دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی(المان‌های محدود)

عنوان

روش المان‌های محدود برای معادله کان-هیلیارد- کوک خطی و غیرخطی

استاد راهنما

دکتر علی مس‌فروش

پژوهشگر

معصومه رستمی

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: رستمی　　　　نام: معصومه

عنوان: روش المان‌های محدود برای معادله کان-هیلیارد-کوک خطی و غیرخطی

استاد راهنما: دکتر علی مس‌فروش

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　رشته: ریاضی کاربردی　گرایش: آنالیز عددی(المان‌های محدود)

دانشگاه: صنعتی شاهرود　　　　دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱　　　　تعداد صفحات: ۸۷

واژگان کلیدی: المان محدود، انتگرال تصادفی، جواب خفیف، اختلال افزودنی، فرایند وینر، معادله کان-هیلیارد، لیاپانوف تابعی، پیچیدگی تصادفی.

چکیده

این پایان‌نامه شامل دو بخش عمده در تقریب عددی معادله کان-هیلیارد است. بخش عمده‌ای از کار در رابطه با معادله کان-هیلیارد مختل شده به‌وسیله نویزها می‌باشد، که به‌عنوان معادله کان-هیلیارد-کوک شناخته شده است.

در اولین بخش معادله کان-هیلیارد-کوک-خطی را نسبت به متغیر فضا با استفاده از روش المان محدود استاندارد گسسته‌سازی کرده، و با استفاده از فرضیات مناسب بر روی عملگر کوواریانس فرایند وینر برآورد همگرایی قوی آنرا اثبات می‌کنیم. تجزیه و تحلیل بر اساس نیم‌گروه‌های تحلیلی است. بخش عمده‌ای از کار محاسبه کران‌های خطایی برای معادله است.

در بخش دوم معادله کان-هیلیارد-کوک غیرخطی را بررسی می‌کنیم. وجود قریب به یقین و نظم موجود در جواب‌ها را نشان می‌دهیم. با استفاده از روش المان محدود استاندارد یک تقریب فضایی مناسب معرفی و برآورد خطا را به‌منظور بهینه کردن برروی مجموعه‌ای از احتمال دلخواه نزدیک به ۱ ثابت می‌کنیم. همچنین همگرایی قوی بدون نرخ شناخته شده را اثبات می‌کنیم.

پروردگارا...

نه می‌توانم مویشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست‌های پینه بسته‌شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که هر لحظه شکر گزارشان باشم و ثانیه‌های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذارم.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌ها است...

تقدیم به پدر بزرگوار و مادر مهربانم

آن دو فرشته‌ای که از خواسته‌هایشان گذشتند، سختی‌ها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده‌ام برسم.

و تقدیم به خواهر و برادرم

که وجودشان شادی‌بخش و صفایشان مایه آرامش من است.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.

در این‌جا وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علی مس‌فروش، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعا بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

معصومه رستمی
۱۳۹۱

فهرست مطالب

فصل ۱
تعاریف مقدماتی

معادله کان-هیلیارد یک معادله ریاضی-فیزیک است، که به توصیف فرایند جداسازی یک سیال دوتایی زیر دمای بحرانی می‌پردازد، که به طور خودکار به دو سیال با غلظت‌های متفاوت تقسیم می‌شود.

در این پایان‌نامه، به مطالعه تقریب عددی معادله کان-هیلیارد و نیز معادله کان-هیلیارد تصادفی معروف به معادله کان-هیلیارد-کوک می‌پردازیم. برای این کار احتیاج به پیش‌نیازهای زیر است:

- نظریه نیم‌گروه‌ها
- معادله کان-هیلیارد
- تجزیه و تحلیل تصادفی در فضای هیلبرت

۱.۱ نگرشی بر نیم‌گروه‌ها

نظریه نیم‌گروه‌ها به مطالعه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول، با مقادیری در فضای باناخ [۱] توسط عملگرهای خطی احتمالا نامحدود می‌پردازد. این روش دارای کاربردهای گسترده‌ای در شاخه‌های مختلف، مانند تجزیه و تحلیل هارمونیک، نظریه تقریب و بسیاری موارد دیگر است.

تعریف ۱.۱.۱ (نیم گروه[۲]). خانواده $\{E(t)\}_{t\geq \circ}$ از عملگرهای خطی کراندار برروی فضای باناخ X، یک نیم‌گروه از عملگرهای خطی نامیده می‌شود اگر

۱. $E(\circ) = I$ (عملگر همانی)،

۲. $\forall s, t \geq \circ \qquad E(t+s) = E(t)E(s),$ (خاصیت نیم‌گروه).

[۱] Banach space
[۲] semigroup

یک نیم‌گروه، قویا پیوسته نامیده می‌شود اگر

$$\lim_{t\to 0^+} E(t)x = x \qquad \forall x \in X.$$

عملگر خطی G، یک مولد بی‌نهایت کوچک از یک نیم‌گروه است که به‌صورت

$$G_x = \lim_{t\to 0^+} \frac{E(t)\,x - x}{t},$$

تعریف می‌شود، دامنه تعریف $D(G)$ فضای همه $x \in X$ است که حد بالا برای آنها موجود باشد. نیم‌گروه با $E(t) = \mathrm{e}^{tG}$ نیز نمایش داده می‌شود.

نیم‌گروه قویا پیوسته از عملگرهای خطی کراندار روی X، اغلب C_0-نیم‌گروه نامیده می‌شود، به‌علاوه اگر برای $t \geq 0$ ، $\| E(t) \| \leq 1$ باشد، یک نیم‌گروه از انقباضات [۳] نامیده می‌شود.

در این پایان‌نامه $-\Delta$ را به‌عنوان یک عملگرخطی بی‌کران درفضای $H = L_2(\mathcal{D})$ با ضرب داخلی استاندارد $\langle .,. \rangle$ و نرم $\|.\|$، باشرط مرزی نویمن همگن درنظر می‌گیریم. برای این عملگر مقادیر ویژه $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ را به‌صورت

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_j, \quad \lambda_j \to \infty,$$

که متناظر با توابع متعامد ویژه $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ بوده، و اولین تابع ویژه یعنی φ_0 را ثابت، فرض می‌کنیم. $\dot{H}$ را زیر فضایی از H که عمود بر ثابت‌ها است به‌صورت زیر

$$\dot{H} = \{v \in L_2 : \langle v, 1 \rangle = 0\},$$

و P را نگاشت متعامدی [۴] از H به $\dot{H}$ درنظر می‌گیریم. عملگر خطی $A = -\Delta$ را با دامنه

$$D(A) = \{v \in H^2 \cap H : \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\mathcal{D}\},$$

تعریف کرده، و با استفاده از نظریه طیفی $\dot{H}^s = \mathcal{D}(A^{\frac{s}{2}})$ را با نرم $|v|_s = \|A^{\frac{s}{2}} v\|$ برای $s \geq 0$ و حقیقی، روی آن درنظر می‌گیریم. نیم‌گروه e^{-tA^2}، تولید شده توسط $G = -A^2$ را به‌صورت

$$\mathrm{e}^{-tA^2} v = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\lambda_j^2} \langle v, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

درنظرمی‌گیریم، که یک نیم‌گروه قویا پیوسته و تحلیلی است، یعنی e^{-tA^2} را می‌توان به‌عنوان یک تابع هولومورفیک [۵] از t توسعه داد، که باعث ایجاد خواص مهمی می‌شود که در لم زیر بیان شده است:

---

[۳] semigroup of contractions

[۴] orthogonal projection

[۵] تابع هولومورفیک(holomorphic function): زیرمجموعه‌ای باز از صفحه مختلط یک تابع است با مقادیری در مجموعه اعداد مختلط که در هر نقطه مشتق مختلط دارند. هولومورفیک بودن شرط قویتر از مشتق‌پذیری مختلط است و دلالت بر این دارد که تابع بینهایت بار مشتق‌پذیر است و می‌تواند با سری تیلورش نشان داده شود.

لم ۲.۱.۱. *اگر* $\{e^{-tA^{۲}}\}_{t\geq ۰}$ *نیم‌گروه تولید شده توسط* $-A^{۲}$ *باشد، آنگاه*

$$\| A^{\beta} e^{-tA^{۲}} v \| \leq C t^{-\beta/۲} \| v \|, \qquad t > ۰, \beta \geq ۰,$$
$$\int_{۰}^{t} \| A e^{-\tau A^{۲}} v \|^{۲} \, d\tau \leq C \| v \|^{۲} .$$

۲.۱ معادله کان-هیلیارد

هنگامی‌که یک آلیاژ همگن دوتایی به‌سرعت سرد می‌شود، جامد به‌دست آمده معمولا به صورت همگن نیست، اما درعوض دارای ساختاری دانه‌ریز است که تنها از دو بخش تشکیل شده است که در یک بخش جمعی از اجزای آلیاژ متفاوت‌اند. توسعه یک ساختار دانه‌ریز از حالت همگن به‌عنوان تجزیه‌برگشت‌پذیر بیان می‌شود.

در سال ۱۹۵۸، کان [۶] و هیلیارد [۷] رابطه‌ای برای انرژی آزاد [۸] نمونه V از آلیاژ دوتایی با غلظت‌های متفاوت $c(x)$ معرفی کردند. آنها فرض کردند که انرژی آزاد نه تنها به $c(x)$ بلکه به مشتقات c نیز بستگی دارد و برای کل سیستم، انرژی آزاد را به‌صورت

$$\mathcal{F} = N_V \int_V (F(c) + \kappa |\nabla|^{۲}) \, dV, \tag{۱.۱}$$

تعریف کردند که در آن N_V تعداد مولکولها درواحد حجم، F انرژی آزاد هر مولکول از آلیاژ مرکب یکنواخت، و κ ثابت معمولا کوچکی از ماده است. تابع F دارای دو ماده با غلظت‌های c_A و c_B که $c_B > c_A$ است.

با استفاده از غلظت متوسط r، حالت تعادل معادله کان-هیلیارد به‌صورت

$$۲\kappa \Delta c - F'(c) = \lambda, \quad \text{in } V, \tag{۲.۱}$$

$$\frac{\partial c}{\partial n} = ۰, \quad \text{on } \partial V, \tag{۳.۱}$$

است که Δ عملگر لاپلاس، λ ضریب لاگرانژ مربوط به غلظت r و n نرمال ∂V است.

معادله اصلی حاکم بر تکامل حالت عدم تعادل $c(x,t)$ در [۱] بیان شده است، و این همان چیزی است که به عنوان معادله کان - هیلیارد

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla . M \nabla (F'(c) - ۲\kappa \Delta c), \quad \text{in } V, \tag{۴.۱}$$

با شرایط مرزی

$$\frac{\partial c}{\partial n} = \frac{\partial \Delta c}{\partial n} = ۰, \quad \text{on } \partial V, \tag{۵.۱}$$

بیان شده است. مقدار مثبت M تحرک [۹] دو نوع اتم سازنده‌ی آلیاژ مربوطه است.

[۶] J. Cahn
[۷] J. Hilliard
[۸] free energy
[۹] mobility

در این پایان‌نامه معادله کان - هیلیارد را به فرم

$$\begin{aligned} u_t - \epsilon \Delta w dt &= \circ, \quad \text{in}\, \mathcal{D} \times [\circ, T], \\ w + \Delta u - f(u) &= \circ, \quad \text{in}\, \mathcal{D} \times [\circ, T], \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} &= \circ, \quad \text{on}\, \partial\mathcal{D} \times [\circ, T], \\ u(\circ) &= u_\circ, \quad \text{in}\, \mathcal{D}, \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

که $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ در نظر می‌گیریم. این معادله با افزودن اختلال [۱۰] به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} du - \epsilon \Delta w dt &= dW \quad \text{in}\, \mathcal{D} \times [\circ, T], \\ w + \Delta u - f(u) &= \circ \quad \text{in}\, \mathcal{D} \times [\circ, T], \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} &= \circ \quad \text{on}\, \partial\mathcal{D} \times [\circ, T], \\ u(\circ) &= u_\circ \quad \text{in}\, \mathcal{D}, \end{aligned} \tag{۷.۱}$$

که در آن $\mathcal{D}$ دامنه کراندار در $\mathbf{R}^d$، $d = ۱, ۲, ۳$ و $f(s) = s^۳ - s$ هستند.

در پایان معادله (۶.۱) را در قالب عملگری می‌نویسیم. برای این کار، باستفاده از تعریف $D(A)$ و H، معادله (۶.۱) را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned} &u_t - A^۲ u = -Af(u), \quad t > \circ, \\ &u(\circ) = u_\circ, \end{aligned} \tag{۸.۱}$$

نوشت که معادل معادله نقطه ثابت

$$u(t) = e^{-tA^۲} u_\circ - \int_\circ^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)A^۲} Af(u(\tau))\, \mathrm{d}\tau.$$

است. $-A^۲$ یک مولد بی‌نهایت از نیم‌گروه تحلیلی $\mathrm{e}^{-tA^۲}$ روی H است، به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-tA^۲} v &= \sum_{j=۱}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\lambda_j^۲} \langle v, \varphi_j \rangle \varphi_j + \langle v, \varphi_\circ \rangle \varphi_\circ \\ &= \mathrm{e}^{-tA^۲} P v + (I - P) v. \end{aligned}$$

۳.۱ تجزیه و تحلیل تصادفی در فضای هیلبرت

در این پایان‌نامه از انتگرال‌گیری تصادفی و خواص آن استفاده می‌کنیم، بنابراین برخی از تعاریف و قضایای انتگرال‌گیری تصادفی [۱۱] را بدون اثبات در زیر بیان می‌کنیم:

[۱۰] noise
[۱۱] stochastic integrals

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید Ω یک مجموعه ناتهی باشد، یک σ-جبر $\mathcal{F}$ روی Ω، مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های Ω است به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\Omega \in \mathcal{F}$،

۲. اگر $f \in \mathcal{F}$ باشد آنگاه $f^c \in \mathcal{F}$ که $f^c = \Omega - \mathcal{F}$،

۳. اگر $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} f_i \in \mathcal{F}$.

تعریف ۲.۳.۱. *اندازه احتمال* $(\Omega, \mathcal{F})$، تابع $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to \Omega$ است به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\mathbf{P}(\Omega) = 1, \mathbf{P}(\emptyset) = 0$،

۲. اگر $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{F}$ مجموعه‌های دو به دو مجزا باشند آنگاه

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathcal{A}_i)\,.$$

تعریف ۳.۳.۱. مجموعه $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ که Ω دامنه، $\mathcal{F}$ یک σ-جبر و $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ یک اندازه احتمال است را، یک *فضای احتمال* می‌گوییم.

تعریف ۴.۳.۱. دنباله‌ای از σ-جبرهای $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ را یک فیلتریشن [۱۲] می‌گوییم، فضای $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0})$ را یک فضای احتمال مجهز به فیلتریشن می‌گوییم.

تعریف ۵.۳.۱. اگر w یک متغیر تصادفی در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ باشد، *امید ریاضی* $\mathbf{E}(w)$ به‌صورت

$$\mathbf{E}(w) = \int_{\Omega} w \, \mathrm{d}\mathbf{P}$$

تعریف می‌شود.

۱.۳.۱ فرایند وینر

تعریف ۶.۳.۱. یک فرایند تصادفی U−مقدار $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ یک فرایند Q−وینر [۱۳] نامیده می‌شود اگر

۱. $W(0) = 0$

۲. $\{W(t)\}_{t \geq 0}$، تقریبا همه‌جا [۱۴] دارای مسیرهای پیوستگی است.

[۱۲] filtration
[۱۳] Q-Wiener process
[۱۴] almost surely(a.s)

۳. $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ رشدهای مستقل دارد، یعنی متغیرهای تصادفی

$$W(t_1), W(t_2)-W(t_1), \cdots, W(t_n)-W(t_{n-1}),$$

به ازای تمام $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n \leq T$ از هم مستقل هستند.

۴. این رشدها گوسی هستند به‌این‌صورت که

$$\mathbf{P}\circ(W(t)-W(\tau))^{-1} = N(0,(t-\tau)Q), \qquad 0 \leq \tau < t.$$

فرض کنیم $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه مشخص برای Q با مقادیر ویژه متناظر $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد. $W(t)$ را به شکل

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{\frac{1}{2}} \beta_k(t) e_k,$$

تعریف می‌کنیم که در آن β_k حرکات براونی [15] مستقل حقیقی مقدار هستند. این سری متعلق به فضای $L_2(\Omega, H)$ است.

فرض کنید Q یک عملگر خطی کراندار، نیمه معین مثبت و خودالحاق [16] روی فضای هیلبرت U با ویژگی $Tr(Q) < \infty$ باشد. فرض کنید U و H فضاهای هیلبرت تفکیک‌پذیر [17] بوده و $\{W(t)\}_{t\in[0,T]}$ یک فرایند Q–وینر U–مقدار روی فضای احتمالی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ نسبت به فیلتریشن نرمال $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ باشد، به‌طوری‌که $T > 0$ ثابت است [11].

۲.۳.۱ انتگرال تصادفی

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنیم $L(U,H)$ فضایی از عملگرهای خطی کراندار $U \to H$ را مشخص کند. فرایند $\{\Phi_{(t)}\}_{t\in[0,T]}$ با مقادیری در $L(U,H)$ را مقدماتی [18] نامند، اگر افرازی از $[0,T]$ به‌صورت

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T,\ N \in \mathbf{N}$$

موجود باشد به‌طوری‌که

$$\Phi(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \Phi_m 1_{(t_m, t_{m+1}]}(t), \qquad t \in [0,T],$$

که در آن

۱. $\Phi_m : (\Omega, \mathcal{F}) \to L(U,H)$ به طور قوی $\mathcal{F}_{t_m}$ اندازه پذیر است،

[15] Brownian motions
[16] selfadjoint
[17] separable Hilbert spaces
[18] elementary

۲. Φ_m فقط دارای یک مقدار متناهی در $L(U,H)$ باشد.

فضای خطی فرایندهای مقدماتی با $\mathcal{E}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۸.۳.۱ (انتگرال Itô [19]). برای $\Phi\in\mathcal{E}$ انتگرال تصادفی را با

$$\int_0^t \Phi \mathrm{d}W := \sum_{n=0}^{N-1} \Phi_n(\Delta W_n(t)), \quad t\in[0,T],$$

مشخص می‌شود [۱۱]، که در آن

$$\Delta W_n(t) = W(t_{n+1}\wedge t) - W(t_n\wedge t), \quad t\wedge s = \min(t,s).$$

تعریف ۹.۳.۱ (عملگرهای هیلبرت-اشمیت[20]). عملگر $T\in L(U,H)$ ، را عملگر هیلبرت-اشمیت نامند هرگاه برای پایه متعامد یکه $\{e_k\}_{k\in N}$ در فضای U، رابطه زیر برقرار باشد:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \parallel Te_k \parallel^2 < \infty.$$

فرم عمگرهای هیلبرت-اشمیت، یک فضای خطی را به‌وسیله $\mathrm{L}_2(U,H)$ تعریف می‌کند که با ضرب اسکالر $\langle T,S\rangle_{HS} = \sum_{k=1}^{\infty}\langle Te_k, Se_k\rangle_H$ و نرم $\parallel T\parallel_{HS} = (\sum_{k=1}^{\infty}\parallel Te_k\parallel_H^2)^{\frac{1}{2}}$ به فضای هیلبرت تبدیل می‌شود.

یادآوری ۱۰.۳.۱. اثر [21] عملگر خطی T را با

$$Tr(T) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle Te_k, e_k\rangle$$

نمایش می‌دهیم.

ملاحظه می‌کنید که عملگر کوواریانس [22] $Q: U\to U$ خودالحاق، نیمه معین مثبت، کراندار و خطی است. همچنین فرض کنید $W(t)$ عملگر $Q-$وینر است. اگر

$$\mathbf{E}\int_0^t \parallel T(s)Q^{\frac{1}{2}}\parallel_{HS}^2 \mathrm{d}s < \infty.$$

می‌توان انتگرال تصادفی $\int_0^t T(s)\mathrm{d}W(s)$ را به‌عنوان یک حد روی $L_2(\Omega,H)$ از انتگرال‌های فرایندهای مقدماتی تعریف کرد. ویژگی مهم انتگرال تصادفی ویژگی ایزومتری [23] [۱۱] است:

گزاره ۱۱.۳.۱ (ویژگی ایزومتری).

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^t T(s)\mathrm{d}W(s)\right\|^2 = \mathbf{E}\int_0^t \left\|T(s)Q^{\frac{1}{2}}\right\|_{HS}^2 \mathrm{d}s. \qquad (۹.۱)$$

[19] Itô integral
[20] Hilbert-Schmidt operators
[21] trace
[22] covariance operator
[23] Isometry property

۳.۳.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی

معادلات دیفرانسیل تصادفی(SDE) [۲۴] در مسایل مختلف مهندسی که درآنها اثرات آشفتگی اختلال تصادفی بر روی یک سیستم بررسی می‌شود، وجود دارد. فهم کامل SDE ها، نیازمند آشنایی با احتمال و فرایندهای تصادفی پیشرفته می‌باشد.

در اینجا یک فرایند انتشار به‌فرم

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}B_t, \tag{۱۰.۱}$$

که در آن برای $1 \leq i \leq d$ و $1 \leq j \leq r$، $b_i(x,t)$ و $\sigma_{ij}(t,x)$ توابع اندازه‌پذیر بورل هستند را توصیف می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۳.۱ (جواب قوی[۲۵]). جواب قوی SDE (۱۰.۱)، روی فضای احتمالی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ با شرط اولیه $X_\circ$، یک فرایند $\{X_t\}_{t\geq\circ}$ است که شامل رشدهای ساده پیوسته است به‌طوری‌که:

۱. X_t با فیلتریشن تکمیل شده‌ی [۲۶] تولید شده از حرکت براونی B و شرط اولیه ξ، تعدیل داده شده است و با $\mathcal{F}_t$ نمایش داده می‌شود.

۲. $P(X_\circ) = 1$

۳. به ازای هر $\circ \leq t < \infty$ و هر $1 \leq i \leq d$ و $1 \leq j \leq r$، شرط زیر تقریبا همه‌جا وجود دارد:
$$\int_\circ^t |b_i(\tau, X_\tau)| + \sigma_{ij}^2(\tau, X_\tau)\mathrm{d}\tau < \infty.$$

۴. این شرط نیز برقرار است:
$$X_t = X_\circ + \int_\circ^t b(\tau, X_\tau)\mathrm{d}\tau + \int_\circ^t \sigma(\tau, X_\tau)\mathrm{d}B_\tau.$$

۴.۳.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی $SPDE$ [۲۷]، یک معادله دیفرانسیل است که با افزودن اختلالی دچار تغییر شده باشد.

تعریف ۱۳.۳.۱. فرض کنید $\{W(t)\}_{t\in[\circ,T]}$ یک فرایند Q–وینر U–مقدار، منطبق با فیلتریشن نرمال $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[\circ,T]}$، روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ باشد، معادلات دیفرانسیل جزیی تصادفی $(SPDE)$ به شکل

[۲۴] Stochastic differential equation
[۲۵] Strong solution
[۲۶] augmented filtration
[۲۷] Stochastic partial differential equation

زیر است:

$$\mathrm{d}X(t) = \big(AX(t) + f(t)\big)\mathrm{d}t + B\mathrm{d}W(t), \qquad 0 < t < T, \qquad (۱۱.۱)$$
$$X(0) = X_0,$$

به‌طوری‌که فرض‌های زیر برقرار هستند:

۱. A یک عملگر خطی است که مولد نیم‌گروه قویا پیوسته (C_0–نیم گروه) از عملگرهای خطی کراندار $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ می‌باشد،

۲. $B \in L(U, H)$،

۳. $\{f(t)\}_{t\in[0,T]}$ یک فرایند H–مقدار قابل پیش‌بینی، با مسیرهای انتگرال‌پذیر بوخنر [۲۸] است،

۴. ζ یک متغیر تصادفی H–مقدار، $\mathcal{F}_0$–اندازه‌پذیر است.

تعریف ۱۴.۳.۱ (جواب ضعیف[۲۹]). فرایند H–مقدار $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$، یک جواب ضعیف برای (۱۱.۱) است، هرگاه H– قابل پیش‌بینی [۳۰]، دارای مسیرهای انتگرال‌پذیر بوخنر P– تقریبا همه‌جا [۳۱] باشد و

$$\langle X(t), \eta\rangle = \langle X_0, \eta\rangle + \int_0^t \big(\langle X(s), A^*\eta\rangle + \langle f(s), \eta\rangle\big)\mathrm{d}s$$
$$+ \int_0^t B\mathrm{d}W(s), \quad P - a.s., \quad \forall \eta \in D(A), \quad t \in [0, T].$$

تعریف ۱۵.۳.۱ (جواب خفیف[۳۲]). فرایند U–مقدار قابل پیش‌بینی $X(t)$، یک جواب خفیف برای مسأله (۱۱.۱) است، هرگاه

$$X(t) = E(t)X_0 + \int_0^t E(t-s)f(s)\mathrm{d}s + \int_0^t E(t-s)B(X(s))\mathrm{d}W(s), \quad P - a.s., \quad \forall t \in [0, T].$$

در حالت خاص انتگرال‌های ظاهر شده خوش تعریف می‌باشند.

تعریف ۱۶.۳.۱ (جواب قوی[۳۳]). فرایند H– مقدار $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ ، یک جواب قوی برای (۱۱.۱) است هرگاه یک فرایند H– قابل پیش‌بینی باشد، $X(t,\omega) \in D(A)$ P_T– تقریبا همه‌جا، $\int_0^T \|AX(t)\|\mathrm{d}t < \infty$ P– تقریبا همه‌جا باشد و

$$X(t) = X_0 + \int_0^t (AX(s) + f(s))\mathrm{d}s + \int_0^t B\mathrm{d}W(s), \quad P - a.s, \quad \forall t \in [0, T].$$

[۲۸] Bochner integrable trajectories
[۲۹] Weak solution
[۳۰] H-predictable
[۳۱] P-almost surely
[۳۲] Mild solution
[۳۳] Strong solution

انتگرال $\int_0^t B\mathrm{d}W(s)$ تعریف شده است اگر و تنها اگر $\|B\|_{HS}^2 = Tr(BQB^*) < \infty$.

در حالت خاص معادله کان-هیلیارد تصادفی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}X(t) + A^2 X(t)\mathrm{d}t + Af(X(t))\mathrm{d}t = \mathrm{d}W(t), \qquad t > 0, \\ &X(0) = X_0 \end{aligned} \tag{۱۲.۱}$$

که در آن $A = -\Delta$ و P تصویر متعامد از H به $\dot{H}$ است. با استفاده از روش نیم‌گروه‌ها می‌توان جواب خفیف معادله (۱۲.۱) را به شکل زیر نوشت:

$$X(t) = E(t)X_0 - \int_0^t E(t-s)Af(X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t E(t-s)\mathrm{d}W(s), \tag{۱۳.۱}$$

که در آن $\{E(t)\}_{t\geq 0} = \{\mathrm{e}^{-tA^2}\}_{t\geq 0}$ نیم‌گروه تولید شده توسط $-A^2$ است.

در این پایان نامه معادله (۱۲.۱) را درحالت خطی، $f \equiv 0$ و غیرخطی بررسی می‌کنیم.

۵.۳.۱ پیچش تصادفی

در این پایان‌نامه با به‌کار بردن پیچش تصادفی [۳۴] بر روی توابع $L(U,H)-$ مقدار، برای H,U به‌عنوان فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر، به مطالعه وجود و منحصر به فرد بودن جواب برای معادله کان هیلیارد کوک تصادفی می‌پردازیم. عبارت آخر در (۱۳.۱) یک پیچش تصادفی است

$$\begin{aligned} W_A(t) &= \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A^2}\mathrm{d}W(s) \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A^2}P\mathrm{d}W(s) + \int_0^t \langle \mathrm{d}W(s), \varphi_0\rangle \varphi_0 \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A^2}P\mathrm{d}W(s) + \langle W(t), \varphi_0\rangle \varphi_0. \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A^2}P\mathrm{d}W(s) + (I-P)W(t). \end{aligned} \tag{۱۴.۱}$$

[۳۴] Stochastic convolution

فصل ۲
معادله کان-هیلیارد

معادله‌ی کان-هیلیارد در سال ۱۹۵۸ به‌عنوان یک فرایند جداسازی فاز یک آلیاژ دوتایی زیر دمای بحرانی مطرح شد. از آن زمان در بسیاری از زمینه‌های دیگر مانند دینامیک میکروفیلم‌ها، جریان دینامیک پلیمر، ساختار بیوفیلم‌ها، دینامیک جمعیت و پردازش تصویر از این معادله استفاده شده است. اخیرا از معادله کان-هیلیارد در نانوتکنولوژی مدل دینامیک ستاره و نیز در نظریه‌ی شکل‌گیری کهکشان‌ها به عنوان مدلی برای تکامل دو جزء مواد بین کهکشانی استفاده می‌کنند. لذا معادله‌ی کان-هیلیارد نه تنها در زمینه‌ی مدل‌سازی ساختارهای بسیار کوچک کاربرد دارد بلکه در مدل‌سازی برخی ساختارهای بزرگ، مانند الگودهی ویژگی‌های خاصی که درون حلقه B حول محور سیار زحل دیده می‌شود نیز به‌کار می‌رود. از آنجایی که این معادله دارای تنوع گسترده‌ای از برنامه‌های کاربردی است، بسیاری از دانشمندان، مهندسان و ریاضیدانان علاقه ویژه‌ای به این معادله دارند. به‌طور خلاصه، معادله‌ی کان-هیلیارد به منزله‌ی یکی از مدل‌های پیشرو برای مطالعه جداسازی فاز هم‌دما، ایزوتروپیک مخلوط به کار می‌رود.

۱.۲ تشکیل الگوی معادله‌ی کان-هیلیارد

۱.۱.۲ حالت‌های یکنواخت

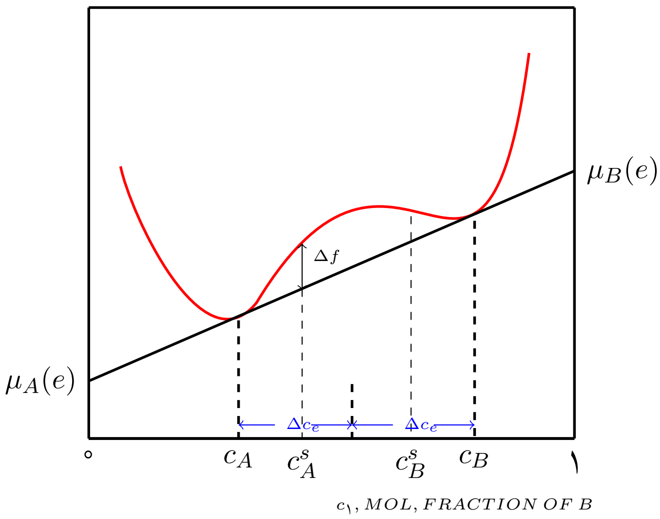
در بسیاری از سیستم‌های دو مولفه‌ای، تفکیک فاز به سرعت و به وسیله‌ی سرد کردن سیستم به‌دست می‌آید. لذا اگر یک سیستم دو مولفه‌ای که در بازه‌های یکسان (به‌طور یکنواخت) دارای درجه حرارت $T_۱$ است را به اندازه‌ی کافی سرد کنیم تا به درجه حرارت $T_۲$ برسد، آنگاه سیستم به دو غلظت متفاوت در بالا و پایین تقسیم می‌شود. یک توصیف پدیدار شناختی از رفتار سیستم‌ها می‌تواند با آرگومان‌های انرژی به‌دست آید. ادعای ما براین است که یک دمای بحرانی T_c وجود دارد به‌طوری‌که برای $T > T_c$ انرژی آزاد [۱] $F(c,T)$

[۱] free energy

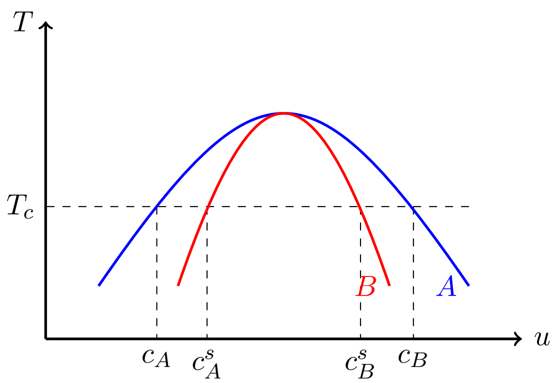
سیستم، به صورت یک تابع واحد با غلظت c است. در حالی که برای $T < T_c$ انرژی آزاد دو برابر شده و تابع دو غلظت متفاوت می‌شود.

