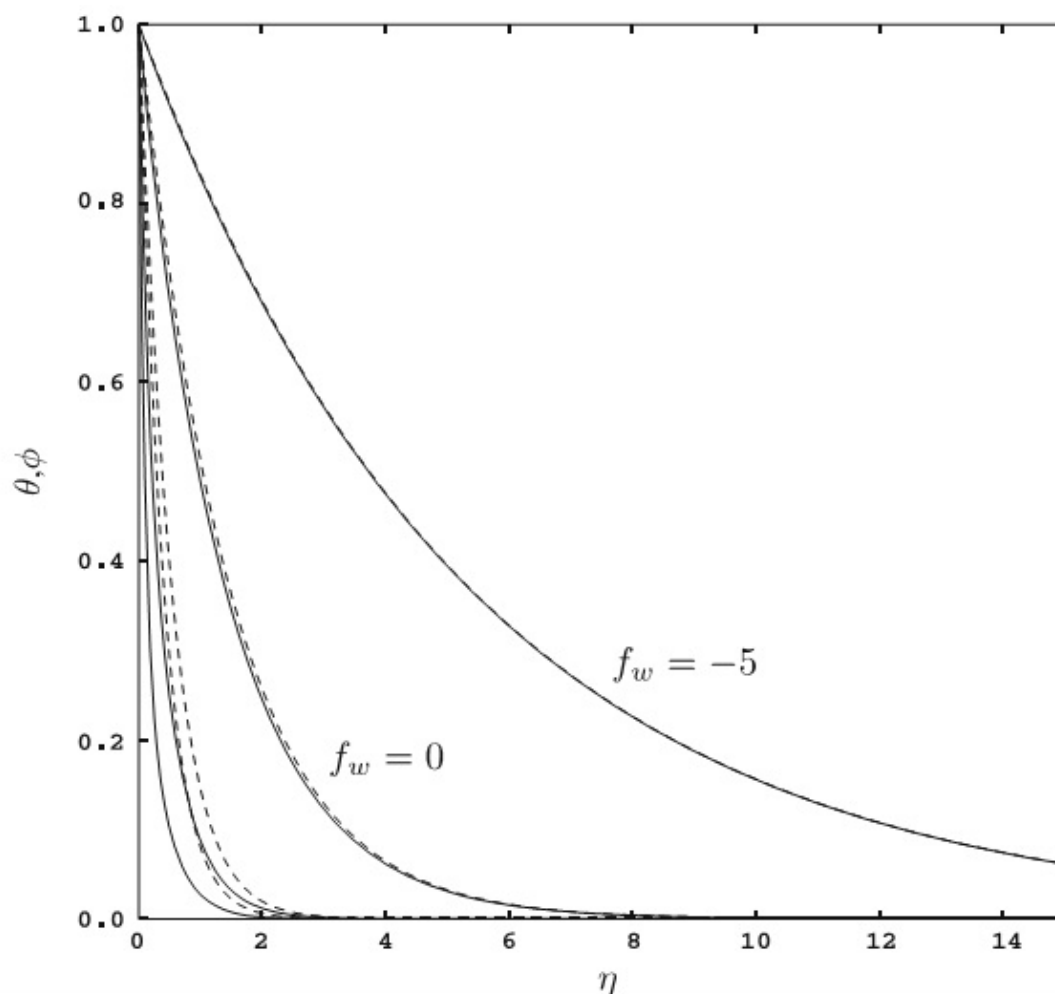
در بخش ۶.۴ خلاصه‌ای از حل تحلیلی حدی آمده است. این تحلیل حدی مفهوم نازک شدن لایه مرزی، برای فاز سیال و همچنین ضخامت ثابت برای فاز جامد را در حالت حدی $f_w \rightarrow \infty$ بیان می‌کند.



شکل ۲.۴: نمودار θ (خطوط یکسره) و نمودار ϕ (خطوط بریده) برای $H = \gamma = 1$ وقتی $f_w = -5, 0, 5, 10$

نمودارهای مربوط به دما برای موارد $H = 10$ و $H = 0.1$ و با در نظر گرفتن $\gamma = 1$ در شکل‌های ۳.۴ و ۴.۴ نشان داده شده‌اند. واضح است که حتی وقتی $f_w = 0$ باشد، برای $H = 10$ ، فازها نزدیک LTE هستند. زمانی که f_w از صفر به سوی ۱۰ افزایش می‌یابد، تاثیرات LTNE شروع به آشکار شدن می‌کند. در طرف دیگر زمانی که $H = 0.1$ است، حتی وقتی $f_w = -5$ باشد حل ما هنوز در حیطه‌ی LTE نیست. هرچند که حل‌ها تمایل به سمت LTE دارند. (زمانیکه f_w

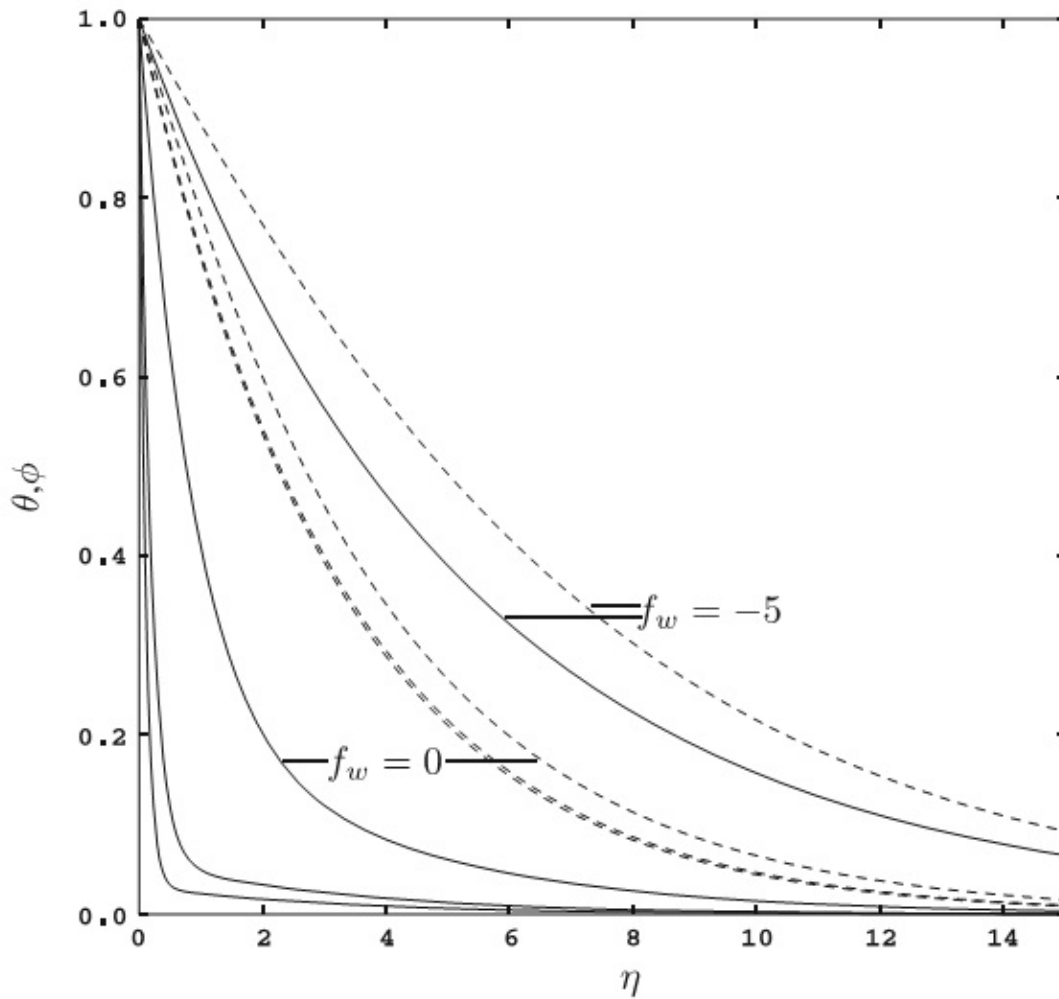
مقادیر بزرگتری اختیار کند و تاثیرات دمش قوی تر گردد.)
 برای خلاصه سازی، ما از تاثیرات γ بر پروفیل دما چشم پوشی کرده ایم. ولی باید توجه شود که مقادیر بزرگ γ ، باعث ایجاد LTE می شوند. LTNE زمانی چیره می گردد که، γ مقادیر پایین را بگیرد در این حالت، رفتار کیفی مانند زمانی است که H برای مقادیر ثابت γ تغییر کند.



شکل ۳.۴: نمودار θ (خطوط یکسره) و نمودار ϕ (خطوط بریده) برای $\gamma = 1, H = 10$ وقتی $f_w = -5, 0, 5, 10$ می باشد

۵.۴ اعداد ناسلت

نمودارهای ۵.۴ و ۶.۴ توضیح می دهند که چطور اعداد ناسلت دو فاز، با H تغییر می کنند (زمانی که H در محدوده $10^4 \leq H \leq 10^7$ قرار دارد). این نمودارها با نتایج حدی برای مقادیر بزرگ H ،



شکل ۴.۴: نمودار θ (خطوط یکسره) و نمودار ϕ (خطوط بریده) برای $\gamma = 1, H = 0.1$ وقتی $f_w = -5, 0, 5, 10$ می‌باشد

که در بخش ۶.۴ آمده است، مقایسه شده‌اند.

شکل ۵.۴ به یک مقدار مکش متوسط اشاره دارد ($f_w = 1$). و منحنی‌های $Nu_f Ra_x^{-0.5}$ و $Nu_s Ra_x^{-0.5}$ برای سه حالت $\gamma = 0.1, \gamma = 1$ و $\gamma = 10$ رسم شده است. زمانی که H به مقادیر بزرگ افزایش می‌یابد، می‌بینید که، هر جفت $Nu_f Ra_x^{-0.5}$ و $Nu_s Ra_x^{-0.5}$ متمایل به سوی مقادیر یکسان ثابتی هستند که در اولین جمله معادلات (۵۱.۴) و (۵۲.۴) ظاهر شده‌اند و در نتیجه فازها به LTE نزدیک می‌گردند.

این مسئله به خوبی با تئوری حدی که در بخش ۶.۴ آمده است نیز، شرح داده شده است. در شکل ۵.۴ نیز منحنی‌های نقطه چین نمایش داده شده‌اند.

در طرف دیگر زمانی که $H \rightarrow 0$ ، جمله چشمه/چاه در معادله حاکم تاثیر گذاری کمی دارد و اعداد ناسلت مربوطه واگرا می گردند. شکل ۴.۴ که برای $H = 10$ است، نشان می دهد که ضخامت لایه مرزی گرمایی برای فاز جامد (زمانی که f_w مثبت باشد) بسیار ضخیم است که مقادیر کوچک Nu_s را به دنبال دارد. دقت شود که بیشتر تغییرات برای پروفیل دمای فاز سیال نزدیک $\eta = 0$ به وقوع می پیوندد که مقدار بزرگ Nu_f را به همراه دارد.

این رفتار از اعداد ناسلت به وضوح در شکل ۵.۴ در حالت $H \rightarrow 0$ دیده می شود. اگر چه ما این جا اثبات نکرده ایم ولی سخت نیست که نشان دهیم :

$$H \ll 1: \quad Nu_f Ra_x^{-0.5} \sim \tau, \quad Nu_s Ra_x^{-0.5} \sim \sqrt{H\gamma} \quad (29.4)$$

که τ در معادله (۲۲.۴) آمده است.

مقادیر عددی $Nu_s Ra_x^{-0.5}$ و $Nu_f Ra_x^{-0.5}$ در $H = 10^{-3}$ در شکل ۵.۴ به وضوح با این توضیحات موافق است.

شکل ۶.۴ دمش متعادل را نشان می دهد که، می تواند در در مقابل شکل ۵.۴ مقایسه شود. در این شکل $f_w = -1$ گرفته شده است. توضیحات مشابهی را می توان برای این شکل مشابه $f_w = 1$ نیز ارائه داد.

