



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

مفاصل و کاربردهای آن

نوشین رضائی

استاد راهنما:

دکتر احمد نزاکتی رضازاده

استاد مشاور:

دکتر سیدمحسن میرحسینی

بهمن ۱۳۹۱

صلى الله عليه وسلم



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

## مفاصل و کاربردهای آن

نوشین رضائی

استاد راهنما:

دکتر احمد نزاکتی رضازاده

استاد مشاور:

دکتر سیدمحسن میرحسینی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۱

تقدیرم به کوچه‌های کرانه‌های زندگیم،

پدر و مادرم

آن دو فرشته‌ای که از خواسته‌هایشان گذشتند، سختی‌ها را به جان خریدند و خود را سپهرهای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده‌ام، برسم

و بهسر مهربانم

کسی که آفتاب را به زندگی‌ام هدیه نمود

و عاشقانه سوخت تا که ملامتش وجود و رویشگر را بهم باشد.

شکر و قدردانی

بانام آن که خلق کرد، هستی را از رحمت بی‌انتهای خویش تا انسان در قدم غلغش به پهنای گسترده‌ای به بزرگی جهان خیمه‌زنده به او عقل داد تا غفلت خلقت را در یابد.  
اکنون که به یاری خداوند متعال این دوره تحصیل را به پایان رسانده‌ام، هر چند واژه‌ها را برای آن نیست که لطف و محبت آنانی را در تمام دوران زندگیم جرعه نوش دریای مهر و محبتان بوده‌ام به تصویر بکشیم، اما به رسم ادب و احترام بوسه بردنشان زده و بر خود واجب می‌دانم زحمات بی‌شائبه پدر و مادر عزیزم، صبر و فداکاری بهسر مهربانم، پدر و مادر بزرگوار ایشان و یاری خواهر نازنینم را که همواره راه‌گشای مشکلاتم در تمام مراحل زندگی بوده‌اند، ارج نهاده و مراتب شکر قلبی و باطنی را از مهربانی‌های آنان ابراز دارم.

از زحمات بی دریغ استاد فرهیخته و توانمندم جناب آقای دکتر تراکمی که رهنمودها و نظرات ارزنده، صبر و حوصله فراوان ایشان نقش مهمی در برقرار شدن این پروژه داشت صمیمانه تشکر می‌کنم و همچنین از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر میرحسینی نهایت قدردانی را دارم و سلامتی و موفقیت بی‌شکلی این بزرگواران را از درگاه یزدان پاک خواستارم. امید آنگاه این پایان نامه سزاوار وقت و محبت استاد گرامی باشد.

در پایان از تمامی کسانی که به نوعی مراد بر انجام رساندن این مهم‌باری نموده‌اند، سپاسگزارم.

نوشین رضایی

بهمن ۱۳۹۱

## تعهد نامه

اینجانب **نوشین رضائی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **آمار ریاضی** دانشکده **ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **مفاصل و کاربردهای آن** تحت راهنمایی **دکتر احمد نزاقتی رضازاده** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۲۹

امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده:

در بسیاری از پژوهش‌ها در زمینه‌های گوناگون علمی، متغیر پاسخ تحت تأثیر متغیرهای دیگری است و پاسخگویی به پرسش اصلی مسأله در گرو دریافت رفتار توأم متغیرها و ارتباط میان آن‌ها می‌باشد. یکی از روش‌های برقراری این ارتباط، مفصل‌ها می‌باشند که امروزه به صورت گسترده‌ای در علوم گوناگون وارد شده‌اند. واژه‌ی مفصل از دو منظر قابل تفسیر است: از یک نگاه مفصل تابعی است که تابع توزیع توأم را به توابع کناری آن مرتبط می‌سازد و از نگاه دیگر، یک تابع توزیع است که توابع توزیع کناری آن توابع توزیع یکنواخت هستند. بنابراین می‌توان گفت مفصل‌ها ابزارهایی مفید برای مدل‌سازی ساختار وابستگی بین متغیرها هستند.

در این پایان‌نامه، ضمن معرفی مفهوم مفصل، ویژگی‌ها و برخی از انواع این توابع، اندازه‌های وابستگی و تعویض‌پذیری را در قالب مفصل، مورد بررسی قرار می‌دهیم. لم‌ها، نتایج و قضایایی که با (\*) مشخص شده‌اند، صورت قضیه یا لم در منابع بوده ولی اثبات آن‌ها توسط نویسنده انجام شده است.

کلمات کلیدی: مفصل، ضرایب همبستگی، تعویض‌پذیری

## مقاله مستخرج از پایان نامه

Rezaei N., Nezakati A., (2012) “ $L^\infty$ -measure of non-exchangeability for some copulas like: NQD, SD, EV, Archimax”, 11 th Iranian Statistical Conference.



## فهرست:

صفحه

عنوان

### فصل اول: مفاهیم اساسی و تعاریف مفصلی

۲	۱-۱ مقدمه .....
۲	۲-۱ تاریخچه .....
۳	۳-۱ مثال توضیحی .....
۸	۴-۱ تعاریف و لم‌های مقدماتی .....
۱۵	۵-۱ مفصل .....
۲۳	۶-۱ قضیه‌ی اسکالر .....
۲۸	۷-۱ تابع مفصل و متغیرهای تصادفی .....

### فصل دوم: معرفی چند مفصل مهم

۳۴	۱-۲ مقدمه .....
۳۴	۲-۲ مفصل استقلال .....
۳۵	شکل ۱-۲: نمودار مفصل استقلال .....
۳۵	۳-۲ مفصل هماهنگی .....
۳۶	شکل ۲-۲: نمودار مفصل هماهنگی .....
۳۶	۴-۲ مفصل ناهماهنگی .....
۳۷	۵-۲ مفصل بقا .....