سیستمی که در فواصل یکسان در دمای $T_۱$ بود، هنگامی که سرد می‌شود تا به دمای $T_۲$ برسد (طبق قانون دوم ترمودینامیک) انرژی درونی پیدا می‌کند که باعث می‌شود سیستم، به دو سیستم، یکی در غلظت c_A و دیگری در غلظت c_B جدا شود.

به عبارت بهتر، سیستم را در دمای $T < T_c$ در نظر بگیرید. فرض کنید انرژی آزاد $F(c)$ به‌ازای هر واحد حجم از سیستم، فضایی همگن دارای شکل محدب/مقعر نشان داده شده در شکل ۱.۲ و ۲.۲ باشد.



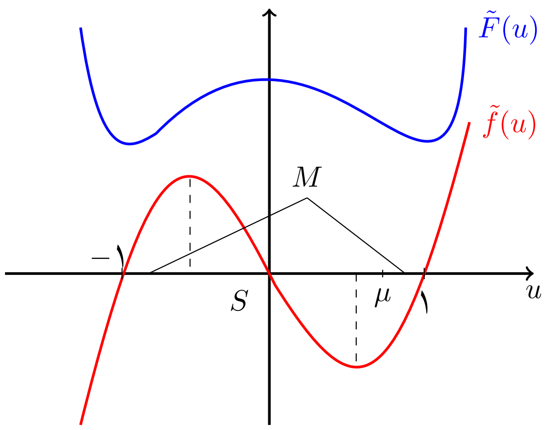
شکل ۱.۲: $f_۰(c)$ برای $T < T_c$.



شکل ۲.۲: تفکیک غلظت برای $T < T_c$.

به صورت دقیق‌تر، F در فاصله $c_A^s < c < c_B^s$ محدب است و در جای دیگر مقعر است. نقاط c_A و c_B محل برخورد مماس حایل با شکل است.

مشتق $f(c) = F'(c)$ در شکل ۳.۲ نشان داده شده است؛



شکل ۳.۲: $\tilde{f}(u) = u^۳ - u$ و $\tilde{F}(u) = \frac{۱}{۴}u^۲(u^۲ - ۲) + c$

انرژی آزاد سیستم فضایی ناهمگن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{F}(c) = \int_\Omega F(c(x))\mathrm{d}x, \qquad \Omega \subset R^۳, \tag{۱.۲}$$

حالت‌های یکنواخت این سیستم به‌عنوان حداقل کننده‌ی تابع انرژی آزاد $\mathcal{F}$ تحت محدودیت زیر به‌دست می‌آید:

$$r = \frac{۱}{|\Omega|}\int_\Omega c(x)\mathrm{d}x, \tag{۲.۲}$$

که r مقدار متوسط غلظت است، در نتیجه

$$\widetilde{\mathcal{F}}(c) = \int_\Omega F(c(x))\mathrm{d}x - \sigma\int_\Omega c(x)\mathrm{d}x, \tag{۳.۲}$$

که σ ضریب لاگرانژ است. در نقاط پیوستگی c هر نقطه بحرانی $\widetilde{\mathcal{F}}$ در رابطه‌ی

$$f(c) = \sigma,$$

صدق می‌کند. در واقع σ برابر شیب مماس بر نمودار تابع F است. مقدار $c(x)$ برای تک فازها به‌صورت

$$c(x) = r \quad x \in \Omega,$$

و برای قطعه قطعه ثابت‌ها (دوفازها) به‌شکل

$$c(x) = \begin{cases} c_A, & x \in \Omega_A, \\ c_B, & x \in \Omega_B = \Omega - \Omega_A, \end{cases}$$

به‌دست می‌آید. مقدار c_A ، c_B و σ به‌وسیله‌ی قانون ماکسول [۲] به‌دست می‌آیند که عبارتند از:

$$\begin{cases} F(c_B) - F(c_A) = \sigma(c_B - c_A), \\ \sigma = f(c_A) = f(c_B), \end{cases} \tag{۴.۲}$$

که σ برابر شیب مماس بر نمودار تابع F است.

با استفاده از (۲.۲) در می‌یابیم که:

$$|\Omega_A| = \frac{c_B - r}{c_B - c_A}|\Omega|, \qquad |\Omega_B| = \frac{r - c_A}{c_B - c_A}|\Omega|.$$

بنابراین یک جواب دوفازی تنها زمانی مجاز است که $c_A < r < c_B$. از مقعر/محدب بودن F، واضح است که در حالت‌های یکنواخت نمودار $c(x) = r$، اگر $r \geq c_B$ یا $r \leq c_A$ باشد مینیمم مطلق و اگر $c_A^s \leq r \leq c_B^s$ ماکزیمم نسبی هستند و در نواحی باقیمانده مینیمم نسبی است.

به‌این‌ترتیب اگر در ناحیه بازگشتی سیستمی با غلظت متوسط r داشته باشیم، در حالت نهایی به فازهای جدا از هم تبدیل می‌شود. اما بی‌نهایت از این حالت‌ها وجود دارد. آیا همه این جواب‌های فازی در برخی مفاهیم فیزیکی به کار می‌روند؟ آزمایش نشان می‌دهد که سیستم‌های سرد برای اولین بار به سرعت به دو غلظت بالا و پایین تبدیل می‌شود، سپس سیستم به آرامی تفکیک شده و مناطق تحت یک فاز جدا بزرگتر و بزرگتر می‌شوند. این نقاط در انرژی دارای اهمیت‌اند. یک عامل به‌دست آوردن انرژی از رابطه‌ی میان فازها عبارت است از شیب کمکی انرژی در تعریف انرژی آزاد:

$$\mathcal{F}(c) = \int_\Omega (F(c) + \frac{۱}{۲}\kappa|\nabla c|^{۲})\mathrm{d}x. \tag{۵.۲}$$

حالت‌های یکنواخت به وسیله مینیمم کردن $\mathcal{F}$ روی $H^{۱}(\Omega)$ با توجه به شرط (۲.۲) به‌دست می‌آیند.

اکنون معادله اویلر-لاگرانژ مساله نویمن نیم خطی را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} -\kappa\Delta c + f(c) = \sigma, \quad \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial c}{\partial n} = ۰, \quad \text{on } \partial\Omega, \\ \dfrac{۱}{|\Omega|}\int_\Omega c(x)\mathrm{d}x = r. \end{cases} \tag{۶.۲}$$

این مساله در حالت یک بعدی با دامنه $\Omega = (-L, L)$ به وسیله کر [۳] و گورتین [۴] و سلمرود [۵] مورد مطالعه قرار گرفت [۴]، که برای $c_A < r < c_B$ داریم:

۱. زمانی که $\kappa > ۰$ به اندازه کافی کوچک باشد $\mathcal{F}$ دارای مینیمم مطلق $c_\kappa(x)$ است.

۲. $c_\kappa(x)$ شدیدا یکنواخت است.

---

[۲] Maxwell's rule
[۳] Carr
[۴] Gurtin
[۵] Slemrod

۳. $c_\kappa(x)$ برای $\kappa \to 0$ (یا معکوس آن) به جواب واحد منفرد [۶] میل می‌کند.

$$c_0(x) = \begin{cases} c_A, & -L < x < -L + \ell_A, \\ c_B, & -L + \ell_A < x < L. \end{cases}$$

۴. جواب‌های غیرممکن برای هر $\kappa > 0$ در (۶.۲) ناپایدارند، یعنی حتی نمی‌توانند مینیمم نسبی $\mathcal{F}$ باشند. بنابراین جواب‌های واحد یکسان هستند.

۲.۱.۲ دینامیک

دینامیک جدایی فاز می‌تواند از اصل به حداقل رساندن انرژی به‌دست می‌آید. اگر فرض کنیم که جرم شار متناسب با گرادیان پتانسیل شیمیایی است، یعنی

$$j = -M\Delta J,$$

که $M > 0$ تحرک [۷] است. برای سادگی $M = 1$ را درنظر گرفته و پتانسیل شیمیایی را به‌عنوان مشتق تابعی از $\mathcal{F}$ درنظر می‌گیریم:

$$\mathcal{F}'(c)v = \int_\Omega J(x)v(x)\mathrm{d}x, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

مثلا $\mathcal{F}'(c) = J(c) = f(c)$، به پایستگی جرم برای معادلات دیفرانسیل منجر می شود:

$$c_t = \Delta f(c), \quad \text{in } \Omega. \tag{۷.۲}$$

با شرط مرزی بدون شار

$$\frac{\partial f(c)}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega,$$

که $\Delta f(c) = f'(c)\Delta c + f''(c)|\nabla c|^2$ با توجه به شکل ۳.۲ می‌بینیم که $f'(c)$ در ناحیه بازگشتی منفی است، بنابراین معادله (۷.۲) به‌عنوان یک معادله‌ی پسرو-پیشرو گرما رفتار می‌کند.

با توجه به $\mathcal{F}$، اگر قرار دهیم $J(c) = f(c) - \kappa\Delta c$، معادله کان-هیلیارد زیر را با شرط مرزی داریم:

$$\begin{cases} c_t = \Delta(f(c) - \kappa\Delta c), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial n} c = 0, & \text{on } \partial\Omega, \\ \frac{\partial}{\partial n}(f(c) - \Delta c), & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{۸.۲}$$

۳.۱.۲ نرمال سازی

اکنون می‌خواهیم نسخه نرمال شده‌ی معادله کان-هیلیارد (۸.۲) را به‌دست‌آوریم. با توجه به این‌که F یک چند جمله‌ای درجه چهارم است، مشتق آن عبارت است از:

$$F'(c) = f(c) = b_0 + b_1 c + b_2 c^2 + b_3 c^3.$$

[۶] single interface solution
[۷] mobility

با $u = c - c^*$ و فرض اینکه $c^* = \frac{-b_2}{3b_3}$ است، داریم:

$$f(c^*) = b_0 + b_1 c^* + b_2 {c^*}^2 + b_3 {c^*}^3,$$
$$f'(c^*) = b_1 + 2b_2 c^* + 3b_3 {c^*}^2,$$

با جایگذاری $c^* = \frac{-b_2^2}{3b_3}$ داریم $f'(c^*) = b_1 - \frac{b_2^2}{3b_3}$ و با درنظر گرفتن $b_1 < \frac{b_2^2}{3b_3}$ داریم: $f'(c^*) < 0$ لذا

$$f''(c^*) = 2b_2 + 6b_3 c^* = 0,$$
$$f'''(c^*) = 6b_3.$$

همچنین با درنظر گرفتن $b_3 > 0$ داریم: $f'''(c^*) > 0$. (باید $b_2 < 0$ باشد تا تضمین کند که حالت جالب‌تری برای $c > 0$ اتفاق می‌افتد)، با درنظرگرفتن بسط تیلور f به صورت

$$f(c) = f(c^*) + f'(c^*)u + \frac{1}{2}f''(c^*)u^2 + \frac{1}{6}f'''(c^*)u^3$$

می‌توان f را به‌شکل نرمال $f(c) = f(c^*) - \alpha u + \beta u^3$ با $\alpha, \beta > 0$ نوشت.

برای سادگی $\alpha = \beta = \kappa = 1$ درنظر می‌گیریم و $u = c - c^*$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} u_t = \Delta(-\Delta u + u^3 - u), & \text{for } x \in \Omega\ ,\ t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n}(-\Delta u + u^3 - u) = 0, & \text{for } x \in \partial\Omega\ ,\ t > 0, \\ u(.,0) = u_0, & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{۹.۲}$$

۴.۱.۲ تابع لیاپانوف

اکنون باید برای تابع انرژی معادله کان-هیلیارد، تابع لیاپانوف را به‌دست آوریم. با استفاده از معادله نرمال شده (۹.۲) ، تابع لیاپانوف معادله کان-هیلیارد به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(v) &= \int_\Omega (\frac{1}{4}v^4 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|^2)\mathrm{d}x, \\ &= \frac{1}{4}\parallel v \parallel_{L_4}^4 - \frac{1}{2}\parallel v \parallel^2 + \frac{1}{2}\parallel \nabla v \parallel^2 . \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

چون برای $n \leq 3$، $H^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$، بنابراین $\mathcal{F}$ در $H^1(\Omega)$ پیوسته است.

باید نشان دهیم که:

۱. $\mathcal{F}$ در فضای $H^1(\Omega)$ از پایین کراندار است.

۲. هر جواب $u(t)$ از (۹.۲) همواره در $H^1(\Omega)$ کراندار است، به‌طوری که $\mathcal{F}(u(t))$ تعریف شده است.

۳. $\mathcal{F}(u(t))$ برای هر جواب $u(t)$ از (۹.۲) نسبت به زمان ناافزایشی است.

داریم:

$$\mathcal{F}(v) = \int_\Omega (\frac{1}{4}v^4 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4})\mathrm{d}x \quad = \frac{1}{4}\int_\Omega (v^2-1)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \parallel \nabla v \parallel^2 - \frac{1}{4}|\Omega|$$

بنابراین

$$\mathcal{F}(v) = \frac{1}{2} \parallel \nabla v \parallel^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega (v^2-1)^2\mathrm{d}x - \frac{1}{4}|\Omega|. \tag{۱۱.۲}$$

پس $\mathcal{F}$ از پایین کراندار است. سپس معادله‌ی دیفرانسیل (۹.۲) را در $J(u) = -\Delta u + u^3 - u$ ضرب می‌کنیم، با انتگرال‌گیری جزبه‌جز روی Ω داریم:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta(-\Delta u + u^3 - u), \\ u_t &= \Delta(J(u)), \\ \big(u_t, J(u)\big) &= \int_{\partial\Omega} nJ(u).J(u)\mathrm{d}u - \int_\Omega \nabla J(u)\nabla J(u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

بنابراین

$$\big(u_t, J(u)\big) + \parallel \nabla J(u) \parallel^2 = 0$$

چون $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(u(t)) = \big(u_t, J(u)\big)$ داریم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(u(t)) = \big(u_t, J(u)\big) = - \parallel \nabla J(u) \parallel^2$$

درنتیجه

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(u(t)) \leq 0$$

بنابراین $\mathcal{F}\big(u(t)\big)$ ناافزایشی است بنابراین $t \geq 0$ و

$$\mathcal{F}\big(u(t)\big) \leq \mathcal{F}\big(u(0)\big) = \mathcal{F}(u_0). \tag{۱۲.۲}$$

با استفاده از (۱۱.۲) می‌بینیم که:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u(t)) &= \frac{1}{2} \parallel \nabla u(t) \parallel^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega (u(t)^2 - 1)^2\mathrm{d}x - \frac{1}{4}|\Omega| \\ &\leq \frac{1}{2} \parallel \nabla u(0) \parallel^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega (u(0)^2 - 1)^2\mathrm{d}x - \frac{1}{4}|\Omega| \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\| \nabla u(t)\|^2 \le \|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega (u^2(t)-1)^2 \mathrm{d}x$$
$$\le \|\nabla u(0)\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega (u^2(0)-1)^2 \mathrm{d}x$$
$$\|\nabla u(t)\| \le \|\nabla u_0\| + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_\Omega (u_0^2-1)^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad t\ge 0. \tag{۱۳.۲}$$

۵.۱.۲ معادله‌ی کان-هیلیارد چگال

تنظیمات دیگری در برخی از سیستم‌ها، مانند سیستم‌های پلیمر-پلیمر چگال، می‌تواند مهم باشد. پگو [۸] و نویک کوهن [۹] برای یکی کردن چگالی و شیب اثرات انرژی از معادله کان-هیلیارد مشتق گرفتند:

$$\begin{cases} u_t = \Delta(f(u)+\nu u_t - \kappa\Delta u), & \text{for } x\in\Omega, \quad t>0,\\ \frac{\partial}{\partial n}(f(u)+\nu u_t-\kappa\Delta u)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}=0, & \text{for } x\in\partial\Omega, \quad t>0,\\ u(.,0)=u_0, & \text{for } x\in\Omega. \end{cases} \tag{۱۴.۲}$$

که $f(u)=\beta u^3-\alpha u$.

بدون شیب اثرات انرژی [۱۰] $(\kappa=0)$ معادله (۱۴.۲) به معادله انتشار چگال تبدیل می‌شود که به صورت زیر است:

$$\begin{cases} u_t = \Delta(f(u)+\nu u_t), & \text{for } x\in\Omega, \quad t>0,\\ \frac{\partial}{\partial n}(f(u)+\nu u_t)=0, & \text{for } x\in\partial\Omega, \quad t>0\\ u(.,0)=u_0, & \text{for } x\in\Omega. \end{cases} \tag{۱۵.۲}$$

با توجه به اینکه $J=f(u)+\nu u_t-\kappa\Delta u$ و $v=J-\frac{\kappa}{\nu}u$ که $J=v+\frac{\kappa}{\nu}u$ داریم:

$$v+\frac{\kappa}{\nu}u = f(u)+\nu u_t-\kappa\Delta u$$

بنابراین با درنظر گرفتن $v=J-\frac{\kappa}{\nu}u$ رابطه (۱۴.۲) برابر است با:

$$\begin{cases} \nu u_t-\kappa\Delta u = v-f(u)+\frac{\kappa}{\nu}u, & \text{for } x\in\Omega\ ,\ t>0,\\ -\nu\Delta v+v=f(u)-\frac{\kappa}{\nu}u, & \text{for } x\in\Omega\ ,\ t>0,\\ \frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=0, & \text{for } x\in\partial\Omega\ ,\ t>0,\\ u(.,0)=u_0, & \text{for } x\in\Omega. \end{cases} \tag{۱۶.۲}$$

به شکل مشابه (۱۵.۲) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \nu u_t = v-f(u), & \text{for } x\in\Omega\ ,\ t>0,\\ -\nu\Delta v+v=f(u), & \text{for } x\in\Omega\ ,\ t>0,\\ \frac{\partial v}{\partial n}=0, & \text{for } x\in\partial\Omega\ ,\ t>0,\\ u(.,0)=u_0, & \text{for } x\in\Omega. \end{cases} \tag{۱۷.۲}$$

[۸] Pego
[۹] Novick-Cohen
[۱۰] gradient energy effects

در شرایطی عملگر جواب $T=(-\nu\Delta+I)^{-1}$ از مساله نویمن، این مسایل را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\nu u_t-\kappa\Delta u=\nu-f(u)+\frac{\kappa}{\nu}u=\frac{v}{(f(u)-\frac{\kappa}{\nu}u)}(f(u)-\frac{\kappa}{\nu}u)-(f(u)-\frac{\kappa}{\nu}u)$$

و

$$\frac{1}{(I-\nu\Delta)}(f(u)-\frac{\kappa}{\nu}u)-(f(u)-\frac{\kappa}{\nu}u)=(T-I)(f(u)-\frac{\kappa}{\nu}u)$$

بنابراین مساله (۱۶.۲) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases}\nu u_t-\kappa\Delta u=(T-I)(f(u)-\frac{k}{\nu}u), & \text{for } x\in\Omega, \quad t>0,\\ \frac{\partial u}{\partial n}=0, \quad \text{for } x\in\partial\Omega, \quad t>0,\\ u(.,0)=u_0, \quad \text{for } x\in\Omega.\end{cases} \tag{۱۸.۲}$$

در نتیجه برای $\kappa=0$ داریم:

$$\begin{cases}\nu u_t=(T-I)f(u), & \text{for } x\in\Omega, \quad t>0,\\ u(.,0)=u_0, & \text{for } x\in\Omega.\end{cases} \tag{۱۹.۲}$$

۲.۲ وجود جواب‌ها

۱.۲.۲ مقدمه

در این فصل به اثبات وجود جواب‌های معادله کان–هیلیارد (۹.۲) می‌پردازیم. با قرار دادن یک معادله خطی به جای شرط مرزی غیرخطی داریم:

$$u_t=\Delta(-\Delta u+u^3-u)$$

بنابراین

$$u_t=-\Delta^2u+\Delta(u^3-u)$$

و نیز با فرض $\alpha=\beta=1$ در $f(u)=\beta u^3-\alpha u$ داریم:

$$f(u)=u^3-u$$

بنابراین معادله (۹.۲) به فرم زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases}u_t+\Delta^2u=\Delta f(u), & \text{for } x\in\Omega, \quad t>0,\\ \frac{\partial u}{\partial n}=0, \quad , \frac{\partial\Delta u}{\partial n}=0, & \text{for } x\in\partial\Omega, \quad t>0,\\ u(.,0)=u_0, & \text{in } \Omega.\end{cases} \tag{۲۰.۲}$$

Ω دامنه هموار کراندار در R^3، $(n\le 3)$ است.

کران اولیه (۱۳.۲) را در نظر می‌گیریم، برای هر جواب قابل قبول u از (۲۰.۲) با شرط $\|u_0\|_{H^1}\le\rho$ داریم:

$$\|u(t)\|_{H^1}\le C(\rho), \qquad 0\le t<\infty. \tag{۲۱.۲}$$

در این پایان‌نامه $H^۱$ نرم نسبتا ضعیفی است زیرا: (۱) $H^۱$ نرم تابع و مشتق مرتبه اول تابع را در بر می‌گیرد اما در این پایان‌نامه برای ساختن معادله مشتقات مرتبه چهارم (یا مشتقات دوم را برای فرم ضعیف معادله) نیاز داریم. (۲)از آنجایی‌که ماکزیمم نرم در شرایط نرم $H^۱$ در بعدهای ۲ و ۳ نمی‌تواند کراندار باشد، هنگام استفاده از نابرابری سوبولوف نرم $H^۱$ ضعیف عمل می‌کند.

با این وجود می‌بینیم که کران اولیه (۲۱.۲) به وجود جامع [۱۱] منجر می‌شود. ما باید دو نوع از نتایج وجود را توصیف کنیم:

۱. وجود جامع داده اولیه هموار، به وسیله یک روش استاندارد به‌طوری‌که $u_۰ \in H^۴(\Omega)$

۲. وجود جامع داده اولیه هموار، به وسیله روشی از von Wahl برای $u_۰ \in H^۱$

توجه کنید که (۲۱.۲) به وسیله روش انرژی اثبات می‌شود.

در حال حاضر روش‌های انرژی را کنار گذاشته و با تکنیک نیم‌گروه‌ها کار می‌کنیم.

۲.۲.۲ یک نیم گروه تحلیلی

فرض کنید X یک فضای هیلبرت با نرم $\|.\|$ و ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ باشد و A عملگر خطی بی‌کران، بسته و چگال تعریف شده در X با دامنه $D(A)$، خودالحاق و معین مثبت با معکوس فشرده، و $\{e^{-tA}\}_{t\geq ۰}$ نیم گروه تحلیلی تولید شده توسط آن باشد. درواقع e^{-tA} عملگر جواب مساله تکامل خطی همگن زیر است:

$$\begin{cases} u_t + Au = ۰, & t > ۰, \\ u(۰) = v. \end{cases}$$

و داریم:

$$u(t) = e^{-tA}v = \sum_{j=۱}^{\infty} e^{-t\lambda_j} \hat{v}_j \phi_j,$$

که $\{\lambda_j \ , \ \phi_j\}_{j=۱}^{\infty}$ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نرمال A هستند و $\hat{v}_j = (v \ , \ \phi_j)$.

همچنین به وسیله‌ی نظریه طیفی [۱۲]، توان‌های کسری [۱۳] A را تعریف می‌کنیم و برای $\alpha \in R$ داریم:

$$X_\alpha = D(A^\alpha), \qquad \|v\|_\alpha = \|A^\alpha v\| = \left(\sum_{j=۱}^{\infty} \lambda_j^{۲\alpha} |\hat{v}_j|^۲ \right)^{\frac{۱}{۲}}, \tag{۲۲.۲}$$

لذا $\{X_\alpha\}$ مقیاسی از فضاهای هیلبرت بوده و داریم:

$$D(A) = X_۱ \subset X_\beta \subset X_\alpha \subset X_۰ = X,$$

[۱۱] Global existence
[۱۲] spectral theory
[۱۳] fractional powers

با نشانده‌های [۱۴] پیوسته و فشرده برای $0 < \alpha < \beta < 1$.

برای $0 \leq \alpha \leq \beta$ داریم:

$$\|e^{-tA}v\|_\beta \;\leq\; C_{\alpha,\beta}\, t^{-(\beta-\alpha)} e^{-ct}\|v\|_\alpha, \quad t > 0, \tag{۲۳.۲}$$

که $C_{\alpha,\beta}$ و c اعداد مثبت‌اند.

در شرایطی از عملگر نرم:

$$\|e^{-tA}v\|_{\alpha,\beta} \leq C_{\alpha,\beta}\, t^{-(\beta-\alpha)} e^{-ct}, \qquad t > 0, \tag{۲۴.۲}$$

با درنظرگرفتن

$$1-\theta = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma} \quad \text{و} \quad \theta = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}$$

نابرابری ممان [۱۵] یا نابرابری درون‌یابی [۱۶] به فرم زیر [۳] است:

$$\|u\|_\alpha \leq C\|u\|_\beta^\theta \|u\|_\gamma^{1-\theta}, \quad \alpha = \theta\beta + (1-\theta)\gamma, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \tag{۲۵.۲}$$

۳.۲.۲ چکیده‌ای از معادله تکامل

فرض کنید برای برخی $\alpha \in [0,1)$ عملگر غیرخطی $M : X_\alpha \longrightarrow X$ وجود دارد، که در شرط محلی لیپ شیتز [۱۷] صدق می‌کند، یعنی: اگر $\|u\|_\alpha, \|v\|_\alpha \leq \rho$، آنگاه

$$\|M(u) - M(v)\| \leq g(\rho)\|u-v\|_\alpha. \tag{۲۶.۲}$$

مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_t + Au = M(u), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{۲۷.۲}$$

تابع $u \in C\Big([0,T]\,,\,X_\alpha\Big) \cap C^1\Big((0,T)\,,\,X\Big)$ جوابی ازمساله (۲۷.۲) روی بازه $[0,T]$ است، یعنی برای $0 < t \leq T$ داریم $u(t) \in D(A)$.

به‌وسیله فرمول وردشی ثابت‌ها، هر جواب مساله (۲۷.۲) در معادله انتگرالی زیر صدق می‌کند:

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} M(u(\tau))\mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0. \tag{۲۸.۲}$$

عکس آن نیز صادق است [۳]: اگر $u \in C\Big([0,T]\,,\,X_\alpha\Big)$ جوابی از معادله (۲۸.۲) باشد، آنگاه جوابی از مساله (۲۷.۲) روی بازه $[0,T]$ نیز هست.

---
[۱۴] imbeddings
[۱۵] moment inequality
[۱۶] interpolation inequality
[۱۷] local Lipschitz condition

لم ۱.۲.۲. قضیه نقطه ثابت باناخ: *فرض کنیم $\mathcal{B}$ زیر مجموعه بسته‌ای از فضای باناخ Y باشد و G نگاشت منقبضی از $\mathcal{B}$ به $\mathcal{B}$ باشد در این صورت یک جواب یکتا $v \in \mathcal{B}$ وجود دارد به‌طوری‌که $G(v) = v$.*

قضیه ۲.۲.۲. *برای هر $\rho \geq 0$، وجود دارد $T = T(\rho) > 0$ به‌طوری‌که مساله (۲۷.۲) برای تمام $u_0 \in X_\alpha$ با شرط $\|u_0\|_\alpha \leq \rho$ دارای جوابی یکتا روی بازه $[0, T]$ است.*

برهان. فرض کنیم $\|u_0\|_\alpha \leq \rho$. قضیه نقطه ثابت باناخ [۱۸] را بر نگاشت G اعمال می‌کنیم، $u = G(u)$ یک معادله نقطه ثابت است.

$$G(v)(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} M(v(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

فرض کنیم $Y = C\Big([0, T]\ ,\ X_\alpha\Big)$ فضای باناخ با نرم $\|u\|_Y = \max\limits_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_\alpha$ و مجموعه انقباضات $\mathcal{B} = \{u \in Y \mid \|u\|_Y \leq R\}$ باشد. اعداد T و R به‌گونه‌ای مشخص می‌شوند که نگاشت G انقباضی از $\mathcal{B}$ به خودش باشد.(اعداد T و R را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که بتوانیم قضیه نقطه ثابت باناخ را در گوی بسته $\mathcal{B}$ به‌کار ببریم.) باید نشان دهیم:(۱) G تصویر $\mathcal{B}$ به خودش است.(۲) G یک ادغام روی $\mathcal{B}$ است.

اگر $v \in \mathcal{B}$ آنگاه با توجه (۲۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
\|M(v(\tau))\| &= \|M(v(\tau)) - M(0) + M(0)\| \\
&\leq \|M(0)\| + \|M(v(\tau)) - M(0)\| \\
&\leq \|M(0)\| + g(R)\|v - 0\|_\alpha \\
&\leq \|M(0)\| + g(R)\|v\|_Y \\
&\leq \|M(0)\| + g(R).R = K(R).
\end{aligned}$$

با توجه به (۲۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
\|G(v)(t)\|_\alpha &\leq \|e^{-tA}\|_{\alpha,\alpha}\ \|u_0\|_\alpha + \int_0^t \|e^{-(t-\tau)A}\|_{0,\alpha}\ \|M(v(\tau))\|_0 \mathrm{d}\tau \\
&\leq C_{\alpha,\alpha}\rho + C_{0,\alpha}K(R)\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau \\
&= C_{\alpha,\alpha}\rho + C_{0,\alpha}K(R)\Big(0 + \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big) \qquad 0 < t \leq T \\
&\leq C_{\alpha,\alpha}\rho + C_{0,\alpha}K(R)\Big(\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big)
\end{aligned}$$

[۱۸] Banach's fixed point theorem

با انتخاب T به گونه‌ای که $C_{۰,\alpha}K(R)\frac{T^{۱-\alpha}}{۱-\alpha} \leq \frac{۱}{۲}$ و تعیین $R = C_{\alpha,\alpha}\rho + ۱$ داریم:

$$\|G(v)(t)\|_\alpha \leq C_{\alpha,\alpha}\rho + \frac{۱}{۲} \leq C_{\alpha,\alpha}\rho + ۱ = R,$$

بنابراین نگاشت G از $\mathcal{B}$ به $\mathcal{B}$ است.