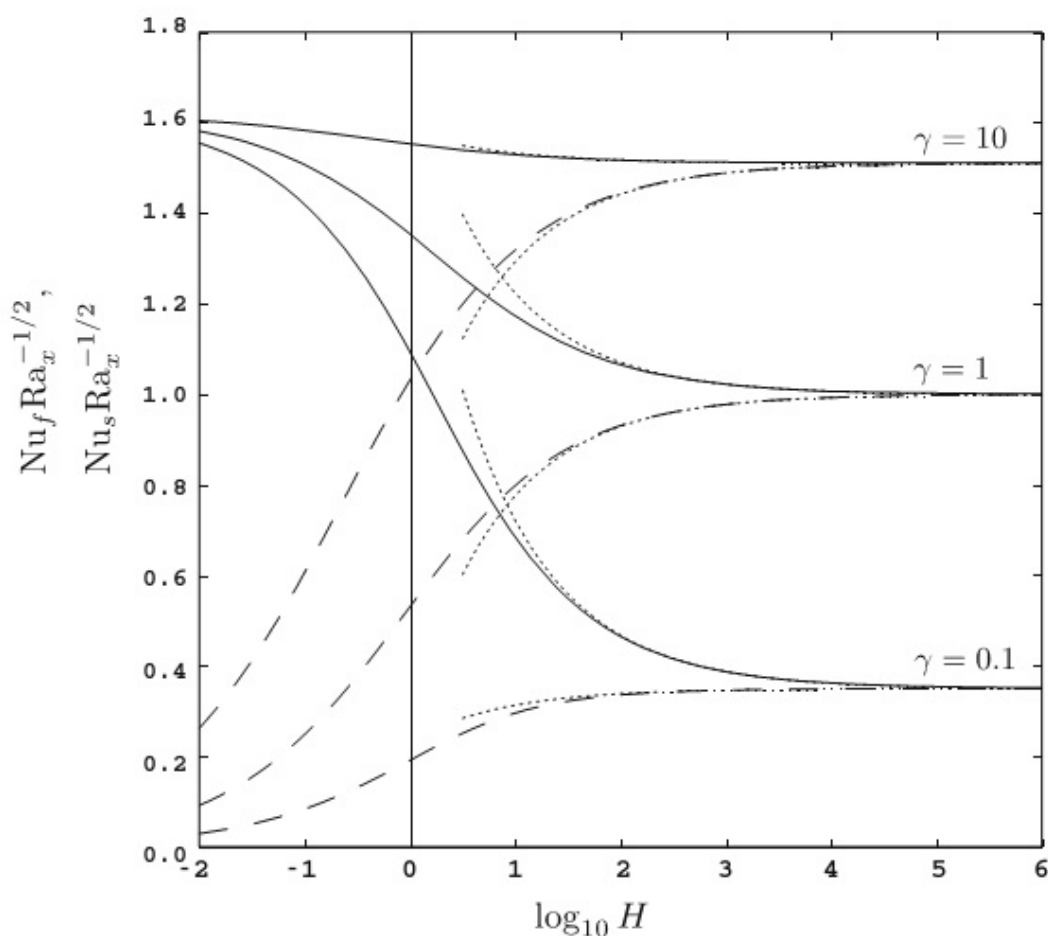
به هر حال ما تا کنون مشاهده کردیم که دمش باعث می شود تا فازها به LTE نزدیک شوند و این به این معنا است که $H = 10^{-3}$ هنوز به اندازه ی کافی مقدار کوچکی نیست تا $Nu_s Ra_x^{-0.5}$ به مقادیر داده شده در معادله (۲۹.۴) نزدیک شود.

اشکال ۷.۴ و ۸.۴ رفتار $Nu_s Ra_x^{-0.5}$ و $Nu_f Ra_x^{-0.5}$ را از نظر تغییرات f_w نشان می دهند. مقادیر بزرگ و منفی f_w نشان می دهد که، فازها به LTE هدایت می شوند. در این حالت $Nu_f \simeq Nu_s$ است. مقادیر مثبت و بزرگ، مرتبط با LTNE هستند (جایی که $Nu_f \gg Nu_s$)

شکل ۷.۴ مربوط به $\gamma = 1$ و $H = 0.1, 1, 10$ است و همچنین شکل ۸.۴ مرتبط است با $H = 1$ با $\gamma = 0.1, 1, 10$. زمانی که $f_w \gg 1$ است، عدد ناسلت به صورت خطی رو به افزایش است و در معادله (۴۱.۴) نیز دیده می شود.

آنالیز حدی انجام شده بر اساس این است که، دو فاز در حالت LTNE هستند در نتیجه مقایسه بین داده های محاسبه شده و روش حدی، زمانی که $\gamma = 10$ (شکل ۸.۴) و $H = 10$ (شکل ۷.۴) کمتر مطلوب است، چون مقادیر بزرگ γ یا H عموماً سعی دارند تا فازها در حالت LTE قرار بگیرند.

در طرف دیگر مورد $\gamma = 0.1$ (شکل ۸.۴) و $H = 0.1$ (شکل ۷.۴) با حل حدی انجام شده



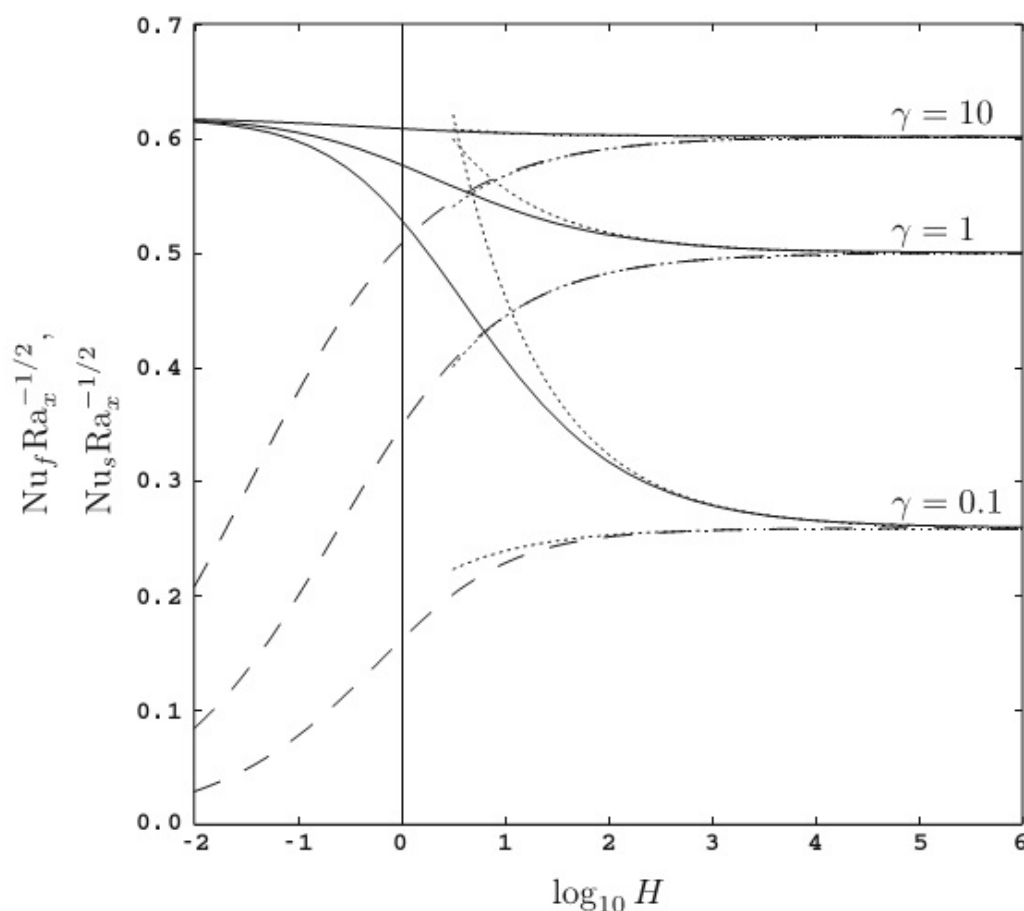
شکل ۵.۴: تغییرات $Nu_f Ra_x^{-1/2}$ (خطوط پیوسته) و $Nu_s Ra_x^{-1/2}$ (خطوط بریده) و حالت حدی $H \gg 1$ (نقطه چین) در مقابل $\log_{10} H$ برای موارد $f_w = 1$ و $\gamma = 0.1, 1, 10$

به خوبی مطابقت دارند، حتی زمانی که f_w به اندازه‌ی پنج باشد.

۶.۴ تحلیل حدی

۱.۶.۴ تحلیل حدی برای مقادیر بزرگ f_w

معادلات (۲۳.۴) تا (۲۵.۴)، که از جایگذاری $f + f_w$ به جای f در معادلات (۱۲.۴) تا (۱۴.۴) بدست آمده‌اند را در نظر بگیرید. این معادلات به صورت زیر می‌باشند:



شکل ۶.۴: تغییرات $Nu_f Ra_x^{-1/2}$ (خطوط پیوسته) و $Nu_s Ra_x^{-1/2}$ (خطوط بریده) و حالت حدی $H \gg 1$ (نقطه چین) در مقابل $\log_{10} H$ برای موارد $f_w = -1$ و $\gamma = 0.1, 1, 10$

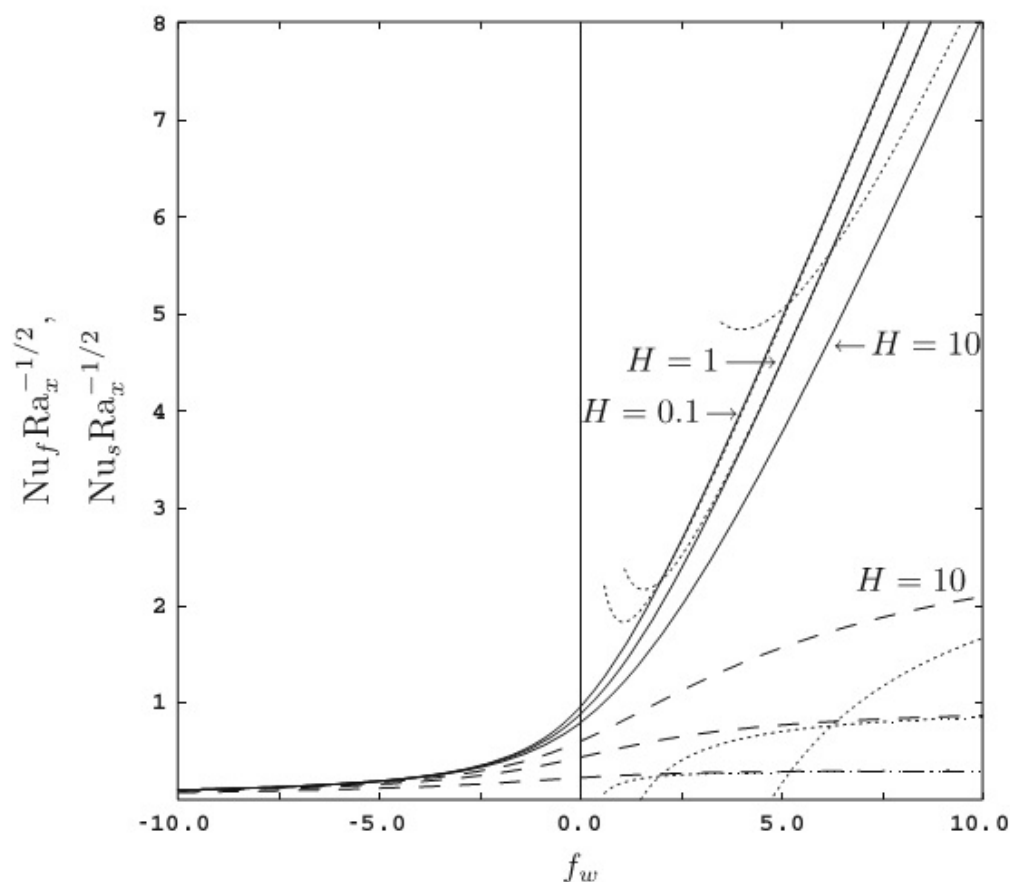
$$f'' = \theta', \quad (30.4)$$

$$\theta'' + f_w \theta' + f \theta' - f' \theta = H(\theta - \phi), \quad (31.4)$$

$$\phi'' = H\gamma(\phi - \theta) \quad (32.4)$$

و شرایط مرزی، همان شرایط مرزی معادله (۱۵.۴) است با این تفاوت که، در $\eta = 0$ شرط $f = 0$ برقرار است.