۳۸	۶-۲ مفصل‌های ارشمیدسی
۴۳	۷-۲ مفصل‌های مقدار فرین
۴۶	۸-۲ مفصل‌های آرچیماکس
۴۶	۹-۲ مفصل‌های FGM
۴۷	۱۰-۲ مفصل‌های سینوسی

### فصل سوم: تابع منحنی و اندازه‌های وابستگی

۵۵	۱-۳ مقدمه
۵۵	۲-۳ همبستگی خطی
۵۸	۳-۳ همبستگی رتبه‌ای
۵۸	۱-۳-۳ مقدمه
۶۰	۲-۳-۳ ضریب همبستگی $\tau$ - کندال
۷۲	۳-۳-۳ ضریب همبستگی $\rho$ - اسپیرمن
۷۴	۴-۳-۳ ارتباط بین ضرایب $\rho$ و $\tau$
۷۹	۴-۳ وابستگی دمی

### فصل چهارم: غیرتعویض‌پذیری

۸۸	۱-۴ مقدمه
۸۸	۱-۱-۴ تقارن
۸۹	۲-۴ تعویض‌پذیری
۹۲	۳-۴ اندازه‌ی غیرتعویض‌پذیری

- ۴-۴ اندازه‌ی غیرتعویض‌پذیری برای متغیرهای تصادفی وابسته‌ی ربعی منفی ..... ۹۵
- ۴-۵ اندازه‌ی غیرتعویض‌پذیری برای متغیرهای تصادفی به‌طور تصادفی نزولی ..... ۹۹
- ۴-۶ اندازه‌ی غیرتعویض‌پذیری برای مفصل‌های مقدار فرین ..... ۱۰۴
- ۴-۷ اندازه‌ی غیرتعویض‌پذیری برای مفصل‌های آرچیماکس ..... ۱۱۱

نتیج‌گیری و پیشنهادها

پیوست

منابع

## نمرت شکل؛

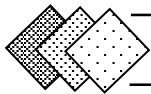
- شکل ۱-۱: براساس کران‌های فرشه-هافدینگ هر مفصل در داخل هرمی که در شکل نشان داده شده است، قرار می‌گیرد. سطح مربوط به قاعده و سطح پشت هرم، کران پایین؛ یعنی  $W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$  و سطح جلوی هرم، کران بالا؛ یعنی  $M(u, v) = \min\{u, v\}$  می‌باشد. ۱۹.....
- شکل ۱-۲: نمودار تراز مفصل‌های  $M$ ،  $\Pi$  و  $W$  ..... ۲۱.....
- شکل ۱-۲: نمودار مفصل استقلال ..... ۳۵.....
- شکل ۲-۲: نمودار مفصل هماهنگی ..... ۳۶.....
- شکل ۳-۲: نمودار مفصل ناهماهنگی ..... ۳۶.....
- شکل ۴-۲: مولد و معکوس آن در حالت‌های اکید (ب) و غیر اکید (الف). ۴۰.....
- شکل ۵-۲: نمودارهای چگالی مربوط به مفصل گامبل به ازای  $\theta = 2$  (ج)، مربوط به مفصل کلیتون به ازای  $\theta = 6$  (ب)، مربوط به مفصل فرانک به ازای  $\theta = 14/14$  (الف) می‌باشد. ۴۳.....
- شکل ۶-۲: نمودار چگالی (ب) و تراز (الف) مفصل FGM به ازای  $\theta = 0/99$  ..... ۴۷.....
- شکل ۷-۲: نمودار چگالی (ب) و تراز (الف) مفصل سینوسی تولیدشده توسط تابع توزیع  $N(0, 1)$  ..... ۵۱.....
- شکل ۸-۲: نمودار چگالی (ب) و تراز (الف) مفصل سینوسی تولیدشده توسط تابع توزیع  $\Gamma(4, 1)$  ..... ۵۳.....
- شکل ۱-۳: نمودار مقادیر همبستگی به صورت تابعی از  $\rho$  و  $\sigma$  ..... ۵۷.....
- شکل ۲-۳: مجموعه مرتب  $(C, <)$  و محورهای هماهنگی ..... ۶۸.....
- شکل ۳-۳: چگالی مفصل گامبل به ازای  $\theta = 2$  (ب) و چگالی مفصل کلیتون به ازای  $\theta = 2$  (الف) ..... ۸۳.....
- شکل ۱-۴: تکیه‌گاه‌های  $C1$  و  $C2$  ..... ۹۲.....
- شکل ۲-۴: خطوط پیرنگ در نمودار سمت راست ناحیه‌ای را مشخص می‌کند که تابع  $A(t)$  در آن قرار دارد و خطوط پیرنگ در نمودار سمت چپ نمودار تابع  $A_\alpha(t)$  را نمایش می‌دهد. ۱۰۷.....