اگر $u, v \in \mathcal{B}$، به شیوه‌ای مشابه داریم:

$$\begin{aligned} G(u)(t) - G(v)(t) &= e^{-tA}u_۰ + \int_۰^t e^{-(t-\tau)A}M(u(\tau))\mathrm{d}\tau - e^{-tA}u_۰ - \int_۰^t e^{-(t-\tau)A}M(v(\tau))\mathrm{d}\tau \\ &= \int_۰^t e^{-(t-\tau)A}\left(M(u)(\tau) - M(v)(\tau)\right)\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} \|G(u)(t) - G(v)(t)\|_\alpha &\leq \int_۰^t \|e^{-(t-\tau)A}\|_{۰,\alpha}\, \|M(u)(\tau) - M(v)(\tau)\|_۰ \mathrm{d}\tau \\ &\leq C_{۰,\alpha}\, g(R)\|u - v\|_\alpha \int_۰^t (t-\tau)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau \\ &\leq C_{۰,\alpha}\, g(R)\|u - v\|_Y \left(۰ + \frac{t^{-\alpha+۱}}{-\alpha+۱}\right) \qquad ۰ < t \leq T \\ &\leq C_{۰,\alpha}\, g(R)\|u - v\|_Y \frac{T^{۱-\alpha}}{۱-\alpha}. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $C_{۰,\alpha}\, g(R)\frac{T^{۱-\alpha}}{۱-\alpha} \leq \frac{۱}{۲}$ یک انقباض داریم، زیرا:

$$\|G(u)(t) - G(v)(t)\|_\alpha \ \leq \frac{۱}{۲}\|u - v\|_Y \ \leq \|u - v\|_Y \ \leq R.$$

لذا G یک ادغام روی $\mathcal{B}$ است. در نتیجه G یک نقطه ثابت منحصر به فرد $u \in \mathcal{B}$ دارد. □

نتیجه ۳.۲.۲. *برای هر $u_۰ \in X_\alpha$ یک $T^* = T^*(u_۰) \in (۰, \infty]$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $T < T^*$ مساله (۲۷.۲) دارای جواب یکتا روی بازه $[۰, T]$ است. به‌علاوه اگر $T^* < \infty$، آنگاه*

$$\lim_{t \to T^*} \|u(t)\|_\alpha = \infty. \qquad (۲۹.۲)$$

برهان. با توجه به قضیه ۲.۲.۲، مساله (۲۷.۲) دارای جوابی روی بازه‌ی $[۰, T_۱]$ است، و چون $u(T_۱) \in X_\alpha$ است این جواب می‌تواند به بازه دوم $[T_۱, T_۲]$ وابسته باشد(زنجیروار)، و به‌همین ترتیب این جواب می‌تواند به بازه سوم $[T_۲, T_۳]$ وابسته باشد، والی آخر.

فرض کنید

$$T^* = \sup\{T : \text{مساله(۲۷.۲) روی بازه } (۰،T] \text{ دارای جواب است}\}$$

بزرگترین فاصله موجود باشد. اگر $T^* < \infty$ و $\lim_{t \to T^*} \|u(t)\|_\alpha \neq \infty$، آنگاه عدد R و دنباله $\{t_i\}$ به صورت $\lim_{i \to \infty} t_i = T^*$ و $\|u(t_i)\|_\alpha \leq R$ وجود دارند، بنابراین باتوجه به قضیه قبل جواب می‌تواند در بازه‌ای دورتر از T^* باشد، که با ماکزیمم بودن T^* در تناقض است. □

قضیه ۲.۲.۲ (یا نتیجه آن) بلافاصله قضیه وجود جامع [۱۹] زیر را نتیجه می‌دهد:

قضیه ۴.۲.۲. *اگر برای $u_\circ \in X_\alpha$ و T و R، جواب ممکن مساله (۲.۲۷) کران اولیه‌ی*

$$\|u(t)\|_\alpha \le R, \quad \circ \le t \le T,$$

را داشته باشد، آنگاه روی بازه $[\circ, T]$ دارای جواب منحصر به فردی است.

فرض کنید می‌توان یک کران اولیه کلی به‌دست آورد یعنی وجود دارد $\mathcal{R}$ به‌طوری که اگر $u \in C\Big([\circ, T], X_\alpha\Big)$ یک ریشه مساله (۲.۲۷) باشد، آنگاه

$$\|u(t)\|_\alpha \le \mathcal{R}, \qquad t \in [\circ, T].$$

سپس با استفاده مکرر از قضیه وجود محلی $\tau = \tau(\mathcal{R})$ ثابت می‌شود ریشه در واقع برای $t \in [\circ, T]$ وجود دارد. به طور دقیق‌تر چون با $\|u(t)\|_\alpha \le \mathcal{R}$ داریم: $\|u_\circ\|_\alpha \le \mathcal{R}$ بنابراین روی $[\circ, \tau]$ با $\tau = \tau(\mathcal{R})$، $u(t) = G(t, u_\circ)$ وجود دارد. مجددا $\|u(t)\|_\alpha \le \mathcal{R}$ داریم: $\|u(\tau)\|_\alpha \le \mathcal{R}$، بنابراین با به‌کار بردن قضیه وجود محلی با مقدار اولیه $u(\tau)$ در زمان $t = \tau$ داریم: در بازه $[\tau, ۲\tau]$، $G(t, u_\circ) = u(t) = G(t-\tau, u(\tau))$. بعد از تعدادی مراحل متناهی به زمان نهایی T می‌رسیم. بنابراین یک کران اولیه تضمین می‌کند که می‌توانیم از τ یکسان همواره استفاده کنیم.

[۱۹] global existence

فصل ۳

تقریب المان محدود برای معادله کان-هیلیارد-کوک خطی

۱.۳ چکیده

در این فصل معادله کان-هیلیارد-کوک خطی در متغیرهای فضایی با استفاده از روش المان محدود استاندارد گسسته‌سازی می‌شود و همگرایی قوی آن با توجه به یک سری فرضیات مناسب روی عملگر کوواریانس که از فرایند وینر ثابت شده برآورد می‌شود. همچنین به مطالعه گام‌های زمانی اویلر پسرو براساس نیم‌گروه‌های تحلیلی پرداخته می‌شود. هدف اصلی ما اثبات کران خطا برای معادله کان-هیلیارد است و نتایج به عنوان نتایج تقریب زده شده‌ای از پیچیدگی تصادفی که بخشی از جواب ضعیف معادله کان-هیلیارد-کوک غیرخطی است تفسیر می‌شود.

۲.۳ پیش‌نیازها

زمانی‌که به معادله کان-هیلیارد، اختلالی افزوده شود، معادله کان-هیلیارد-کوک [۱] حاصل می‌شود که به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u - \Delta v \mathrm{d}t = \mathrm{d}W, \quad \text{for } x \in \mathcal{D}, \quad t > \circ, \\ v + \Delta u - f(u) = \circ, \quad \text{for } x \in \mathcal{D}, \quad t > \circ, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \circ, \ \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = \circ, \quad \text{for } x \in \partial\mathcal{D}, \quad t > \circ, \\ u(.,\circ) = u_\circ. \end{cases} \tag{۱.۳}$$

که $u = u(x,t)$ و $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ و $\frac{\partial}{\partial n}$ نشان‌دهنده‌ی مشتق معمولی خارجی روی $\partial\mathcal{D}$ باشد.

[۱] Cahn-Hilliard-Cook equation

فرض کنید $\mathcal{D}$ دامنه کرانداری در $\mathbf{R}^d$ باشد و برای $d \leq ۳$ مرز به اندازه کافی هموار بوده و $f(s) = s^۳ - s$. هدف ما مطالعه تقریب عددی معادله کان-هیلیارد-کوک خطی با استفاده از روش المان محدود است که در آن $f = ۰$. با استفاده از چارچوب نیم‌گروه‌ها [۷] رابطه(۱.۳) را به صورت دقیق به دست می‌آوریم. فرض کنیم $\|.\|$ و $(.,.)$ به ترتیب نشان دهنده نرم معمولی و ضرب داخلی در فضای هیلبرت $H = L_۲(\mathcal{D})$ باشند و $H^s = H^s(\mathcal{D})$ فضای سوبولوف معمولی با نرم $\|.\|_s$ باشد، و $\dot{H}$ زیرفضایی از H باشد که بر ثابت‌ها عمود است،

$$\dot{H} = \{v \in H \mid (v, ۱) = ۰\}.$$

$P : H \longrightarrow \dot{H}$ را نگاشت متعامد در نظر می‌گیریم. عملگر خطی $A = -\Delta$ را با دامنه تعریف

$$D(A) = \{v \in H^۲ \mid \frac{\partial v}{\partial n} = ۰ \quad \text{on}\, \partial\mathcal{D}\},$$

درنظر بگیرید که خودالحاق، معین مثبت، و یک عملگر خطی بی‌کران روی $\dot{H}$ با معکوس فشرده است. زمانی که آن را به عنوان یک عملگر بی‌کران روی H در نظر می‌گیریم، نیمه معین مثبت با پایه‌های ویژه یکه‌متعامد $\{\varphi_j\}_{j=۰}^{\infty}$ و مقادیر ویژه متناظر $\{\lambda_j\}_{j=۰}^{\infty}$ می‌شود که

$$۰ = \lambda_۰ < \lambda_۱ \leq \lambda_۲ \leq ... \leq \lambda_j \leq ... \qquad \lambda_j \longrightarrow \infty,$$

اولین تابع ویژه آن یعنی $\varphi_۰ = |\mathcal{D}|^{-\frac{۱}{۲}}$ ثابت است. همچنین تعریف می‌کنیم:

$$|v|_s = \|A^{\frac{s}{۲}} v\| = \left(\sum_{j=۱}^{\infty} (\lambda_j^s (v, \varphi_j)^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}, \qquad s \in \mathbf{R}, \tag{۲.۳}$$

و

$$\dot{H}^s = \{v \in \dot{H} \quad \text{s.t} \quad |v|_s < \infty\}, \qquad s \geq ۰.$$

برای $s < ۰$ با توجه به $|.|_s$، $\dot{H}^s$ را بستار $\dot{H}$ تعریف می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$\dot{H}^۰ = \dot{H} \quad , \quad \|v\|^۲ = |v|_۰^۲ + (v, \varphi_۰)^۲.$$

برای اعداد صحیح $s \geq ۰$ می‌دانیم که $\dot{H}^s$ زیرفضایی از $H^s \cap \dot{H}$ است که به وسیله شرایط مرزی خاص و نرم‌های $|.|_s$ و $\|.\|_s$ که روی $\dot{H}^s$ معادل‌اند مشخص می‌شوند. به طور خاص داریم: $\dot{H}^۱ = H^۱ \cap \dot{H}$ و نرم‌های $\|A^{\frac{۱}{۲}} v\| = |v|_۱ = \|\nabla v\|$ در فضای $\dot{H}^۱$ معادل با $\|v\|_۱$ هستند.

برای $v \in H$،

$$e^{-tA^۲} v = \sum_{j=۰}^{\infty} e^{-t\lambda_j^۲} (v, \varphi_j)\varphi_j,$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین $\{E(t)\}_{t\geq 0} = \{e^{-tA^2}\}_{t\geq 0}$ نیم‌گروهی تحلیلی روی فضای H است که توسط $-A^2$ تولید می‌شود. توجه داریم:

$$E(t)Pv + (I-P)v = E(t)v = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j^2}(v,\varphi_j)\varphi_j + (v,\varphi_0)\varphi_0,$$

که $(I-P)v = |\mathcal{D}|^{-1}\int_{\mathcal{D}} v\mathrm{d}x$ میانگین v است.

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ فضای احتمالی فیلتر شده [۲] باشد، Q خودالحاق، نیمه معین مثبت، عملگر خطی کراندار روی H و $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ یک فرایند H –مقدار، Q –ونیر سازگار با فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ باشد.

اکنون معادله کان-هیلیارد-کوک (۱.۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathrm{d}X(t) + A^2X(t)\mathrm{d}t + Af(X(t))\mathrm{d}t = \mathrm{d}W(t), \qquad t>0; \quad X(0) = X_0. \tag{۳.۳}$$

با استفاده از نظریه نیم‌گروه‌ها [۷] جواب خفیف معادله به‌صورت زیر است:

$$X(t) = E(t)X_0 - \int_0^t E(t-s)Af(X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t E(t-s)\mathrm{d}W(s),$$

که $\int_0^t ...\mathrm{d}W$ نشان دهنده‌ی انتگرال Itô، H –مقدار است. این باعث می‌شود جواب به‌صورت زیر تجزیه شود:

$$X(t) = Y(t) + W_A(t)$$

، که $W_A(t) = \int_0^t E(t-s)\mathrm{d}W(s)$ یک پیچش تصادفی و

$$Y(t) = E(t)X_0 - \int_0^t E(t-s)Af(X(s))\mathrm{d}s,$$

در مساله ریشه‌یابی تصادفی

$$\dot{Y}(t) + A^2Y(t) + Af(Y(t) + W_A(t)) = 0, \quad t>0, \qquad Y(0) = X_0.$$

صدق می‌کند.

در اینجا هدف مطالعه پیچیدگی تصادفی $W_A(t)$ درمسایل غیرخطی مدنظر است. بنابراین در این بخش تقریب عددی از معادله کان-هیلیارد-کوک خطی :

$$\mathrm{d}X + A^2X\mathrm{d}t = \mathrm{d}W, \qquad t>0, \qquad X(0) = X_0, \tag{۴.۳}$$

با جواب خفیف:

$$X(t) = E(t)X_0 + \int_0^t E(t-s)\mathrm{d}W(s). \tag{۵.۳}$$

را مطالعه می‌کنیم. معادله غیرخطی نیز در فصل بعد مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

[۲] filtered

برای تقریب معادله کان-هیلیارد چهارچوب [۵] را دنبال می‌کنیم. فرض کنیم خانواده $\{S_h\}_{h>0}$ تخمینی از زیرفضاهای با بعدمتناهی H^1 و نیز $P_h : H \longrightarrow S_h$ نشانگر نگاشت متعامد باشد، آن‌گاه زیرفضای $\dot{S}_h$ را به‌صورت

$$\dot{S}_h = \{v_h \in S_h \mid (v_h, 1) = 0\},$$

و عملگر لاپلاس گسسته [۳] $A_h : S_h \longrightarrow \dot{S}_h$ را با رابطه

$$(A_h v_h, \eta) = (\nabla v_h, \nabla \eta), \qquad \forall v_h \in S_h \ , \ \eta \in \dot{S}_h,$$

تعریف می‌کنیم که A_h یک عملگر خودالحاق، معین مثبت روی $\dot{S}_h$، نیمه معین مثبت روی S_h، و دارای پایه متعامد ویژه $\{\varphi_{h,j}\}_{j=0}^{N_h}$ با مقادیر ویژه $\{\lambda_{h,j}\}_{j=0}^{N_h}$ به‌صورت

$$0 = \lambda_{h,0} < \lambda_{h,1} \leq \ldots \leq \lambda_{h,j} \leq \ldots \leq \lambda_{h,N_h}, \quad \phi_{h,0} = \phi_0 = |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}},$$

است. علاوه بر این، $E_h(t) : S_h \longrightarrow S_h$ را به‌صورت

$$\begin{aligned} E_h(t)v_h = e^{-tA_h^2}v_h &= \sum_{j=0}^{N_h} e^{-t\lambda_{h,j}}(v_h, \varphi_{h,j})\varphi_{h,j} \\ &= \sum_{j=1}^{N_h} e^{-t\lambda_{h,j}}(v_h, \varphi_{h,j})\varphi_{h,j} + (v_h, \varphi_0)\varphi_0, \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم که $\{E_h(t)\}_{t\geq 0}$ نیم‌گروه تحلیلی تولید شده توسط $-A_h^2$ است. $P_h : \dot{H} \longrightarrow \dot{S}_h$ و

$$E_h(t)P_h v = E_h(t)P_h P v + (I-P)v.$$

تقریب المان‌های محدود معادله کان-هیلیارد-کوک خطی (۴.۳) به صورت زیر است: هدف یافتن $X_h(t) \in S_h$ به‌طوری‌که

$$\mathrm{d}X_h + A_h^2 X_h \mathrm{d}t = P_h \mathrm{d}W, \quad t > 0, \quad X_h(0) = P_h X_0. \tag{۶.۳}$$

جواب خفیف (۶.۳) به صورت زیر است:

$$X_h(t) = E_h(t)P_h X_0 + \int_0^t E_h(t-s)P_h \mathrm{d}W(s), \tag{۷.۳}$$

که:

$$\int_0^t E(t-s)(I-P)\mathrm{d}W(s) = (I-P)\int_0^t \mathrm{d}W(s) = (I-P)W(t),$$

بنابراین

$$\int_0^t E(t-s)\mathrm{d}W(s) - \int_0^t E(t-s)P\mathrm{d}W(s) = (I-P)W(t).$$

[۳] discrete Laplacian

از طرفی
$$E(t)X_\circ = E(t)PX_\circ + (I-P)X_\circ,$$
بنابراین می‌توانیم (۵.۳) را به صورت زیر بنویسیم:
$$\begin{aligned} X(t) &= E(t)X_\circ + \int_\circ^t E(t-s)\mathrm{d}W(s),\\ X(t) &= E(t)PX_\circ + (I-P)X_\circ + (I-P)W(t) + \int_\circ^t E(t-s)P\mathrm{d}W(s). \end{aligned} \tag{۸.۳}$$
و به همین ترتیب برای (۷.۳) می‌توانیم بنویسیم:
$$\begin{aligned} X_h(t) &= E_h(t)P_hX_\circ + \int_\circ^t E_h(t-s)P_h\mathrm{d}W(s),\\ X_h(t) &= E_h(t)P_hPX_\circ + (I-P)X_\circ + (I-P)W(t) + \int_\circ^t E_h(t-s)P_hP\mathrm{d}W(s). \end{aligned}$$
تجزیه و تحلیل خطا را می‌توان براساس فرمول زیر نوشت که در فضای $\dot{H}$ و $\dot{S}_h$ کاربرد دارد؛
$$X_h(t) - X(t) = (E_h(t)P_h - E(t))PX_\circ + \int_\circ^t (E_h(t-s)P_h - E(t-s))P\mathrm{d}W(s). \tag{۹.۳}$$
توجه کنید که محاسبات عددی انجام شده در S_h و $\dot{S}_h$ تنها در تجزیه و تحلیل مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض کنیم $k = \delta t$ یک گام زمانی باشد و داریم:
$$t_n = nk\ ,\ \delta W_n = W(t_n) - W(t_{n-۱})\ ,\ \delta X_{h,n} = X_{h,n} - X_{h,n-۱},$$
با به‌کارگیری روش اویلر روی (۶.۳) داریم:
$$\delta X_{h,n} + A_h^۲ X_{h,n}\delta t = P_h\delta W_n, \qquad n \geq ۱, \quad X_{h,\circ} = P_hX_\circ. \tag{۱۰.۳}$$
با درنظر گرفتن $E_{kh} = (I + A_h^۲)^{-۱}$ یک نوع مجزا از جواب‌های خفیف زیر را به‌دست می‌آوریم:
$$X_{h,n} = E_{kh}^n P_h X_\circ + \sum_{j=۱}^{n} E_{kh}^{n-j+۱} P_h \delta W_j.$$
در بخش سوم فرض می‌کنیم $\{S_h\}_{h>\circ}$ یک برآورد خطا از مرتبه $O(h^r)$ به عنوان پارامتر مش $h \longrightarrow \circ$ برای برخی از اعداد صحیح $r \geq ۲$ به دست می‌آورد. سپس برآورد خطا را برای نیم‌گروه $E_h(t)$ با حداقل شرط نظم نشان می‌دهیم. به‌طور دقیق‌تر در قضیه ۱.۳.۳ برای $\beta \in [۱, r]$ و تمام $t \geq \circ$ داریم:
$$\begin{aligned} \|F_h(t)v\| &\leq Ch^\beta |v|_\beta, & v \in \dot{H}^\beta,\\ \left(\int_\circ^t \|F_h(\tau)v\|^۲ \mathrm{d}\tau\right)^{\frac{۱}{۲}} &\leq C|\log h| h^\beta |v|_{\beta-۲}, & v \in \dot{H}^{\beta-۲} \end{aligned}$$
که $F_h(t) = E_h(t)P_h - E(t)$ عملگر خطا در (۹.۳) است.

برآوردهای مشابه برای تقریب اویلر ضمنی در قضیه ۲.۳.۳ به‌دست آمده است.

در بخش چهارم از روش‌های توسعه یافته استفاده می‌کنیم و با استفاده از این تخمین‌ها برآورد همگرایی قوی را برای تقریب معادله کان-هیلیارد-کوک خطی اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $L_۲(\Omega, H)$ فضایی از متغیرهای تصادفی H -مقداری باشد که به طور مربعی انتگرال پذیر بوده و دارای نرم زیر باشند:

$$\|X\|_{L_۲(\Omega,H)} = (E(\|X\|^۲))^{\frac{۱}{۲}} = \left(\int_\Omega \|X(w)\|_\beta^۲ \mathrm{d}P(w)\right)^{\frac{۱}{۲}},$$

و $\|T\|_{HS}$ نشان دهنده نرم هیلبرت-اشمیت [۴] از عملگرهای خطی کراندار روی H می‌باشد، و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|T\|_{HS}^۲ = \sum_{j=۱}^{\infty} \|T\phi_j\|^۲,$$

که $\{\phi_j\}_{j=۱}^{\infty}$ یک پایه یکه متعامد دلخواه برای H باشد. در قضیه ۱.۴.۳ نظم فضایی از جواب خفیف (۵.۳) را بررسی می‌کنیم و می‌بینیم:

$$\|X(t)\|_{L_۲(\Omega,\dot{H}^\beta)} \le C\left(\|X_\circ\|_{L_۲(\Omega,\dot{H}^\beta)} + \|A^{\beta-۲/۲}Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}\right), \quad \text{for } \beta > \circ.$$

علاوه بر این در قضیه ۲.۴.۳ همگرایی قوی جواب خفیف X_h در رابطه (۷.۳) نشان می‌دهیم:

$$\|X_h(t) - X(t)\|_{L_۲(\Omega,H)} \le Ch^\beta\left(\|X_\circ\|_{L_۲(\Omega,\dot{H}^\beta)} + |\log\ h|\|A^{\frac{\beta-۲}{۲}}Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}\right), \quad \beta \in [۱, r].$$

توجه داریم که این کران‌ها با توجه به $t \ge \circ$ و $t_n \ge \circ$ یکنواخت‌اند. در قضیه ۳.۴.۳ نیز همگرایی قوی جواب خفیف را برای حالت کاملا گسسته به‌دست می‌آوریم. برای $\beta \in [۱, min(r, ۴)]$،

$$\|X_{h,n} - X(t_n)\|_{L_۲(\Omega,H)} \le \left(C|\log\ h|\ h^\beta + C_{k,\beta}k^{\beta/۴}\right)\left(\|X_\circ\|_{L_۲(\Omega,\dot{H}^\beta)} + \|A^{\beta-۲/۲}Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}\right)$$

و

$$C_{\beta,k} = \frac{C}{۴-\beta} \quad \text{for} \quad \beta < ۴ \qquad C_{\beta,k} = C|\log k| \quad \text{for} \quad \beta = ۴$$

برای دیدن این فرضیات دو حالت خاص را محاسبه می‌کنیم. برای $Q = I$ (اختلال ناهمبسته فضایی [۵] ، یا اختلال سفید زمان-فضا [۶]) با استفاده از تقریب $\lambda_j \sim j^{\frac{۱}{۲}}$ داریم:اگر $\beta < ۲ - \frac{۱}{۲}$، آنگاه

$$\|A^{\frac{\beta}{۲}}Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}^۲ = \|A^{\frac{\beta}{۲}}\|_{HS}^۲ = \sum_{j=۱}^{\infty} \lambda_j^{\beta-۲} \sim \sum_{j=۱}^{\infty} j^{(\beta-۲)\frac{۲}{d}} < \infty.$$

بنابراین برای مثال اگر $d = ۳$ باشد، آنگاه $\beta < \frac{۱}{۲}$. از سوی دیگر با در نظر گرفتن $\beta = ۲$ داریم:

$$Tr(Q) = \|Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}^۲ < \infty.$$

[۴] Hilbert-Schmidt norm
[۵] spatially uncorrelated noise
[۶] space-time white noise

مطالعات زیادی از روش‌های عددی برای معادله کان-هیلیارد کوک وجود دارد. در روش [۶] در همگرایی احتمال برای طرح‌های مختلف معادلات غیرخطی در ابعاد مختلف اثبات شده و در [۱۰] همگرایی قوی را برای روش المان محدود برای معادله خطی در $\mathcal{D}-۱$ اثبات می‌کند.

۳.۳ برآورد خطا برای نیم گروه کان-هیلیارد

این بخش را با معرفی برخی از نکات و نابرابری‌های لازم بدون اثبات شروع می‌کنیم:

۱. فرض کنید $\{E(t)\}_{t\geq ۰} = \{e^{-tA^۲}\}_{t\geq ۰}$ و $\{E_h(t)\}_{t\geq ۰} = \{e^{-tA_h^۲}\}_{t\geq ۰}$ نیم گروه‌های تولید شده توسط $-A^۲$ و $-A_h^۲$ باشند.

۲. با توجه به ویژگی هموار بودن، ثابت‌های c، C مستقل از h و t وجود دارند به طوری که

$$\|A_h^{۲\beta}E_h(t)P_hPv\| + \|A^{۲\beta}E(t)Pv\| \leq Ct^{-\beta}e^{-ct}\|v\|, \qquad \beta \geq ۰ \tag{۱۱.۳}$$

$$\int_۰^t \|A_hE_h(s)P_hPv\|^۲ \mathrm{d}s + \int_۰^t \|AE(s)Pv\|^۲ \leq C\|v\|^۲ \tag{۱۲.۳}$$

۳. فرض کنید $R_h : \dot{H}^۱ \longrightarrow \dot{S}_h$ نگاشت ریتس [۷] تعریف شده به صورت زیر باشد:

$$(\nabla R_h v, \nabla \chi) = (\nabla v, \nabla \chi) \qquad \forall \chi \in \dot{S}_h$$

در نتیجه واضح است که: $R_h = A_h^{-۱}P_hA$

۴. فرض کنید برای برخی از اعداد صحیح $r \geq ۲$ با توجه به نرم تعریف شده در (۲.۳) برای $v \in \dot{H}^\beta$ و $۱ \leq \beta \leq r$ می‌توانیم کران خطا را به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$\|R_hv - v\| \leq Ch^\beta\, |v|_\beta. \tag{۱۳.۳}$$

این با $r = ۲$ برای روش المان محدود لاگرانژ خطی تکه‌ای استاندارد در یک دامنه چند ضلعی محدب کراندار صدق می‌کند. برای عناصر مرتب بالاتر شرایط پیچیده‌تر است و با استفاده از روش المان محدود در قضیه زیر خطای نیم گروه کان-هیلیارد را برای حالت نیم گسسته برآورد می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. *فرض کنید $F_h(t) = E_h(t)P_h - E(t)$. در این صورت C و $h_۰$ وجود دارند به طوری که برای $h \leq h_۰$، $۱ \leq \beta \leq r$ و $t \geq ۰$ داریم:*

$$\|F_h(t)v\| \leq Ch^\beta|v|_\beta, \qquad v \in \dot{H}^\beta, \tag{۱۴.۳}$$

$$\left(\int_۰^t \|F_h(\tau)v\|^۲ \mathrm{d}\tau\right)^{\frac{۱}{۲}} \leq C|\log\ h|\ h^\beta\ |v|_{\beta-۲}, \qquad v \in \dot{H}^{\beta-۲}. \tag{۱۵.۳}$$

---
[۷] Ritz projector

از آنجایی‌که برای $v \in H$، $F_h(t)v = F_h(t)Pv$ است، بنابراین کافی است $v \in \dot{H}$ را در نظر بگیریم. برای این‌کار فرض می‌کنیم $\beta \geq ۱$ که در رابطه (۱۵.۳) برای تعریف $E_h(t)P_h v$ باید حداقل $v \in \dot{H}^{-۱}$ باشد.