زمانی که f_w یک مقدار مثبت بزرگ باشد (مربوط به یک مقدار مکش قوی)، دو جمله حاکم در معادله (۳۱.۴) همان دو جمله اول هستند. نتایج تحلیل مقیاسی نشان می‌دهد که مقادیر مرتبط یا

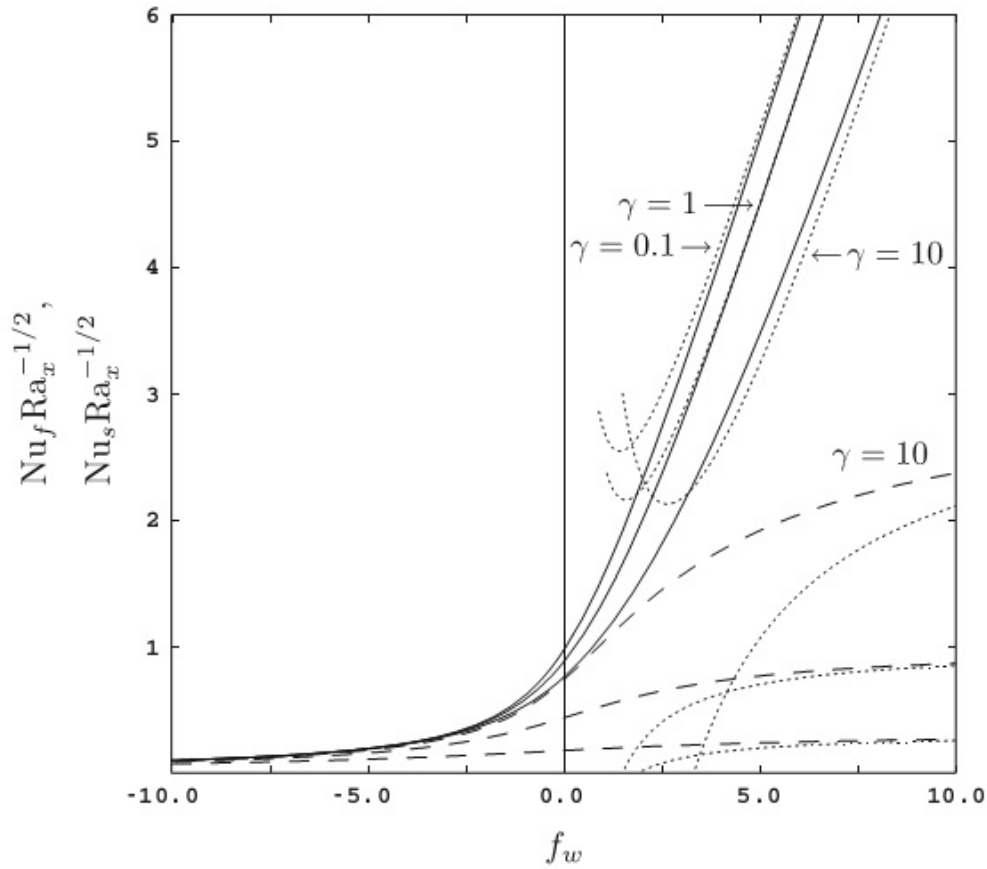


شکل ۷.۴: تغییرات $Nu_f Ra_x^{-1/2}$ (خطوط پیوسته) و $Nu_s Ra_x^{-1/2}$ (خطوط بریده) و حالت حدی $f_w \gg 1$ (نقطه چین) در مقابل f_w برای موارد $H = 0.1, 1, 10$ و $\gamma = 1$

مقیاس طولی از مرتبه $O(f_w^{-1})$ هستند (که همان ضخامت لایه مرزی فاز سیال است). یا به عبارت دیگر می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} &\sim f_w \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \rightarrow \\ \frac{\theta}{\delta_f^2} &\sim f_w \frac{\theta}{\delta_f} \rightarrow \delta_f \sim \frac{1}{f_w} \end{aligned}$$

از طرف دیگر، معادله (۳۲.۴) (دور از نواحی $\eta = O(f_w^{-1})$ نشان می‌دهد که برای فاز جامد، ضخامت لایه مرزی از مرتبه $O(1)$ است زیرا:



شکل ۸.۴: تغییرات $Nu_f Ra_x^{-1/2}$ (خطوط پیوسته) و $Nu_s Ra_x^{-1/2}$ (خطوط بریده) و حالت حدی $f_w \gg 1$ (نقطه چین) در مقابل f_w برای موارد $H = 1$ و $\gamma = 0.1, 1, 10$

$$\frac{\partial^p \phi}{\partial \eta^p} \sim \phi \rightarrow \frac{\phi}{\delta_s^p} \sim \phi \rightarrow \delta_s \sim 1$$

بنابراین می‌توان یک آنالیز حدی ارائه داد، وقتی، ناحیه داخلی با ضخامت $O(f_w^{-1})$ با ناحیه خارجی از مرتبه $O(1)$ ترکیب می‌شود.

می‌توان $\zeta = f_w \eta$ را به عنوان یک تغییر متغیر انتخاب کرد. بنابراین با این تغییر متغیر معادلات (۳۰.۴) تا (۳۲.۴) به صورت زیر در می‌آیند:

$$f_w \ddot{F} = \dot{\Theta}, \quad (۳۳.۴)$$

$$f_w^p(\ddot{\Theta} + \dot{\Theta}) + f_w(F\dot{\Theta} - \dot{F}\Theta) = H(\Theta - \Phi), \quad (۳۴.۴)$$

$$f_w^p\ddot{\Phi} = H(\Phi - \Theta), \quad (۳۵.۴)$$

که نقطه ”.“ مشتق نسبت به ζ است. معادلات (۳۰.۴) تا (۳۵.۴) با شرایط زیر قابل حل هستند:

$$\zeta = \circ : \quad F = \circ, \Theta = \Phi = ۱, \quad (۳۶.۴)$$

$$\eta \rightarrow \infty : \quad f', \theta, \phi \rightarrow \circ, \quad (۳۷.۴)$$

همه متغیرهای وابسته را می‌توان به حسب توابعی از η یا ζ بسط داد، به صورت یک سری توانی از $f_w^{-۱}$. با عملیات ریاضی می‌توان ثوابت را بدست آورد و نشان داد که برای ناحیه داخلی:

$$F(\zeta) \sim [1 - e^{-\zeta}] f_w^{-۱} + \left[\frac{H\gamma\zeta^p}{p} + \frac{H\zeta}{p} + H\gamma(1 - e^{-\zeta}) \right] f_w^{-p}, \quad (۳۸.۴)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\zeta) &\sim e^{-\zeta} + \left(\frac{H}{\gamma}\right)^{\frac{1}{p}} [1 - e^{-\zeta}] f_w^{-۱} \\ &+ \left[-H\zeta - (H+1)\zeta e^{-\zeta} + H\left(\frac{p\gamma-1}{p\gamma}\right)(1 - e^{-\zeta}) \right] f_w^{-p}, \end{aligned} \quad (۳۹.۴)$$

$$\Phi(\zeta) \sim 1 - [\sqrt{H\gamma}\zeta] f_w^{-۱} + \left[H\gamma\left(\frac{\zeta^p}{p} + 1 - e^{-\zeta}\right) + H\frac{\zeta}{p} \right] f_w^{-p}, \quad (۴۰.۴)$$

حال می‌توان معادلات (۳۹.۴) و (۴۰.۴) را برای تعیین تحلیلی مقادیر ناسلت استفاده کرد. (برای f_w بزرگ) بنابراین:

$$Nu_f Ra_x^{-\circ.۵} \sim f_w - \left(\frac{H}{\gamma}\right)^{\frac{1}{p}} + \left[1 + h + \frac{H}{p\gamma}\right] f_w^{-۱}, \quad (۴۱.۴)$$

$$Nu_s Ra_x^{-\circ.۵} \sim (H\gamma)^{\frac{1}{p}} - H\left(\gamma + \frac{1}{p}\right) f_w^{-۱}. \quad (۴۲.۴)$$

۲.۶.۴ تحلیل حدی برای مقادیر بزرگ H

در این قسمت می‌توان از معادلات (۳۰.۴) تا (۳۲.۴) استفاده کرد. مطابق مرجع ریز و پاپ [۴۴]، این ایده بدست می‌آید که در حالت LTNE، حل مسئله (برای H های بزرگ) را می‌توان به صورت

حل سری با توان‌های H^{-1} بدست آورد.
بر اساس آنالیز مقیاسی برای $H \gg 1$ انتظار می‌رود که:

$$\theta'' \sim H\theta \rightarrow \frac{\partial^p \theta}{\partial \eta^p} \sim H\theta \rightarrow \delta \sim H^{-\frac{1}{p}}$$

اسم این ناحیه را ناحیه داخلی می‌گذاریم.
بنابراین یک ناحیه با ضخامت $O(1)$ به عنوان لایه خارجی داریم و یک ناحیه در نزدیک دیواره به عنوان لایه داخلی نامگذاری می‌کنیم.
معادلات (۳۰.۴) تا (۳۲.۴) را می‌توان با دیدگاه حل سری به صورت زیر تحلیل کرد:

$$\begin{bmatrix} f \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} f_n \\ \theta_n \\ \phi_n \end{bmatrix} H^{-n} \quad (43.4)$$

با تعریف فوق حل معادلات به صورت زیر خواهد بود:

$$f \sim \frac{1 - e^{-\delta\eta}}{\delta} - \left[\frac{\delta^p}{\gamma(\gamma+1)\eta e^{-\delta\eta}} \right] H^{-1}, \quad (44.4)$$

$$\theta \sim e^{-\delta\eta} - \left[\frac{\delta^p}{\gamma(\gamma+1)} (1 - \delta\eta) e^{-\delta\eta} \right] H^{-1}, \quad (45.4)$$

$$\phi \sim e^{-\delta\eta} - \left[\frac{\delta^p}{\gamma(\gamma+1)} (1 - \delta\eta) e^{-\delta\eta} - \frac{\delta^p}{\gamma} e^{-\delta\eta} \right] H^{-1}. \quad (46.4)$$

که مقدار δ به صورت زیر استخراج شده است:

$$\delta = \frac{f_w + \sqrt{f_w^2 + 4\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)}}{p\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)}. \quad (47.4)$$

که با معادله (۲۸.۴) سازگار است. می‌توان تغییر متغیر زیر را با مقایسه جمله پخش و جمله چشمه/چاه در معادلات (۳۱.۴) و (۳۲.۴) به کار برد:

$$\zeta = H^{\frac{1}{p}} \eta, \quad (48.4)$$

و مشابه آنچه که گفته شد برای لایه داخلی داریم:

$$\theta \sim 1 - \delta \zeta H^{\frac{-1}{p}} + \left[-\frac{\delta^p}{\gamma(\gamma+1)}(1 - e^{-\sqrt{\gamma+1}\zeta} + \frac{\delta^p \zeta^p}{p}) \right] H^{-1} \quad (49.4)$$

$$\phi \sim 1 - \delta \zeta H^{\frac{-1}{p}} + \left[\frac{\delta^p}{\gamma} - \frac{\delta^p}{\gamma(\gamma+1)}(1 + \gamma e^{-\sqrt{\gamma+1}\zeta} + \frac{\delta^p \zeta^p}{p}) \right] H^{-1}, \quad (50.4)$$

و با استفاده از روابط داده شده برای اعداد ناسلت داریم:

$$Nu_f Ra_x^{-\omega} \sim \delta + \left(\frac{\delta^p}{\gamma \sqrt{\gamma+1}} \right) H^{\frac{-1}{p}}, \quad (51.4)$$

$$Nu_s Ra_x^{-\omega} \sim \delta - \left(\frac{\delta^p}{\sqrt{\gamma+1}} \right) H^{\frac{-1}{p}}. \quad (52.4)$$

فصل ۵

حل تشابهی معادلات انتقال حرارت در ماده متخلخل با تاثیرات دوگانگی غلظت

همان‌طور که در شکل ۱.۴ می‌بینید، صفحه عمودی غوطه‌ور در یک محیط متخلخل اشباع شده را، بررسی کرده‌ایم.