## نمرت جدول؛

جدول ۱-۲: معرفی مفصل‌های گامبل، علی-میخائیل-حق، کلیتون و فرانک عضو خانواده‌ی مفصل‌های ارشمیدسی	۴۲
جدول ۲-۲: معرفی مفصل‌های گامبل، گامبل-هوگارد، گلامبس و مارشال الکین تعمیم‌یافته عضو خانواده‌ی مفصل‌های EV	۴۵
جدول ۱-۳: بیان توابع مولد و $K_C(t)$ و مقادیر $\tau$ -کندال برای مفصل ارشمیدسی علی-میخائیل-حق، کلیتون، فرانک	۷۱
جدول ۲-۳: مقادیر ضرایب همبستگی دمی برای مفصل‌های ارشمیدسی علی-میخائیل-حق، کلیتون، فرانک و گامبل	۸۴

فصل ۱

# مفاهیم اساسی تعاریف مقدماتی



## ۱-۱ مقدمه

در این فصل به مفاهیم پایه‌ای مفصل می‌پردازیم بدین صورت که ابتدا خلاصه‌ای از تاریخ پیدایش مفصل را ارائه می‌دهیم. سپس با یک مثال توضیحی، ایده‌ی ایجاد مفصل را توضیح می‌دهیم و در بخش‌های بعد برخی از تعاریف و ویژگی‌های مقدماتی، قضایا و لم‌های مفید را بیان می‌کنیم. مرجع محوری این پژوهش در تشریح تابع مفصل، کتاب مقدمه‌ای بر مفصل نلسن<sup>۱</sup> (۲۰۰۶) است.

## ۲-۱ تاریخچه

از دیرباز ساختن توزیع توأم متغیرهای تصادفی با معلوم بودن توزیع‌های کناری یکی از مهم‌ترین مسایل در علم آمار بوده است. در دهه‌ی پنجاه میلادی فرشه<sup>۲</sup>، دال آگلیو<sup>۳</sup>، فرن<sup>۴</sup> و برخی از محققین دیگر ضمن مطالعه درباره‌ی توزیع‌های دو و سه‌متغیره با توزیع‌های حاشیه‌ای معلوم، تحقیقات جالبی را در این زمینه ارائه کردند.

اما واژه مفصل<sup>۵</sup> برای نخستین بار توسط اسکالر<sup>۶</sup> (۱۹۵۹) ضمن معرفی کلاس جدیدی از توابع در زمینه‌ی فضاهاى متریک احتمالی، در قضیه‌ای با نام خود او به کار گرفته شد. این واژه از کلمه‌ی لاتین (*copulare*) به معنای "متصل کردن"<sup>۷</sup> و "پیوند دادن"<sup>۸</sup> گرفته شده است. یک مفصل، تابعی است که تابع توزیع توأم متغیرهای تصادفی را به توابع توزیع کناری یک‌بعدی آن‌ها متصل می‌کند.

ذکر این مطلب خالی از لطف نیست که می‌توان ریشه‌ی بسیاری از نتایج پایه‌ای در مورد مفصل را

<sup>1</sup> Nelsen

<sup>2</sup> Frechet

<sup>3</sup> Dall'Aglio

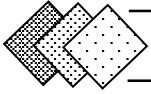
<sup>4</sup> Feron

<sup>5</sup> Copula

<sup>6</sup> Sklar

<sup>7</sup> Join

<sup>8</sup> link



در تحقیقات هافدینگ<sup>۱</sup> (۱۹۴۰ ، ۱۹۴۱) جستجو کرد که توزیع‌های استاندارد دومتغیره‌ای در مربع

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \text{ با توابع توزیع کناری یکنواخت در بازه‌ی } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ پیدا کرده بود.}$$

بین سال‌های ۱۹۵۹ تا ۱۹۷۶، اکثر مطالعات و نتایج به دست آمده از مفصل‌ها در زمینه‌ی فضاهای متریک، به ویژه درباره‌ی اعمال ریاضی دوتایی توابع در فضای متریک احتمالی صورت گرفت. کشف ویژگی‌ها و به‌کارگیری مفصل‌ها در علم آمار با سرعت چشمگیری همراه بوده است و در واقع مفصل‌ها به عنوان ابزارهایی برای مدل‌سازی وابستگی میان متغیرهای تصادفی شناخته شده‌اند. از این‌رو، به ویژه در سال‌های اخیر، این توابع در رشته‌های گوناگون از جمله دارایی<sup>۲</sup>، بیمه<sup>۳</sup>، آب‌شناسی<sup>۴</sup>، آمار<sup>۵</sup> نقش مهمی را ایفا کرده‌اند. برای آشنایی با برخی از کاربردهای مفصل چروبینی<sup>۶</sup> (۲۰۰۴) و سالوادوری<sup>۷</sup> (۲۰۰۷) را ببینید.

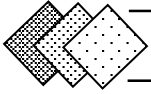
در ادامه با یک مثال برای دریافت ایده‌ای درباره‌ی مسأله مفصل، بحث را آغاز کنیم.

### ۳-۱ مثال توضیحی

دو متغیر تصادفی  $X_1$  و  $X_2$  را در نظر بگیرید که از مجموعه‌ی  $\{1, 2, \dots, 6\}$  انتخاب می‌شوند، این اعداد می‌توانند برآمدهای یک آزمایش کم و بیش ساده باشند. فرض کنید  $X_1$  برای ما معلوم است و روی  $X_2$  شرط‌بندی می‌کنیم. حال سؤالی که مطرح می‌شود، این است که با داشتن مقدار مشاهده‌شده‌ی  $X_1$  چه

<sup>1</sup> Hoeffding  
<sup>2</sup> Finance  
<sup>3</sup> Insurance  
<sup>4</sup> Hydrology  
<sup>5</sup> Actuarial sciences  
<sup>6</sup> Cherubini  
<sup>7</sup> Salvadori





اطلاعاتی می‌توان درباره‌ی مقدار  $X_p$  به دست آورد یا به بیان دیگر  $X_1$  و  $X_p$  دارای چه ساختار وابستگی هستند؟

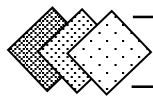
اگر آزمایش، دو بار پرتاب یک تاس سالم باشد و نتیجه‌ی پرتاب اول  $X_1$  و برآمد دومین پرتاب  $X_p$  باشد، در این صورت می‌توان به آسانی به پرسش فوق پاسخ گفت. واضح است که تحت این شرایط، متغیرها مستقل هستند و در نتیجه‌ی معلوم بودن  $X_1$  هیچ اطلاعی درباره‌ی  $X_p$  نخواهیم داشت. از طرفی می‌توان زمانی را فرض کرد که هر دو عدد با هم یکی باشند. در این صورت با دانستن  $X_1$ ، همه‌ی اطلاعات را درباره‌ی  $X_p$  خواهیم داشت که برعکس حالت قبل است.