برهان. فرض کنیم $u(t) = E(t)v$ و $u_h(t) = E_h(t)P_h v$، جواب‌هایی از

$$u_t + A^{۲}u = ۰ \ , \ t > ۰, \qquad u(۰) = v \tag{۱۶.۳}$$

و

$$u_{h,t} + A_h^{۲}u_h = ۰ \ , \ t > ۰, \qquad u_h(۰) = P_h v, \tag{۱۷.۳}$$

باشند که u_t بیانگر مشتق نسبت به زمان است و $e(t) = u_h(t) - u(t)$. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\begin{cases} \|e(t)\| \leq C\ h^{\beta}|v|_{\beta}, & v \in \dot{H}^{\beta}, \\ \left(\int_{۰}^{t} \|e(\tau)\|^{۲}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{۱}{۲}} \leq C|\log\ h|\ h^{\beta}\ |v|_{\beta-۲}, & v \in \dot{H}^{\beta-۲}. \end{cases}$$

ابتدا فرض کنیم $G = A^{-۱}P$ و $G_h = A_h^{-۱}P_h P$ با ضرب (۱۶.۳) در G و (۱۷.۳) در G_h داریم:

$$\begin{aligned} G(u_t + A^{۲}u) &= Gu_t + A^{-۱}PA^{۲}u = Gu_t + A^{-۱}PAAu \\ &= Gu_t + A^{-۱}AAu = Gu_t + Au = ۰ \end{aligned}$$

و نیز

$$G_h^{۲}(u_{h,t} + A_h^{۲}u_h) = ۰$$

لذا

$$\begin{aligned} &G_h^{۲}u_{h,t} + (A_h^{-۱}P_h P)^{۲}A_h^{۲}u_h = G_h^{۲}u_{h,t} + (A_h^{-۱})^{۲}P_h^{۲}P^{۲}A_h^{۲}u_h \\ &G_h^{۲}u_{h,t} + (A_h^{-۱})^{۲}P_h^{۲}A_h^{۲}u_h = G_h^{۲}u_{h,t} + P_h^{۲}u_h \\ &G_h^{۲}u_{h,t} + P_h P_h u_h = G_h^{۲}u_{h,t} + P_h u_h \\ &G_h^{۲}u_{h,t} + u_h = ۰ \end{aligned}$$

از این‌رو داریم:

$$\begin{aligned} G_h^{۲}e_t + e &= G_h^{۲}(u_{h,t} - u_t) + u_h - u = G_h^{۲}u_{h,t} - G_h^{۲}u_t + u_h - u \\ &= (-G_h^{۲}u_t - u) + (G_h^{۲}u_{h,t} + u_h) = I + II, \end{aligned}$$

حال I و II را محاسبه می‌کنیم؛

بادرنظرگرفتن

$$
\begin{aligned}
&Gu_t + Au = \circ \\
&Gu_t = -Au \\
&A^{-۱}Gu_t = -u
\end{aligned}
$$

داریم؛

$$
\begin{aligned}
-G_h^{۲}u_t - u &= -G_h^{۲}u_t + A^{-۱}Gu_t \\
&= G_h^{۲}A^{۲}u - A^{-۱}GA^{۲}u \\
&= (G_h^{۲}A^{۲} - A^{-۱}GA^{۲})u \\
&= (G_hA_h^{-۱}P_hPA^{۲} - A^{-۱}A^{-۱}PA^{۲})u \\
&= (G_hA - I)u
\end{aligned}
$$

با استفاده مجدد از $Gu_t + Au = \circ$ داریم:

$$G_h(Gu_t + Au) = \circ$$

حال با در نظر گرفتن $G_hA = A_h^{-۱}P_hPA = A_h^{-۱}P_hA = A_h^{-۱}A = I$ داریم:

$$G_h(IGu_t + Au) = G_h(G_hAGu_t - Gu_t) = \circ$$

لذا $G_h(G_hA - I)Gu_t = \circ$ در نتیجه

$$G_h^{۲}e_t + e = (G_hA - I)u - G_h(G_hA - I)Gu_t$$

بنابراین با در نظر گرفتن

$$R_h = G_hA \quad \rho = (R_h - I)u \quad \eta = -(R_h - I)Gu_t$$

داریم:

$$
\begin{aligned}
&G_h^{۲}e_t + e = (R_h - I)u - G_h(R_h - I)Gu_t \\
&\Rightarrow G_h^{۲}e_t + e = \rho + G_h\eta \qquad (۱۸.۳)
\end{aligned}
$$

با ضرب داخلی (۱۸.۳) در e_t به‌دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&(G_h^{۲}e_t, e_t) = (G_he_t, G_he_t) = \|G_he_t\|^{۲} \\
&(e, e_t) = (e, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e)
\end{aligned}
$$

از طرفی داریم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e,e) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ e,e) + (e,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ e) = ۲(e,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ e)$$

بنابراین

$$\|G_h e_t\|^۲ + \frac{۱}{۲}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e,e) = (\rho,e) + (\eta, G_h e_t).$$

از آنجا که $(\eta, G_h e_t) \le \|\eta\|\ \|G_h e_t\| \le \frac{۱}{۲}\|\eta\|^۲ + \frac{۱}{۲}\|G_h e_t\|^۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$\|G_h e_t\|^۲ + \frac{۱}{۲}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \|e\|^۲ \le \|\eta\|^۲ + \frac{۱}{۲}\|G_h e_t\|^۲ + (\rho, e_t),$$

$$\|G_h e_t\|^۲ + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \|e\|^۲ \le ۲(\rho, e_t) + \|\eta\|^۲.$$

با ضرب این نامساوی در t داریم :

$$t\|G_h e_t\|^۲ + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|e\|^۲ \le ۲t(\rho, e_t) + t\|\eta\|^۲.$$

از طرفی:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\|e\|^۲) = \|e\|^۲ + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \|e\|^۲.$$

و نیز داریم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t(\rho,e)) = (\rho,e) + t(\rho_t,e) + t(\rho,e_t).$$

لذا

$$t\|G_h e_t\|^۲ + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\|e\|^۲) - \|e\|^۲ \le ۲\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t(\rho,e)) + ۲|(\rho,e)| + ۲|t(\rho_t,e)| + t\|\eta\|^۲.$$

اما

$$|(\rho,e)| \le \|\rho\|\|e\| \le \frac{۱}{۲}\ \|\rho\|^۲ + \frac{۱}{۲}\ \|e\|^۲,$$

$$|t(\rho_t,e)| \le t\|\rho_t\|\ \|e\| \le \frac{۱}{۲}\ t^۲\|\rho_t\|^۲\frac{۱}{۲} + \|e\|^۲.$$

در نتیجه

$$t\|G_h e_t\|^۲ + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\|e\|^۲) - \|e\|^۲ \le ۲\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t(\rho,e)) + \|\rho\|^۲ + \|e\|^۲ + t^۲\|\rho_t\|^۲ + \|e\|^۲ + t\|\eta\|^۲.$$

لذا

$$t\|G_h e_t\|^۲ + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\|e\|^۲) \le ۲\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t(\rho,e)) + \|\rho\|^۲ + t^۲\|\rho_t\|^۲ + ۳\|e\|^۲ + t\|\eta\|^۲$$

با انتگرال‌گیری روی $[\circ, t]$ و بااستفاده از نامساوی یانگ [۸] (نامساوی یانگ : اگر $a, b > \circ$ و اعداد p و q حقیقی و مثبت باشند به‌نحوی که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ آنگاه $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$) داریم:

$$2t(\rho, e) \leq 2(\frac{1}{2}t\|\rho\|^2 + \frac{1}{2}t\|e^2\|).$$

بنابراین

$$\int_\circ^t \tau\|G_h e_t\|^2 \mathrm{d}\tau + t\|e\|^2 \leq t\|\rho\|^2 + t\|e\|^2 + \int_\circ^t \|\rho^2\|\mathrm{d}\tau + \int_\circ^t \tau^2\|\rho_t\|^2 \mathrm{d}\tau$$
$$+ 3\int_\circ^t \|e\|^2 \mathrm{d}\tau + \int_\circ^t \tau\|\eta\|^2 \mathrm{d}\tau.$$

از این رو

$$t\|e\|^2 \leq Ct\|\rho\|^2 + C\int_\circ^t (\|\rho\|^2 + \tau^2\|\rho_t\|^2 + \tau\|\eta\|^2 + \|e\|^2)\mathrm{d}\tau - \int_\circ^t \tau\|G_h e_t\|^2 \mathrm{d}\tau,$$

پس

$$t\|e\|^2 \leq Ct\|\rho\|^2 + C\int_\circ^t \left(\|\rho\|^2 + \tau^2\|\rho_t\|^2 + \tau\|\eta\|^2 + \|e\|^2\right)\mathrm{d}\tau. \qquad (۱۹.۳)$$

باید کران بالایی برای $\int_\circ^t \|e\|^2 \mathrm{d}\tau$ بدست آوریم. (۱۸.۳) را در e ضرب می‌کنیم:

$$(G_h^2 e_t + e = \rho + G_h\eta)e$$
$$(G_h^2 e_t, e) + (e, e) = (\rho, e) + (G_h\eta, e)$$
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|G_h e_t\|^2 + \|e\|^2 \leq \|\rho\|\|e\| + \|\eta\|\|G_h e\|$$
$$\leq \frac{1}{2}\|\rho\|^2 + \frac{1}{2}\|e\|^2 + \|\eta\| \max_{\circ\leq\tau\leq t}\|G_h e\|$$

بنابراین

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|G_h e\|^2 + \|e\|^2 \leq \|\rho\| + 2\|\eta\| \max_{\circ\leq\tau\leq t}\|G_h e\|. \qquad (۲۰.۳)$$

با توجه به اینکه $G_h e(\circ) = A_h^{-1}P_h(P_h - I)v = \circ$، با انتگرال گیری از (۲۰.۳) داریم:

$$\|G_h e\|^2 + \int_\circ^t \|e\|^2 \mathrm{d}\tau \leq \int_\circ^t \|\rho\|^2 \mathrm{d}\tau + \max_{\circ\leq\tau\leq t}\|G_h e\|^2 + (\int_\circ^t \|\eta\|\mathrm{d}\tau)^2,$$

بادرنظرگرفتن $\max_{\circ\leq\tau\leq t}\|G_h e\|^2 = \|G_h e\|^2$ چون t دلخواه است،

$$\int_\circ^t \|e\|^2 \mathrm{d}\tau \leq \int_\circ^t \|\rho\|^2 \mathrm{d}\tau + (\int_\circ^t \|\eta\|\mathrm{d}\tau)^2, \qquad (۲۱.۳)$$

با قرار دادن(۲۱.۳) در (۱۹.۳) داریم:

$$t\|e\|^2 \leq Ct\|\rho\|^2 + C\int_\circ^t (\|\rho\|^2 + \tau^2\|\rho_t\|^2 + \tau\|\eta\|^2)\mathrm{d}\tau + C(\int_\circ^t \|\eta\|\mathrm{d}\tau)^2, \qquad (۲۲.۳)$$

[۸] Young's inequality

برای محاسبه سمت راست عبارت فوق، $v \in \dot{H}^{\beta}$ همچنین $\rho = (R_h - I)u$ و با استفاده از (۱۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\|\rho(t)\| &= \|(R_h - I)u\| = \|R_h u - u\| \\ &\leq Ch^{\beta}|u|_{\beta} = Ch^{\beta}\|A^{\frac{\beta}{۲}}u(t)\| \\ &= Ch^{\beta}\|A^{\frac{\beta}{۲}}E(t)v\| \leq Ch^{\beta}\|A^{\frac{\beta}{۲}}v\| \\ &= Ch^{\beta}\|A^{\frac{\beta}{۲}}v\| = Ch^{\beta}|v|_{\beta}\end{aligned}$$

پس

$$\|\rho(t)\| \leq Ch^{\beta}|u|_{\beta} \leq Ch^{\beta}\|E(t)A^{\frac{\beta}{۲}}v\| \leq Ch^{\beta}\|A^{\frac{\beta}{۲}}v\| \leq Ch^{\beta}|v|_{\beta}, \quad u \in \dot{H}^{\beta}, \quad ۱ \leq \beta \leq r. \tag{۲۳.۳}$$

بنابراین:

$$t\|\rho\|^{۲} \leq Ch^{۲\beta}\, t|v|_{\beta}^{۲}, \qquad \int_{\circ}^{t}\|\rho\|^{۲}\mathrm{d}\tau \leq Ch^{۲\beta}\, t|v|_{\beta}^{۲}.$$

به‌طورمشابه با توجه به (۱۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\|\rho_t(t)\| &= \|(R_h - I)u_t\| = \|R_h u_t - u_t\| \leq Ch^{\beta}|u_t|_{\beta} \\ &= Ch^{\beta}\|A^{\frac{\beta}{۲}}\ u_t\| = Ch^{\beta}\|A^{\frac{\beta}{۲}}A^{۲}u\| = Ch^{\beta}\|A^{\frac{\beta}{۲}}A^{۲}E(t)v\| \\ &= Ch^{\beta}t^{-۱}\|A^{\frac{\beta}{۲}}v\| = Ch^{\beta}t^{-۱}\|A^{\frac{\beta}{۲}}v\| = Ch^{\beta}t^{-۱}|v|_{\beta},\end{aligned}$$

لذا

$$\|\rho_t(t)\|^{۲} \leq Ch^{۲\beta}t^{-۲}|v|_{\beta}^{۲}$$

و نیز

$$t^{۲}\|\rho_t(t)\|^{۲} \leq Ch^{۲\beta}|v|_{\beta}^{۲}.$$

با انتگرال‌گیری روی $[\circ, t]$ داریم:

$$\int_{\circ}^{t}\tau^{۲}\|\rho_t(t)\|^{۲}\mathrm{d}\tau \leq Ch^{۲\beta}t|v|_{\beta}^{۲}. \tag{۲۴.۳}$$

به علاوه:

$$\eta = -(R_h - I)Gu_t = -(R_h - I)G(-A^{۲}u) = (R_h - I)GA^{۲}E(t)v.$$

$$\begin{aligned}\|\eta(t)\| &= \|(R_h - I)Gu_t\| \leq Ch^\beta |Gu_t|_\beta \\ &= Ch^\beta \|A^{\frac{\beta}{۲}} Gu_t\| = Ch^\beta \|A^{\frac{\beta}{۲}} GA^۲ u\| \\ &= Ch^\beta \|A^{\frac{\beta}{۲}} GA^۲ E(t)v\| = Ch^\beta \|A^{\frac{\beta}{۲}} PAE(t)v\| \\ &= Ch^\beta \|A^{\frac{\beta}{۲}} AE(t)v\| = Ch^\beta t^{-\frac{۱}{۲}} \|A^{\frac{\beta}{۲}} v\| \\ &= Ch^\beta t^{-\frac{۱}{۲}} |v|_\beta\end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_۰^t \|\eta\| \mathrm{d}\tau \leq Ch^\beta |v|_\beta t^{\frac{۱}{۲}}.$$

دو طرف را به توان دو می‌رسانیم،

$$\Big(\int_۰^t \|\eta\| \mathrm{d}\tau\Big)^۲ \leq Ch^{۲\beta} t\; |v|_\beta^۲,$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\|\eta\|^۲ &\leq Ch^{۲\beta} t^{-۱} |v|_\beta^۲, \\ t\|\eta\|^۲ &\leq Ch^{۲\beta} |v|_\beta^۲, \\ \int_۰^t \tau \|\eta\|^۲ \mathrm{d}\tau &\leq Ch^{۲\beta} t\; |v|_\beta^۲.\end{aligned}$$

با قرار دادن عبارات فوق در (۲۲.۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$t\|e\|^۲ \leq Ch^{۲\beta} t\; |v|_\beta^۲ + Ch^{۲\beta} t\; |v|_\beta^۲ + Ch^{۲\beta} t\; |v|_\beta^۲ + Ch^{۲\beta} t\; |v|_\beta^۲ + Ch^{۲\beta} t\; |v|_\beta^۲$$

لذا

$$\begin{aligned}t\|e\|^۲ &\leq Ch^{۲\beta} t |v|_\beta^۲, \\ \|e\|^۲ &\leq Ch^{۲\beta} |v|_\beta^۲, \\ \|e\| &\leq Ch^\beta |v|_\beta.\end{aligned}$$

بنابراین حکم اول ثابت شد. برای اثبات (۱۵.۳) بافرض $v \in \dot{H}^{\beta-۲}$، رابطه (۲۱.۳) رادرنظرمی‌گیریم. با استفاده از روابط (۱۲.۳) و (۱۳.۳) داریم:

$$\int_۰^t \|e\|^۲ \mathrm{d}\tau \leq \int_۰^t \|\rho\|^۲ \mathrm{d}\tau + \Big(\int_۰^t \|\eta\| \mathrm{d}\tau\Big)^۲, \qquad v \in \dot{H}^{\beta-۲}$$

پس

$$Ch^{۲\beta} |v|_{\beta-۲}^۲ \int_۰^t \tau^{-۱} \mathrm{d}\tau = Ch^{۲\beta} |v|_{\beta-۲}^۲ (Ln\; t) \leq Ch^{۲\beta} |v|_{\beta-۲}^۲.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{t}\|\rho\|^{۲}\mathrm{d}\tau &= \int_{۰}^{t}\|(R_h-I)u\|^{۲}\mathrm{d}\tau \leq \int_{۰}^{t}Ch^{۲\beta}|u|_{\beta}^{۲}\mathrm{d}\tau\\ &= \int_{۰}^{t}Ch^{۲\beta}\|A^{\frac{\beta}{۲}}u\|^{۲}\mathrm{d}\tau = \int_{۰}^{t}Ch^{۲\beta}\|A^{\frac{\beta}{۲}}E(\tau)v\|^{۲}\mathrm{d}\tau\\ &= \int_{۰}^{t}Ch^{۲\beta}\|AE(\tau)vA^{\frac{\beta-۲}{۲}}\|^{۲}\mathrm{d}\tau = \int_{۰}^{t}Ch^{۲\beta}\tau^{-۱}\|vA^{\frac{\beta-۲}{۲}}\|^{۲}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

یعنی

$$\int_{۰}^{t}\|\rho\|^{۲}\mathrm{d}\tau \leq Ch^{۲\beta}\int_{۰}^{t}|u|_{\beta}^{۲}\mathrm{d}\tau = Ch^{۲\beta}\int_{۰}^{t}\|AE(\tau)A^{\beta-۲/۲}\ v\|^{۲}\mathrm{d}\tau \leq Ch^{۲\beta}|u|_{\beta-۲}^{۲}. \quad (۲۵.۳)$$

اکنون $\int_{۰}^{t}\|\eta\|\mathrm{d}\tau$ را محاسبه می کنیم. به این منظور، با فرض $۱ < \beta \leq r$ و $۱ \leq \gamma < \beta$ با درنظر گرفتن (۱۱.۳) و (۱۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{t}\|\eta\|\mathrm{d}\tau &= \int_{۰}^{t}\|(R_h-I)Gu_t\|\mathrm{d}\tau \leq \int_{۰}^{t}Ch^{\gamma}|Gu_t|_{\gamma}\mathrm{d}\tau\\ &= \int_{۰}^{t}Ch^{\gamma}\|A^{\gamma/۲}Gu_t\| = \int_{۰}^{t}Ch^{\gamma}\|A^{\gamma/۲}GA^{۲}u\|\\ &= \int_{۰}^{t}Ch^{\gamma}\|A^{\gamma/۲}GA^{۲}E(\tau)v\| = \int_{۰}^{t}Ch^{\gamma}\|A^{\gamma/۲}A^{-۱}PA^{۲}E(\tau)v\|\\ &= \int_{۰}^{t}Ch^{\gamma}\|A^{\gamma/۲}AE(\tau)v\| = \int_{۰}^{t}Ch^{\gamma}\|A^{۲-\frac{\beta-\gamma}{۲}}\ E(\tau)vA^{\frac{\beta-۲}{۲}}\|\\ &= Ch^{\gamma}|v|_{\beta-۲}\int_{۰}^{t}\|A^{۲-\frac{\beta-\gamma}{۲}}\ E(\tau)\|\mathrm{d}\tau = Ch^{\gamma}|v|_{\beta-۲}\int_{۰}^{t}\tau^{-۱+\frac{\beta-\gamma}{۴}}\ e^{-c\tau}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{t}\|\eta\|\mathrm{d}\tau &\leq Ch^{\gamma}\int_{۰}^{t}|Gu_t|_{\gamma}\mathrm{d}\tau\\ &= Ch^{\gamma}\int_{۰}^{t}\|A^{۲-\frac{\beta-\gamma}{۲}}\ E(\tau)A^{\frac{\beta-۲}{۲}}\ v\|\mathrm{d}\tau\\ &\leq Ch^{\gamma}|u|_{\beta-۲}\int_{۰}^{t}\tau^{-۱+\frac{\beta-\gamma}{۴}}\ e^{-c\tau}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

که با در نظر گرفتن $s=\tau^{\frac{\beta-\gamma}{۴}} \to \tau = s^{\frac{۴}{\beta-\gamma}}$ داریم، $\mathrm{d}\tau = \frac{۴}{\beta-\gamma}s^{\frac{۴}{\beta-\gamma}-۱}\mathrm{d}s$ بنابراین

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{t}\tau^{-۱+\frac{\beta-\gamma}{۴}}e^{-c\tau}\mathrm{d}\tau &= \int_{۰}^{t}s^{\frac{-۴}{\beta-\gamma}}(s^{\frac{۴}{\beta-\gamma}})^{\frac{\beta-\gamma}{۴}}e^{-cs^{\frac{\beta-\gamma}{۴}}}\frac{۴}{\beta-\gamma}s^{\frac{۴}{\beta-\gamma}-۱}\mathrm{d}s\\ &= \frac{۴}{\beta-\gamma}\int_{۰}^{t^{\frac{\beta-\gamma}{۴}}}e^{-cs^{\frac{۴}{\beta-\gamma}}}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$0 < \beta - \gamma \le r - 1$، که اگر $0 < \beta - \gamma \le r - 1$،

$$\int_0^t \tau^{-1+\frac{\beta-\gamma}{4}} e^{-ct}\mathrm{d}\tau \le \frac{c}{\beta-\gamma}\int_0^\infty e^{-cs^{\frac{4}{r-1}}}\mathrm{d}s,$$

از اینرو، با C مستقل از β داریم:

$$\int_0^t \|\eta\|\mathrm{d}\tau \le \frac{Ch^\gamma}{\beta-\gamma}|v|_{\beta-2}. \qquad (۲۶.۳)$$

حال فرض کنیم $\frac{1}{\beta-\gamma} = |\log\ h| = -\log\ h$، بنابراین اگر $h \longrightarrow 0$، آنگاه $\gamma \longrightarrow \beta$ و

$$\gamma \log\ h = (\gamma - \beta + \beta)\log\ h = 1 + \beta \log\ h,$$

بنابراین داریم:

$$\frac{h^\gamma}{\beta-\gamma} = |\log\ h| e^{\gamma \log\ h} = |\log\ h| e^{1+\beta\log\ h} \le C|\log\ h| h^\beta.$$

با قراردادن عبارت فوق در (۲۶.۳) برای $1 < \beta \le r$ به‌دست می‌آوریم:

$$\int_0^t \|\eta\|\mathrm{d}\tau \le Ch^\beta |\log\ h|\ |v|_{\beta-2} \qquad (۲۷.۳)$$

در نتیجه برای $1 \le \beta \le r$ برقرار است، زیرا C مستقل از β است. سرانجام (۲۵.۳) و (۲۷.۳) را در (۲۱.۳) قرار می‌دهیم، داریم:

$$\int_0^t \|e\|^2\mathrm{d}\tau \le Ch^{2\beta}|v|^2_{\beta-2} + (Ch^\beta|\log\ h|\ |v|_{\beta-2})^2,$$

بنابراین

$$\Big(\int_0^t \|e\|^2\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{1}{2}} \le Ch^\beta|\log\ h|\ |v|_{\beta-2}.$$

□

اکنون این مساله را به حالت کاملا گسسته تبدیل می‌کنیم. با استفاده از روش پسرو اویلر داریم:

$$\begin{cases} u_{h,t} + A_h^2 u_h = 0, & t > 0, \\ u_h(0) = P_h v. \end{cases}$$

با تعریف $U_n \in S_n$ به‌طوری‌که

$$\begin{cases} \partial U_n + A_h^2 U_n = 0, & n \ge 1, \\ U_0 = P_h v. \end{cases} \qquad (۲۸.۳)$$

به‌طوری‌که $\partial U_n = \frac{U_n - U_{n-1}}{k}$، بنابراین $E^n_{kh} = (I - kA_n^2)^{-n}$ و $U_n = E^n_{kh}v$ را داریم. در قضیه بعد خطا را برای تقریب اویلر نیم گروه کان-هیلیارد برآورد می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۳. *فرض کنیم $F_n = E_{kh}^n P_h - E(t_n)$ در این صورت $h_\circ$، $k_\circ$ و C وجود دارند به طوری که برای $h \leq h_\circ$، $k < k_\circ$ ، $۱ \leq \beta \leq min(r, ۴)$ و $n \geq ۱$ داریم:*

$$\|F_n v\| \leq C(h^\beta + k^{\frac{\beta}{۴}})\ |v|_\beta, \qquad v \in \dot{H}^\beta. \tag{۲۹.۳}$$

$$(k\sum_{j=۱}^{n}\|F_j v\|^۲)^{\frac{۱}{۲}} \leq (C|\log\ h|h^\beta + C_{\beta,k}k^{\frac{\beta}{۴}})\ |v|_{\beta-۲}, \qquad v \in \dot{H}^{\beta-۲}. \tag{۳۰.۳}$$

که در آن، برای $\beta = ۴ \Rightarrow C_{\beta,k} = C|\log\ k|$ *و* $\beta < ۴ \Rightarrow C_{\beta,k} = \frac{C}{۴-\beta}$ *است.*

برهان. مانند اثبات قضیه ۱.۳.۳ $G = A^{-۱}p$ و $G_h = A_h^{-۱}p_h p$ را در نظر می‌گیریم. با $e_n = U_n - u_n = E_{kh}^n P_h v - E(t_n)v$ داریم: $u_n = u(t_n)$، $u_{t,n} = u_t(t_n)$ بنابراین:

$$G_h^۲\partial e_n + e_n = \rho_n + G_h\eta_n + G_h\delta_n. \tag{۳۱.۳}$$

از آنجایی که

$$(\eta_n, G_h\partial e_n) \leq \|\eta_n\|^۲ + \frac{۱}{۴}\|G_h\partial e_n\|^۲,$$

$$(\delta_n, G_h\partial e_n) \leq \|\delta_n\|^۲ + \frac{۱}{۴}\|G_h\partial e_n\|^۲,$$

با ضرب (۳۱.۳) در ∂e_n داریم:

$$\begin{aligned}(G_h^۲\partial e_n + e_n &= \rho_n + G_h\eta_n + G_h\delta_n)\partial e_n\\ &= \|G_h\partial e_n\|^۲ + (e_n, \partial e_n)\\ &= (\rho_n, \partial e_n) + (\eta_n, G_h\partial e_n) + (\delta_n, G_h\partial e_n),\end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned}\|G_h\partial e_n\|^۲ + (e_n, \partial e_n) &\leq (\rho_n, \partial e_n) + \|\eta_n\|^۲ + \frac{۱}{۴}\|G_h\partial e_n\|^۲ + \|\delta_n\|^۲ + \frac{۱}{۴}\|G_h\partial e_n\|^۲\\ \|G_h\partial e_n\|^۲ + ۲(e_n, \partial e_n) &\leq ۲(\rho_n, \partial e_n) + ۲\|\eta_n\|^۲ + ۲\|\delta_n\|^۲.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|G_h\partial e_n\|^۲ + (e_n, \partial e_n) \leq ۲(\rho_n, \partial e_n) + ۲\|\eta_n\|^۲ + ۲\|\delta_n\|^۲. \tag{۳۲.۳}$$

همچنین اتحادهای زیر را داریم:

$$\partial(a_n b_n) = (\partial a_n)b_n + a_{n-۱}(\partial b_n), \tag{۳۳.۳}$$

$$\partial(a_n b_n) = (\partial a_n)b_n + a_n(\partial b_n) - k(\partial a_n)(\partial b_n). \tag{۳۴.۳}$$

با استفاده از (۳۴.۳) داریم:

$$\partial(e_n,e_n) = (\partial e_n, e_n) + (e_n, \partial e_n) - k(\partial e_n, \partial e_n)$$
$$= (e_n, \partial e_n) + (e_n, \partial e_n) - k(\partial e_n, \partial e_n),$$

لذا

$$2(e_n, \partial e_n) = \partial\|e_n\|^2 + k\|\partial e_n\|^2,$$

و

$$\partial(\rho_n, e_n) = (\partial\rho_n, e_n) + (\rho_n, \partial e_n) - k(\partial\rho_n, \partial e_n),$$

درنتیجه

$$(\rho_n, \partial e_n) = \partial(\rho_n, e_n) - (\partial\rho_n, e_n) + k(\partial\rho_n, \partial e_n).$$

باقرار دادن دو رابطه‌ی فوق در (۳۲.۳) و صرفنظر از $k\|\partial e_n\|$ ، داریم:

$$\|G_h\partial e_n\|^2 + \partial\|e_n\|^2 + k\|\partial e_n\|^2 \leq 2\partial(\rho_n, e_n) - 2(\partial\rho_n, e_n) + 2k(\partial\rho_n, \partial e_n) + 2\|\eta_n\|^2 + 2\|\delta_n\|^2$$
$$+ 2k(\frac{1}{2}\|\partial\rho_n\|^2 + \frac{1}{2}\|\partial e_n\|^2) = k\|\partial\rho_n\|^2 + k\|\partial e_n\|^2,$$

بنابراین

$$\|G_h\partial e_n\|^2 + \partial\|e_n\|^2 \leq 2\partial(\rho_n, e_n) - 2(\partial\rho_n, e_n) + k\|\partial\rho_n\|^2 + 2\|\eta_n\|^2 + 2\|\delta_n\|^2.$$

حال رابطه‌ی فوق را در t_{n-1} ضرب می‌کنیم، توجه داریم که برای $n \geq 2$، $k \leq t_{n-1}$ به طوری که برای $n \geq 1$ داریم:

$$t_{n-1}\|G_h\partial e_n\|^2 + t_{n-1}\partial\|e_n\|^2 \leq 2t_{n-1}\partial(\rho_n, e_n) - 2t_{n-1}(\partial\rho_n, e_n) + t_{n-1}^2\|\partial\rho_n\|^2$$
$$+ 2t_{n-1}\|\eta_n\|^2 + 2t_{n-1}\|\delta_n\|^2. \tag{۳۵.۳}$$

با توجه به (۳۳.۳) داریم:

$$\partial(t_n(e_n, e_n)) = \partial t_n(e_n, e_n) + t_{n-1}(\partial(e_n, e_n)), \qquad \partial t_n = 1.$$

لذا

$$t_{n-1}\partial\|e_n\|^2 = \partial(t_n\|\partial e_n\|^2) - \|\partial e_n\|^2,$$

و

$$\partial(t_n(\rho_n, e_n)) = \partial t_n(\rho_n, e_n) + t_{n-1}(\partial(\rho_n, e_n)),$$

لذا

$$t_{n-1}\partial(\rho_n, e_n) = \partial(t_n(\rho_n, e_n)) - (\rho_n, e_n).$$

روابط فوق را در (۳۵.۳) قرار می‌دهیم، لذا

$$t_{n-1}\|G_h\partial e_n\|^2 + \partial(t_n\|e_n\|^2) - \|e_n\|^2 \leq 2\partial(t_n(\rho_n, e_n)) - 2(\rho_n, e_n) - 2t_{n-1}(\partial\rho_n, e_n) + t_{n-1}^2\|\partial\rho_n\|^2 + 2t_{n-1}\|\eta_n\|^2 + 2t_{n-1}\|\delta_n\|^2.$$

بنابراین

$$t_{n-1}\|G_h\partial e_n\|^2 + \partial(t_n\|e_n\|^2) \leq C\Big(\partial\big(t_n(\rho_n, e_n)\big) + \|\rho_n\|^2 + t_{n-1}^2\|\partial\rho_n\|^2 + \|e_n\|^2\Big) + C\Big(t_{n-1}\|\eta_n\|^2 + t_{n-1}\|\delta_n\|^2\Big) \tag{۳۶.۳}$$

توجه دارید که:

$$k\sum_{j=1}^{n}\partial(t_j\|e_j\|^2) = t_n\|e_n\|^2, \quad k\sum_{j=1}^{n}\partial(t_j(\rho_j, e_j)) = t_n(\rho_n, e_n), \tag{۳۷.۳}$$

با جمع بستن روی (۳۶.۳) و با استفاده از (۳۷.۳) داریم:

$$k\sum_{j=1}^{n}t_{j-1}\|G_h\partial e_j\|^2 + t_n\|e_n\|^2 \leq Ct_n(\rho_n, e_n) + Ck\sum_{j=1}^{n}\big(\|\rho_j\|^2 + t_{j-1}^2\|\partial\rho_j\|^2 + \|e_j\|^2\big) + Ck\sum_{j=1}^{n}\big(t_{j-1}\|\eta_j\|^2 + t_{j-1}\|\delta_j\|^2\big)$$

از آنجایی‌که

$$Ct_n(\rho_n, e_n) = Ct_n\big(\tfrac{1}{2}\|\rho_n\|^2 + \tfrac{1}{2}\|e_n\|^2\big) = Ct_n\big(\|\rho_n\|^2 + \|e_n\|^2\big),$$

بنابراین

$$k\sum_{j=1}^{n}t_{j-1}\|G_h\partial e_j\|^2 + t_n\|e_n\|^2 \leq Ct_n\|\rho_n\|^2 + Ck\sum_{j=1}^{n}\big(\|\rho_j\|^2 + t_{j-1}^2\|\partial\rho_j\|^2 + \|e_j\|^2\big) + Ck\sum_{j=1}^{n}\big(t_{j-1}\|\eta_j\|^2 + t_{j-1}\|\delta_j\|^2\big). \tag{۳۸.۳}$$

اکنون $k\sum_{j=1}^{n}\|e_j\|$ را تخمین می‌زنیم. برای این‌کار (۳۱.۳) را در e_n ضرب می‌کنیم،

$$\begin{aligned}
(G_h^2\partial e_n + e_n &= \rho_n + G_h\eta_n + G_h\delta_n)e_n \\
(G_h^2\partial e_n, e_n) + \|e_n\|^2 &= (\rho_n, e_n) + (\eta_n, G_h e_n) + (\delta_n, G_h e_n) \\
&\le \frac{1}{2}\|\rho_n\|^2 + \frac{1}{2}\|e_n\|^2 + \|\eta_n\|\ \|G_h e_n\| + \|\eta_n\|\ \|G_h e_n\| \\
(G_h^2\partial e_n, e_n) + \frac{1}{2}\|e_n\|^2 &\le \frac{1}{2}\|\rho_n\|^2 + (\|\eta_n\| + \|\delta_n\|)\|G_h e_n\| \\
2(G_h^2\partial e_n, e_n) + \|e_n\|^2 &\le \|\rho_n\|^2 + 2(\|\eta_n\| + \|\delta_n\|)\|G_h e_n\| \qquad (۳۹.۳)
\end{aligned}$$

با استفاده از (۳۴.۳) داریم:

$$\partial(G_h e_n, G_h e_n) = (\partial G_h e_n, G_h e_n) + (G_h e_n, \partial G_h e_n) - k(\partial G_h e_n, \partial G_h e_n)$$

لذا

$$\partial\|G_h e_n\|^2 = (\partial G_h e_n, G_h e_n) + (\partial G_h e_n, G_h e_n) - k\|\partial G_h e_n\|^2$$

$$\partial\|G_h e_n\|^2 + k\|\partial G_h e_n\|^2 = 2(\partial G_h e_n, G_h e_n) = 2(\partial G_h^2 e_n, e_n).$$