صفحه عمودی مورد نظر ممکن است نفوذپذیر ($v_w \neq 0$)، یا نفوذناپذیر ($v_w = 0$)، باشد. همچنین فرض شده است که، تغییرات دما و غلظت روی سطح این صفحه، دارای یک توزیع خطی باشند.

به عبارت دیگر:

$$T_w = T_\infty + Ax,$$

$$S_w = S_\infty + Bx,$$

که در معادلات بالا مقادیر T_∞ و S_∞ همان شرایط محیط دور از دیواره می‌باشند. A و B نیز مقادیر مثبتی هستند و می‌توانند مرتبط با یک صفحه گرم نفوذناپذیر باشند. خصوصیات سیال، به جز درجمله نیروی شناوری، ثابت فرض شده است.

۳.۰.۵ معادلات حاکم بر مسئله

معادلات حاکم بر مسئله حاضر، تاثیرات عدم تعادل حرارتی را شرح می‌دهند. همچنین فرض شده است که، جریان توسط مدل دارسی به خوبی شرح داده شود.

بنابراین معادل کامل لایه مرزی، برای جریان ویسکوز تراکم ناپذیر، به صورت زیر است :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (۱.۵)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{gK}{\nu} (\beta_T \frac{\partial T_f}{\partial y} + \beta_c \frac{\partial S}{\partial y}), \quad (۲.۵)$$

$$u \frac{\partial T_f}{\partial x} + v \frac{\partial T_f}{\partial y} = \epsilon \alpha_f \frac{\partial^p T_f}{\partial y^p} + \frac{h}{(\rho c_P)_f} (T_s - T_f), \quad (۳.۵)$$

$$(1 - \epsilon) \alpha_s \frac{\partial^p T_s}{\partial y^p} + \frac{h}{(\rho c_P)_s} (T_f - T_s) = 0, \quad (۴.۵)$$

$$u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = D_m \frac{\partial^p S}{\partial y^p}, \quad (۵.۵)$$

در معادلات بالا، u و v به ترتیب بردارهای سرعت در جهت‌های x و y هستند. T دما، ϵ تخلخل، ν ویسکوزیته حرکتی سیال، S ، غلظت، β_T ، ضریب انبساط حرارتی و β_c ضریب افزایش انتقال جرم می‌باشند. همچنین نفوذ جرم را می‌توان به صورت $D_m = \epsilon D$ نوشت. شرایط مرزی معادلات بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} T_f(x, 0) = T_w(x), & T_f(x, \infty) = T_\infty, \\ T_s(x, 0) = T_w(x), & T_s(x, \infty) = T_\infty, \\ S(x, 0) = S_w(x), & S(x, \infty) = S_\infty, \\ v(x, 0) = v_w(x), & u(x, \infty) = 0. \end{cases} \quad (۶.۵)$$

متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Psi = \alpha_f \epsilon Ra_{XT}^{\frac{y}{x}} f(\eta), & \eta = Ra_{XT}^{\frac{y}{x}} \left(\frac{y}{x} \right), & T = T_\infty + Ax \theta(\eta), \\ u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \epsilon \frac{\alpha_f}{x} Ra_{XT} f'(\eta), & v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\alpha_f}{x} \epsilon Ra_{XT}^{\frac{y}{x}} f(\eta), \\ \theta_f = \frac{T_f - T_\infty}{T_w - T_\infty}, & \theta_s = \frac{T_s - T_\infty}{T_w - T_\infty}, & \phi = \frac{S - S_\infty}{S_w - S_\infty}, \end{cases} \quad (۷.۵)$$

در معادلات بالا f ، f' ، θ و ϕ به ترتیب بی بعد شده‌ی، تابع مکش، سرعت عمودی، دما و غلظت می‌باشند. همچنین عدد رایلی حرارتی محلی و عدد لوئیس به صورت زیر می‌باشند:

$$Ra_{XT} = gK\beta_T(T_w - T_\infty)\frac{x}{\nu\epsilon\alpha_f} = gK\beta_TA\frac{x^p}{\nu\epsilon\alpha_f}$$

$$Le = \frac{\alpha_f}{D},$$

با جایگذاری معادلات (۷.۵) در معادلات (۲.۵) تا (۵.۵) به معادلات زیر می‌رسیم:

$$f'' = \theta'_f + \phi' N, \quad (۸.۵)$$

$$\theta''_f + H(\theta_s - \theta_f) = f'\theta_f - f\theta'_f, \quad (۹.۵)$$

$$\theta''_s + H\gamma(\theta_f - \theta_s) = 0, \quad (۱۰.۵)$$

$$\phi'' = -Le(f\phi' - f'\phi). \quad (۱۱.۵)$$

مقادیر $H = \frac{hx^p}{\epsilon k_f Ra_{XT}}$ و $\gamma = \frac{\epsilon k_f}{(1-\epsilon)k_s}$ به ترتیب، نسبت ضرائب موثر هدایت حرارتی دو فاز سیال و جامد و ضریب انتقال حرارت بی‌بعد در مقیاس حفره می‌باشند. همچنین $N = \frac{\beta_C(S_w - S_\infty)}{\beta_T(T_w - T_\infty)}$ ، نسبت شناوری است.

با اعمال تغییر متغیرهای بالا شرایط مرزی نیز به شکل زیر تغییر می‌کنند:

$$\begin{cases} \theta_f(\eta = 0) = 1, & \theta_f(\eta = \infty) = 0, \\ \theta_s(\eta = 0) = 1, & \theta_s(\eta = \infty) = 0, \\ \phi(\eta = 0) = 1, & \phi(\eta = \infty) = 0, \\ f(\eta = 0) = f_w, & f'(\eta = \infty) = 0. \end{cases} \quad (۱۲.۵)$$

سرعت مکش یا دمش بر روی دیواره، به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$v_w = -\frac{\alpha_f}{x} \epsilon Ra_{XT}^{\frac{p}{2}} f_w. \quad (۱۳.۵)$$

مقدار $f(0) = f_w$ ، متغیر بی‌بعد شده مکش/دمش می‌باشد. مقدار $f_w = 0$ مرتبط با صفحه نفوذ ناپذیر است در حالی که مقدار مثبت (منفی) f_w مربوط به مکش (دمش) است. همچنین دبی جرمی و شار گرمایی برای فازهای سیال و جامد به‌صورت زیر است:

$$m = -D \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad q_f = -k_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad q_s = -k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (۱۴.۵)$$

که در روابط بالا k ، رسانش گرمایی است.
با استفاده از معادلات (۷.۵) و روابط بالا به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{cases} m = -D(S_w - S_\infty)\phi'(\bullet)\frac{Ra_{XT}^{\bullet\bullet}}{x}, \\ q_f = -k_f(T_w - T_\infty)\theta'_f(\bullet)\frac{Ra_{XT}^{\bullet\bullet}}{x}, \\ q_s = -k_s(T_w - T_\infty)\theta'_s(\bullet)\frac{Ra_{XT}^{\bullet\bullet}}{x}. \end{cases} \quad (15.5)$$

همچنین اعداد شروود، ناسلت محلی برای فازهای سیال و جامد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Sh = \frac{mx}{D(S_w - S_\infty)}, \quad Nu_f = \frac{q_fx}{k_f(T_w - T_\infty)}, \quad Nu_s = \frac{q_sx}{k_s(T_w - T_\infty)}, \quad (16.5)$$

به‌طور مشابه به کمک معادله (۱۵.۵)، می‌توانیم معادله (۱۶.۵) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{Sh}{Ra_{XT}^{\bullet\bullet}} = -\phi'(\eta = \bullet), \quad \frac{Nu_f}{Ra_{XT}^{\bullet\bullet}} = -\theta'_f(\eta = \bullet), \quad \frac{Nu_s}{Ra_{XT}^{\bullet\bullet}} = -\theta'_s(\eta = \bullet), \quad (17.5)$$

و سرعت سیال نیز به صورت می‌باشد:

$$v_w = -\frac{\alpha_f}{x}\epsilon Ra_{XT}^{\bullet\bullet} f(\infty). \quad (18.5)$$

۴.۰.۵ نتایج و تحلیل‌ها

در این بخش نتایج عددی خود را برای مدل عدم تعادل حرارتی ارائه داده، و فرض می‌کنیم که پنج پارامتر، N ، Le ، γ ، H ، f_w تغییر کنند.

اثرات تغییر پارامتر مکش/دمش بر روی پروفیل حرارت و غلظت بی‌بعد در شکل ۱.۵، برای $N = H = \gamma = 1$ آمده است. افزایش پارامتر مکش/دمش یعنی، f_w ، سبب کاهش ضخامت لایه مرزی حرارتی می‌شود. به لحاظ ریاضی مقدار f ، با افزایش f_w ، افزایش یافته و این منجر به کاهش نمایی سریع‌تر، در میدان حرارتی سیال و غلظت می‌شود.

خطوط بریده در شکل متناظر با فاز جامد بوده در حالی که خطوط پیوسته متناظر با فاز سیال است. دمای فاز جامد برای همه مقادیر γ ، f_w و H ، بزرگتر یا مساوی با فاز سیال است، چرا که، به‌طور مستقیم متاثر از حضور مکش نمی‌باشد.

پروفیل حرارتی بی بعد برای هر دو فاز سیال و جامد در شکل ۲.۵ برای $H = 100$ نشان داده شده است، که نسبتاً مقدار بزرگی است. در حالت کلی افزایش پارامترهای H و γ به اندازه کافی سبب کاهش اختلاف دمای بین فازهای سیال و جامد می شود. در مورد حاضر دو دامنه دما به صورت شکلی قابل تمایز نمی باشند، از این رو این مورد با، تعادل حرارتی محلی، متناظر است. تغییرات H در مقابل اعداد ناسلت در شکل ۳.۵ برای مقادیر متفاوت γ نشان داده شده است. سه شکل متفاوت نشان داده شده، متناظر با سه مقدار متفاوت پارامترهای دمش/مکش، می باشند.

با افزایش H به سمت تعادل حرارتی نزدیک می شویم، به گونه ای که عدد ناسلت دو فاز به هم نزدیک می شوند. از طرف دیگر با کاهش H ، اعداد ناسلت برای فاز سیال به سمت یک مقدار یکسان، که مستقل از γ است، میل می کند. این به این دلیل است که فاز سیال به طور موثر مستقل از حضور فاز جامد در این حد می باشد. بعلاوه اینکه کاهش در مقادیر H به معنی این است که، ضخامت لایه مرزی دمای فاز جامد افزایش پیدا می کند، که متناظر است با اینکه، عدد ناسلت به سمت صفر در این حد میل نماید.