حال پاسخ به پرسش می‌تواند کاملاً متفاوت باشد. اگر در آزمایش فوق،  $X_1$  را عدد روشدهی کوچکتر و  $X_p$  را عدد روشدهی بزرگتر فرض کنیم، یعنی میان  $X_1$  و  $X_p$  رابطه‌ی یکنوایی  $X_1 < X_p$  برقرار باشد، آن‌گاه می‌توان با دانستن مقدار  $X_1$  به مقدار یا مقادیر  $X_p$  دست پیدا کرد، برای مثال اگر بدانیم  $X_1 = 6$  آن‌گاه مقدار  $X_p = 6$  نیز بر ما آشکار است یا اگر  $X_1 = 5$ ، آن‌گاه می‌توان با شانس ۵۰٪ حدس زد که  $X_p = 5$  یا  $X_p = 6$  است و به همین ترتیب الی آخر.

برای بررسی و تحلیل هر چه دقیق‌تر بیان ساختار وابستگی ممکن بین این دو متغیر، نیازمند ابزارهایی هستیم که بتواند ما را در این امر یاری دهد. مشاهده می‌کنید که رفتار هر متغیر تصادفی به طور کامل با تابع توزیع تجمعی<sup>۱</sup> کناری<sup>۲</sup> آن،  $F_i(x) := P(X_i \leq x)$ ، شرح داده می‌شود. در آزمایش دو بار پرتاب یک تاس سالم داریم  $F_1 = F_p := F$ .

<sup>1</sup> Cumulative distribution function

<sup>2</sup> Marginal



می‌دانید با داشتن تابع توزیع توأم، دستیابی به توزیع‌های کناری با انتگرال‌گیری، در حالت پیوسته یا جمع‌بستن، در حالت گسسته، کار چندان مشکلی نیست. اما توجه به این نکته، حائز اهمیت است که توابع توزیع کناری به تنهایی هیچ‌گونه اطلاعی درباره‌ی رفتار توأم متغیرهای تصادفی به دست نمی‌دهد. بنابراین یافتن تابع توزیع توأم ناشناخته و بررسی ویژگی‌های آن با دانستن توزیع‌های کناری، کار بسیار پیچیده‌ای است و یکی از مسایل مهم آماری به شمار می‌آید.

در حالت خاص اگر دو متغیر، مستقل باشند. در مثال دو بار پرتاب یک تاس سالم، حالت اول را در نظر گرفته در این صورت تابع توزیع توأم به سادگی برابر با حاصل ضرب توابع کناری خواهد بود:

$$F(x_1, x_2) = F(x_1)F(x_2). \quad (1-1)$$

همانطور که ملاحظه کردید برای توصیف کامل رفتار توأم متغیرهای  $X_1$  و  $X_2$ ، دو بخش ترکیبی را

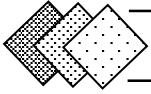
به کار بردیم:

۱- توابع توزیع کناری آنها

۲- نوع ارتباط درونی متغیرها (نوع وابستگی میان متغیرها).

حال پرسشی که در اینجا مطرح می‌شود، این است که: "آیا این‌گونه جداسازی میان توزیع‌های کناری و ساختار وابستگی را می‌توان در یک قالب کلی مشاهده و بیان کرد؟" خوشبختانه پاسخ به این پرسش "مثبت" است و ابزار صحیح و دقیق برای این منظور، "مفصل‌ها" هستند. برای درک بهتر این موضوع در مثال حالت سوم را در نظر بگیرید، در این حالت به دست آوردن تابع توزیع توأم، کار سختی نیست و با فرض این‌که  $Y_i$  عدد روشده در هر پرتاب باشد و قراردادن  $X_1 = \min(Y_1, Y_2)$  و  $X_2 = \max(Y_1, Y_2)$  توابع توزیع کناری عبارتند از:

$$F_1(x) = 2F(x) - F^2(x) \text{ و } F_2(x) = [F(x)]^2.$$



زیرا

$$\begin{aligned} F_1(x) &= P(X_1 \leq x) = 1 - P(X_1 > x) = 1 - P(\min(Y_1, Y_2) > x) \\ &= 1 - P(Y_1 > x, Y_2 > x) = 1 - [P(Y > x)]^2 \\ &= 1 - [1 - F(x)]^2 = 2F(x) - F^2(x), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} F_2(x) &= P(X_2 \leq x) = P(\max(Y_1, Y_2) \leq x) = P(Y_1 < x, Y_2 < x) \\ &= P(Y_1 \leq x)P(Y_2 \leq x) = [P(Y \leq x)]^2 = F^2(x) \end{aligned}$$