بنابراین

$$2(G_h^2\partial e_n, e_n) = 2(\partial G_h e_n, G_h e_n) = \partial\|G_h e_n\|^2 + k\|\partial G_h e_n\|, \qquad (۴۰.۳)$$

با استفاده از (۳۹.۳) و با توجه به $G_h e_0 = 0$ داریم:

$$\partial\|G_h e_n\|^2 + k\|\partial G_h e_n\| + \|e_n\|^2 \le \|\rho_n\|^2 + 2(\|\eta_n\| + \|\delta_n\|)\|G_h e_n\|.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\|G_h e_n\|^2 + k\sum_{j=1}^{n}\|e_j\|^2 &\le k\sum_{j=1}^{n}\|\rho_j\|^2 + 2\left[\frac{1}{2}\left(k\sum_{j=1}^{n}\Big(\|\eta_j\| + \|\delta_j\|\Big)\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\|G_h e_j\|^2\right] \\
&\le k\sum_{j=1}^{n}\|\rho_j\|^2 + 2\left(k\sum_{j=1}^{n}\Big(\|\eta_j\| + \|\delta_j\|\Big)\right)^2 + \frac{1}{2}\max_{j\le n}\|G_h e_j\|
\end{aligned}$$

از این رو

$$k\sum_{j=1}^{n}\|e_j\|^2 \le k\sum_{j=1}^{n}\|\rho_j\|^2 + 2\left(k\sum_{j=1}^{n}\Big(\|\eta_j\| + \|\delta_j\|\Big)\right)^2. \qquad (۴۱.۳)$$

با قرار دادن (۴۱.۳) در (۳۸.۳) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} t_n\|e_n\|^2 \le Ct_n\|\rho_n\|^2 + Ck\sum_{j=1}^{n}\Big(\|\rho_j\|^2 + t_{j-1}^2\|\partial\rho_j\|^2 + t_{j-1}\|\eta_j\|^2 + t_{j-1}\|\delta_j\|^2\Big) \\ + C\Big(k\sum_{j=1}^{n}\Big(\|\eta_j\| + \|\delta_j\|\Big)\Big)^2 \end{aligned} \tag{۴۲.۳}$$

حال هرکدام از نرم‌های بالا را محاسبه می‌کنیم. با توجه به (۲۳.۳) و $v \in \dot{H}^\beta$ داریم:

$$\|\rho_n\|^2 \le Ch^{2\beta}|v|_\beta^2, \qquad k\sum_{j=1}^{n}\|\rho_j\|^2 \le Ch^{2\beta}t_n|v|_\beta^2. \tag{۴۳.۳}$$

با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز داریم:

$$\begin{aligned} k\sum_{j=1}^{n}t_{j-1}^2\|\partial\rho_j\|^2 &= k\sum_{j=2}^{n}t_{j-1}^2\|\frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\rho_t(\tau)\mathrm{d}\tau\|^2 \\ &\le \int_{t_1}^{t_n}\tau^2\|\rho_t(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau \\ &\le \int_0^{t_n}\tau^2\|\rho_t(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

با استفاده از (۲۴.۳) داریم:

$$k\sum_{j=1}^{n}t_{j-1}^2\|\partial\rho_j\|^2 \le \int_0^{t_n}\tau^2\|\rho_t\|^2\mathrm{d}\tau \le Ch^{2\beta}t_n|v|_\beta^2. \tag{۴۴.۳}$$

از (۱۳.۳) و (۱۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \|\eta_j\| &= \|(R_h - I)Gu_t\| \le Ch^\beta|Gu_t|_\beta = Ch^\beta|G\partial u_j| \\ &= \frac{Ch^\beta}{k}|\int_{t_{j-1}}^{t_j}Gu_j(\tau)\mathrm{d}\tau|_\beta = \frac{Ch^\beta}{k}|\int_{t_{j-1}}^{t_j}Au(\tau)\mathrm{d}\tau|_\beta \\ &= \frac{Ch^\beta}{k}\|\int_{t_{j-1}}^{t_j}A^{\frac{\beta}{2}}Au(\tau)\mathrm{d}\tau\| = \frac{Ch^\beta}{k}\|\int_{t_{j-1}}^{t_j}A^{\frac{\beta}{2}}AE(\tau)v\mathrm{d}\tau\| \\ &= \frac{Ch^\beta}{k}\|A^{\frac{\beta}{2}}v\|\int_{t_{j-1}}^{t_j}\tau^{\frac{-1}{2}}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{Ch^\beta}{k}|v|_\beta(\sqrt{t_j} - \sqrt{t_{j-1}}) \le \frac{Ch^\beta}{k}|v|_\beta\sqrt{t_j}, \end{aligned}$$

بنابراین

$$k\sum_{j=1}^{n}t_{j-1}\|\eta_j\|^2 \le Ch^{2\beta}t_n|v|_\beta^2, \quad k\sum_{j=1}^{n}\|\eta_j\| \le Ch^\beta t_n^{\frac{1}{2}}|v|_\beta. \tag{۴۵.۳}$$

برای $j \geq ۲$ با توجه به (۱۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
\|\delta_j\| &= \|G(\partial u_j - u_{t,j})\| \leq \|\frac{۱}{k}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}(\tau - t_{j-۱})Gu_{tt}(\tau)\mathrm{d}\tau\| \\
&\leq \|\frac{۱}{k}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}\tau Gu_{tt}(\tau)\mathrm{d}\tau\| \leq \int_{t_{j-۱}}^{t_j}\|\tau Gu_{tt}(\tau)\|\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{t_{j-۱}}^{t_j}\|\tau GA^{۲}u_t(\tau)\|\mathrm{d}\tau = \int_{t_{j-۱}}^{t_j}\|\tau GA^{۲}A^{۲}u(\tau)\|\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{t_{j-۱}}^{t_j}\|\tau A^{-۱}PA^{۴}u(\tau)\|\mathrm{d}\tau = \int_{t_{j-۱}}^{t_j}\|\tau A^{۳}PE(\tau)v\|\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{t_{j-۱}}^{t_j}\|A^{۳-\frac{\beta}{۲}}E(\tau)A^{\frac{\beta}{۲}}v\|\mathrm{d}\tau = \int_{t_{j-۱}}^{t_j}\tau^{\frac{-۶+\beta}{۴}}\mathrm{d}\tau|v|_\beta,
\end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به $p = \frac{۴}{\beta}$، $q = \frac{۴}{۴-\beta}$، $۱ \leq \beta \leq ۴$ و نامساوی هولدر داریم:

$$\begin{aligned}
\int_{t_{j-۱}}^{t_j}\tau^{\frac{-۴+\beta}{۴}}\mathrm{d}\tau|v|_\beta &= Ck^{\frac{\beta}{۴}}\left(\int_{t_{j-۱}}^{t_j}\left(\left(\tau^{\frac{-۴+\beta}{۴}}\right)^{\frac{۴}{۴-\beta}}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{۴-\beta}{۴}}\right) \\
&\leq Ck^{\frac{\beta}{۴}}\left(\frac{\beta-۴}{۲}\left(t_{j-۱}^{\frac{-۲}{۴-\beta}} - t_j^{\frac{-۲}{۴-\beta}}\right)\right)^{\frac{۴-\beta}{۴}} \leq Ck^{\frac{\beta}{۴}}t_{j-۱}^{\frac{-۱}{۲}},
\end{aligned}$$

نتیجه همان است که با $\beta = ۴$ به دست آمده است. برای $j = ۱$ داریم:

$$\begin{aligned}
\|\delta_۱\| &\leq \|\frac{۱}{k}\int_۰^k \tau Gu_{tt}(\tau)\mathrm{d}\tau \leq C\int_۰^k \tau^{\frac{-۶+\beta}{۴}}\mathrm{d}\tau|v|_\beta \\
&= C|v|_\beta(\frac{۴}{\beta-۲}k^{\frac{\beta-۲}{۴}}) = C\frac{۴}{\beta-۲}|v|_\beta k^{\frac{\beta}{۴}}k^{\frac{-۱}{۲}} \\
&\leq Ck^{\frac{\beta}{۴}}t_۱^{\frac{-۱}{۲}}|v|_\beta
\end{aligned}$$

بنابرین برای $j \geq ۱$ داریم:

$$\|\delta_j\| \leq Ck^{\frac{\beta}{۴}}t_j^{\frac{-۱}{۲}}|v|_\beta,$$

لذا

$$k\sum_{j=۱}^n\|\delta_j\| \leq Ck^{\frac{\beta}{۴}}|v|_\beta t_n^{\frac{۱}{۲}}, \quad k\sum_{j=۱}^n t_{j-۱}\|\delta_j\|^۲ \leq Ck^{\frac{\beta}{۴}}|v|_\beta^۲ t_n. \tag{۴۶.۳}$$

با قرار دادن (۴۶.۳)، (۴۵.۳)، (۴۴.۳)، (۴۳.۳) در (۴۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
t_n\|e_n\|^۲ &\leq C\Big(t_nh^{۲\beta}|v|_\beta^۲ + h^{۲\beta}t_n|v|_\beta^۲ + h^{۲\beta}t_n|v|_\beta^۲ + k^{\frac{\beta}{۲}})t_n|v|_\beta^۲\Big) \\
&+ C\Big(t_n^{\frac{۱}{۲}}h^\beta|v|_\beta + k^{\frac{\beta}{۴}}t_n^{\frac{۱}{۲}}|v|_\beta\Big)^۲,
\end{aligned}$$

درنتیجه

$$\|e_n\| \le C(h^\beta + k^{\frac{\beta}{۴}})|v|_\beta.$$

بنابراین (۳۰.۳) اثبات شد.

برای اثبات (۳۰.۳) بااستفاده از (۴۱.۳) و اینکه $v \in \dot{H}^{\beta-۲}$ برای گام اول داریم:

$$k\sum_{j=۱}^{n}\|e_j\|^۲ \le k\sum_{j=۱}^{n}\|\rho_j\|^۲ + ۲\Big(k\sum_{j=۱}^{n}\|\eta_j\| + \|\delta_j\|\Big)^۲,$$

لذا

$$k\sum_{j=۱}^{n}\|\rho_j\|^۲ = k\|\rho_۱\| + k\sum_{j=۲}^{n}\|\rho_j\|^۲.$$

با توجه به (۱۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
k\|\rho_۱\| &= k\|(R_h - I)u_۱\|^۲ \le kCh^{۲\beta}|u_۱|_\beta^۲ \\
&= kCh^{۲\beta}\|A^{\frac{\beta}{۲}}u(t_۱)\|^۲ = kCh^{۲\beta}\|A^{\frac{\beta}{۲}}E(t_۱)v\| \\
&\le kCh^{۲\beta}\|A^{\frac{\beta}{۲}}E(k)v\| = kCh^{۲\beta}\|AE(k)A^{\frac{\beta}{۲}-۱}v\|^۲ \\
&= kCh^{۲\beta}(k^{\frac{-۱}{۲}})^۲\|A^{\frac{\beta-۲}{۲}}v\|^۲ = Ch^{۲\beta}|v|_{\beta-۲},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k\sum_{j=۲}^{n}\|\rho_j\|^۲ &= \sum_{j=۲}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}\|\rho(s) + \int_s^{t_j}\rho_t(\tau)\mathrm{d}\tau\|\mathrm{d}s \\
&\le ۲\sum_{j=۲}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}\|\rho(s)\|\mathrm{d}s + ۲\sum_{j=۲}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}\|\int_s^{t_j}\rho_t(\tau)\mathrm{d}\tau\|^۲\mathrm{d}s \\
&\le ۲\int_{t_۱}^{t_n}\|\rho(s)\|^۲\mathrm{d}s + ۲\sum_{j=۲}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}(t_j - s)\int_{t_{j-۱}}^{t_j}\|\rho_t(\tau)\|^۲\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \\
&\le ۲\int_{۰}^{t_n}\|\rho\|^۲\mathrm{d}s + ۲k\int_{t_۱}^{t_n}\tau\|\rho_t\|^۲\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

از اینکه $t_j - s \le k \le \tau$ و با استفاده از (۲۵.۳) داریم:

$$\int_{۰}^{t_n}\|\rho\|^۲\mathrm{d}\tau \le Ch^{۲\beta}|v|_{\beta-۲}^۲,$$

و

$$\begin{aligned}
k\int_{t_1}^{t_n}\tau\|\rho_t\|^2\mathrm{d}\tau &= k\int_{t_1}^{t_n}\tau\|(R_h-I)u_t\|^2\mathrm{d}\tau \le k\int_{t_1}^{t_n}\tau Ch^{2\beta}|u_t|_\beta^2\mathrm{d}\tau\\
&= k\int_{t_1}^{t_n}\tau Ch^{2\beta}\|A^{\frac{\beta}{2}}u_t\|^2\mathrm{d}\tau = Ch^{2\beta}k\int_{t_1}^{t_n}\tau\|A^{\frac{\beta}{2}}u_t\|^2\mathrm{d}\tau\\
&= Ch^{2\beta}k\int_{t_1}^{t_n}\tau\|A^{\frac{\beta}{2}}A^2u\|^2\mathrm{d}\tau = Ch^{2\beta}k\int_{t_1}^{t_n}\tau\|A^{\frac{\beta}{2}}A^2E(\tau)v\|^2\mathrm{d}\tau\\
&= Ch^{2\beta}k\int_{t_1}^{t_n}\tau\|A^3E(\tau)A^{\frac{\beta-2}{2}}v\|^2\mathrm{d}\tau = Ch^{2\beta}k\int_{t_1}^{t_n}\tau\tau^{\frac{-3}{2}}\|vA^{\frac{p-1}{2}}\|^2\mathrm{d}\tau\\
&= Ch^{2\beta}k\int_{t_1}^{t_n}\tau^{-2}\mathrm{d}\tau|v|_{\beta-2}^2 \le Ch^{2\beta}k(k^{-1}-t_n^{-1})|v|_{\beta-2}^2 \le Ch^{2\beta}|v|_{\beta-2}^2.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
k\sum_{j=1}^n\|\rho_j\|^2 &\le Ch^{2\beta}|v|_{\beta-2} + 2\int_0^{t_n}\|\rho\|^2\mathrm{d}s + 2k\int_{t_1}^{t_n}\tau\|\rho_t\|^2\mathrm{d}\tau\\
&\le Ch^{2\beta}|v|_{\beta-2}^2 + 2Ch^{2\beta}|v|_{\beta-2}^2 + 2Ch^{2\beta}|v|_{\beta-2}^2,
\end{aligned}$$

لذا

$$k\sum_{j=1}^n\|\rho_j\|^2 \le Ch^{2\beta}|v|_{\beta-2}^2. \tag{۴۷.۳}$$

با فرض اینکه $\eta_j = -(R_h-I)G\partial u_j$ و $\eta = -(R_h-I)Gu_t$، $k\sum_{j=1}^n\|\eta_j\|$ را محاسبه می‌کنیم. بنابراین

$$\begin{aligned}
\|\eta_j\| &= \|(R_h-I)G\frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}u_t\mathrm{d}\tau\|\\
&\le \frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|(R_h-I)Gu_t\|\mathrm{d}\tau \le \frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\eta\|\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

باتوجه‌به (۲۷.۳) داریم:

$$k\sum_{j=2}^n\|\eta_j\| \le \int_0^{t_n}\|\eta\|\mathrm{d}\eta \le Ch^\beta|\log h||v|_{\beta-2}. \tag{۴۸.۳}$$

برای محاسبه $k\sum_{j=1}^n\|\delta_j\|$ برای $1\le\beta<4$ با استفاده از (۱۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
\|\delta_j\| &\le \frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\tau-t_{j-1})\|Gu_{tt}(\tau)\|\mathrm{d}\tau\\
&\le \int_{t_{j-1}}^{t_j}\|A^{4-\frac{\beta}{2}}E(\tau)A^{\frac{\beta-2}{2}}v\|\mathrm{d}\tau\\
&\le C\int_k^{t_n}\tau^{-2+\frac{\beta}{4}}\mathrm{d}\tau|v|_{\beta-2}.
\end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} k\sum_{j=2}^{n}\|\delta_j\| &\le Ck\int_k^{t_n}\tau^{-2+\frac{\beta}{4}}\mathrm{d}\tau|v|_{\beta-2}\\ &\le Ck\frac{4}{4-\beta}\Big(k^{\frac{\beta-4}{4}}-t_n^{\frac{\beta-4}{4}}\Big)|v|_{\beta-2}\\ &\le \Big(Ck^{\frac{\beta}{4}}\frac{4}{4-\beta}-Ck\frac{4}{4-\beta}t_n^{\frac{\beta-4}{4}}\Big)|v|_{\beta-2}\\ &\le \frac{C}{4-\beta}k^{\frac{\beta}{4}}|v|_{\beta-2}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} k\|\delta_1\| &\le \int_0^k \tau\|Gu_{tt}(\tau)\|\mathrm{d}\tau \le \int_0^k \|A^{4-\frac{\beta}{2}}E(\tau)A^{\frac{\beta-2}{2}}v\|\mathrm{d}\tau\\ &\le C\int_0^k \tau^{-1+\frac{\beta}{4}}\mathrm{d}\tau|v|_{\beta-2} \le \frac{C}{4-\beta}k^{\frac{\beta}{4}}|v|_{\beta-2}, \end{aligned}$$

بنابراین برای $1 \le \beta < 4$ داریم:

$$k\sum_{j=1}^{n}\|\delta_j\| \le \frac{C}{4-\beta}k^{\frac{\beta}{4}}|v|_{\beta-2}.$$

اگر $|\log\ k| = \frac{1}{4-\beta}$، آنگاه

$$\begin{aligned} k\sum_{j=2}^{n}\|\delta_j\| &\le \frac{C}{4-\beta}k^{\frac{\beta}{4}}|v|_{\beta-2} = \frac{C}{4-\beta}k^{1-\frac{4-\beta}{4}}|v|_{\beta-2}\\ &= C|\log\ k|ke^{-\frac{4-\beta}{4}}|v|_{\beta-2} = C|\log\ k|ke^{-\frac{4-\beta}{4}\log\ k}|v|_{\beta-2}\\ &\le C|\log\ k|\ |v|_{\beta-2} = C|\log\ k|\ |v|_{\beta-2}. \end{aligned}$$

بنابراین برای $1 \le \beta \le 4$ داریم:

$$k\sum_{j=1}^{n}\|\delta_j\| \le C_{\beta,k}k^{\frac{\beta}{4}}|v|_{\beta-2}. \qquad (۴۹.۳)$$

که برای $\beta = 4$، $C_{\beta,k} = C|\log\ k|$ و برای $\beta < 4$، $C_{\beta,k} = \frac{C}{4-\beta}$ است. در پایان (۴۷.۳)، (۴۸.۳)، (۴۹.۳) را در (۴۱.۳) قرار می‌دهیم. پس

$$\Big(k\sum_{j=1}^{n}\|e_j\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le (Ch^{\beta}|\log\ h| + C_{\beta,k}k^{\frac{\beta}{4}})|v|_{\beta-2}.$$

□

۴.۳ تقریب خطی معادله‌ی کان-هیلیارد

معادله‌ی کان-هیلیارد-کوک خطی (۴.۳) را با جواب خفیف زیر در نظر می‌گیریم:

$$X(t) = E(t)X_{\circ} + \int_{\circ}^{t} E(t-s)\mathrm{d}W(s). \tag{۵۰.۳}$$

ویژگی Itô -انتگرال [۹] را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{E}\Big\{\| \int_{\circ}^{t} B(s)\mathrm{d}W(s)\|^{۲}\Big\} = \mathbf{E}\Big\{\int_{\circ}^{t} \|B(s)Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}^{۲}\mathrm{d}s\Big\}. \tag{۵۱.۳}$$

که در آن نرم هیلبرت-اشمیت به‌صورت

$$\|T\|_{HS}^{۲} = \sum_{\ell=۱}^{\infty} \|T\phi_{\ell}\|^{۲}, \tag{۵۲.۳}$$

تعریف می‌شود و $\{\phi_{\ell}\}_{\ell=۱}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه دلخواه برای H است. در قضیه‌ی۱.۴.۳ نظم جواب خفیف (۵۰.۳) را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۱.۴.۳. *فرض کنیم $X(t)$ جواب خفیف (۵۰.۳) باشد و برای برخی $\beta \geq \circ$، $X_{\circ} \in L_{۲}(\Omega, \dot{H}^{\beta})$ و $\|A^{\frac{\beta-۲}{۲}}Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS} < \infty$. در این صورت*

$$\|X(t)\|_{L_{۲}(\Omega,\dot{H}^{\beta})} \leq C\Big(\|X_{\circ}\|_{L_{۲}(\Omega,\dot{H}^{\beta})} + \|A^{\frac{\beta-۲}{۲}}Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}\Big), \qquad t \geq \circ.$$

به‌علاوه، اگر $\beta = \circ$، آنگاه برای نرم در فضای H داریم:

$$\|X(t)\|_{L_{۲}(\Omega,H)} \leq C\Big(\|X_{\circ}\|_{L_{۲}(\Omega,H)} + \|A^{-۱}Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS} + t^{\frac{۱}{۲}}\Big), \qquad t \geq \circ.$$

برهان. بااستفاده از تعریف نرم هیلبرت اشمیت در (۵۲.۳) و بااستفاده از (۱۱.۳) و (۱۲.۳) برای $\beta \geq \circ$ در (۸.۳) می‌بینیم:

$$\begin{aligned}
\|X(t)\|_{L_{۲}(\Omega,\dot{H}^{\beta})}^{۲} &= \mathbf{E}\Big\{|E(t)X_{\circ} + \int_{\circ}^{t} E(t-s)\mathrm{d}W(s)|_{\beta}^{۲}\Big\} \\
&\leq C\Big(\mathbf{E}\Big\{\|A^{\frac{\beta}{۲}}E(t)X_{\circ}\|^{۲}\Big\} + \mathbf{E}\Big\{\| \int_{\circ}^{t} A^{\frac{\beta}{۲}}E(t-s)\mathrm{d}W(s)\|^{۲}\Big\}\Big) \\
&\leq C\Big(\|X_{\circ}\|_{L_{۲}(\Omega,\dot{H}^{\beta})}^{۲} + \int_{\circ}^{t} \|A^{\frac{\beta}{۲}}E(s)Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}^{۲}\mathrm{d}s\Big) \\
&= C\Big(\|X_{\circ}\|_{L_{۲}(\Omega,\dot{H}^{\beta})}^{۲} + \sum_{\ell=۱}^{\infty}\int_{\circ}^{t} \|A^{\frac{\beta}{۲}}E(s)Q^{\frac{۱}{۲}}\phi_{\ell}\|^{۲}\mathrm{d}s\Big) \\
&\leq C\Big(\|X_{\circ}\|_{L_{۲}(\Omega,\dot{H}^{\beta})}^{۲} + \sum_{\ell=۱}^{\infty} \|A^{\frac{\beta-۲}{۲}}Q^{\frac{۱}{۲}}\phi_{\ell}\|^{۲}\Big) \\
&= C\Big(\|X_{\circ}\|_{L_{۲}(\Omega,\dot{H}^{\beta})}^{۲} + \|A^{\frac{\beta-۲}{۲}}Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}^{۲}\Big).
\end{aligned}$$

[۹] isometry of Itô integal

برای $\beta = 0$ و H-norm شرایط اضافی زیر وجود دارند:

$$\mathbf{E}\Big\{\|(I-P)X_0\|^2\Big\} = \mathbf{E}\Big\{(X_0,\phi_0)^2\Big\} \le \|X_0\|^2_{L_2(\Omega,H)}$$
$$\mathbf{E}\Big\{\|(I-P)W(t)\|^2\Big\} = \mathbf{E}\Big\{(W(t),\phi_0)^2\Big\} \le Ct$$

□

تقریب المان محدود معادله کان-هیلیارد-کوک به صورت زیر است: هدف یافتن $X_h(t) \in S_h$ به‌طوری‌که

$$\mathrm{d}X_h + A_h^2 X_h \mathrm{d}t = P_h \mathrm{d}W, \quad t>0, \quad X_h(0) = P_h X_0. \tag{۵۳.۳}$$

با جواب خفیف

$$X_h(t) = E_h(t)P_hX_0 + \int_0^t E_h(t-s)P_h\mathrm{d}W(s). \tag{۵۴.۳}$$

قضیه ۲.۴.۳. *فرض کنید X_h و X جواب‌های خفیف (۵۰.۳) و (۵۴.۳) به ازای $\beta \in [1,r]$، و نیز داشته باشیم $X_0 \in L_2(\Omega,\dot{H}^\beta)$ و $\|A^{\frac{\beta-2}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS} < \infty$. در این صورت h_0 و C وجود دارند که برای $h \le h_0$ و $t \ge 0$ داریم:*

$$\|X_h(t) - X(t)\|_{L_2(\Omega,H)} \le Ch^\beta(\|X_0\|_{L_2(\Omega,\dot{H}^\beta)} + |\log\ h|\ \|A^{\frac{\beta-2}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}).$$

برهان. از (۵۰.۳) و (۵۴.۳) و رابطه $F_h(t) = E_h(t)P_h - E(t)$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\|X_h(t)-X(t)\|_{L_2(\Omega,H)}\\
&= \|E_h(t)P_hX_0 + \int_0^t E_h(t-s)P_h\mathrm{d}W(s) - E(t)X_0 - \int_0^t E(t-s)\mathrm{d}W(s)\|_{L_2(\Omega,H)}\\
&= \|F_h(t)X_0 + \int_0^t F_h(t-s)\mathrm{d}W(s)\|_{L_2(\Omega,H)} \le \|e_1(t)\|_{L_2(\Omega,H)} + \|e_1(t)\|_{L_2(\Omega,H)},
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه

$$\begin{aligned}
e_1(t) &= F_h(t)X_0,\\
e_2(t) &= \int_0^t F_h(t-s)\mathrm{d}W(s).
\end{aligned}$$

با توجه به قضیه‌ی ۱.۳.۳ داریم:

$$\|e_1(t)\|_{L_2(\Omega,H)} = \mathbf{E}\|F_h(t)X_0\|^2)^{\frac{1}{2}} \le Ch^\beta((\mathbf{E}|X_0|^2_\beta)^{\frac{1}{2}} \le Ch^\beta\|X_0\|_{L_2(\Omega,\dot{H}^\beta)}.$$

برای رابطه دوم از ایزومتری (۵۱.۳) استفاده می‌کنیم، با استفاده از تعریف نرم هیلبرت اشمیت و قضیه‌ی ۱.۳.۳ داریم:

$$\begin{aligned}\|e_2(t)\|^2_{L_2(\Omega,H)} &= (\|\int_0^t F_h(t-s)\mathrm{d}W(s)\|^2_{L_2(\Omega,H)} = \mathbf{E}(\|\int_0^t F_h(t-s)\mathrm{d}W(s)\|^2)\\ &= \int_0^t \|F_h(t-s)Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{HS}\mathrm{d}s = \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \|F_h(t-s)Q^{\frac{1}{2}}\phi_\ell\|^2\mathrm{d}s\\ &\le C|\log\ h|^2 h^{2\beta}\sum_{\ell=1}^{\infty}|Q^{\frac{1}{2}}\phi_\ell|^2_{\beta-2} = C|\log\ h|^2h^{2\beta}\|A^{\frac{\beta-2}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{HS}.\end{aligned}$$

□

اکنون معادله کان-هیلیارد-کوک کاملا گسسته (۱۰.۳) را با جواب ضعیف زیر در نظر می‌گیریم:

$$X_{h,n} = E^n_{kh}P_hX_0 + \sum_{j=1}^{n}E^{n-j+1}_{kh}P_h\partial w_j, \qquad E_{kh} = (I+kA_h^2)^{-1}. \tag{۵۵.۳}$$

قضیه ۳.۴.۳. *فرض کنیم $X_{h,n}$ و X تعریف شده در روابط (۵۵.۳) و (۵۰.۳) باشند و به ازای $\beta\in[1,\min(r,4)]$، $X_0\in L_2(\Omega,\dot{H}^\beta)$ و $\|A^{\frac{\beta-2}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}<\infty$ برقرار باشند. در این صورت h_0، k_0 و C وجود دارند به طوری که برای $h\le h_0$، $k\le k_0$ و $n\ge 1$ داریم:*

$$\|X_{h,n}-X(t_n)\|_{L_2(\Omega,H)} \le (C|\log\ h|h^\beta + C_{\beta,k}k^{\frac{\beta}{4}})(\|X_0\|_{L_2(\Omega,\dot{H}^\beta)} + \|A^{\frac{\beta-2}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}),$$

برای $\beta=4$، $C_{\beta,k}=C|\log\ k|$ و برای $\beta<4$، $C_{\beta,k}=\frac{C}{4-\beta}$ است.

برهان. با توجه به (۵۰.۳) و (۵۵.۳) داریم: $F_n = E^n_{kh}P_h - E(t_n)$

$$\begin{aligned}e_n &= F_nX_0 + \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}F_{n-j+1}\mathrm{d}W(s)\\ &+\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(E(t_n-t_{j-1})-E(t_n-s))\mathrm{d}W(s) = e_{n,1}+e_{n,2}+e_{n,3}.\end{aligned}$$

با توجه به قضیه ۲.۳.۳ داریم:

$$\|e_{n,1}\|^2_{L_2(\Omega,H)} = \|F_nX_0\|_{L_2(\Omega,H)} = \mathbf{E}\Big(\|F_nX_0\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{۵۶.۳}$$

$$\le C(h^\beta + k^{\frac{-\beta}{4}})\|X_0\|_{L_2(\Omega,\dot{H}^\beta)}. \tag{۵۷.۳}$$

با استفاده از ایزومتری (۵۱.۳) و قضیه۲.۳.۳ داریم:

$$\begin{aligned}
\|e_{n,2}\|^2_{L_2(\Omega,H)} &= \Big\| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_{n-j+1} \mathrm{d}W(s) \Big\|^2_{L_2(\Omega,H)} \\
&= \mathbf{E}(\| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_{n-j+1} \mathrm{d}W(s)\|^2) = \mathbf{E}(\| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_{n-j+1} Q^{\frac{1}{2}} \|^2_{HS} \mathrm{d}s) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|F_{n-j+1} Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{HS} \mathrm{d}s = k \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \|F_{n-j+1} Q^{\frac{1}{2}} \phi_\ell\|^2 \\
&\le \sum_{j=1}^{n} (C|\log\ h|\ h^\beta + C_{\beta,k} k^{\frac{\beta}{4}})^2 |Q^{\frac{1}{2}} \phi_\ell|^2_{\beta-2} \\
&= (C|\log\ h|\ h^\beta + C_{\beta,k} k^{\frac{\beta}{4}})^2 \|A^{\frac{\beta-2}{2}} Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{HS}.
\end{aligned}$$

با توجه به ویژگی ایزومتری (۵۱.۳) نیز داریم:

$$\begin{aligned}
\|e_{n,3}\|^2_{L_2(\Omega,H)} &= \| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (E(t_n - t_{j-1}) - E(t_n - s)) \mathrm{d}W(s) \|^2_{L_2(\Omega,H)} \\
&\le \mathbf{E}(\| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (E(t_n - t_{j-1}) - E(t_n - s)) \mathrm{d}W(s) \|^2) \\
&= \mathbf{E}(\| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|(E(t_n - t_{j-1}) - E(t_n - s)) Q^{\frac{1}{2}} \|^2_{HS} \mathrm{d}s \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|(E(t_n - t_{j-1}) - E(t_n - s)) Q^{\frac{1}{2}} \phi_\ell\|^2 \mathrm{d}s \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|A^{\frac{-\beta}{2}} (E(s - t_{j-1}) - I) A E(t_n - s) A^{\frac{\beta-2}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \phi_\ell\|^2 \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی

$$\|A^{\frac{-\beta}{2}} (E(t) - I) w \le C t^{\frac{-\beta}{4}} \|w\|$$

و در نظر گرفتن $t = s - t_j$ و $w = AE(t_n - s) A^{\frac{\beta-2}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \phi_\ell$ داریم:

$$\begin{aligned}
\|e_{n,3}\|^2_{L_2(\Omega,H)} &\le C k^{\frac{\beta}{2}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^{t_n} \|A E(t_n - s) A^{\frac{\beta-2}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \phi_\ell\|^2 \mathrm{d}s \\
&= C k^{\frac{\beta}{2}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \|A^{\frac{\beta-2}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \phi_\ell\|^2 = C k^{\frac{\beta}{2}} \|A^{\frac{\beta-2}{2}} Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{HS}.
\end{aligned}$$

□

۵.۳ نتیجه

تقریب عددی معادله‌ی کان-هیلیارد-کوک خطی را با استفاده از روش المان محدود نیمه گسسته فضایی و روش کاملا گسسته بر اساس اویلر ضمنی را مطالعه کردیم. تخمین‌های همگرایی قوی از نظم مطلوب را به جز برای عامل لگاریتمی ثابت کردیم.