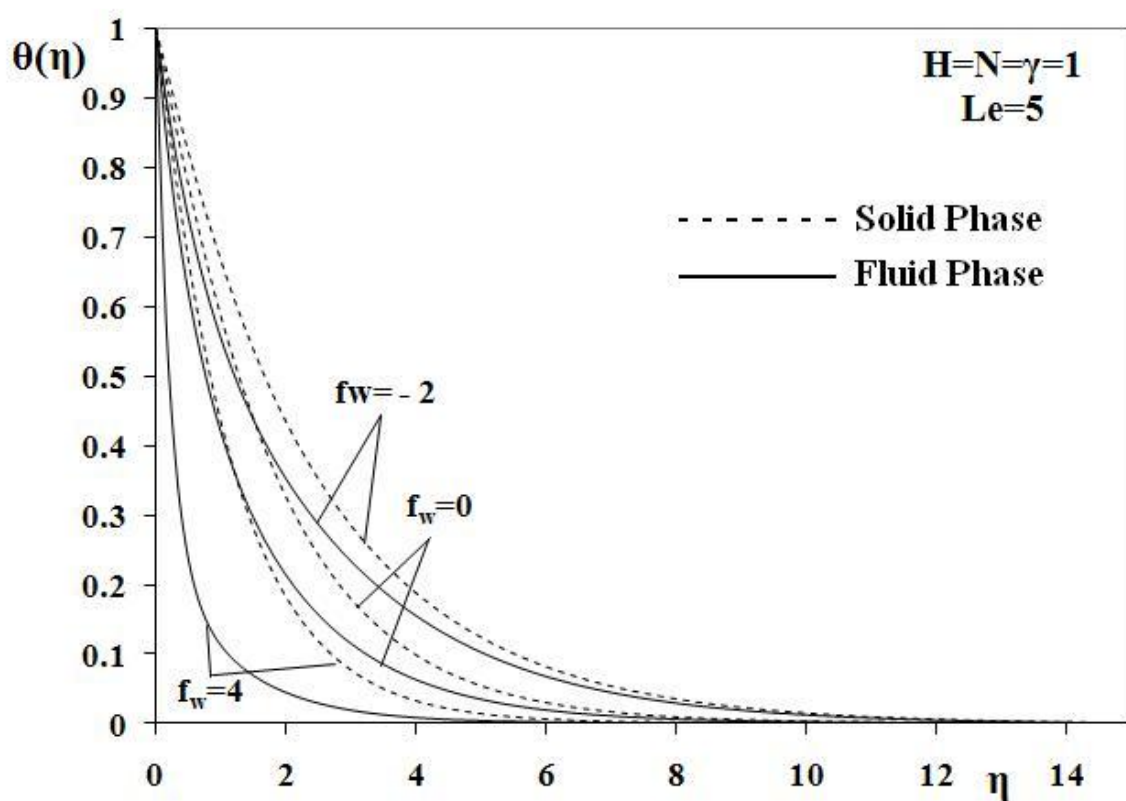
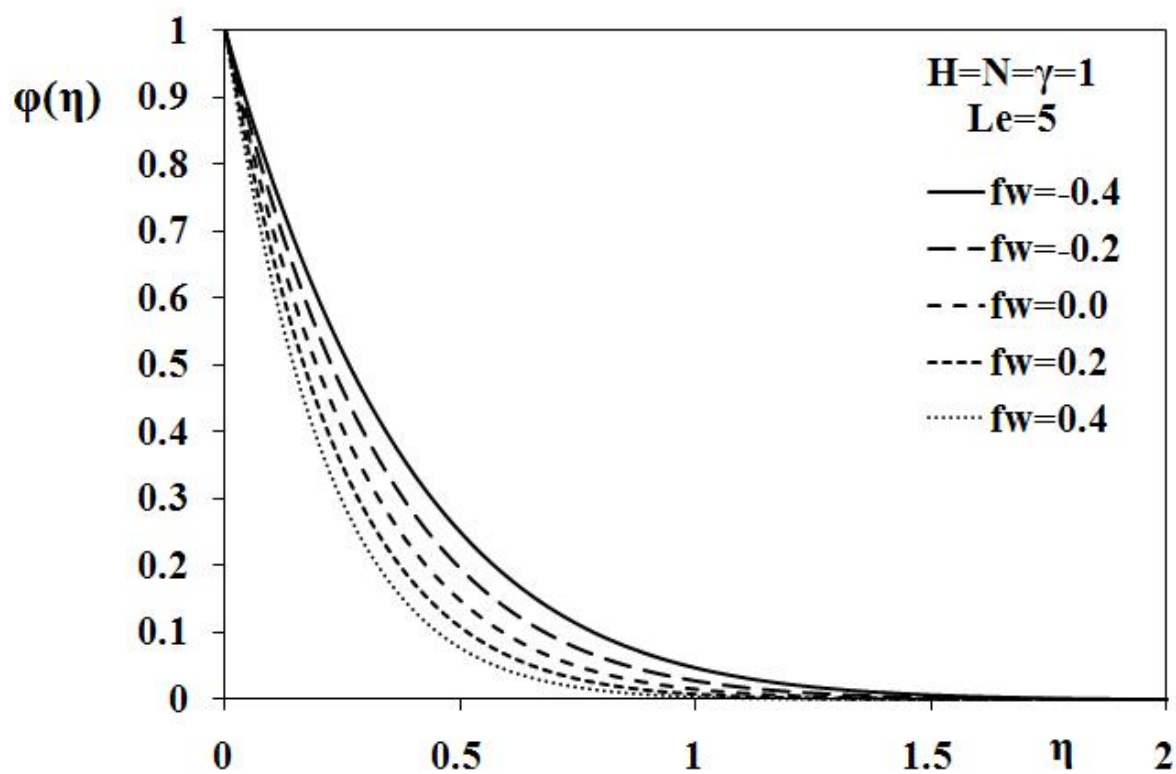
اثر تغییرات پارامتر γ بر روی مقادیر عدد ناسلت در شکل ۴.۵ نشان داده شده است. همان طور که در شکل دیده می شود، نتایج برای مقادیر مختلف دمش/مکش ارائه شده است. افزایش پارامتر γ منجر به بزرگ شدن عدد ناسلت محلی برای هر دو فاز سیال و جامد می شود و در این حالت به سمت تعادل حرارتی حرکت می کنیم. از طرف دیگر مقادیر کوچک γ منجر به استقلال فاز جامد از فاز سیال می شود (از دیدگاه حرارتی). بنابراین حرارت بسیار راحت تر از سطح انتقال می یابد و ضخامت لایه مرزی فاز جامد افزایش و عدد ناسلت آن کاهش پیدا می کند. مقادیر بزرگ H نزدیک شدن به LTE را شتاب می بخشد.

مقادیر متفاوت پارامتر دمش/مکش سبب تغییر در ضخامت لایه مرزی با اثر مناسب بر روی عدد ناسلت می شود. از شکل ۴.۵ مشخص است که دمش منجر به کاهش عدد ناسلت شده است. همچنین یادآوری می کنیم که در همه موارد عدد ناسلت محلی برای فاز سیال بزرگتر از عدد ناسلت محلی برای فاز جامد است. دلیل آن این می باشد که سطوح داغ، سیال را به داخل لایه مرزی کشانده، که مستقیماً اثر محدود کننده بر روی میدان حرارتی فاز سیال دارد.

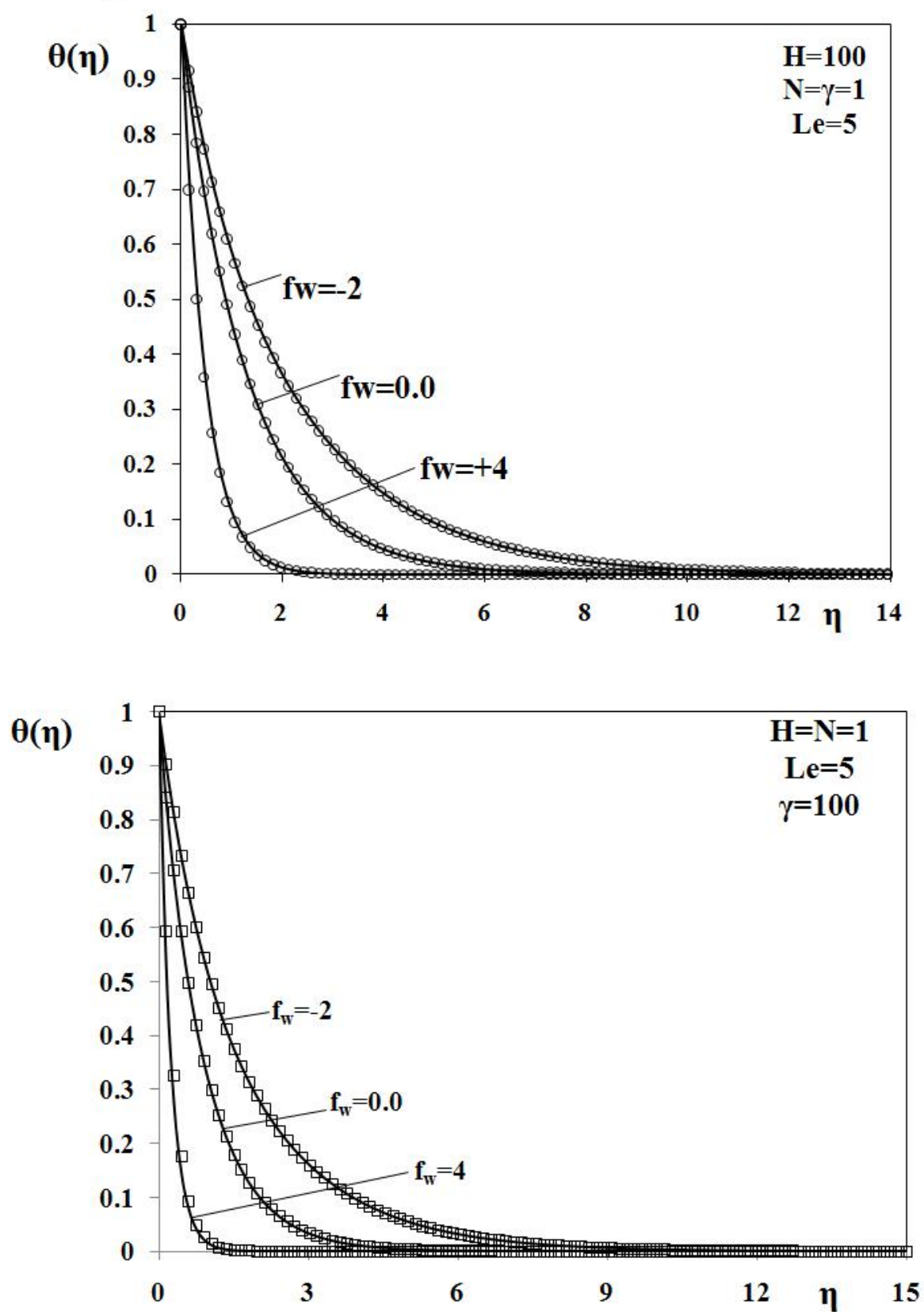
در شکل ۵.۵ نتایج برای مقادیر مختلف دمش/مکش و عدد لوئیس نشان داده شده است دو مقدار حدی برای H و γ ($H, \gamma = 1 \text{ and } 100$) در شکل نشان داده شده است. عدد شروود نسبت انتقال جرم همرفتی به پخشی را نشان می دهد. افزایش هر یک از مقادیر f_w یا Le سبب افزایش در انتقال جرم همرفت نسبت به انتقال پخشی می شود و بنابراین مقدار $ShRa_x^{-0.5}$ افزایش پیدا خواهد کرد. همان طور که در این شکل نشان داده شده است تغییرات در H یا γ اثر معناداری بر روی

مقدار $ShRa_x^{-0.5}$ ندارد.