حال برای به دست آوردن تابع توزیع توأم داریم

$$F_{1,2}(x_1, x_2) = P(\min(Y_1, Y_2) \leq x_1, \max(Y_1, Y_2) \leq x_2)$$

از آن جا که برای  $x_2 \leq x_1$ 

$$P(\min(Y_1, Y_2) = x_1, \max(Y_1, Y_2) = x_2) = 0,$$

بنابراین

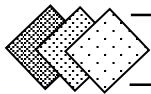
$$\begin{aligned} F_{1,2}(x_1, x_2) &= P(\min(Y_1, Y_2) \leq x_1, \max(Y_1, Y_2) \leq x_2) \\ &= P(\min(Y_1, Y_2) \leq \min(x_1, x_2), \max(Y_1, Y_2) \leq x_2) \end{aligned}$$

لذا با در نظر گرفتن حالات مختلف داریم

$$\begin{aligned} F_{1,2}(x_1, x_2) &= P(Y_1 \leq \min(x_1, x_2), Y_2 \leq \min(x_1, x_2)) \\ &\quad + P(Y_1 \leq \min(x_1, x_2), \min(x_1, x_2) < Y_2 \leq x_2) \\ &\quad + P(\min(x_1, x_2) < Y_1 \leq x_2, Y_2 \leq \min(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

حال به دلیل مستقل و هم توزیع بودن، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} F_{1,2}(x_1, x_2) &= P(Y_1 \leq \min(x_1, x_2))P(Y_2 \leq \min(x_1, x_2)) \\ &\quad + 2P(\min(x_1, x_2) < Y_2 \leq x_2)P(Y_1 \leq \min(x_1, x_2)) \\ &= F^2(\min\{x_1, x_2\}) + 2F(\min\{x_1, x_2\})[F(x_2) - F(\min\{x_1, x_2\})] \\ &= 2F(\min\{x_1, x_2\})F(x_2) - F^2(\min\{x_1, x_2\}). \quad (2 - 1) \end{aligned}$$



حال اگر تاس به جای ۱، ۲، ...، ۶ با اعداد ۱۱، ۱۲، ...، ۱۶ شماره‌گذاری شود، در این حالت ساختار وابستگی تغییری نخواهد کرد اما تابع توزیع توأم کاملاً متفاوت خواهد بود و این تفاوت، ناشی از تفاوت در توزیع‌های کناری است. از این‌رو به دنبال یافتن راهی هستیم که به طریقی بتوان توزیع‌های کناری و ساختار وابستگی را مجزا کرد. راه رسیدن به این هدف، تبدیل متغیرهای تصادفی  $X_i$  به متغیرهای تصادفی یکنواخت  $U_i$  است.

بنابراین همواره می‌توان هر متغیر تصادفی  $X$  با تابع توزیع تجمعی کناری  $F$  را همواره می‌توان به صورت  $X = F^{(-1)}(U)$  نشان داد، که در آن  $F^{(-1)}(U)$  وارون تعمیم‌یافته<sup>۱</sup> یا شبه‌وارون<sup>۲</sup>  $F$  نامیده می‌شود و در ادامه به طور کامل به آن اشاره خواهیم کرد. بنابراین تابع توزیع توأم را می‌توان با استفاده از دو متغیر تصادفی مستقل  $U_1$  و  $U_2$  دوباره به شکل زیر نوشت:

$$P(F_1^{(-1)}(U_1) \leq x_1, F_2^{(-1)}(U_2) \leq x_2) = P(U_1 \leq F(x_1), U_2 \leq F(x_2))$$

برای مثال، با مقایسه رابطه‌ی مربوط به حالت استقلال متغیرها، (۱-۱) و نمایش مجدد تابع توزیع

توأم، ساختار وابستگی را به تنهایی و جدا از توزیع‌های کناری با در نظر گرفتن  $u_i = F_i(x_i) = F(x_i)$  می‌توان به طریقی زیر بیان کرد:

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2.$$

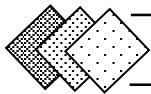
این تابع یک مفصل است که ساختار وابستگی را جدای از توزیع‌های کناری بیان می‌کند. به این

ترتیب که نخست توزیع‌های کناری، تبدیل به توزیع‌های یکنواختی می‌شوند که به عنوان حالت مرجع به کار می‌روند و سپس مفصل بر پایه‌ی این حالت مرجع ساختار وابستگی را تبیین می‌کند.

در حالت سوم که کوچکترین عدد  $X_1$  و بزرگترین عدد  $X_2$  در نظر گرفته شد، با در دست داشتن

<sup>۱</sup> Generalized inverse

<sup>۲</sup> Quasi inverse



نتایج به دست آمده و قرار دادن  $u_1 = F_1(x_1)$  و  $u_2 = F_2(x_2)$  و انجام محاسبات ساده‌ی زیر،  $x_1$  را بر حسب  $u_1$  و  $x_2$  را بر حسب  $u_2$  به دست می‌آوریم:

$$u_1 = F_1(x_1) = 2F(x_1) - F^2(x_1)$$

$$F^2(x_1) - 2F(x_1) + u_1 = 0 \Rightarrow F(x_1) = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4u_1}}{2} \quad ; 0 \leq u_1 \leq 1$$

$$F(x_1) = 1 - \sqrt{1 - u_1} \Rightarrow x_1 = F^{(-1)}(1 - \sqrt{1 - u_1})$$

9

$$u_2 = F_2(x_2) = F^2(x_2)$$

$$F(x_2) = \sqrt{u_2} \quad ; 0 \leq u_2 \leq 1 \Rightarrow x_2 = F^{(-1)}(\sqrt{u_2})$$

بنابراین با جایگذاری در فرمول (۲-۱)، می‌توان مفصلی به فرم زیر ارائه داد:

$$C(u_1, u_2) = 2 \min\{1 - \sqrt{1 - u_1}, \sqrt{u_2}\} \sqrt{u_2} - \min\{1 - \sqrt{1 - u_1}, \sqrt{u_2}\}^2, \quad 0 \leq u_1, u_2 \leq 1.$$

نکته شایان توجه آن است که وقتی توابع توزیع کناری پیوسته نیستند، مفصل یکتا نیست که در

فصل بعد در قالب لم (۲-۶-۲) بیان خواهد شد بنابراین در این مثال مفصل‌های دیگری هم موجودند که می‌توانند همین ساختار را بیان کنند.