با استفاده از ایزومتری انتگرال Itô اثبات‌ها را کاهش دادیم به اثبات تخمین‌های خطا برای مسایل قطعی مربوطه برای تقریب نیم‌گروه کان-هیلیارد پرداختیم.

نتایج باید به عنوان نتایج تقریب زده شده از پیچش تصادفی $\int_{\circ}^{t} e^{-(t-s)A^{۲}}\mathrm{d}w(s)$ که بخشی از جواب خفیف معادله کان-هیلیارد-کوک غیرخطی است تفسیر شوند. بخش باقیمانده که مساله‌ی تکامل تصادفی غیرخطی را حل می‌کند در فصل بعدی مورد مطالعه قرار می‌گیرد که در آن همگرایی قوی برای تقریب نیمه گسسته فضایی از معادله کان-هیلیارد-کوک غیرخطی ثابت می‌شود،اما بدون سرعت همگرایی شناخته شده است. برای به دست آوردن میزان مطلوب همگرایی یک چالش باقی مانده است. یکی دیگر از مسایل باقیمانده برای کار در این راستا بررسی همگرایی ضعیف است.

فصل ۴

تقریب المان محدود برای معادله کان-هیلیارد-کوک غیرخطی

۱.۴ چکیده

در این فصل معادله کان-هیلیارد تصادفی غیرخطی، که به‌وسیله افزودن اختلال‌های رنگی مختل شده است بررسی می‌شود. نشان می‌دهیم جواب‌ها دارای نظم هستند و تقریبا همه‌جا وجود دارند، سپس یک تقریب فضایی با استفاده از روش المان‌های محدود استاندارد معرفی می‌شود و برآوردهای خطا به‌منظور بهینه کردن روی مجموعه‌ای از احتمالات اختیاری نزدیک به ۱ و همچنین همگرایی قوی بدون نرخ اثبات می‌شود.

۲.۴ پیش‌نیازها

معادله کان-هیلیاردی که به وسیله اختلال مختل شده است، تحت عنوان معادله کان-هیلیارد-کوک معرفی می‌شود:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u - \Delta v \mathrm{d}t = \mathrm{d}W, & \text{in } \mathcal{D} \times (\circ, T], \\ v + \Delta u + f(u) = \circ, & \text{in} \mathcal{D} \times (\circ, T], \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \circ, & \text{on } \partial\mathcal{D} \times (\circ, T], \\ u(\circ) = u_\circ, & \text{in } \mathcal{D}. \end{cases}$$

در اینجا $\mathcal{D}$ دامنه‌ی کرانداری در فضای R^d، $d = ۱,۲,۳$ و $f(s) = s^۳ - s$است. معادله تکامل انتزاعی [۱] آن به‌صورت،

$$\mathrm{d}X + (A^۲X + Af(X))\mathrm{d}t = \mathrm{d}W, \qquad t \in (\circ, T]; \qquad X(\circ) = X_\circ, \tag{۱.۴}$$

است [۸]، که درآن A به عنوان یک عملگر بی‌کران در فضای هیلبرت$H = L_۲(D)$ که نشان‌دهنده لاپلاس نویمن می‌باشد درنظرگرفته شده است، و W یک فرایندQ -وینر در H با توجه به فضای احتمال مجهزبه

[۱] abstract evolution equation

فیلتریشن $(\Omega, F, P, \{F_t\}_{t\geq \circ})$ است. فضای سوبولوف استاندارد $H^s = H^s(D)$ درنظر گرفته می‌شود.

هدف مطالعه خواص همگرایی تقریب عنصر محدود نیمه‌گسسته فضایی X_h از X است،که توسط معادله‌ای به فرم زیر تعریف شده است:

$$\mathrm{d}X_h + (A_h^{\text{۲}}X_h + A_hP_hf(X_h))\mathrm{d}t = P_h\mathrm{d}W, \qquad t\in(\circ,T]; \qquad X_h(\circ) = P_hX_\circ.$$

به‌منظور انجام این کار ، نیاز به اثبات وجود و نظم برای جواب‌های ۱.۴ می‌باشد. فرض می‌کنیم که عملگر کوواریانس $Q = I$ (اختلال سفید زمان-فضا [۲] ، اختلال استوانه‌ای [۳]) نشان‌دهنده‌ی جواب منحصر به فردی از ۱.۴، که متعلق به $C\big([\circ,T],H^{-\text{۱}}\big)$ است می‌باشد. بافرض جابه‌جایی بودن A و Q و برای برخی $\delta > \circ$ (اختلال رنگی)، $Tr(A^{\delta-\text{۱}}Q) < \infty$ ، جواب متعلق به $C\big([\circ,T],H\big)$ می‌شود. چنین نظم و قاعده‌ای برای اثبات همگرایی جواب عددی کافی است. بنابراین اولین هدف این است که برای $\beta > \circ$ وجود جوابی در $C\big([\circ,T],H^\beta\big)$ اثبات شود. با استفاده از روش نیم‌گروه‌ها، جواب خفیف معادله ۱.۴ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$X(t) = e^{-tA^{\text{۲}}}X_\circ - \int_\circ^t e^{-(t-s)A^{\text{۲}}}Af(X(s))\mathrm{d}s + \int_\circ^t e^{-(t-s)A^{\text{۲}}}\mathrm{d}W(s) = Y(t) + W_A(t),$$

که $e^{-tA^{\text{۲}}}$ نیم‌گروه تحلیلی تولید شده توسط $-A^{\text{۲}}$ است. این به‌طور طبیعی جواب $X = Y + W_A$ است، که $W_A(T) = \int_\circ^t e^{-(t-s)A^{\text{۲}}}A\mathrm{d}W(s)$ یک پیچش تصادفی [۴] است. درحالت خاص، برای $\beta \geq \circ$ داریم: $\|A^{\frac{\beta-\text{۲}}{\text{۲}}}Q^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}\|_{HS}^{\text{۲}} = Tr(A^{\beta-\text{۲}}Q) < \infty$، یعنی

$$\mathbf{E}[\|W_A(t)\|_{H^\beta}^{\text{۲}}] \leq \|A^{\frac{\beta-\text{۲}}{\text{۲}}}Q^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}\|_{HS}^{\text{۲}}, \quad t\geq\circ. \tag{۲.۴}$$

از طرف دیگر، Y جوابی از معادله دیفرانسیل با ضریب تصادفی است،

$$\dot{Y} + A^{\text{۲}}Y + Af(Y + W_A) = \circ, \quad t>\circ, \quad Y(\circ) = X_\circ. \tag{۳.۴}$$

که می‌توان آن را به‌عنوان جوابی از W_A در نظر گرفت. اصطلاح غیرخطی تنها برای لیپ‌شیتز محلی به‌کارمی‌رود و ثابت لیپ‌شیتز باید کنترل شود. در حالت کلی باتوجه‌به تابع لیاپانوف داریم؛

$$J(u) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\|\nabla u\|^{\text{۲}} + \int_{\mathcal{D}} F(u)\mathrm{d}x \quad u\in H^{\text{۱}}, F(s) = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}s^{\text{۴}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}s^{\text{۲}},$$

که درامتداد مسیرها ناافزایشی است [۵]، و برای $t \geqslant \circ$ بواسطه کانولوشن تصادفی داریم $\|X(t)\|_{H^{\text{۱}}} \leq C$، برای معادله تصادفی ۱.۴ درست نیست. بااین شرایط، می‌توان کرانی برای رشد امید ریاضی $J(X(t))$ و کران

$$\mathbf{E}[\|X(t)\|_{H^{\text{۱}}}^{\text{۲}}] \leq C(t), \qquad t\geq\circ, \tag{۴.۴}$$

[۲] space-time white noise
[۳] cylindrical noise
[۴] stochastic convolution

پیدا کرد. با فرض اینکه A و Q جابجایی هستند، اگر در معادله (۲.۴)، $\beta = ۳$ قرار داده شود، داریم:

$$\|A^{\frac{۱}{۲}}Q^{\frac{۱}{۲}}\|^{۲}_{HS} = Tr(AQ) < \infty. \quad (۵.۴)$$

از این رابطه در قضیه ۱.۴.۴ استفاده می‌شود. در قضیه ۱.۴.۴ رشد کران باتوجه به t از نمایی به درجه دوم کاهش می‌یابد. همچنین فرض می‌کنیم که A و Q که دارای پایه ویژه مشترک هستند خاصیت جابجایی دارند و پایه ویژه Q از توابع کراندار تشکیل شده است و کرانی برای X به‌دست می‌آوریم، آنگاه با اندکی تغییرات بر روی فرضیات همان کران را برای جواب المان محدود X_h نیز اثبات می شود.

با استفاده از نامساوی چبیشف می‌توان نشان داد که برای هر $T > ۰$ و $\epsilon \in (۰, ۱)$، K_T و $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ با $P(\Omega_\epsilon) \geq ۱ - \epsilon$ وجود دارند و نیز

$$\|X(t)\|^{۲}_{H^{۱}} + \|X_h(t)\|^{۲}_{H^{۱}} \leq \epsilon^{-۱}K_T \quad \text{on}\, \Omega_\epsilon, \quad t \in [۰, T].$$

این کران، حالت غیرخطی را کنترل می‌کند و در قضیه ۲.۵.۴ نشان می‌دهیم برای $\omega \in \Omega_\epsilon$ با توجه به فرض (۵.۴) داریم $X \in C([۰, T], H^{۳})$، همچنین در قضیه ۳.۶.۴ یک برآورد خطا به‌دست می‌آورد،

$$\|X_h(t) - X(t)\| \leq C(\epsilon^{-۱}K_T, T)h^{۲}|\log(h)| \quad \text{on}\, \Omega_\epsilon, \quad t \in [۰, t]. \quad (۶.۴)$$

مقدار ثابت سمت راست به سرعت با $\epsilon^{-۱}K_T$ افزایش می‌یابد،در قضیه ۴.۶.۴ از رابطه (۶.۴) برای اثبات همگرایی قوی استفاده می‌شود

$$\max_{t\in[۰,T]} \mathbf{E}[\|X_h(t) - X(t)\|^{۲}] \to ۰ \quad \text{a.s}\, h \to ۰. \quad (۷.۴)$$

اثبات همگرایی قوی با برآورد نرخ، پیشنهادی برای کار در آینده است. در این ارتباط توجه داشته باشید که حتی برای روش‌های عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی عادی با شرط لیپ‌شیتز محلی غیرخطی، شرایطی را روی نرخ همگرایی فرض می‌کنیم. روش‌های عددی برای معادله کان-هیلیارد جبری به خوبی در متن بیان شده است. برای معادله کان-هیلیارد-کوک، چند روش مورد مطالعه قرار گرفته است که در این پایان‌نامه تنها یکی از آنها استفاده شده است [۶] ، که درآن همگرایی احتمالی به‌صورت طرحی متفاوت برای معادله غیرخطی، در ابعاد مختلف ثابت می‌شود.

۳.۴ مقدمات

۱.۳.۴ نرم‌ها

فرض کنید $\mathcal{D} \subset R^d, d = ۱, ۲, ۳$ یک دامنه محدب کراندار با مرز چندضلعی $\partial\mathcal{D}$، و $H = L_{۲}(\mathcal{D})$ با ضرب استاندارد داخلی $\langle ., . \rangle$ و نرم $\|.\|$، و

$$\dot{H} = \{v \in H : \int_{\mathcal{D}} v \mathrm{d}x = ۰\}$$

باشد. همچنین $H^k = H^k(\mathcal{D})$ نشان‌دهنده فضای سوبولوف استاندارد است. عملگر خطی $A = -\Delta$ با دامنه

$$D(A) = \{v \in H^2 : \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{on}\, \partial\mathcal{D}\}.$$

تعریف می‌شود، به‌گونه ای که روی $\dot{H}$ معین مثبت، خودالحاق، نامحدود، با معکوس فشرده باشد. با گسترش $\dot{H}$ به H ، عملگر خطی A دارای پایه‌ی ویژه متعامد $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ می‌شود که مقادیر ویژه متناظر با آن $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ می‌باشند که در رابطه

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_j, \quad \lambda_j \to \infty,$$

صدق کرده، اولین تابع ویژه یعنی $\varphi_0 = |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}}$ ثابت است. فرض کنید $P : H \to \dot{H}$ ،یک نگاشت متعامد باشد، آنگاه

$$(I - P)v = \langle v, \varphi_0 \rangle \varphi_0 = |\mathcal{D}|^{-1} \int_{\mathcal{D}} v \mathrm{d}x,$$

که میانگین v است. نیم‌نرم‌ها و نرم‌های

$$|v|_\alpha = (\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha |\langle v, \varphi_j \rangle|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha \geq 0,$$

$$\|v\|_\alpha = (\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^\alpha |\langle v, \varphi_j \rangle|^2)^{\frac{1}{2}} = (|v|_\alpha^2 + |\langle v, \varphi_0 \rangle|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha \geq 0,$$

و فضاهای مربوط به آنها

$$\dot{H}^\alpha = D(A^{\frac{\alpha}{2}}) = \{v \in H : |v|_\alpha < \infty\}, \quad H^\alpha = \{v \in H : \|v\|_\alpha < \infty\}.$$

را برای مرتبه صحیح $\alpha = k$ تعریف می شود، در فضاهای سوبولوف استاندارد H^k، نرم $\|.\|_k$ معادل نرم استاندارد $\|.\|_{H^k}$ است. برای مثال،

$$\|v\|_1^2 = |v|_1^2 + |\langle v, \varphi_0 \rangle|^2 = \|\nabla v\|^2 + |\langle v, \varphi_0 \rangle|^2 \tag{۸.۴}$$

که باتوجه به نامساوی پوانکاره برابر، $\|v\|_{H^1}^2$ است.

۲.۳.۴ نیم گروه

عملگر $-A^2$ یک مولد بینهایت کوچک از نیم‌گروه تحلیلی e^{-tA^2} روی H است،به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} e^{-tA^2} v &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-t\lambda_j^2} \langle v, \varphi_j \rangle \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j^2} \langle v, \varphi_j \rangle \varphi_j + \langle v, \varphi_0 \rangle \varphi_0 \\ &= e^{-tA^2} P v + (I - P) v \end{aligned}$$

حاکی از آن است که

$$\|A^\alpha e^{-tA^2} v\| \leq C t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-ct} \|v\|, \quad \alpha > 0. \tag{۹.۴}$$

۳.۳.۴ روش المان‌های محدود

فرض کنید $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ نشان‌دهنده خانواده‌ای از مثلثی‌سازی منظم روی $\mathcal{D}$ با اندازه مش حداکثر h باشد، و S_h فضای توابع پیوسته روی $\mathcal{D}$ باشد، که با توجه به $\mathcal{T}_h$ چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای از درجه حداکثر ۱ می‌باشند. از این رو، $S_h \subset H^1$ است. همچنین $\dot{S}_h = PS_h$ را به‌صورت

$$\dot{S}_h = \{v_h \in S_h : \int_{\mathcal{D}} v_h \mathrm{d}x = 0\},$$

تعریف می‌کنیم. عملگر لاپلاس گسسته [۵] $A_h : S_h \to \dot{S}_h$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle A_h v_h, w_h \rangle = \langle \nabla v_h, \nabla w_h \rangle, \quad \forall v_h \in S_h, w_h \in \dot{S}_h.$$

توجه داشته باشید که

$$|v_h|_1 = \|A^{\frac{1}{2}} v_h\| = \|\nabla v_h\| = \|A_h^{\frac{1}{2}} v_h\|, \quad v_h \in S_h. \tag{۱۰.۴}$$

عملگر A_h خودالحاق، معین مثبت در $\dot{S}_h$ ، نیمه معین مثبت در S_h ، و دارای پایه متعامد ویژه $\{\varphi_{h,j}\}_{j=0}^{N_h}$ با مقادیر ویژه متناظر $\{\lambda_{h,j}\}_{j=0}^{N_h}$ است. به‌طوری‌که:

$$0 = \lambda_{h,0} < \lambda_{h,1} \leq \ldots \leq \lambda_{h,j} \leq \ldots \leq \lambda_{h,N_h},$$

و $\varphi_{h,0} = \varphi_0 = |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}}$. علاوه‌براین، $e^{-tA_h^2} : S_h \to S_h$ به‌صورت

$$e^{-tA_h^2} v_h = \sum_{j=0}^{N_h} e^{-t\lambda_{h,j}} \langle v_h, \varphi_{h,j} \rangle \varphi_{h,j} = \sum_{j=1}^{N_h} e^{-t\lambda_{h,j}} \langle v_h, \varphi_{h,j} \rangle \varphi_{h,j} + \langle v_h, \varphi_0 \rangle \varphi_0,$$

و نگاشت متعامد $P_h : H \to S_h$ به‌صورت

$$\langle P_h v, w_h \rangle = \langle v, w_h \rangle \quad \forall v \in H, w_h \in S_h, \tag{۱۱.۴}$$

و $P_h : \dot{H} \to \dot{S}_h$ به‌صورت

$$e^{-tA_h^2} P_h v = e^{-tA_h^2} P_h P v + (I - P) v$$

تعریف می‌شوند. با توجه به (۹.۴) می‌توان آنرا به‌صورت

$$\|A_h^{\alpha} e^{-tA_h^2} v_h\| \leq C t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-ct} \|v_h\|, \quad v_h \in S_h, \quad \alpha > 0 \tag{۱۲.۴}$$

گسسته‌سازی کرد. در نهایت، نگاشت ریتس [۶] روی $R_h : \dot{H}^1 \to \dot{S}_h$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle \nabla R_h v, \nabla w_h \rangle = \langle \nabla v, \nabla w_h \rangle, \quad \forall v \in \dot{H}^1, w_h \in \dot{S}_h,$$

که با $R_h : H^1 \to S_h$

$$R_h v = R_h P v + (I - P) v, \quad v \in H^1, \tag{۱۳.۴}$$

[۵] discrete Laplacian
[۶] Ritz projector

گسترش یافته عملگر ریتس است. سپس کران خطای زیر را داریم [۹] :

$$\|R_h v - v\| \leq Ch^{\beta}|v|_{\beta}, \quad v \in H^{\beta}, \beta \in [1, 2]. \tag{۱۴.۴}$$

به منظور ساده سازی پایان نامه، فرض می‌کنیم که P_h روی H^1 و نرم L_4 کران‌دار باشد، حال یک کران معکوس برای A_h در نظر می‌گیریم،

$$\begin{aligned} \|P_h v\|_1 &\leq C\|v\|_1, \quad v \in H^1, \\ \|P_h v\|_{L_4} &\leq C\|v\|_{L_4}, \quad v \in H^1, \\ \|A_h v_h\| &\leq Ch^{-2}\|v_h\|, \quad v_h \in S_h. \end{aligned} \tag{۱۵.۴}$$

برای مثال، اگر خانواده مش $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ شبه یکنواخت باشد، روابط بالا برقرارند.

۴.۳.۴ فرایند وینر

اثر و نرم هیلبرت-اشمیت باastفاده از عملگر خطی T روی H به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Tr(T) = \Sigma_{k=1}^{\infty}\langle Tf_k, f_k\rangle, \quad \|T\|_{HS} = (\Sigma_{k=1}^{\infty}\|Tf_k\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

که $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد دلخواه از H است. فرض کنید Q عملگر خطی روی H باشد که خودالحاق، نیمه معین مثبت، کران‌دار،با $Tr(Q) < \infty$ است و $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد ویژه برای Q با مقادیر ویژه $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ می‌باشد. سپس فرایند Q- وینر به صورت

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^{\frac{1}{2}}\beta_k(t)e_k,$$

تعریف می‌شود، که β_k حقیقی مقدار و مستقل از حرکت براونی است، سری در $L_2(\Omega, H)$ ،با توجه به نرم $\|v\|_{L_2(\Omega,H)} = (\mathbf{E}[\|v\|^2])^{\frac{1}{2}}$ همگرا است.

۵.۳.۴ پیچیدگی تصادفی

حال پیچیدگی تصادفی $W_A(t)$ را به‌صورت زیرتعریف می‌شود [۷] :

$$\begin{aligned} W_A(t) &= \int_0^t e^{-(t-s)A^2}\mathrm{d}W(s) \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)A^2}P\mathrm{d}W(s) + \int_0^t \langle \mathrm{d}W(s), \varphi_0\rangle\varphi_0 \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)A^2}P\mathrm{d}W(s) + \langle W(t), \varphi_0\rangle\varphi_0 \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)A^2}P\mathrm{d}W(s) + (I-P)W(t). \end{aligned}$$

وبرای حالت گسسته این پیچیدگی تصادفی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} W_{A_h}(t) &= \int_0^t e^{-(t-s)A_h^2} P_h \mathrm{d}W(s) \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)A_h^2} P_h P \mathrm{d}W(s) + \langle W(t), \varphi_0\rangle \varphi_0 \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)A_h^2} P_h P \mathrm{d}W(s) + (I-P)W(t). \end{aligned}$$

از تفاضل این دو نتیجه می‌شود:

$$W_{A_h}(t) - W_A(t) = \int_0^t (e^{-(t-s)A_h^2} P_h - e^{-(t-s)A^2}) P \mathrm{d}W(s). \tag{۱۶.۴}$$

قضیه ۱.۳.۴. *اگر به‌ازای* $\beta \geq 2$ *،* $\|A^{\frac{\beta-2}{2}} Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS} < \infty$ *، آنگاه*

$$\|W_A(t)\|_{L_2(\Omega, \dot{H}^\beta)} \leq C \|A^{\frac{\beta-2}{2}} Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}, \quad t \geq 0.$$

قضیه ۲.۳.۴. *با درنظرگرفتن* $\beta = 2$ *، اگر* $\|Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS} < \infty$ *، آنگاه*

$$\|W_{A_h}(t) - W_A(t)\|_{L_2(\Omega, H)} \leq C h^2 |\log h| \|Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}, \quad t \geq 0.$$

۶.۳.۴ لم گرونوال

ابتدا تعمیمی از لم گرونوال را بیان می‌کنیم [۵].

لم ۳.۳.۴. **(*تعمیم لم گرونوال*)** *فرض کنید که تابع* $\varphi(t) \geq 0$ *برای* $t \in [0, T]$ *پیوسته باشد. اگر*

$$\varphi(t) \leq A t^{-1+\alpha} + B \int_0^t (t-s)^{-1+\beta} \varphi(s) \mathrm{d}s, \quad t \in (0, T], \tag{۱۷.۴}$$

برای ثابت‌های $A, B \geq 0$ *و* $\alpha, \beta > 0$ *، آنگاه ثابت* $C = C(B, T, \alpha, \beta)$ *وجود دارد به‌طوری‌که*

$$\varphi(t) \leq C A t^{-1+\alpha}, \quad t \in (0, T].$$

برهان. با $N-1$ مرتبه تکرار نامساوی (۱۷.۴) و باستفاده از اتحاد [۵]،

$$\int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} (s)^{-1+\beta} \mathrm{d}s = C(\alpha, \beta)(t)^{-1+\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

و برآورد t^β با T^β داریم:

$$\varphi(t) \leq C_1 A (t)^{-1+\alpha} + C_2 \int_0^t (t-s)^{-1+N\beta} \varphi(s) \mathrm{d}s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

که $C_1 = C_1(B, T, \alpha, \beta, N)$ و $C_2 = C_2(B, \beta, N)$ اکنون با انتخاب N به‌طوری‌که $-1 + N\beta \geq 0$ و با در نظرگرفتن $T^{-1+N\beta}$ ، $(t-s)^{-1+N\beta}$ را برآورد می‌کنیم. حال اگر $-1 + \alpha \geq 0$ نتیجه مورد نظر به‌دست می‌آید. □

همچنین لم گرونوال استاندارد زیر را بیان می‌کنیم:

لم ۴.۳.۴. **(لم گرونوال)** *فرض کنید که تابع $\varphi(t)$ روی $[\circ, T]$ پیوسته باشد. اگر برای برخی از $A, C \geq \circ$ و $B > \circ$ داشته باشیم*

$$\varphi(t) \leq A + Ct + B\int_{\circ}^{t} \varphi(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [\circ, T],$$

آنگاه

$$\varphi(t) \leq (A + \frac{C}{B})e^{Bt}, \quad t \in [\circ, T].$$

برهان. بادرنظرگرفتن $\Phi(t) = A + Ct + B\int_{\circ}^{t} \varphi(s)\mathrm{d}s$ داریم:

$$\Phi'(t) = C + B\varphi(t) \leq C + B\Phi(t),$$

بنابراین $\Phi'(t) - B\Phi(t) \leq C$ باضرب دو طرف نامساوی در e^{-Bt} داریم: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi(t)e^{-Bt}) \leq Ce^{-Bt}$. از این رو

$$\Phi(t)e^{-Bt} \leq \Phi(\circ) + C\int_{\circ}^{t} e^{-Bs}\mathrm{d}s = (A + \frac{C}{B}) - \frac{C}{B}e^{-Bt}$$

هر دو طرف را در e^{Bt} ضرب می‌کنیم:

$$\Phi(t) \leq (A + \frac{C}{B})e^{Bt} - \frac{C}{B} \leq (A + \frac{C}{B})e^{Bt}$$

اما $\Phi(t) \leq \varphi(t)$ ،بنابراین نتیجه مورد نظر بدست می‌آید. □

۷.۳.۴ کران‌هایی برای معادله کان-هیلیارد-کوک غیرخطی

لم ۵.۳.۴. *برای $u, v \in H^{۳}$ و $f(s) = s^{۳} - s$ داریم:*

$$\|\Delta f(u)\| \leq C(۱ + \|u\|_{۱}^{۲})\|u\|_{۳}, \tag{۱۸.۴}$$

$$\|A_h^{-\frac{۱}{۲}} P(f(u) - f(v))\| \leq C(۱ + \|u\|_{۱}^{۲} + \|v\|_{۱}^{۲})\|u - v\|. \tag{۱۹.۴}$$

برهان. باتوجه به f مشتقات اول و دوم آن به‌صورت $f'(s) = ۳s^{۲} - ۱, f''(s) = ۶s$ است. با استفاده از نامساوی هولدر و نامساوی سوبولوف برای $(\mathrm{d} \leqslant ۳)$، $\|u\|_{L_{۶}} \leq C\|u\|_{H^{۱}}$ و $\|u\|_{H^k} \leq \|u\|_k$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\|\Delta f(u)\| &= \|f'(u)\Delta u + f''(u)|\nabla u|^{۲}\| \\
&\leq \|f'(u)\|_{L_{۳}}\|\Delta u\|_{L_{۶}} + \|f''(u)\|_{L_{۶}}\|\nabla u\|_{L_{۶}}^{۲} \\
&\leq C(۱ + \|u\|_{L_{۶}}^{۲})\|\Delta u\|_{L_{۶}} + C\|u\|_{L_{۶}}\|\nabla u\|_{L_{۶}}^{۲} \\
&\leq C(۱ + \|u\|_{H^{۱}}^{۲})\|u\|_{H^{۳}} + C\|u\|_{H^{۱}}\|\nabla u\|_{H^{۲}}^{۲}
\end{aligned}$$

چون $\|u\|_{۲} \le C\|u\|_{۱}^{\frac{۱}{۲}}\|u\|_{۳}^{\frac{۱}{۲}}$ داریم: $\|\Delta f(u)\| \le C(۱+\|u\|_{۱}^{۲})\|u\|_{۳}$، بنابراین

$$\|\Delta f(u)\| \le C(۱+\|u\|_{H^۱}^{۲})\|u\|_{H^۳}.$$

برای اثبات (۱۹.۴) نابرابری هولدر و نابرابری سوبولوف را برای (۱۰.۴) به‌کار می‌رود، بنابراین:

$$\begin{aligned}\|A_h^{-\frac{۱}{۲}}P\varphi\| &= \sup_{v_h\in S_h}\frac{\langle A_h^{-\frac{۱}{۲}}P\varphi\rangle}{\|v_h\|} = \sup_{v_h\in S_h}\frac{\langle \varphi, A_h^{-\frac{۱}{۲}}Pv_h\rangle}{\|v_h\|}\\ &= \sup_{w_h\in \dot{S}_h}\frac{\langle\varphi, w_h\rangle}{|w_h|_۱} \le \sup_{w_h\in\dot{S}_h}\frac{\|\varphi\|_{L_{\frac{۶}{۵}}}\|w_h\|_{L_۶}}{|w_h|_۱} \le C\|\varphi\|_{L_{\frac{۶}{۵}}}.\end{aligned}$$

با استفاده از عبارت $\varphi = f(u)-f(v) = \int_۰^۱ f'(su+(۱-s)v)\mathrm{d}s(u-v) = \int_۰^۱ f'(u_s)\mathrm{d}s(u-v)$ که $u_s = su+(۱-s)v$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\|A_h^{-\frac{۱}{۲}}P(f(u)-f(v))\| &= \|A_h^{-\frac{۱}{۲}}P\varphi\| \le C\|\varphi\|_{L_{\frac{۶}{۵}}}\\ &\le C\int_۰^۱ \|f'(u_s)\|_{L_۳}\mathrm{d}s\|u-v\|\\ &\le C\int_۰^۱ (۱+\|u_s\|_{L_۶}^۲)\mathrm{d}s\|u-v\|\\ &\le C\int_۰^۱ (۱+\|u_s\|_۱^۲)\mathrm{d}s\|u-v\|\\ &\le C(۱+\|u\|_۱^۲+\|v\|_۱^۲)\|u-v\|.\end{aligned}$$

□

۴.۴ معادله کان-هیلیارد-کوک

۱.۴.۴ مساله پیوسته

معادله کان-هیلیارد-کوک عبارت است از:

$$\begin{cases}\mathrm{d}u - \Delta w\mathrm{d}t = \mathrm{d}W, & \text{in } \mathcal{D}\times[۰,T],\\ w+\Delta u + f(u) = ۰, & \text{in } \mathcal{D}\times[۰,T],\\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = ۰, & \text{on } \partial\mathcal{D}\times[۰,T],\\ u(۰) = u_۰, & \text{in } \mathcal{D}.\end{cases} \quad (۲۰.۴)$$

تقریب المان‌های محدود فرم ضعیف آن به ازای تمام $v\in H^۲$ با شرط مرزی $\frac{\partial v}{\partial n} = ۰$ به‌صورت زیر

است:

$$\langle u(t),v\rangle = \langle u_\circ, v\rangle + \int_\circ^t \langle w(s), \Delta v\rangle \mathrm{d}s + \int_\circ^t \langle \mathrm{d}W(s), v\rangle, \qquad t>\circ,$$
$$\langle w,v\rangle = \langle \nabla u, \nabla v\rangle + \langle f(u), v\rangle, \qquad t>\circ, \qquad (۲۱.۴)$$
$$u(\circ) = u_\circ.$$

در فضای $H = L_۲(\mathcal{D})$ با استفاده از عملگر A که در بخش قبل معرفی شده است، فرم تکامل انتزاعی معادله کان-هیلیارد-کوک را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathrm{d}X + (A^۲X + Af(x))\mathrm{d}t = \mathrm{d}W, \quad t>\circ; \quad X(\circ) = X_\circ. \qquad (۲۲.۴)$$

برای تمام $v \in \dot{H}^۴ = D(A^۲)$ جواب ضعیف (۲۲.۴) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\langle X(t),v\rangle - \langle X_\circ, v\rangle + \int_\circ^t \langle X, A^۲ v\rangle \mathrm{d}s + \int_\circ^t \langle f(X(s)), Av\rangle \mathrm{d}s + \int_\circ^t \langle \mathrm{d}W(s), v\rangle,$$

و جواب خفیف آن از

$$X(t) = e^{-tA^۲}X_\circ - \int_\circ^t e^{-(t-s)A^۲} Af(X(s))\mathrm{d}s + \int_\circ^t e^{-(t-s)A^۲}\mathrm{d}W(s), \qquad (۲۳.۴)$$

به‌دست می‌آید.