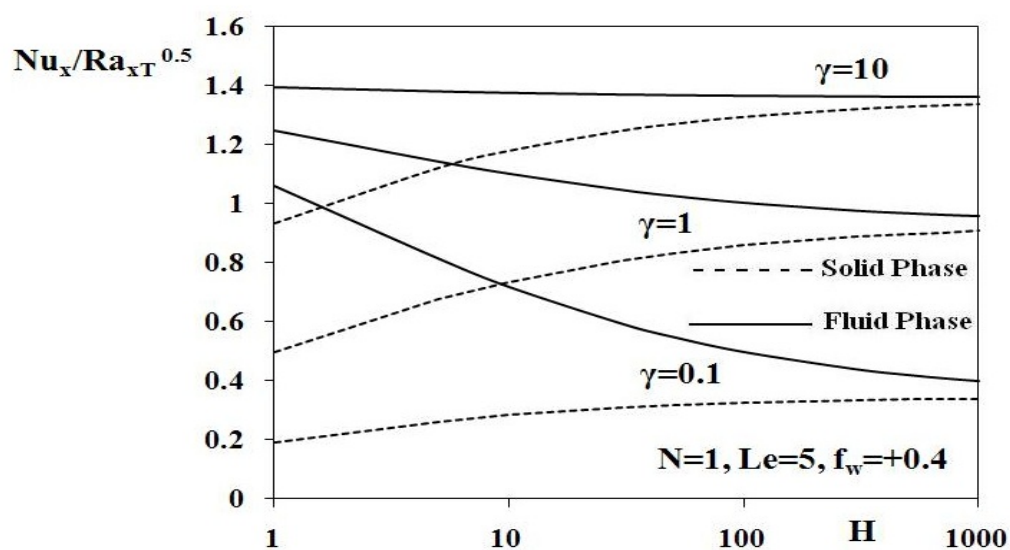
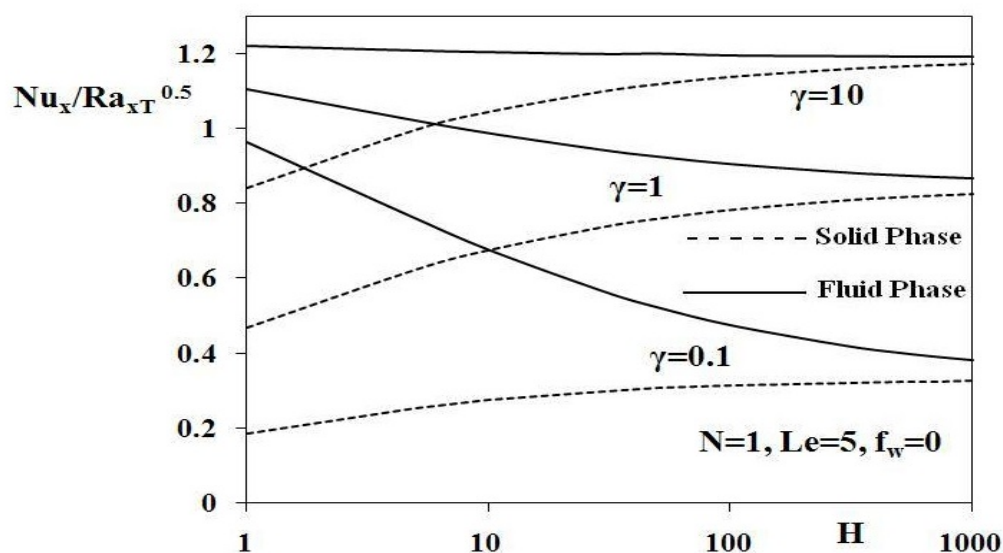
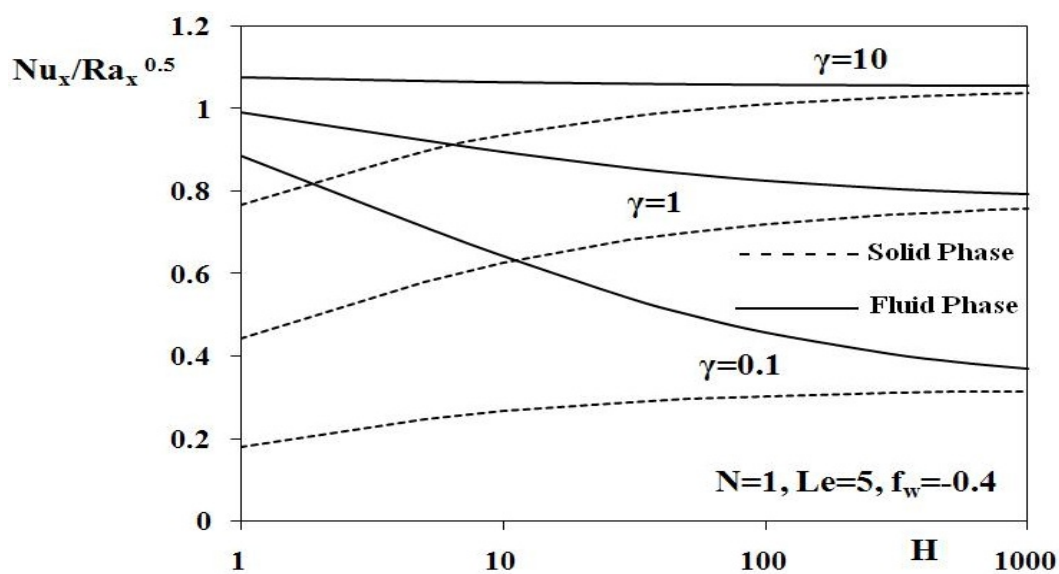
اثرات تغییر نسبت شناوری بر روی اعداد ناسلت برای مقادیر متفاوت H و γ در شکل ۶.۵ نشان داده شده است. نتایج به وضوح نشان می‌دهند که افزایش آن سبب رشد عدد ناسلت می‌شود و این پاسخ مستقیم به یک افزایش نیروی شناوری است که در معادله (۸.۵) آمده است. به هر حال مشاهده می‌شود که مقادیر بزرگ افزایشی H یا γ منجر به کاهش اثرات LTNE شده و لایه های شناوری با افزایش این پارامترها نازکتر می‌گردند که این امر سبب رشد عدد ناسلت برای همه مقادیر ثابت N می‌گردد.



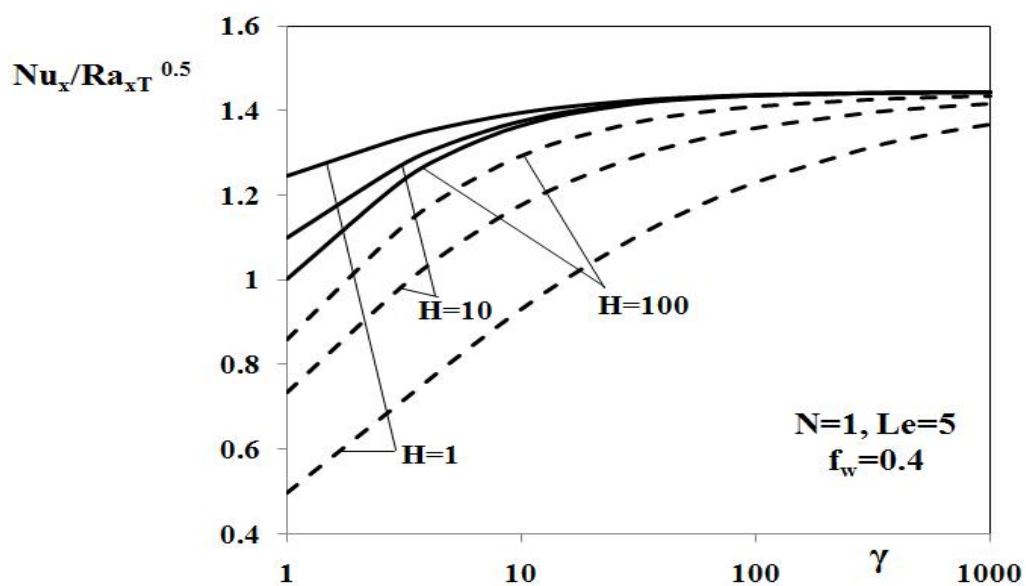
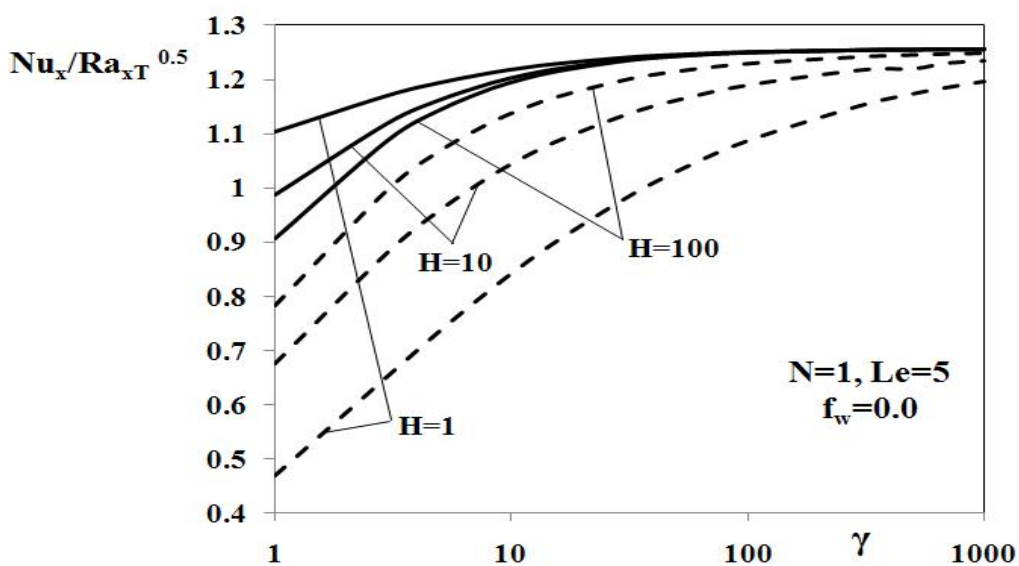
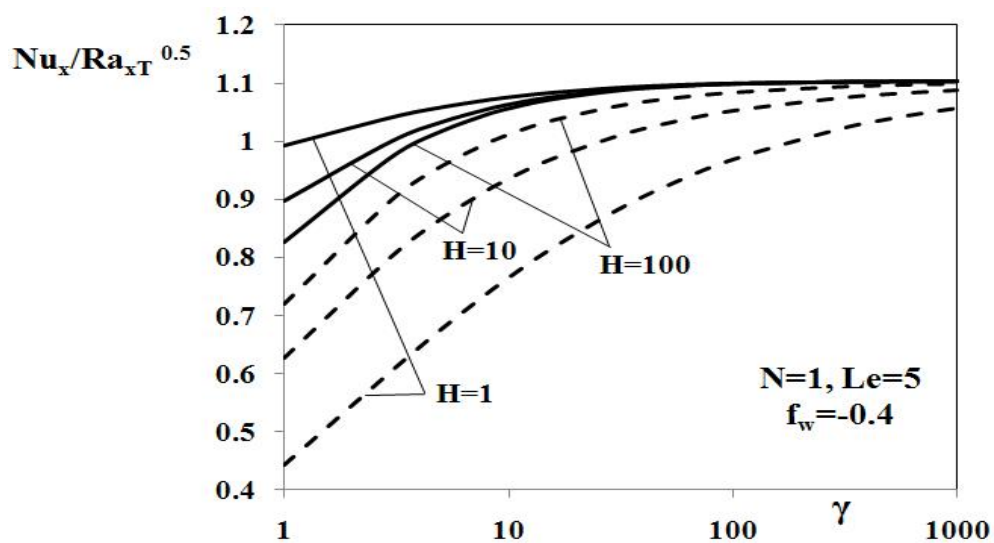
شکل ۱.۵: اثرات f_w بر روی ϕ (شکل بالا) و θ (شکل پایین) برای حالت $\gamma = H = N = 1$