اغلب مطالب فوق از نلسن (۲۰۰۶) و اشمیت<sup>۱</sup> (۲۰۰۶) آورده شده‌اند که برای اطلاعات بیشتر، می-

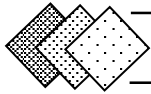
توانید به آن‌ها مراجعه کنید.

## ۴-۱ تعاریف و لم‌های مقدماتی

لازم به ذکر است در ادامه کلیه قضایا، لم‌ها و تعاریف در حالت دومتغیره بیان شده‌اند که البته

می‌توان آن‌ها را به حالت  $n$  متغیره تعمیم داد (نلسن، ۲۰۰۶ و سالوادوری، ۲۰۰۷). فرض کنید متغیرهای

<sup>1</sup> Schmidt



تصادفی، روی فضای احتمال  $(\Omega, A, P)$  تعریف شده باشند. در طول پایان نامه، هر جا لازم باشد  $R = (-\infty, +\infty)$ ،  $\bar{R} = [-\infty, +\infty]$ ،  $\bar{R}^2 = \bar{R} \times \bar{R}$ ،  $I = [0, 1]$  و  $I^2 = I \times I$  تعریف می‌شوند. همچنین فرض کنید  $Dom$  دامنه‌ی تابع و  $Ran$  برد تابع را مشخص می‌کنند. توجه داشته باشید که در پایان اثبات قضایا و لم‌ها از نماد  $\square$  و در پایان اثبات مثال‌ها از نماد  $\blacksquare$  استفاده می‌کنیم.

**تعریف ۱-۴-۱:** فرض کنید  $f$  یک نگاشت از فضای متری  $X$  به توی فضای متری  $Y$  باشد. می-

گوییم  $f$  بر  $X$  به طور یکنواخت پیوسته است هرگاه به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $\delta$ ی مثبتی باشد به طوری که به ازای هر  $p$  و  $q$  در  $X$  که  $|p - q| < \delta$ ، داشته باشیم

$$|f(p) - f(q)| < \varepsilon.$$

**تعریف ۲-۴-۱:** اگر تابع پیوسته  $f$  دارای این خاصیت باشد که در فاصله‌ی هر دو نقطه، نمودار

تابع زیر وتر بین دو نقطه باشد، گوییم  $f$  یک تابع محدب است یا تحدب  $f$  به سمت بالاست. به عبارتی، تابع

$$f: (a, b) \rightarrow R; \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty$$

محدب است اگر برای هر دو عدد  $x_1, x_2 \in (a, b)$  و هر  $0 \leq \lambda \leq 1$  داشته باشیم

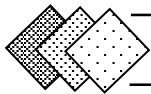
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

**تعریف ۳-۴-۱:** فرض کنید گزاره  $P$  برای تمام نقاط  $\Omega$  به جز نقاط  $A$  که در آن  $\mu(A) = 0$

درست باشد (یعنی برای تمام  $\Omega - A$  درست است و  $\mu(A) = 0$ ). در این صورت گوییم این گزاره تقریباً همه جا<sup>۱</sup>  $\mu$  درست است.

**تعریف ۴-۴-۱:** تابع توزیع، تابعی مانند  $F$  با دامنه‌ی  $\bar{R}$  است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

<sup>1</sup> Almost everywhere



۱-  $F^{-1}$  نانزولی است.

$$F(+\infty) = 1 \text{ و } F(-\infty) = 0.$$

۳- در تمامی نقاط  $F$  از راست پیوسته است.

**تعریف ۱-۴-۵:** فرض کنید  $F$  یک تابع توزیع باشد، آن گاه شبه وارون  $F$  تابعی مانند  $F^{(-1)}$  با

دامنه‌ی  $I$  است به طوری که:

(الف) اگر  $t$  متعلق به  $Ran F$  باشد، آن گاه  $F^{(-1)}(t)$  عددی مانند  $x \in \bar{R}$  است به طوری که

$$F(x) = t \text{ یعنی}$$

$$\forall t \in Ran F, \quad F\left(F^{(-1)}(t)\right) = t.$$

(ب) اگر  $t$  متعلق به  $Ran F$  نباشد، آن گاه  $F^{(-1)}(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x | F(x) \geq t\} = \sup\{x | F(x) \leq t\}.$$

توجه کنید که اگر  $F$  تابعی پیوسته و اکیداً صعودی باشد، آن گاه

$$F^{(-1)}(t) = F^{-1}(t).$$

**تعریف ۱-۴-۶:** فرض کنید  $S_1$  و  $S_2$  زیرمجموعه‌های ناتهی از  $\bar{R}$  و  $H$  تابعی با

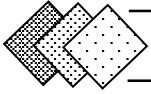
که  $Ran(H) \subseteq R$  و  $Dom(H) = S_1 \times S_2 \subseteq \bar{R}^2$  باشد. اگر  $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$  یک مستطیل باشد

که رئوس آن متعلق به  $Dom(H)$  هستند، آن گاه  $H$  - حجم مجموعه‌ی  $B$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) - H(x_2, y_1) + H(x_1, y_1)$$

**تعریف ۱-۴-۷:** اگر برای هر  $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subseteq S_1 \times S_2$  داشته باشیم  $V_H(B) \geq 0$ .