۲.۴.۴ مساله المان محدود

با توجه به (۲۱.۴) ،جواب المان محدود $u_h(t) \in S_h$ را برای (۲۰.۴) به‌ازای تمام $u_h \in S_h$ ، $t>\circ$ به صورت

$$\langle u_h(t), v_h\rangle = \langle u_\circ, v_h\rangle + \int_\circ^t \langle \nabla w_h(s), \nabla v_h\rangle \mathrm{d}s + \int_\circ^t \langle \mathrm{d}W(s), v_h\rangle, \qquad (۲۴.۴)$$
$$\langle w_h, v_h\rangle = \langle \nabla u_h, \nabla v_h\rangle + \langle f(u_h), v_h\rangle, \qquad (۲۵.۴)$$
$$u_h(\circ) = u_{h,\circ} \qquad (۲۶.۴)$$

تعریف می‌شود. این رابطه در فضای S_h به شکل

$$\mathrm{d}X_h + (A_h^۲X_h + A_hP_hf(x_h))\mathrm{d}t = P_h\mathrm{d}W, \quad t>\circ; \quad X_h(\circ) = P_hX_\circ; \qquad (۲۷.۴)$$

نوشته می‌شود،که جواب خفیف آن به‌صورت

$$X_h(t) = e^{-tA_h^۲}X_\circ - \int_\circ^t e^{-(t-s)A_h^۲}A_hP_hf(X(s))\mathrm{d}s + \int_\circ^t e^{-(t-s)A_h^۲}P_h\mathrm{d}W(s) \qquad (۲۸.۴)$$

است.

۳.۴.۴ لیاپانوف تابعی

تابع لیاپانوف برای معادله قطعی کان هیلیارد را به صورت

$$J(u)=\frac{۱}{۲}\|\nabla u\|^{۲}+\int_{\mathcal{D}}F(u)\mathrm{d}x,\quad u\in H^{۱},\tag{۲۹.۴}$$

تعریف می‌کنیم، که $F(s)=\frac{۱}{۴}s^{۴}-\frac{۱}{۲}s^{۲}$ تابع اولیه $f(s)=s^{۳}-s$ است، که در حالت قطعی $J(X(t))$ در طول مسیر جواب، افزایش می یابد. این رابطه برای معادله تصادفی برقرار نیست، اما با استفاده از آن می‌توان یک کران برای مقدار مورد انتظار $J(X(t))$ به‌دست آورد.

قضیه ۱.۴.۴. *فرض کنید $\|A^{\frac{۱}{۲}}Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}<\infty$، و X, X_h جوابهای ضعیف از (۲۲.۴) و (۲۷.۴) با $\boldsymbol{E}[J(X_\circ)]<\infty$ و اینکه $X_\circ$ با مقادیر در $H^{۱}$، $\mathcal{F}_\circ$ -اندازه‌پذیر است. در این‌صورت، برای تمام $t>\circ$ داریم:*

$$\boldsymbol{E}[J(X(t))]\leq C(\boldsymbol{E}[J(X_\circ)]+۱+tK_Q+t^{۲}K_Q^{۲}),\tag{۳۰.۴}$$

و

$$\boldsymbol{E}[J(X_h(t))]\leq C(\boldsymbol{E}[J(P_hX_\circ)]+۱+tK_Q+t^{۲}K_Q^{۲}),\tag{۳۱.۴}$$

که $K_Q=\|A^{\frac{۱}{۲}}Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}^{۲}+\langle Q\varphi_\circ,\varphi_\circ\rangle$.

برهان. در اینجا تنها به اثبات (۳۱.۴) می‌پردازیم، اثبات (۳۰.۴) با حذف زیرنویس "h" از (۳۱.۴) به‌دست می‌آید. ابتدا معادله (۲۷.۴) را به‌عنوان یک معادله دیفرانسیل Itô در S_h که توسط P_hW بدست می‌آید درنظرمی‌گیریم، و یک $Q_h=P_hQP_h$ -فرایند وینر در S_h است. با توجه‌به رابطه‌ی (۱۵.۴) نتیجه می‌گیریم که اگر $\mathbf{E}[J(X_\circ)]<\infty$ آنگاه $\mathbf{E}[J(P_hX_\circ)]<\infty$.

با بکار بردن فرمول Itô برای $J(X_h(t))$ [۷]، داریم:

$$\begin{aligned}J(X_h(t))=&J(X_h(\circ))+\int_\circ^t\langle J'(X_h(s)),\mathrm{d}X_h(s)\rangle+\frac{۱}{۲}\int_\circ^t Tr(J''(X_h(s))Q_h)\mathrm{d}s\\ \overset{(۲۲.۴)}{=}&J(P_hX_\circ)+\int_\circ^t\langle J'(X_h(s)),-A_h^{۲}X_h(s)-P_hA_hf(X_h(s))\rangle\mathrm{d}s\\ &+\frac{۱}{۲}\int_\circ^t Tr(J''(X_h(s))Q_h)\mathrm{d}s+\int_\circ^t\langle J'(X_h(s)),\mathrm{d}W(s)\rangle.\end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$\langle J'(u_h),v_h\rangle=\langle\nabla u_h,\nabla v_h\rangle+\langle f(u_h),v_h\rangle=\langle A_hu_h+P_hf(u_h),v_h\rangle$$

و

$$\begin{aligned}\langle J''(u_h)v_h,w_h\rangle&=\langle\nabla v_h,\nabla w_h\rangle+\langle f'(u_h)v_h,w_h\rangle\\&=\langle A_hv_h+P_h[f'(u_h)v_h],w_h\rangle,\end{aligned}$$

بنابراین؛

$$J'(u_h) = A_h u_h + P_h f(u_h), \quad J''(u_h) = A_h + P_h[f'(u_h)].$$

از این رو، با جایگذاری این دو رابطه در $J(X_h(t))$ ؛

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[J(X_h(t))] =&\mathbf{E}[J(P_h X_0)] - \mathbf{E}[\int_0^t |A_h X_h(s) + P_h f(X_h(s))|_1^2 \mathrm{d}s] \\ &+ \frac{1}{2}\mathbf{E}[\int_0^t (Tr(A_h Q_h) + Tr(P_h[f'(X_h(s))]Q_h))\mathrm{d}s].\end{aligned}$$

با چشم پوشی از عبارت منفی در سمت راست داریم:

$$\mathbf{E}[J(X_h(t))] \leq \mathbf{E}[J(P_h X_0)] + \frac{1}{2}\mathbf{E}[\int_0^t (Tr(A_h Q_h) + Tr(P_h[f'(X_h(s))]Q_h))\mathrm{d}s]. \quad (۳۲.۴)$$

اکنون $Tr(A_h Q_h)$ و $Tr(P_h[f'(X_h(s))]Q_h)$ را محاسبه می‌کنیم: برای محاسبه $Tr(A_h Q_h)$ فرض کنید $\{\varphi_{h,j}\}_{j=0}^{N_h}$ یک پایه متعامد از بردارهای ویژه A_h و $\{\lambda_{h,j}\}_{j=0}^{N_h}$ مقادیر ویژه آن باشد. سپس

$$\begin{aligned}Tr(A_h Q_h) &= Tr(Q_h A_h) \\ &= \sum_{j=1}^{N_h} \lambda_{h,j}\langle Q\varphi_{h,j}, \varphi_{h,j}\rangle = \sum_{j=1}^{N_h}\langle P_h Q P_h A_h \varphi_{h,j}, \varphi_{h,j}\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N_h}\langle Q^{\frac{1}{2}} A_h^{\frac{1}{2}} P_h \varphi_{h,j}, Q^{\frac{1}{2}} A_h^{\frac{1}{2}} P_h \varphi_{h,j}\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N_h} \|Q^{\frac{1}{2}} A_h^{\frac{1}{2}} P_h \varphi_{h,j}\|^2 = \|Q^{\frac{1}{2}} A_h^{\frac{1}{2}} P_h\|_{HS}^2 \\ &\leq \|A_h^{\frac{1}{2}} P_h A^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}^2 \\ &\leq \|A_h^{\frac{1}{2}} P_h A^{-\frac{1}{2}}\|_{B(\dot{H})}^2 \|A^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}^2 \\ &\leq C\|A^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}^2.\end{aligned}$$

زیرا؛

$$\|A_h^{\frac{1}{2}} P_h A^{-\frac{1}{2}} v\| = |P_h A^{-\frac{1}{2}} v|_1 \leq C|A^{-\frac{1}{2}} v|_1 = C\|v\|, \quad v \in \dot{H},$$

بنابراین $\|A_h^{\frac{1}{2}} P_h A^{-\frac{1}{2}}\|_{B(\dot{H})} \leq C$، از این رو با توجه به فرض داشتیم؛ $K_Q = \|A^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}^2 + \langle Q\varphi_0, \varphi_0\rangle$
بنابراین،

$$\|A_h^{\frac{1}{2}} Q_h^{\frac{1}{2}}\|_{HS}^2 = Tr(A_h Q_h) \leq \|A^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}^2 \leq CK_Q \quad (۳۳.۴)$$

حال برای اثبات $Tr(P_h[f'(X_h)]Q_h)$ ، فرض کنید $\{e_{h,j}\}_{j=\circ}^{N_h}$ پایه ویژه متعامد Q_h و $\{\gamma_{h,j}\}_{j=\circ}^{N_h}$ مقادیر ویژه نظیر آن باشد. با استفاده از کران $|f'(s)| \leq C(۱+s^۲)$ و نامساوی هولدر و نامساوی سوبولوف داریم،

$$|\langle f'(u)v, v\rangle| \leq C(۱+\|u\|_{L_۴}^۲)\|v\|_{L_۴}^۲ \leq C(۱+\|u\|_{L_۴}^۲)\|v\|_{H^۱}^۲ \leq C(۱+\|u\|_{L_۴}^۲)\|v\|_۱^۲.$$

با استفاده از (۸.۴) و (۱۰.۴) برای $v_h \in S_h$ داریم:

$$\|A_h\|_۱^۲ = |v_h|_۱^۲ + \langle v_h, \varphi_\circ\rangle^۲ = \|A_h^{\frac{۱}{۲}} v_h\|^۲ + \langle v_h, \varphi_\circ\rangle^۲,$$

به طوری که،با (۳۳.۴)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=\circ}^{N_h} \|Q_h^{\frac{۱}{۲}} e_{h,j}\|_۱^۲ &= \sum_{j=\circ}^{N_h} \|A_h^{\frac{۱}{۲}} Q_h^{\frac{۱}{۲}} e_{h,j}\|^۲ + \sum_{j=\circ}^{N_h} \langle Q_h^{\frac{۱}{۲}} e_{h,j}, \varphi_\circ\rangle^۲ \\
&\leq \|A_h^{\frac{۱}{۲}} Q_h^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}^۲ + \|Q_h^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}^۲ \\
&\leq \|A_h^{\frac{۱}{۲}} Q_h^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}^۲ + \|Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}^۲ \\
&\leq C\|A^{\frac{۱}{۲}} Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}^۲ + \langle Q\varphi_\circ, \varphi_\circ\rangle \\
&\leq CK_Q.
\end{aligned}$$

اکنون بااستفاده از اصل کرانداری $A^{-\frac{۱}{۲}}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\|Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS}^۲ &= \sum_{j=\circ}^{\infty} \|Q^{\frac{۱}{۲}}\varphi_j\|^۲ = \sum_{j=۱}^{\infty} \|A^{-\frac{۱}{۲}} A^{\frac{۱}{۲}} Q^{\frac{۱}{۲}}\varphi_j\|^۲ + \|Q^{\frac{۱}{۲}}\varphi_\circ\|^۲ \\
&\leq C\sum_{j=۱}^{\infty} \|A^{\frac{۱}{۲}} Q^{\frac{۱}{۲}}\varphi_j\|^۲ + \langle Q\varphi_\circ, \varphi_\circ\rangle \\
&= C\|A^{\frac{۱}{۲}} Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS} + \langle Q\varphi_\circ, \varphi_\circ\rangle \leq CK_Q.
\end{aligned} \tag{۳۴.۴}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
Tr(P_h[f'(X_h)]Q_h) &= \sum_{j=\circ}^{N_h} \langle P_h[f'(X_h)Q_h e_{h,j}], e_{h,j}\rangle \\
&= \sum_{j=\circ}^{N_h} \gamma_{h,j}\langle f'(X_h)e_{h,j}, e_{h,j}\rangle \\
&= \sum_{j=\circ}^{N_h} \langle f'(X_h)Q_h^{\frac{۱}{۲}} e_{h,j}, Q_h^{\frac{۱}{۲}} e_{h,j}\rangle
\end{aligned} \tag{۳۵.۴}$$

با استفاده از (۳۴.۴) داریم:

$$Tr(P_h[f'(X_h)]Q_h) \leq C(۱+\|X_h\|_{L_۴}^۲)\Sigma_{j=\circ}^{N_h} \|Q_h^{\frac{۱}{۲}} e_{h,j}\|_۱^۲ \leq C(۱+\|X_h\|_{L_۴}^۲)K_Q \tag{۳۶.۴}$$

با قرار دادن (۳۳.۴) و (۳۶.۴) در (۳۲.۴) داریم:

$$\mathbf{E}[J(X_h(t))] = \mathbf{E}[J(P_h X_\circ)] + CK_Q(t + \int_\circ^t \mathbf{E}[\|X_h(s)\|_{L_۴}^۲]\mathrm{d}s). \qquad (۳۷.۴)$$

حال به محاسبه $\int_\circ^t \mathbf{E}[\|X_h\|_{L_۴}^۲]\mathrm{d}s$ می‌پردازیم. با استفاده از تعریف از لیاپانوف تابعی (۲۹.۴) و با توجه به $F(s) = \frac{۱}{۴}s^۴ - \frac{۱}{۲}s^۲ \geq c_۱ s^۴ - c_۲$، داریم:

$$J(u) \geq \frac{۱}{۲}\|\nabla u\|^۲ + C_۱\|u\|_{L_۴}^۴ - C_۲,$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\|u\|_{L_۴}^۴ \leq C_۳(۱ + J(u))$$

ازاین‌رو،به‌وسیله نامساوی هولدر،برای $\epsilon > \circ$ داریم:

$$\begin{aligned} CK_Q \int_\circ^t \mathbf{E}[\|X_h(s)\|_{L_۴}^۲]\mathrm{d}s &\leq CK_Q(\int_\circ^t \mathbf{E}[\|X_h(s)\|_{L_۴}^۲]\mathrm{d}s)^{\frac{۱}{۲}} t^{\frac{۱}{۲}} \\ &\leq \frac{\epsilon}{C_۳}\int_\circ^t \mathbf{E}[\|X_h(s)\|_{L_۴}^۲]\mathrm{d}s + \frac{C_۳}{۴\epsilon} tCK_Q^۲ \\ &\leq \epsilon \int_\circ^t \mathbf{E}[۱ + J(X_h(s))]\mathrm{d}s + C\epsilon^{-۱}tK_Q^۲ \\ &\leq \epsilon \int_\circ^t \mathbf{E}[J(X_h(s))]\mathrm{d}s + \epsilon t + C\epsilon^{-۱}tK_Q^۲. \end{aligned}$$

باقراردادن رابطه بالا در (۳۷.۴) داریم:

$$\mathbf{E}[J(X_h(t))] \leq \mathbf{E}[J(P_h X_\circ)] + C(\epsilon + K_Q + \epsilon^{-۱}K_Q^۲)t + \epsilon\int_\circ^t \mathbf{E}[J(X_h(s))]\mathrm{d}s.$$

اکنون با بکار بردن لم گرونوال ۴.۳.۴ برای $\epsilon > \circ$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[J(X_h(t))] &\leq e^{\epsilon t}(\mathbf{E}[J(P_h X_\circ)] + C(۱ + \epsilon^{-۱}K_Q + \epsilon^{-۲}K_Q^۲)) \\ &\leq e(\mathbf{E}[J(P_h X_\circ)] + C(۱ + tK_Q + t^۲K_Q^۲)), \end{aligned}$$

که در آن برای هر t ثابت با انتخاب $\epsilon = t^{-۱}$ یک کران بهینه بدست می‌آوریم. $\square$

قضیه ۱.۴.۴ از [۸] گرفته شده که با روشی متفاوت اثبات شده است. نکته مهم، رشد کران است، که با توجه به t، از نمایی به درجه دو کاهش یافته است. به‌علاوه، فرض A و Q دارای پایه‌های ویژه مشترک‌اند و پایه‌های ویژه Q در $\|e_j\| \leq C$ صدق می‌کنند را حذف کرده همان کران را برای X_h به‌دست آورده‌ایم.

توجه کنید که فرض $\|A^{\frac{۱}{۲}}Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS} < \infty$ همان شرط نظم از درجه ۳ $\beta = ۳$ برای $W_A(t)$ است که در قضیه ۲.۳.۴ استفاده شده بود. اکنون قضیه قبلی را برای به‌دست آوردن کران‌های نرم یکنواخت در زیرمجموعه‌ای از Ω با احتمال دلخواه نزدیک به ۱ استفاده می‌کنیم.

نتیجه ۲.۴.۴. *فرض کنید که $\|A^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS} < \infty$ و X, X_h جواب‌های ضعیف (۲۲.۴) و (۲۷.۴) و $X_\circ$ با مقادیری در H^1، $\mathcal{F}_\circ$ -اندازه‌پذیر باشد و نیز $\|X_\circ\|^2_{L_2(\Omega,H^1)} + \|X_\circ\|^4_{L_4(\Omega,L_4)} \leq \rho$. آنگاه، برای هر $\epsilon \in (\circ, 1)$ وجود دارد $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ بطوری‌که $P(\Omega_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$ و*

$$\|\nabla X(t)\|^2 + \|X(t)\|^4_{L_4} \leq \epsilon^{-1} K_T \quad \text{on } \Omega_\epsilon,\ t \in [\circ, T], \tag{۳۸.۴}$$

$$\|\nabla X_h(t)\|^2 + \|X_h(t)\|^4_{L_4} \leq \epsilon^{-1} K_T \quad \text{on } \Omega_\epsilon,\ t \in [\circ, T], \tag{۳۹.۴}$$

$$\|X(t)\|^2_1 + \|X_h(t)\|^2_1 \leq \epsilon^{-1} K_T \quad \text{on } \Omega_\epsilon,\ t \in [\circ, T], \tag{۴۰.۴}$$

$$\|X_A(t)\|^2_3 \leq \epsilon^{-1} K_T \quad \text{on } \Omega_\epsilon,\ t \in [\circ, T], \tag{۴۱.۴}$$

که $K_T = C(1 + \rho + K_Q T + K_Q^2 T^2)$ است.

برهان. از آنجایی‌که $\mathbf{E}[J(X_\circ)] \leq C(1+\rho)$ باتوجه‌به (۳۰.۴) به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{E}[J(X(t))] \leq C(1 + \rho + K_Q T + K_Q^2 T^2) \leq K_T \quad t \in [\circ, T].$$

با اعمال نامساوی چبیشف برای هر $\alpha > \circ$ و $t \in [\circ, T]$ داریم:

$$\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \|\nabla X(t)\|^2 + \|X(t)\|^4_{L_4} > \alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\mathbf{E}[\|\nabla X(t)\|^2 + \|X(t)\|^4_{L_4}]$$
$$\frac{1}{\alpha}C(1 + \mathbf{E}[J(X(t))] \leq \frac{1}{\alpha}C(1 + K_T) = \frac{K_T}{\alpha}$$

که C در K_T تراز شده است. با انتخاب $\alpha = \epsilon^{-1}K_T$ و

$$\Omega_\epsilon = \{\omega \in \Omega : \|\nabla X(t)\|^2 + \|X(t)\|^4_{L_4} \leq \epsilon^{-1} K_T\}.$$

داریم:

$$\mathbf{P}(\Omega_\epsilon) = 1 - \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \|\nabla X(t)\|^2 + \|X(t)\|^4_{L_4} > \alpha\}) \geq 1 - \epsilon.$$

بنابراین (۳۸.۴) اثبات می‌شود.

برای اثبات (۳۹.۴) از آنجایی‌که $\mathbf{E}[J(P_h X_\circ)] \leq C(1+\rho)$ باتوجه‌به (۳۱.۴) داریم:

$$\mathbf{E}[J(X_h(t))] \leq C(1 + \rho + K_Q T + K_Q^2 T^2) \leq K_T \quad t \in [\circ, T].$$

با اعمال نامساوی چبیشف برای هر $\alpha > \circ$ و $t \in [\circ, T]$ به‌دست می‌آوریم،

$$\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \|\nabla X_h(t)\|^2 + \|X_h(t)\|^4_{L_4} > \alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\mathbf{E}[\|\nabla X_h(t)\|^2 + \|X_h(t)\|^4_{L_4}]$$
$$\frac{1}{\alpha}C(1 + \mathbf{E}[J(X_h(t))] \leq \frac{1}{\alpha}C(1 + K_T) = \frac{K_T}{\alpha}$$

که C در K_T تراز شده است. با انتخاب $\alpha = \epsilon^{-1} K_T$ و

$$\Omega_\epsilon = \{\omega \in \Omega : \|\nabla X_h(t)\|^2 + \|X_h(t)\|_{L_4}^4 \le \epsilon^{-1} K_T\}.$$

برای (۴۰.۴) با توجه به این‌که $\epsilon^{-1} K_T \ge 1$ و نیز

$$\|X(t)\|_1^2 \le \|\nabla X(t)\|^2 + \|X(t)\|^2 \le \|\nabla X(t)\|^2 + C\|X(t)\|_{L_4}^2 \le \epsilon^{-1} K_T$$

پس از تنظیمی از C در K_T بدست می‌آید. در نهایت، (۴۱.۴) با روشی مشابه از قضیه ۱.۳.۴ با $\beta = 3$ با یک ثابت که می تواند در K_T جذب شود. □

۵.۴ منظم بودن جواب

قضیه‌های زیر از [۸] اقتباس شده است.

قضیه ۱.۵.۴. *اگر $T > 0$، فرض کنید برای برخی از $\delta > 0$، $Tr(A^{\delta-1} Q) < \infty$ و X_0، با مقادیری در H، $\mathcal{F}_0$ -اندازه پذیر است. در این‌صورت فرایند X متعلق به $C([0,T], H)$ وجود دارد که جواب خفیف معادله کان- هیلیارد- کوک (۱.۴) است.*

اکنون نشان می دهیم با توجه به فرض $\|A^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS} < \infty$ ، جواب ما در H^3 قرار دارد. بدین منظور می‌نویسیم: $X(t) = Y(t) + W_A(t)$. با توجه به قضیه ۱.۳.۴ می‌دانیم که W_A در H^3 قرار دارد. نظم Y در قضیه بعد مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بنابراین

$$Y(t) = X(t) - W_A(t) = e^{-tA^2} X_0 - \int_0^t e^{-(t-s)A^2} A f(x(s)) \mathrm{d}s,$$

یک جواب خفیف از

$$\dot{Y} + A^2 Y + A f(X) = 0, \quad t > 0; \quad Y(0) = X_0. \qquad (۴۲.۴)$$

است.

قضیه ۲.۵.۴. *فرض کنید $\|A^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS} < \infty$ و X_0 با مقادیری در H^3، $\mathcal{F}_0$ -اندازه پذیر باشد و $\|X_0\|_{L_2(\Omega,H^1)}^2 + \|X_0\|_{L_4(\Omega,L_4)}^4 \le \infty$ و $T > 0$ ، $\epsilon \in (0,1)$ و Ω_ϵ و K_T همانند آنچه در نتیجه ۲.۴.۴ تعریف شده بودند باشند و T جواب قضیه ۱.۵.۴ باشد. دراین صورت، برای هر $\omega \in \Omega_\epsilon$ جواب خفیف Y از (۴۲.۴) متعلق به $C([0,T], H^3)$ است. علاوه بر این،*

$$\|Y(t)\|_3 \le C(\|X_0\|_3, \epsilon^{-1} K_T, T) \quad \text{on } \Omega_\epsilon,\ t \in [0,T],$$

$$\|X(t)\|_3 \le C(\|X_0\|_3, \epsilon^{-1} K_T, T) \quad \text{on } \Omega_\epsilon,\ t \in [0,T].$$

برهان. با فرض $T > ۰$ و $\omega \in \Omega_\epsilon$ و با استفاده از نتیجه ۲.۴.۴ داریم:

$$\|X(t)\|_۱^۲ \leq \epsilon^{-۱} K_T, \quad \|W_A(t)\|_۳ \leq \epsilon^{-۱} K_T. \tag{۴۳.۴}$$

با توجه به

$$Y(t) = e^{-tA^۲} X_۰ - \int_۰^t e^{-(t-s)A^۲} A f(x(s)) \mathrm{d}s, \tag{۴۴.۴}$$

حال از دو طرف نرم می‌گیریم، لذا داریم:

$$\begin{aligned} |Y(t)|_۳ &\leq |e^{-tA^۲} X_۰|_۳ + \int_۰^t |e^{-(t-s)A^۲} A f(x(s))|_۳ \mathrm{d}s \\ &= \|e^{-tA^۲} A^{\frac{۳}{۲}} X_۰\| + \int_۰^t \|A^{\frac{۳}{۲}} e^{-(t-s)A^۲} A f(x(s))\| \mathrm{d}s \\ &\leq |X_۰|_۳ + C \int_۰^t (t-s)^{-\frac{۳}{۴}} \|A f(x(s))\| \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

می‌دانیم $\|Af(x(s))\| = \|\Delta f(x(s))\|$ بنابراین با توجه به (۱۸.۴) داریم:

$$\begin{aligned} |Y(t)|_۳ &\leq |X_۰|_۳ + C \int_۰^t (t-s)^{-\frac{۳}{۴}} (۱ + \|x(s)\|_۱^۲) \|X(s)\|_۳ \mathrm{d}s \\ &\leq |X_۰|_۳ + C \int_۰^t (t-s)^{-\frac{۳}{۴}} (۱ + \|x(s)\|_۱^۲) (\|Y(s)\|_۳ + \|W_A(s)\|_۳ \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

برای بدست آوردن کران یکسان برای نرم $\|Y(t)\|_۳$ از آن‌جا که $(I-P)Y(t) = (I-P)X_۰$ ثابت است. با استفاده از (۴۳.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \|Y(t)\|_۳ &\overset{(۳۵/۴),(۳۶/۴)}{\leq} \|X_۰\|_۳ + C \int_۰^t (t-s)^{-\frac{۳}{۴}} (۱ + \epsilon^{-۱} K_T)(\|Y(s)\|_۳ + \epsilon^{-۱} K_T) \mathrm{d}s \\ &\leq \|X_۰\|_۳ + C\epsilon^{-۱} K_T (۱ + \epsilon^{-۱} K_T) T^{\frac{۱}{۴}} + C(۱ + \epsilon^{-۱} K_T) \int_۰^t (t-s)^{-\frac{۳}{۴}} \|Y(s)\|_۳ \mathrm{d}s \end{aligned}$$

حال با استفاده از لم گرونوال ۳.۳.۴ با $\alpha = ۱$ و $\beta = \frac{۱}{۴}$ و

$$A = \|X_۰\|_۳ + C\epsilon^{-۱} K_T (۱ + \epsilon^{-۱} K_T), \quad B = C(۱ + \epsilon^{-۱} K_T) \tag{۴۵.۴}$$

داریم:

$$\|Y(t)\|_۳ \leq AC(B,T) = C(\|X_۰\|_۳, \epsilon^{-۱} K_T, T), \quad t \in [۰, T]$$

در این‌صورت کران $\|X(t)\|_۳$ با در نظر گرفتن (۴۳.۴) بدست می‌آید. □

ثابت $C(\|X_۰\|_۳, \epsilon^{-۱} K_T, T)$ به‌سرعت با $\epsilon^{-۱} K_T$ و T افزایش می یابد.از این رو، K_T تنها از درجه دو با T افزایش می‌یابد.