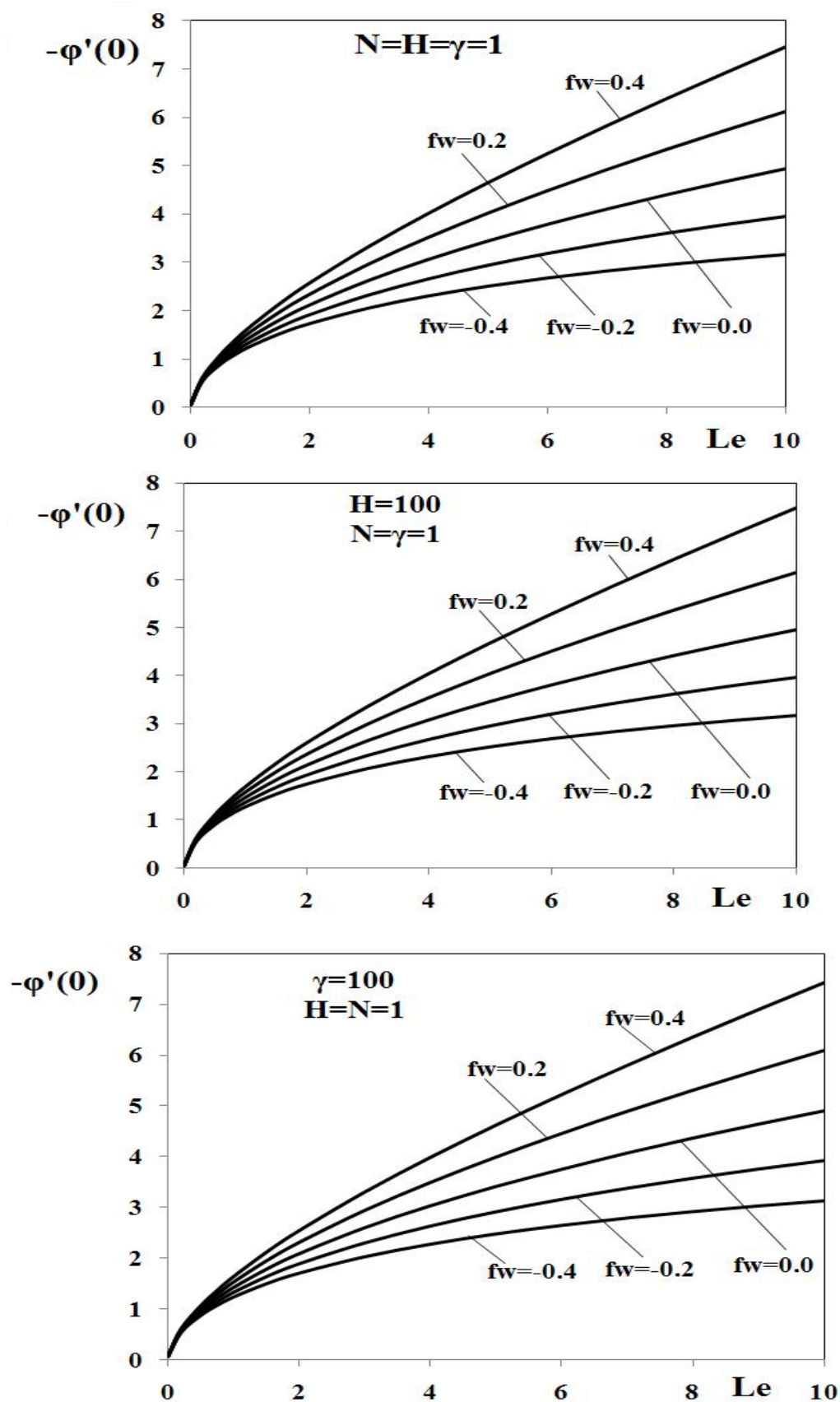
شکل ۲.۵: اثرات تغییرات f_w بر روی پروفیل دما برای مقادیر بزرگ H و مقادیر بزرگ γ



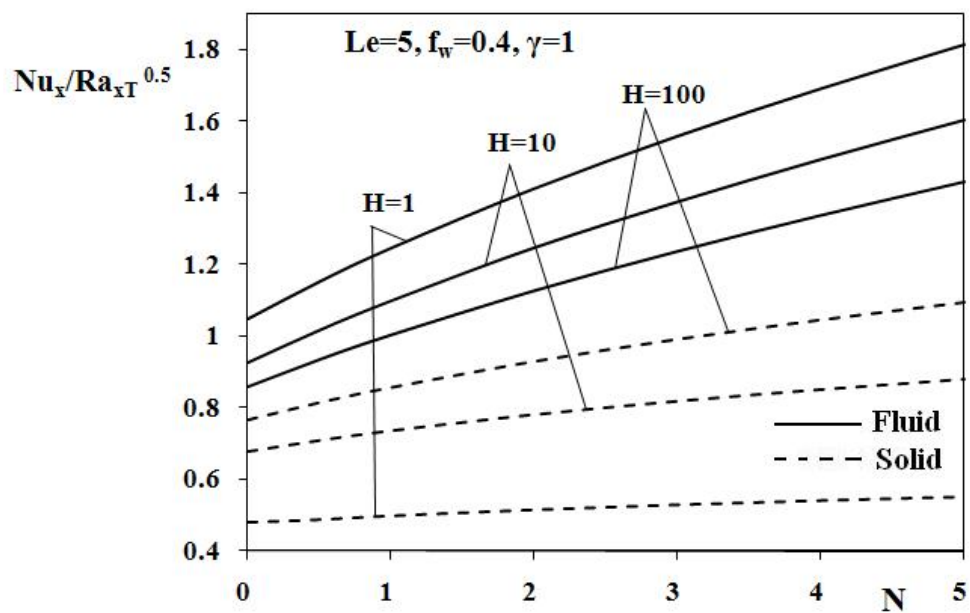
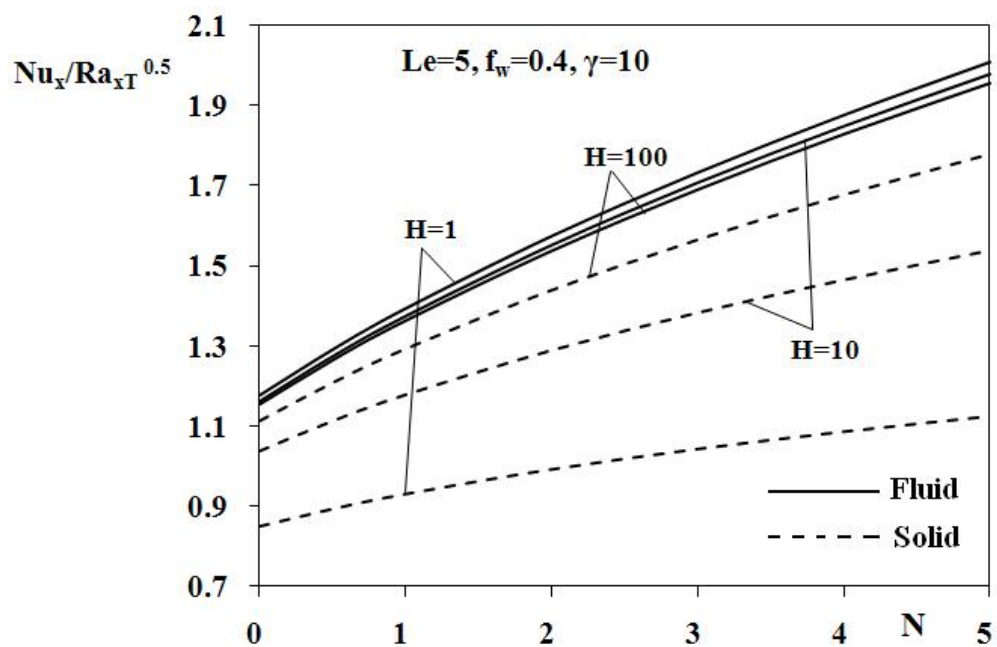
شکل ۳.۵: تغییرات عدد ناسلت محلی در مقابل H برای مقادیر مختلف γ و f_w برای فازهای سیال و جامد



شکل ۴.۵: تغییرات عدد ناسلت محلی در مقابل γ برای مقادیر مختلف H و f_w برای فاز سیال (خطوط پیوسته) و فاز جامد (خطوط بریده)



شکل ۵.۵: تاثیرات مقادیر مختلف H ، γ ، و f_w و عدد لوئیس بر روی عدد شروود



شکل ۶.۵: اثرات تغییرات N ، γ و H بر روی عدد ناسلت

پیوست آ

نمایش کدهای *MATLAB*

آ.۱ نمایش کدهای *MATLAB* برای معادلات حاکم

در این جا کدهای *MATLAB* معادلات حاکم بر مسئله، برای به دست آوردن نتایج عددی فصل های ۴ و ۵، آورده شده است.

```
function dy=B11(x,y)
    dy = zeros(8,1);    % (a column vector)
    global H;
    global gama;
    global fw;
    Le=5;
    N=0;
    n=0;
    Ra=100;
    dy(1) = y(2);
    dy(2) =y(4)+N*y(8);
    dy(3) =y(4);
    dy(4) = (-y(1)*y(4)+y(2)*y(3)-H*(y(5)-y(3))-n*y(4)*(y(4)+N*y(8)))/(1+n*y(2));
    dy(5) =y(6);
```

```
dy(6) = -H*gama*(y(3)-y(5));
dy(7)=y(8);
dy(8) = -Le*(y(1)*y(8)-y(2)*y(7));
```

۱.۱.آ کدهای مربوط به خطا

در این جا کدهای *MATLAB* ای را که خطای تکنیک پرتابی تلفیق شده با روش رانگ کوتای مرتبه چهارم را محاسبه می کند، قرار داده ایم:

```
function res = B22(ya,yb)
    global fw;
    global H;
    global gama;
    res =[ya(3)-1
          yb(3)
          ya(1)-fw
          yb(2)
          ya(5)-1
          yb(5)
          ya(7)-1
          yb(7)];
```

۲.۱.آ کدهای مربوط به نمایش نتایج

در این جا یک نمونه از کد *MATLAB* ای که، نتایج حاصل از مقایسه روش عددی با روش تحلیلی حدی است را، آورده ایم:

```
clc;
clear all;
global fw;
global H;
global gama;
```

```

H=0.1;
gama=1;
c=1;
for fw=5:0.02:6
    solinit = bvpinit(linspace(0,20,200),[0 0 0 0 0 0 0 0]);
    sol = bvp4c(@B11,@B22,solinit);
    %x=linspace(0,20,200);
    x=0;
    y = deval(sol,x);
    x=x';
    y=y';
    y_f_ap=-fw+((H/gama).^0.5)-(1+H+(H/(2.*gama))).*((fw).^(-1));
    y_s_ap=-(H.*gama)^0.5+(H.*(1+(gama/2))).*((fw)^(-1));
    hold on
    plot(fw,-y(:,4))
    hold on
    plot(fw,-y_f_ap,'r')
    hold on
    plot(fw,-y(:,6))
    hold on
    plot(fw,-y_s_ap,'r')
    y;
    dama(c,1)=fw;
    dama(c,2)=-y(:,4);
    dama(c,3)=-y_f_ap;
    writeExel('dama.xls',dama)
    damas(c,1)=fw;
    damas(c,2)=-y(:,6);
    damas(c,3)=-y_s_ap;

```

```
%damas(:,2)=-y_ap;
%damas(:,1)=fw;
writeExel('damas.xls',damas)
c=c+1;
end
res

function writeExel(fileName,mat)
    fp=fopen(fileName,'wt');
    for i=1:size(mat,1)
        for j=1:size(mat,2)
            fprintf(fp,num2str(mat(i,j)));
        end
        fprintf(fp,'\t');
    end
    fprintf(fp,'\n');
end
fclose(fp)
```

مراجع

- [1] Hung, P. C., and Vafai, K., (1993), *Flow and heat transfer control over an external surface using a porous block arrangement*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 36, pp.4019–4032.
- [2] Targui, N., and Kahalerras, H., (2008), *Analysis of fluid and heat transfer in a double pipe heat exchanger with porous structures*, Energ Convers Manage, 49, pp.3217–3229.
- [3] Bouhadeh, K., Chikh, S., and Lauria, G., (1999), *Effect of porous substrate addition on heat exchanger efficiency*, Trans J.Mesh E, 99, pp.13–8.
- [4] Al-kam, M. K., and Al-Nimr, M. A., (1999), *performance of double pipe heat exchanger by using porous substructure*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 42, pp.3609–3618.
- [5] Trimis, D. , and Drast, F., (1996), *Combustion in a porous media – advances and applications*, Combust Sci Technical, 121, pp.68–133.
- [6] Oliveria, A. A. M., and Kaviani, M., (2001), *Nonequilibrium in the transport of heat and reactants during combustions in porous media*, Prog.Energy Combust Sci, 27, pp.523–545.
- [7] Kaviani, M., (1995), *Principle of Heat Transfer in Porous Media*, New York:Second ed., Springer-Verlag.
- [8] Vafai, K., (2005), *Handbook of Porous Media*, Boca Raton: Ψ^{nd} ed., Taylor and Francis.
- [9] Nield, D. A., Bejan, A., (2006), *Convection in porous Media*, New York: Ψ^{rd} ed., Springer.
- [10] Ingham, D. B., Pop, I., (2005), *Transport Phenomena in Porous Media III*, Elsevier, Oxford.
- [11] Baytas, A. C., Pop, I., (2002), *Free Convection in a square porous cavity using a thermal nonequilibrium model*, J.of thermal Sciences, Vol.41, pp.861–870.
- [12] Baytas, A. C., (2003), *Thermal non-equilibrium natural convection in a square enclosure filled with a heat –generating solid phase, non-darcy porous media*, J.of Energy Research, Vol.27, pp.975–988.