<sup>1</sup> H-volume



آن‌گاه تابع  $H$  را دو-صعودی<sup>۱</sup> می‌نامند.

توجه کنید که دو-صعودی بودن، معادل با نازولی بودن آن نیست. مثال زیر می‌تواند گویای این مطلب باشد.

**مثال ۱-۴-۱:** فرض کنید تابع  $H$  روی  $I^2$  با ضابطه‌ی  $H(x, y) = \max(x, y)$  باشد، در این

صورت  $H$  تابعی نازولی از  $x$  و  $y$  است، ولی دو-صعودی نیست، زیرا

$$V_H(I^2) = \max(1, 1) - \max(1, 0) - \max(0, 1) + \max(0, 0) = -1 < 0.$$

■

**تعریف ۱-۴-۸:** تابع توزیع توأم، تابعی مانند  $H$  با دامنه‌ی  $\bar{R}^2$  است که در شرایط زیر صدق

می‌کند:

۱-  $H$  دو-صعودی باشد.

$$2- H(+\infty, +\infty) = 1 \text{ و } H(x, -\infty) = 0 = H(-\infty, y)$$

۳-  $H$  نسبت به هر کدام از متغیرها، از راست پیوسته است.

**لم ۱-۴-۱:** فرض کنید  $S_1$  و  $S_2$  زیرمجموعه‌های ناتهی از  $\bar{R}$  و  $H$  تابعی دو-صعودی با

$Dom(H) = S_1 \times S_2 \subseteq \bar{R}^2$  و  $Ran(H) \subseteq R$  باشد. همچنین فرض کنید  $x_1, x_2 \in S_1$  به طوری که

$x_1 \leq x_2$  و  $y_1, y_2 \in S_2$  به طوری که  $y_1 \leq y_2$ . آن‌گاه توابع  $h_1(t) = H(t, y_2) - H(t, y_1)$  و

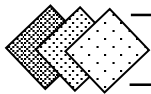
$h_2(t) = H(x_2, t) - H(x_1, t)$  به ترتیب در  $S_2$  و  $S_1$  نازولی می‌باشند.

**اثبات:**

برای هر  $x_1 \leq x_2$  داریم

<sup>۱</sup> 2 - Increasing





$$h_1(x_2) - h_1(x_1) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1).$$

که با توجه به تعریف  $H$ -حجم و فرض دو-صعودی بودن  $H$ ، خواهیم داشت

$$h_1(x_2) - h_1(x_1) = V_H(B) \geq 0.$$

بنابراین  $h_1(x_2) \geq h_1(x_1)$  و لذا  $h_1(t)$  تابعی نانزولی می‌باشد. برای  $h_2(t)$  نیز به طور مشابه

حکم ثابت می‌شود.  $\square$

**تعریف ۱-۴-۹:** تابع  $H$  را با  $Dom(H) = S_1 \times S_2 \subseteq \bar{R}^2$  و  $Ran(H) \subseteq R$  زمین‌گیر<sup>۱</sup> نامند،

اگر

$$\forall x \in S_1, y \in S_2, H(a_1, y) = H(x, a_2) = 0,$$

که در آن  $a_1 = \inf\{x | x \in S_1\}$  و  $a_2 = \inf\{y | y \in S_2\}$ .

**لم ۱-۴-۲:** فرض کنید  $S_1$  و  $S_2$  زیرمجموعه‌های ناتهی از  $\bar{R}$  و  $H$  تابعی دو-صعودی و زمین‌گیر

با  $Dom(H) = S_1 \times S_2 \subseteq \bar{R}^2$  باشد، در این صورت  $H$  نسبت به هر مؤلفه، نانزولی است.

**اثبات:**

با توجه به تعریف  $H$ -حجم و فرض دو-صعودی بودن تابع  $H$  داریم

$$\forall x_1, x_2 \in S_1: x_1 \leq x_2 \text{ و } \forall y_1, y_2 \in S_2: y_1 \leq y_2 \text{ و } B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$$

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) - H(x_2, y_1) + H(x_1, y_1) \geq 0,$$

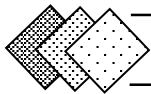
حال قرار می‌دهیم  $x_1 = a_1 = \inf\{x | x \in S_1\}$  بنابراین طبق خاصیت زمین‌گیری  $H$ ، خواهیم داشت:

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) \geq 0,$$

$$\forall y_1 \leq y_2 \in S_2: H(x_2, y_2) \geq H(x_2, y_1).$$

بنابراین  $\forall x \in S_1$ ، تابع  $H$  نانزولی است.  $\square$

<sup>۱</sup> Grounded



**تعریف ۱-۴-۱۰:** فرض کنید  $b_1 = \sup\{x|x \in S_1\}$  و  $b_2 = \sup\{y|y \in S_2\}$  باشد، آن گاه

تابع  $H: S_1 \times S_2 \rightarrow R$  دارای توابع کناری  $F$  و  $G$  می باشد، که به صورت زیر تعیین می شوند:

$$\forall x \in S_1: F(x) = H(x, b_2) \quad \text{Dom } F = S_1$$

$$\forall y \in S_2: G(y) = H(b_1, y) \quad \text{Dom } G = S_2$$

با توجه به تعاریف (۱-۴-۸) و (۱-۴-۹) واضح است که تابع توزیع توأم  $H$  زمین گیر نیز می باشد و

از آن جا که  $Dom(H) = \bar{R}^2$  لذا  $H$  دارای توابع کناری  $F(x) = H(x, +\infty)$  و  $G(y) = H(+\infty, y)$  است که آن ها نیز تابع توزیع هستند.