۶.۴ برآورد خطا

۱.۶.۴ برآورد خطا برای معادله کان-هیلیارد قطعی

معادله کان-هیلیارد خطی را به‌صورت زیر درنظربگیرید:

$$\begin{aligned} &\dot{u} + Av = 0, \qquad t > 0, \\ &v - Au - f = 0, \quad t > 0, \\ &u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{۴۶.۴}$$

که در آن f تابعی وابسته‌به x, t است و مساله المان محدود آن به‌صورت

$$\begin{aligned} &\dot{u}_h + A_h v_h = 0, \qquad t > 0, \\ &v_h - A_h u_h - P_h f = 0, \quad t > 0, \\ &u_h(0) = P_h u_0, \end{aligned} \tag{۴۷.۴}$$

است. دراین‌بخش به برآورد خطای آن می‌پردازیم. سپس آن‌را برای ثابت $\omega \in \Omega_\epsilon$ با قرار دادن $f(X)$ به جای f و جواب $\dot{Y}$ از (۳.۴) به‌جای u استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱.۶.۴. *فرض کنید u, v و u_h, v_h به‌ترتیب جواب‌های (۴۶.۴) و (۴۷.۴) باشند. در این‌صورت، برای $t \geq 0$ داریم:*

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq Ch^2(|\log(h)| \max_{0 \leq s \leq t} |u(s)|_2 + (\int_0^t |v(s)|_2^2 \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}). \tag{۴۸.۴}$$

برهان. فرم های ضعیف (۴۶.۴) و (۴۷.۴) به‌صورت

$$\begin{aligned} &\langle \dot{u}, \varphi_1 \rangle + \langle \nabla v, \nabla \varphi_1 \rangle = 0, \qquad \forall \varphi_1 \in H^1, \\ &\langle v, \varphi_2 \rangle - \langle \nabla u, \nabla \varphi_2 \rangle - \langle f, \varphi_2 \rangle = 0, \quad \forall \varphi_2 \in H^1, \\ &u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{۴۹.۴}$$

و

$$\begin{aligned} &\langle \dot{u}_h, \varphi_{h,1} \rangle + \langle \nabla v_h, \nabla \varphi_{h,1} \rangle = 0, \qquad \forall \varphi_{h,1} \in S_h, \\ &\langle v_h, \varphi_{h,2} \rangle - \langle \nabla u_h, \nabla \varphi_{h,2} \rangle - \langle f, \varphi_{h,2} \rangle = 0, \quad \forall \varphi_{h,2} \in S_h, \\ &u_h(0) = P_h u_0, \end{aligned} \tag{۵۰.۴}$$

هستند. باتوجه‌به P_h و R_h تعریف شده در (۱۱.۴) و (۱۳.۴) و همچنین

$$e_u = u_h - u = (u_h - P_h u) + (P_h u - u) = \theta_u + \rho_u, \tag{۵۱.۴}$$

$$e_v = v_h - v = (v_h - R_h v) + (R_h v - v) = \theta_v + \rho_v. \tag{۵۲.۴}$$

داریم:

$$\|e_u\| \le \|\theta_u\| + \|\rho_u\| \tag{۵۳.۴}$$

اکنون این نرم‌ها را محاسبه می‌کنیم. در رابطه (۴۹.۴)، قرار می‌دهیم $\varphi_۱ = \varphi_{h,۱}$ و $\varphi_۲ = \varphi_{h,۲}$ و آن را از (۵۰.۴) کم می‌کنیم. باتوجه‌به روابط (۵۱.۴) و (۵۲.۴) داریم:

$$\langle \dot{e}_u, \varphi_{h,۱}\rangle + \langle \nabla e_v, \nabla \varphi_{h,۱}\rangle = ۰, \qquad \forall \varphi_{h,۱} \in S_h,$$
$$\langle e_v, \varphi_{h,۲}\rangle + \langle \nabla e_u, \nabla \varphi_{h,۲}\rangle = ۰, \quad \forall \varphi_{h,۲} \in S_h$$

بااستفاده مجدد از (۵۱.۴) و (۵۲.۴) داریم:

$$\langle \dot{\theta}_u, \varphi_{h,۱}\rangle + \langle \nabla \theta_v, \nabla \varphi_{h,۱}\rangle = -\langle \dot{\rho}_u, \varphi_{h,۱}\rangle - \langle \nabla \rho_v, \nabla \varphi_{h,۱}\rangle, \quad \forall \varphi_{h,۱} \in S_h,$$
$$\langle \theta_v, \varphi_{h,۲}\rangle - \langle \nabla \theta_u, \nabla \varphi_{h,۲}\rangle = -\langle \rho_v, \varphi_{h,۲}\rangle + \langle \nabla \rho_u, \nabla \varphi_{h,۲}\rangle, \quad \forall \varphi_{h,۲} \in S_h.$$

با استفاده از تعاریف P_h و R_h داریم:

$$\langle \dot{\rho}_u, \varphi_{h,۱}\rangle = \langle P_h \dot{u} - \dot{u}, \varphi_{h,۱}\rangle = ۰, \quad \forall \varphi_{h,۱} \in S_h,$$
$$\langle \nabla \rho_v, \nabla \varphi_{h,۱}\rangle = \langle \nabla (R_h v - v), \nabla \varphi_{h,۱}\rangle = ۰, \quad \forall \varphi_{h,۲} \in S_h.$$

بنابراین؛

$$\langle \dot{\theta}_u, \varphi_{h,۱}\rangle + \langle \nabla \theta_v, \nabla \varphi_{h,۱}\rangle = ۰ \quad \forall \varphi_{h,۱} \in S_h,$$
$$\langle \theta_v, \varphi_{h,۲}\rangle - \langle \nabla \theta_u, \nabla \varphi_{h,۲}\rangle = -\langle \rho_v, \varphi_{h,۲}\rangle + \langle \nabla \rho_u, \nabla \varphi_{h,۲}\rangle, \quad \forall \varphi_{h,۲} \in S_h.$$

در رابطه دوم $\varphi_{h,۲} = A_h \varphi_{h,۱}$ را قرار می‌دهیم و داریم:

$$\langle \nabla \theta_v, \nabla \varphi_{h,۱}\rangle = \langle A_h^۲ \theta_u, \varphi_{h,۱}\rangle - \langle A_h P_h \rho_v, \varphi_{h,۱}\rangle + \langle A_h^۲ R_h \rho_u, \varphi_{h,۱}\rangle.$$

با درج این رابطه در معادله اول داریم:

$$\langle \dot{\theta}_u, \varphi_{h,۱}\rangle + \langle A_h^۲ \theta_u, \varphi_{h,۱}\rangle = \langle A_h P_h \rho_v, \varphi_{h,۱}\rangle - \langle A_h^۲ R_h \rho_u, \varphi_{h,۱}\rangle,$$

بنابراین شکل قوی مساله به صورت

$$\dot{\theta}_u + A_h^{۲}\theta_u = A_h P_h \rho_v - A_h^{۲} R_h \rho_u, \quad t > ۰; \quad \theta_u(۰) = ۰,$$

با جواب خفیف

$$\theta_u(t) = \int_۰^t e^{-(t-s)A_h^{۲}} A_h P_h \rho_v(s)\mathrm{d}s - \int_۰^t e^{-(t-s)A_h^{۲}} A_h^{۲} R_h \rho_u(s)\mathrm{d}s.$$

است. با نرم‌گیری از این مساله داریم :

$$\|\theta_u(t)\| = \Big\| \int_۰^t e^{-(t-s)A_h^{۲}} A_h P_h \rho_v(s)\mathrm{d}s \Big\| + \Big\| \int_۰^t e^{-(t-s)A_h^{۲}} A_h^{۲} R_h \rho_u(s)\mathrm{d}s \Big\| = I + II \quad (۵۴.۴)$$

برای (I) تعریف می‌کنیم:

$$w_h(t) = \int_۰^t e^{-(t-s)A_h^{۲}} A_h P_h \rho_v(s)\mathrm{d}s,$$

که در معادله

$$\dot{w}_h + A_h^{۲} w_h = P_h \rho_v, \quad t > ۰; \quad w_h(۰) = ۰.$$

صدق می‌کند. دو طرف را در $\dot{w}_h$ ضرب می‌کنیم:

$$\|\dot{w}_h\|^{۲} + \frac{۱}{۲}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A_h w_h\|^{۲} = \langle P_h \rho_v, \dot{w}_h \rangle \leq \|\rho_v\|\|\dot{w}_h\| \leq \frac{۱}{۲}\|\rho_v\|^{۲} + \frac{۱}{۲}\|\dot{w}_h\|^{۲}.$$

بنابراین داریم:

$$\|\dot{w}_h\|^{۲} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A_h w_h\|^{۲} \leq \|\rho_v\|^{۲}.$$

با انتگرالگیری و چشم‌پوشی از $\int_۰^t \|\dot{w}_h(s)\|^{۲}\mathrm{d}s$ داریم:

$$\|A_h \int_۰^t e^{-(t-s)A_h^{۲}} A_h P_h \rho_v(s)\mathrm{d}s\| = \|A_h w_h(t)\| \leq (\int_۰^t \|\rho_v(s)\|^{۲}\mathrm{d}s)^{\frac{۱}{۲}},$$

که در آن، از (۱۴.۴) داریم:

$$\|\rho_v\| = \|(R_h - I)v\| \leq Ch^{۲}|v|_{۲}.$$

بنابراین؛

$$\|A_h \int_۰^t e^{-(t-s)A_h^{۲}} P_h \rho_v(s)\mathrm{d}s\| \leq Ch^{۲}(\int_۰^t |v(s)|_{۲}^{۲}\mathrm{d}s)^{\frac{۱}{۲}}. \quad (۵۵.۴)$$

برای (II) با استفاده از

$$R_h \rho_u = R_h(P_h u - u) = P_h u - R_h u = P_h(u - R_h u).$$

داریم:

$$\|\int_{۰}^{t} A_h^{۲} e^{-(t-s)A_h^{۲}} R_h \rho_u(s) \mathrm{d}s\| \le \int_{۰}^{t} \|A_h^{۲} e^{-(t-s)A_h^{۲}} P_h (u(s) - R_h u(s))\| \mathrm{d}s$$
$$\le \int_{۰}^{t} \|A_h^{۲} e^{-(t-s)A_h^{۲}} P_h\| \mathrm{d}s \max_{۰\le s\le t} \|u(s) - R_h u(s)\|.$$

ازطرفی با توجه به $\|A_h\| \le Ch^{-۲}$، از (۱۵.۴) و (۱۲.۴) داریم:

$$\int_{۰}^{t} \|A_h^{۲} e^{-(t-s)A_h^{۲}} P_h\| \mathrm{d}s = \int_{۰}^{h^{۴}} \|A_h\|^{۲} \|e^{-sA_h^{۲}}\| \mathrm{d}s + \int_{h^{۴}}^{t} \|A_h^{۲} e^{-sA_h^{۲}}\| \mathrm{d}s$$
$$\le Ch^{-۴}h^{۴} + C\int_{h^{۴}}^{t} s^{-۱} e^{-cs} \mathrm{d}s \le C(۱ + \log(۱/h)) \le C|\log(h)|.$$

ازاین‌رو، با استفاده از (۱۴.۴)، داریم:

$$\left\|\int_{۰}^{t} A_h^{۲} e^{-(t-s)A_h^{۲}} R_h \rho_u(s) \mathrm{d}s\right\| \le Ch^{۲} |\log(h)| \max_{۰\le s\le t} |u(s)|_{۲}. \tag{۵۶.۴}$$

با قرار دادن (۵۵.۴) و (۵۶.۴) در (۵۴.۴) داریم:

$$\|\theta_u(t)\| \le Ch^{۲}(\int_{۰}^{t} |v(s)|_{۲}^{۲} \mathrm{d}s)^{\frac{۱}{۲}} + |\log(h)| \max_{۰\le s\le t} |u(s)|_{۲}. \tag{۵۷.۴}$$

در نهایت، با توجه به ویژگی بهترین تقریب P_h داریم:

$$\|\rho_u(t)\| = \|P_h u - u\| \le R_h u - u\| \le Ch^{۲} |u(t)|_{۲}. \tag{۵۸.۴}$$

با قرار دادن (۵۷.۴) و (۵۸.۴) در (۵۳.۴) به نتیجه مورد نظر (۴۸.۴) می رسیم. □

در لم بعدی برآورد پایداری را برای معادله کان-هیلیارد قطعی (۴۶.۴) اثبات می‌کنیم.

لم ۲.۶.۴. *فرض کنید u و v جواب‌های معادله (۴۶.۴) هستند، در این‌صورت*

$$|u(t)|_{۲}^{۲} + \int_{۰}^{t} |v(s)|_{۲}^{۲} \mathrm{d}s \le |u_{۰}|_{۲}^{۲} + \int_{۰}^{t} |f(s)|_{۲}^{۲} \mathrm{d}s.$$

برهان. معادله اول (۴۶.۴) را در $A^{۲}u$ ضرب می‌کنیم، لذا داریم:

$$\frac{۱}{۲}|u|_{۲}^{۲} + \langle A^{۲}v, Au\rangle = ۰$$

با توجه به معادله دوم (۴۶.۴)، که $Au = v - f$، داریم:

$$\frac{۱}{۲}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_{۲}^{۲} + \langle A^{۲}v, v\rangle = \langle A^{۲}v, f\rangle \le |v|_{۲}|f|_{۲} \le \frac{۱}{۲}|v|_{۲}^{۲} + \frac{۱}{۲}|f|_{۲}^{۲}$$

بنابراین؛

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_{۲}^{۲} + |v|_{۲}^{۲} \le |f|_{۲}^{۲}$$

که با انتگرال‌گیری اثبات به‌پایان می‌رسد. □

۲.۶.۴ برآورد خطا برای معادله کان - هیلیارد تصادفی

در قضیه بعدی برآورد خطا را برای معادله کان - هیلیارد - کوک غیرخطی ثابت می‌کنیم.

قضیه ۳.۶.۴. *فرض کنید $\|A^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS} < \infty$ و X, X_h جوابهای (۲۲.۴) و (۲۷.۴) باشند و $X_\circ$ با مقادیر موجود در H^3، $\mathcal{F}_\circ$ -اندازه‌پذیر باشد و $\|X_\circ\|^2_{\Omega,H^1} + \|X_\circ\|^4_{\Omega,L_4} < \infty$. فرض کنید $T > \circ, \epsilon \in (\circ, 1)$ و $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ و K_T تعریف شده در نتیجه ۲.۴.۴ باشند. در این‌صورت داریم:*

$$\|X_h(t) - X(t)\| \le C(\|X_\circ\|_3, \epsilon^{-1}K_T, T)h^2|\log(h)|, \quad \text{on}\Omega_\epsilon, t \in [\circ, T].$$

با توجه به کاربرد لم گرونوال در اثبات ثابت $C(\|X_\circ\|_3, \epsilon^{-1}K_T, T)$ به‌سرعت با $\epsilon^{-1}K_T$ و T رشد می‌کند.

برهان. ثابت $\omega \in \Omega_\epsilon$ را در نظر بگیرید.مجموعه

$$X(t) = Y(t) + W_A(t), \tag{۵۹.۴}$$

که در آن $W_A(t)$ پیچیدگی تصادفی

$$W_A(t) = \int_\circ^t e^{-(t-s)A^2}\mathrm{d}W(s), \tag{۶۰.۴}$$

و $Y(t)$ جواب خفیف (۴۴.۴) از (۳.۴) است. همچنین مجموعه

$$X_h(t) = Z_h(t) + W_{A_h}(t), \tag{۶۱.۴}$$

که در آن $W_{A_h}(t)$ پیچیدگی تصادفی

$$W_{A_h}(t) = \int_\circ^t e^{-(t-s)A_h^2}P_h\mathrm{d}W(s), \tag{۶۲.۴}$$

و

$$Z_h(t) = e^{-tA_h^2}P_hX_\circ - \int_\circ^t e^{-(t-s)A_h^2}A_hP_hf(X_h(s))\mathrm{d}s, \tag{۶۳.۴}$$

جواب خفیف

$$\dot{Z}_h + A_h^2 Z_h = -A_hP_hf(X_h), \quad t > \circ, Z_h(\circ) = P_hX_\circ. \tag{۶۴.۴}$$

است. در نهایت فرض کنید

$$Y_h(t) = e^{-tA_h^2}P_hX_\circ - \int_\circ^t e^{-(t-s)A_h^2}A_hP_hf(X(s))\mathrm{d}s, \tag{۶۵.۴}$$

جواب خفیف

$$\dot{Y}_h + A_h^2 Y_h = -A_hP_hf(X), \quad t > \circ, Y_h(\circ) = P_hX_\circ. \tag{۶۶.۴}$$

باشد، با کم کردن (۵۹.۴) از (۶۱.۴)

$$X_h - X = (Z_h + W_{A_h})(Y + W_A)$$
$$= (W_{A_h} - W_A) + (Y_h - Y) + (Z_h - Y_h),$$

و گرفتن نرم داریم:

$$\|X_h - X\| \leq \|W_{A_h} - W_A\| + \|Y_h - Y\| + \|Z_h - Y_h\| \qquad (۶۷.۴)$$

حال به محاسبه سه نورم سمت راست می‌پردازیم.ابتدا $\|W_{A_h} - W_A\|$ را محاسبه می‌کنیم.از آنجا که $\|A^{\frac{۱}{۲}}Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS} < \infty$ و با استفاده از قضیه ۲.۳.۴ و نامساوی چبیشف و باتوجه به $\|Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS} < \infty$ داریم؛

$$\|W_{A_h} - W_A\| \leq \epsilon^{-\frac{۱}{۲}}(\mathbf{E}[\|W_{A_h} - W_A\|^۲])^{\frac{۱}{۲}}$$
$$\leq \epsilon^{-\frac{۱}{۲}} C h^۲ |\log(h)| \|Q^{\frac{۱}{۲}}\|_{HS} \leq C(\epsilon^{-۱}K_Q)^{\frac{۱}{۲}} h^۲ |\log(h)|,$$

از آنجا که $K_Q \leq K_T$، نتیجه می‌گیریم:

$$\|W_{A_h} - W_A\| \leq C(\epsilon^{-۱}K_T)^{\frac{۱}{۲}} h^۲ |\log(h)| \qquad (۶۸.۴)$$

حال با درنظر گرفتن $\|Y_h(t) - Y(t)\|$ وباستفاده از قضیه ۱.۶.۴ داریم:

$$\|Y_h(t) - Y(t)\| \leq Ch^۲ |\log(h)| max_{۰\leq s\leq t}|Y(s)|_۲ + (\int_۰^t |V(s)|_۲^۲ \mathrm{d}s)^{\frac{۱}{۲}}, \qquad (۶۹.۴)$$

که $Y(t)$ و $V(t)$ جوابهای

$$\dot{Y} + AV = ۰, \qquad t > ۰,$$
$$V = AY + f(X), \quad t > ۰, \qquad (۷۰.۴)$$
$$Y(۰) = X_۰.$$

هستند. با استفاده از لم ۲.۶.۴ ورابطه‌های (۱۸.۴) و (۴۱.۴) داریم:

$$\int_۰^t |V(s)|_۲^۲ \mathrm{d}s \leq |X_۰|_۲^۲ + \int_۰^t |f(X(s))|_۲^۲ \mathrm{d}s$$
$$\leq \|X_۰\|_۲^۲ + C\int_۰^t (۱ + \|X(s)\|_۱^۲)\|X(s)\|_۳ \mathrm{d}s$$
$$\leq \|X_۰\|_۳^۲ + C\int_۰^t (۱ + \|X(s)\|_۳^۳) \mathrm{d}s$$
$$\leq \|X_۰\|_۳^۲ + CT(۱ + (\epsilon^{-۱}K_T)^{\frac{۳}{۲}}).$$

بنابراین؛

$$\int_0^t |V(s)|_2^2 \mathrm{d}s \leq C(\|X_0\|_3, \epsilon^{-1}K_T, T). \tag{۷۱.۴}$$

حال کران $|Y(t)|_2$ را محاسبه می‌کنیم. بااستفاده از قضیه ۲.۵.۴ داریم:

$$|Y(t)|_2 \leq \|Y(t)\|_3 \leq C(\|X_0\|_3, \epsilon^{-1}K_T, T). \tag{۷۲.۴}$$

با قراردادن (۷۱.۴) و (۷۲.۴) در (۶۹.۴) داریم؛

$$\|Y_h(t) - Y(t)\| \leq C(\|X_0\|_3, \epsilon^{-1}K_T, T)h^2|\log(h)|. \tag{۷۳.۴}$$

در نهایت $\|e_h(t)\| = \|Z_h(t) - Y_h(t)\|$ را محاسبه می‌کنیم. با تفاضل (۶۳.۴) و (۶۵.۴) به دست می‌آوریم؛

$$\begin{aligned}
\|e_h(t)\| &\leq \int_0^t \|e^{-(t-s)A_h^2}A_hP_hP(f(X_h(s)) - f(X(s))\|\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \|A_h^{\frac{3}{2}}e^{-(t-s)A_h^2}A_h^{-\frac{1}{2}}P_hP(f(X_h(s)) - f(X(s))\|\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \|A_h^{\frac{3}{2}}e^{-(t-s)A_h^2}P_h\|\|A_h^{-\frac{1}{2}}P(f(X_h(s)) - f(X(s))\|\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

با استفاده از (۱۹.۴) و (۱۲.۴) داریم؛

$$\|e_h(t)\| \leq C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}(1 + \|X_h(s)\|_1^2 + \|X(s)\|_1^2)\|X_h(s) - X(s)\|\mathrm{d}s.$$

همچنین از نتیجه ۲.۴.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
\|e_h(t)\| \leq &C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}(1+\epsilon^{-1}K_T)(\|W_{A_h}(s) - W_A(s)\| \\
&+ \|Y_h(s) - Y(s)\| + \|e_h(s)\|)\mathrm{d}s \\
\leq &C(1+\epsilon^{-1}K_T)T^{\frac{1}{4}} \max_{0\leq s\leq t}(\|W_{A_h}(s) - W_A(s)\| + \|Y_h(s) - Y(s)\|) \\
&+ C(1+\epsilon^{-1}K_T)\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}\|e_h(s)\|\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

با بکار بردن لم گرونوال ۳.۳.۴ و با درنظر گرفتن $\alpha = 1$ و $\beta = \frac{1}{4}$ ونیز

$$\begin{aligned}
A &= C(1+\epsilon^{-1}K_T)T^{\frac{1}{4}} \max_{0\leq s\leq t}(\|W_{A_h}(s) - W_A(s)\| + \|Y_h(s) - Y(s)\|), \\
B &= C(1+\epsilon^{-1}K_T)
\end{aligned}$$

داریم:

$$\|e_h(t)\| = \|Z_h(t) - Y_h(t)\| \leq AC(B,T), \quad t \in [0,T]. \tag{۷۴.۴}$$

کران‌های $\|W_{A_h}(t) - W_A(t)\|$ و $\|Y_h(t) - Y(t)\|$ را در (۶۸.۴) و (۷۳.۴) بدست آوردیم.با قرار دادن این مقدارها و (۷۴.۴) در (۶۷.۴) به نتیجه مورد نظر می‌رسیم. $\square$

در نهایت نشان می‌دهیم X_h معکوس قوی X است.

قضیه ۴.۶.۴. *فرض کنید* $\|A^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS} < \infty$*، و* X, X_h *جوابهای* (۲۲.۴) *و* (۲۷.۴) *باشند و* X_0*،* $\mathcal{F}_0$*-اندازه پذیر با مقادیر موجود در* H^3 *باشد و* $\|X_0\|^2_{\Omega,H^1} + \|X_0\|^4_{\Omega,L_4} < \infty$*، در این‌صورت*

$$\max_{t\in[0,T]}(\mathbf{E}[\|X_h(t)-X(t)\|^2])^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad \text{as} \quad h\to 0.$$

برهان. با استفاده از قضیه ۱.۴.۴ داریم:

$$\mathbf{E}[\|X(t)\|^4_{L_4}] \le K_T, \quad \mathbf{E}[\|X_h(t)\|^4_{L_4}] \le K_T, \quad t\in[0,T],$$

که K_T همان است که در نتیجه ۲.۴.۴ تعریف کردیم. فرض کنید $\epsilon \in (0,1)$ و Ω_ϵ تعریف شده در نتیجه ۲.۴.۴ باشند. در این‌صورت

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\|X_h(t)-X(t)\|^2] \le &\int_{\Omega_\epsilon}\|X_h(t)-X(t)\|^2\mathrm{d}\mathbf{P}\\ &+\int_{\Omega_\epsilon^c}(\|X_h(t)\|^2+\|X(t)\|^2)\mathrm{d}\mathbf{P}.\end{aligned}$$

در اینجا، با استفاده ازنامساوی هولدرداریم؛

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\epsilon^c}\|X(t)\|^2)\mathrm{d}\mathbf{P} &\le (\int_{\Omega_\epsilon^c}1^2\mathrm{d}\mathbf{P})^{\frac{1}{2}}(\int_{\Omega_\epsilon^c}\|X(t)\|^4_{L_4}\mathrm{d}\mathbf{P})^{\frac{1}{2}}\\ &\le \epsilon^{\frac{1}{2}}(\mathbf{E}[\|X(t)\|^4_{L_4}])^{\frac{1}{2}} \le \epsilon^{\frac{1}{2}}K_T^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به قضیه ۳.۶.۴ داریم؛

$$\max_{t\in[0,T]}(\mathbf{E}[\|X_h(t)-X(t)\|^2])^{\frac{1}{2}} \le C(\epsilon^{-1}K_T,T)h^2|\log(h)| + CK_T^{\frac{1}{4}}\epsilon^{\frac{1}{4}}.$$

از این رو وقتی $\epsilon \to 0$ آنگاه $\frac{\epsilon^{\frac{1}{4}}}{C(\epsilon^{-1}K_T,T)} \to 0$ به صورت یکنواخت. با توجه به، h می‌توانیم ϵ را انتخاب کنیم. $\square$

بنابراین $C(\epsilon^{-1}K_T,T)$ با توجه به ϵ^{-1} به سرعت رشد می‌کند و باعث می‌شود، نتوانیم نرخ همگرایی را برای این اثبات به‌دست آوریم.

مراجع

[1] J. W. Cahn, *On spinodal decomposition*,Acta Metallurgica 9 (1961) 795 - 801.

[2] W. Bangerth and R. Rannacher, *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations* , Birkhauser Verlag, Basel, 2003.

[3] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations* , Springer Verlag, 1983.

[4] J. Carr, M. E. Gurtin and M. Slemrod, *Structured phase transitions on a finite interval*, Arch. Rat. Mech. Anal. 86 (1984), 317–351.

[5] C. M. Elliott and S. Larsson, *Error estimates with smooth and nonsmooth data for a finite element method for the Cahn-Hilliard equation*, Math. Comp. 58 (1992), 603–630, S33–S36.

[6] C. Cardon-Weber, *Implicit approximation scheme for the Cahn-Hilliard stochastic equation*, Preprint 2000, http://citeseer.ist.psu.edu/633895.html.

[7] G. Da Prato and J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[8] G. Da Prato and A. Debussche, *Stochastic Cahn-Hilliard equation*, Nonlinear Anal.26 (1996), 241–263.

[9] V. Thomee, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, second ed., Springer Series in Computational Mathematics, vol. 25, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[10] G. T. Kossioris and G. E. Zouraris,*Fully-discrete finite element approximations for a fourth-order linear stochastic parabolic equation with additive space-time white noise*,TRITA-NA 2008:2, School of Computer Science and Communication, KTH, Stockholm,Sweden, 2008.

[11] Claudia Prevot and Michael Rockner, *A Concise Course on Stochastic Partial Differential Equations*,Springer Verlag (2007).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آزمایش	Experiment
اغتشاش	Noise
اندازه لبگ	Lebesgue measure
اندیس	Index
اویلر	Euler
باقیمانده وزن‌های دوگان	Dual weithed residual
بردار ویژه	Eigen Vector
پایداری	Stablility
پسرو	Backward
پیوسته	Continous
تابعک خطی	Linear Function
تابع هموار	Smooth Function
تخمین	Estimate
تصادفی	Random
تصویر	Projection
تقریب	Approximate
توزیع	Distribution
جواب ضعیف	Weak Solution
جواب قوی	Strong Solution
چند اندیسه	Multi Index
حرکت براونی	Brownian Motion
خطای برشی	Truncation Error

خودالحاق .... Self Adjoint
دامنه .... Domain
درون‌یابی .... Interpolation
دنباله کوشی .... Cowchy Sequence
دیورژانس .... Divergence
روش المان‌های محدود .... Finite Element Methods
ریزکردن .... Refinement
شرط لیپ-شیتز .... Lipschitz Condition
شرط مرزی دریکله .... Dirichlet Boundary Condition
شرط مرزی نویمن .... Neumann Boundary Condition
ضرب اسکالر .... Scalar Product
عددی .... Numerical
عملگر .... Operator
غیرخطی .... Nonlinear
فرم دوخطی .... Biliner Form
فرم ضعیف .... Weak Formulation
فضای باناخ .... Banach Space
فضای برداری .... Vector Space
فضای خطی‌نرم‌دار .... Normed Linear Space
فضای سوبولوف .... Sobolev Space
فضای ضرب داخلی کامل .... Complite Linear Space
فضای هیلبرت .... Hilbert Space
فرایند .... Process
قطعی .... Dterministic
قطعه‌وار .... Pice Wise
کان-هیلیارد .... Cahn-Hilliard
گسسته .... Discrete
گرادیان .... Gradient
لاپلاسین .... Laplacian

ماتریس .... Matrix
متقارن .... Symmetric
متعامد .... Orthogonal
مساله مقدار اولیه .... Initial Value Problem
مساله مقدار مرزی .... Bundry Value Problem
معادلات مشتقات جزیی .... Partial Diffrential Equation
معادله پواسون .... Potential Equation
مقدارویژه .... Eigen Value
مقدماتی .... Elementry
مکان .... Spatial
نامساوی تریس .... Scaled Trace Inequality
نامساوی کوشی شوارتز .... Couchy-Schwartz Inequality
نامساوی مثلثی .... Triangle-Inequality
نرم .... Norm
نظریه .... Theory
نقطه سکون .... Stationary Point
نیم نرم .... Semi Norm
همگرا .... Convergent
یکامتعامد .... Orthonormal

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A Posteriori Error .... خطای پسین

A Priori Error .... خطای پیشین

Approximate .... تقریب

Backward .... پسرو

Banach Space .... فضای باناخ

Biliner Form .... فرم دوخطی

Brownian Motion .... حرکت براونی

Bundry Value Problem .... مساله مقدار مرزی

Cahn-Hilliard .... کان-هیلیارد

Complite Linear Space .... فضای ضرب داخلی کامل

Continous .... پیوسته

Convergent .... همگرا

Couchy-Schwartz Inequality .... نامساوی کوشی شوارتز

Cowchy Sequence .... دنباله کوشی

Deterministic .... قطعی

Dirichlet Boundary Condition .... شرط مرزی دریکله

Discrete .... گسسته

Distribution .... توزیع

Divergence .... دیورژانس

Domain .... دامنه

Dual Weithed Residual .... باقیمانده وزن‌های دوگان

Eigenvalue .... مقدارویژه

Eigenvector .... بردار ویژه
Elementry .... مقدماتی
Estimate .... تخمین
Euler .... اویلر
Experiment .... آزمایش
Finite Element Methods .... روش المان‌های محدود
Gradient .... گرادیان
Hillbert Space .... فضای هیلبرت
Index .... اندیس
Interpolation .... درون‌یابی
Initial Value Problem .... مساله مقدار اولیه
Laplacian .... لاپلاسین
Lebesgue measure .... اندازه لبگ
Linear Function .... تابعک خطی
Lipschitz Condition .... شرط لیپ-شیتز
Matrix .... ماتریس
Multi Index .... چند اندیسه
Neumann Boundary Condition .... شرط مرزی نویمن
Noise .... اغتشاش
Nonlinear .... غیرخطی
Norm .... نرم
Normed Linear Space .... فضای خطی‌نرم‌دار
Numerical .... عددی
Operator .... عملگر
Orthogonal .... متعامد
Orthonormal .... یکامتعامد
Partial Diffrential Equation .... معادلات مشتقات جزیی
Picewice .... قطعه‌وار
Potential Equation .... معادله پواسون

فرایند	Process
تصویر	Projection
تصادفی	Random
ریز کردن	Refinement
خودالحاق	Self Adjoint
نیم نرم	Semi Norm
ضرب اسکالر	Scalar Product
نامساوی تریس	Scaled Trace Inequality
تابع هموار	Smooth Function
فضای سوبولوف	Sobolev Space
مکان	Spatial
پایداری	Stablility
نقطه سکون	Stationary Point
جواب قوی	Strong Solution
متقارن	Symmetric
نامساوی مثلثی	Triangle-Inequality
خطای برشی	Truncation Error
نظریه	Theory
فرم تغییرپذیر	Varitional Formulation
فضای برداری	Vector Space
فرم ضعیف	Weak Formulation
جواب ضعیف	Weak Solution

Surname: Rostami Name: Masoumeh

Title: Finite Element approximative for the linearized and non linearized Cohn-Hilliard-cook Equation

Supervisor: Dr.A. Mesforush

Degree: Master of Science Subject: Applied Mathematics
Field: Differential Equations

Technology University of Shahrood Faculty Of Mathematical Sciences
Date: 2013 Number of pages: 87

Keywords: finite element, stochastic integral, mild solution, dual weighted residuals, additive noise, Wiener process, Cahn-Hilliard equation, Lyapunov functional, stochastic convolution.

Abstract

This thesis consists of two papers on numerical approximation of the Cahn-Hilliard equation. The main part of the work is concerned with the Cahn-Hilliard equation perturbed by noise, also known as the Cahn-Hilliard-Cook equation.

In the first paper we consider the linearized Cahn-Hilliard-Cook equation and we discretize it in the spatial variables by a standard finite element method. Strong convergence estimates are proved under suitable assumptions on the covariance operator of the Wiener process, which is driving the equation. The analysis is set in a framework based on analytic semigroups.The main part of the work consists of detailed error bounds for the corresponding deterministic equation.

In the second paper we study the nonlinear Cahn-Hilliard-Cook equation. We show almost sure existence and regularity of solutions. We introduce spatial approximation by a standard finite element method and prove error estimates of optimal order on sets of probability arbitrarily close to 1. We also prove strong convergence without known rate.

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Finite Element approximative for the linearized and non linearized Cohn-Hilliard-cook Equation

Supervisor

Dr.A. Mesforush

by

Masoumeh Rostami

2013