- [13] Sathiyamoorthy M., Basak Tanmay Roy S. Pop I., (2007), *Steady natural convection flow in a square cavity filled with a porous medium for linearly heated side wall(s)*, J.of Heat and Mass Transfer, Vol.50, pp.1892–1901.
- [14] Varol, Y., Oztop, H. F., Pop, I., (2008), *Numerical analysis of natural convection for a porous rectangular enclosure with sinusoidally varying temperature profile on the bottom wall*, J.of Heat and Mass Transfer, Vol.35, pp.56–64.
- [15] Patankar, S. V., Spalding, D. B., (1972), *A calculation of heat mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows*, Int.J.of Heat MassTrans, Vol.15, pp.1787–1797.
- [16] Al-Farhang .K., Turan .A., (2012). *Numerical Study of double diffusive natural convection heat and mass transfer in an inclined rectangular cavity filled with porous medium*, Int.J.of Heat MassTrans, Vol.39, pp.174–181.
- [17] Nguyen Quang, T., (2008), *Onset of gravitactic bioconvection in a square anisotropic porous medium with arbitrary orientation of the principal axes*, Int.J.of Heat MassTrans, Vol.51, pp.1497–1504.
- [18] Gobin, D., Goyeau, B., Songbe, J. P., (1998), *Double diffusive natural convection in a composite fluid porous layer* J.of Heat Tansfer, Vol.120, pp.234–242.
- [19] Baytas, A. C., Liaqat, A., Grosan, T., Pop, I., (2001), *Conjugate natural convection in a square porous cavity*, J.of Heat and Mass Transfer, Vol.37, pp.467–473.
- [20] Liaqat, A., Baytas, A. C., (2001), *Conjugate natural convection in a square enclosure containing volumetric sources*, J.of Heat and Mass Transfer, Vol.44, pp.3273–3280.
- [21] Oztop, H., Bilgen, E., (2006), *Natural convection differentially heated and partially divided square cavities with internal heat generation*, J.of Heat and Fluid Flow, Vol.27, pp.466–475.
- [22] Prasad, B., Narasimhan, A., Rees, A., (2006), *Natural convection heat transfer enhancement using adiabatic block: Optimal block size and Prandtl number effect*, J.of Heat and Mass Transfer, Vol.49, pp.3807–3818.
- [23] Nawaf, H.Saeid, (2007), *Conjugate natural convection in a vertical porous layer sandwiched by finite thickness walls*, J.of Heat and Mass Transfer, Vol.34, pp.210–216.
- [24] Nawaf, H.Saeid, (2008), *Conjugate natural convection in a enclosure sandwiched by finite walls under thermal nonequilibrium conditions*, J.of Porous Media, Vol.11, pp.259–275.
- [25] Abdalla Al-Amiri Khalili Khanafer, Pop, I., (2008), *Steady –State conjugate natural convection in a fluid –saturated porous cavity*, J.of Heat and Mass Transfer, Vol.51, pp.4260–4275.
- [26] Baytas, A. C., Baytas, A.F., Ingham, D.B., Pop, I., (2009), *Double diffusive natural convection in an enclosure filled with a step type porous layer: Non-Darcy flow*, Int.J.of thermal Sciences, vol.48, pp.665–673.

- [27] Chen, X., B Yu, P., Sui, Y., Winoto, S. H., Low H. T., (2009), *Natural Convection in a Cavity Filled with Porous Layers on the Top and Bottom Walls*, J.Transp.porous media, vol.78, pp.259–276.
- [28] Aydin, O., Yang, W.J., (2000), *Natural convection in enclosures with localized heating from below and symmetrical cooling from sides*, int .J.of Numerical Methods for Heat and Flow, Vol.10, pp.518–529.
- [29] Sarris, I. E., Lekakis, I., Vlachos, N. S., (2004), *Natural convection in rectangular tanks heated locally from below*, Int.J.of Heat and Mass Transfer, vol.47, pp.3549–3563.
- [30] Nader, B. Ch., Brahim, B. B., Taieb, L., (2007), *Influence of thermal boundry condition on natural convection in a square enclosure partially heated from below* J.of Heat and Mass Transfer, vol.34, pp.369–379.
- [31] Qi-Hong deng., (2008), *Fluid flow and heat transfer characteristics of natural convection in square cavities due to discrete source-sink pairs*, J.of Heat and Mass Transfer, vol.51, pp.5949–5957.
- [32] Prudhomme, M., Jasmin, S., (2003), *Determination of a heat source in porous medium with convective mass diffusion by an inverse method* Mass Transfer, International Journal of Heat and Mass Transfer, 2065–2075.
- [33] Krishna, D., Basak, T., Das, K., (2008), *Natural Convection in a heat generation hydrodynamically and thermally anisotropic non-Darcy Porous medium*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 51, pp.4691–4703.
- [34] Larsen, K.L., McCartney, D.M., (2000), *Effect of C:N ratio on microbial activity and N retention:bench-scale study using pulp and paper biosolids*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 147–159.
- [35] Prudhomme, M., Jasmin, S., (2006), *Inverse solution for a biochemical heat source in a porous medium in the presence of naturalconvection*, Chemical Engineering Science, 1667–1675.
- [36] Jasmin, S., Prudhomme, M., (2003), *Inverse determination of a heat source from a solute Concentration generation model in porous medium*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 43–53.
- [37] Cheng, P., and Minkowycz, W.J. Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike. *J. Geophys. Res.*, **82**, 2040–2044 (1977)
- [38] Cheng,P., Chang,I.-D. :*On buoyancy induced flows in a saturated porous medium adjacent to impermeable horizontal surfaces*. Int.J.Heat Mass Transf. 19, 1267–1272 (1976)

- [39] Rees, D.A.S., Bassom, A.P., Siddheshwar, P.G. :*Local thermal non-equilibrium effects arising from the injection of a hot fluid into a porous medium.*J. Fluid Mech. 594, 379–398(2008)
- [40] Rees, D.A.S., and Bassom, A.P. The radial injection of a hot fluid into a cold porous medium: the effects of local thermal non-equilibrium. *Computational Thermal Sciences* , 2(3), 221–230 (2010)
- [41] Baytas, A.C., and Pop, I. Free convection in a square porous cavity using a thermal nonequilibrium model. *International Journal of Thermal Sciences*, **41**, 861–870 (2002)
- [42] Mohamad, A.A. Nonequilibrium natural convection in a differentially heated cavity filled with a porous matrix. *Trans ASME J. Heat Transfer*, **122**, 380–384 (2000)
- [43] Combarous, M., and Bories, S. Modelisation de la convection naturelle au sein d’une couche poreuse horizontale l’aide d’un coefficient de transfert solide-fluide. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **17**, 505–515 (1974)
- [44] Rees, D.A.S, and Pop, I. Vertical free convective boundary-layer flow in a porous medium using a thermal nonequilibrium model. *Journal of Porous Media* , **3**, 31–44 (2000)
- [45] Rees, D.A.S. Vertical free convective boundary-layer flow in a porous medium using a thermal nonequilibrium model: elliptical effects. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, **54**, 437–448 (2003)
- [46] Rees, D.A.S., and Pop, I. *Local thermal nonequilibrium in porous medium convection. In: Transport Phenomena in Porous Media III* (D.B. Ingham and I. Pop, eds.), Pergamon, Oxford, U.K., 147–173 (2005)
- [47] Kuznetsov, A.V. *Thermal nonequilibrium forced convection in porous media. In: Transport Phenomena in Porous Media* (D.B. Ingham and I. Pop, eds.), Pergamon, Oxford, U.K. (1998)
- [48] Cheng, P. The influence of lateral mass flux on free convection boundary layers in a saturated porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **20**, 201–206 (1977)
- [49] Gupta, P.S., and Gupta, A.S. Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing. *Canad. J. Chem. Engng*, **55**, 744–746 (1977)
- [50] Magyari, E., Keller, B. Exact analytical solutions for free convection boundary layers on a heated vertical plate with lateral mass flux embedded in a saturated porous medium. *Heat and Mass Transfer*, **36**, 109–116 (2000)
- [51] Ali, M.E. The effect of lateral mass flux on the natural convection boundary layers induced by a heated vertical plate embedded in a saturated porous medium with internal heat generation. *International Journal of Thermal Sciences*, **46**, 157–163 (2007)

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Natural Convection	انتقال گرمای طبیعی
Non-Dimensional	بدون بعد
Dimensional	بعدی
Analytical	تحلیلی
Porosity	تخلخل
Equilibrium	تبادل
LTE	تبادل حرارتی محلی
Approximation	تقریب
Darcy Flow	جریان دارسی
Density	چگالی
Asymptotic	حدی
Local Thermal	حرارت محلی
Similarity Solution	حل تشابهی
Injection	دمش
Blow	دمیدن

Velocity	سرعت
Heat Flux	شار گرمایی
Thickness	ضخامت
Coefficient of Thermal Expansion	ضریب انبساط حرارتی
Numerical	عددی
Non-Equilibrium	عدم تعادل
LTNE	عدم تعادل حرارتی محلی
Solid Phase	فاز جامد
Fluid Phase	فاز سیال
Boundary Layer	لایه مرزی
Porous Medium	محیط متخلخل
Suction	مکش
Permeable	نفوذپذیر
Impermeable	نفوذناپذیر

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Analytical	تحلیلی
Approximation	تقریب
Asymptotic	حدی
Blow	دمیدن
Boundary Layer	لایه مرزی
Coefficient of Thermal Expansion	ضریب انبساط حرارتی
Darcy Flow	جریان دارسی
Density	چگالی
Dimensional	بعدی
Equilibrium	تعادل
Fluid Phase	فاز سیال
Heat Flux	شار گرمایی
Impermeable	نفوذناپذیر
Injection	دمش
Local Thermal	حرارت محلی

LTE.....	تبادل حرارتی محلی
LTNE.....	عدم تبادل حرارتی محلی
Natural Convection.....	انتقال گرمای طبیعی
Non-Dimensional.....	بدون بعد
Non-Equilibrium.....	عدم تعادل
Numerical.....	عددی
Permeable.....	نفوذپذیر
Porosity.....	تخلخل
Porous Medium.....	محیط متخلخل
Similarity Solution.....	حل تشابهی
Solid Phase.....	فاز جامد
Suction.....	مکش
Thickness.....	ضخامت
Velocity.....	سرعت

Surname: Nazari

Name: Morteza

Title: Similarity Solution of Heat Transfer Equations from a Heated Plate in a Porous Medium.

Supervisor: dr.Alireza Nazemi

Advisor: dr.Mohsen Nazari

Degree: Master of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Operation Research

Technology University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: July 2013

Number of pages: 83

Keywords: Thermal non-equilibrium, Natural convection, Porous medium, Similarity Solution

Abstract

Thermal non-equilibrium natural convection boundary layer which is induced by a 2D vertical heated plate embedded in a homogenous porous medium is investigated in this paper. The plate is assumed to have linear temperature and concentration distributions. The effect of suction or injection on the boundary layer is also studied, as is the effect of having a second diffusing species. A similarity solution is obtained for the governing steady laminar boundary layer equations. The Nusselt numbers for both the solid and fluid phases and the Sherwood number for solutal diffusion are calculated for a wide range of parameters. A correlation for fluid and solid Nusselt numbers is presented in this paper which is suitable for large values of suction/injection parameter. The asymptotic curves of Nusselt numbers are also compared with the obtained numerical results.



Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Similarity Solution of Heat Transfer Equations from a Heated Plate in a Porous Medium.

Supervisor

dr.Alireza Nazemi

Advisor

dr.Mohsen Nazari

by

Morteza Nazari

July 2013