**مثال ۱-۴-۲:** فرض کنید  $H$  تابعی با دامنه  $[-1,1] \times [0, +\infty]$  و ضابطه ی

$$H(x, y) = \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1}$$

(الف)  $H$  زمین گیر است، زیرا

$$a_2 = \text{Inf}\{y|y \in [0, +\infty]\} = 0, \quad a_1 = \text{Inf}\{x|x \in [-1,1]\} = -1,$$

$$H(-1, y) = H(x, 0) = 0.$$

(ب) توابع کناری  $H$  عبارتند از

$$b_2 = \sup\{y|y \in [0, +\infty]\} = +\infty, \quad b_1 = \sup\{x|x \in [-1,1]\} = 1,$$

$$F(x) = H(x, +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} H(x, y) = \frac{(x+1)}{2},$$

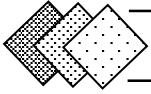
$$G(y) = H(1, y) = 1 - e^{-y}.$$

■

**لم ۱-۴-۳:** فرض کنید  $S_1$  و  $S_2$  زیرمجموعه های ناتهی از  $\bar{R}$  و  $H$  تابعی دو- صعودی و زمین گیر

با  $Dom(H) = S_1 \times S_2 \subseteq \bar{R}^2$  و  $Ran(H) \subseteq R$  باشد که توابع کناری آن نیز موجودند و همچنین فرض

کنید  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  نقاطی در  $S_1 \times S_2$  باشند. آن گاه داریم



$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

اثبات:

با اضافه و کم کردن مقدار  $H(x_1, y_2)$  و با استفاده از نامساوی مثلث داریم

$$\begin{aligned} |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| &= |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \\ &\leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \quad (3-1) \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید  $b_1 = \sup\{x: x \in S_1\}$  و  $b_2 = \sup\{y: y \in S_2\}$ . دو حالت در نظر بگیرید:

در حالت اول  $x_1 \leq x_2$  در نظر گرفته، طبق فرض دو-صعودی و زمین گیر بودن  $H$  و لم (۱-۴-۲)،

می توان گفت تابع  $H$  نسبت به هر مؤلفه نانزولی است و طبق تعریف  $h_2(y_2)$  داریم

$$h_2(y_2) = H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \geq 0.$$

همچنین با توجه به تعریف  $b_2$  و نانزولی بودن  $h_2$  و تعریف توابع کناری خواهیم داشت

$$0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq H(x_2, b_2) - H(x_1, b_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (4-1)$$

در حالت دوم  $x_1 \geq x_2$  در نظر گرفته و لذا طبق حالت اول، خواهیم داشت

$$H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) = -h_2(y_2) \geq -h_2(b_2) = F(x_1) - F(x_2). \quad (5-1)$$

بنابراین طبق خاصیت قدر مطلق و نامساوی های (۱-۴) و (۱-۵) داریم

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| \leq |F(x_2) - F(x_1)|. \quad (6-1)$$

با استدلالی مشابه و در نظر گرفتن  $b_1, h_1(x_1)$  و دو حالت  $y_1 \geq y_2$  و  $y_1 \leq y_2$  در محاسبات فوق،

می توان به دست آورد

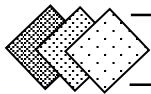
$$|H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |G(y_2) - G(y_1)| \quad (7-1)$$

در نتیجه با توجه به محاسبات فوق بخصوص نامساوی های (۱-۳) و (۱-۶) و (۱-۷)، خواهیم داشت

$$\forall x_1, x_2 \in S_1, \forall y_1, y_2 \in S_2:$$

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|$$

در این صورت حکم ثابت می شود. □



## ۱-۵ مفصل

در این بخش، به تعریف موضوع اصلی این پایان نامه، یعنی، مفصل پرداخته و به این منظور ابتدا زیرمفصل<sup>۱</sup> که کلاسی معین از توابع دو-صعودی و زمین گیر است را بیان کرده و با تعمیم آن به دامنه  $I^2$ ، مفصل را تعریف می کنیم.

**تعریف ۱-۵-۱:** تابع دو متغیره  $C'$  را زیرمفصل نامند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱-  $Dom(C') = S_1 \times S_2$  که در آن  $S_1$  و  $S_2$  زیرمجموعه هایی از  $I$  و شامل صفر و ۱ هستند.

۲-  $C'$  تابعی دو-صعودی و زمین گیر باشد.

$$۳- \forall u \in S_1, v \in S_2 : C'(u, 1) = u \text{ و } C'(1, v) = v$$

**نکته ۱-۵-۱:** توجه کنید  $\forall u \in S_1, v \in S_2$  داریم  $0 \leq C'(u, v) \leq 1$ .

زیرا بنابر خاصیت زمین گیری،  $C'(0, v) = 0$ . از طرفی طبق لم (۱-۴-۲) داریم  $C'(0, v) \leq C'(u, v) \leq C'(1, v)$ . همچنین با توجه به خاصیت سوم زیرمفصل و  $v \in I$  می توان نتیجه گرفت:

$$0 = C'(0, v) \leq C'(u, v) \leq C'(1, v) = v \leq 1 \quad \square$$

**تعریف ۱-۵-۲:** تابع زیرمفصل  $C: I^2 \rightarrow I$  یک "مفصل" است، اگر دارای شرایط زیر باشد:

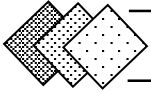
۱- برای هر  $u, v \in I$  داشته باشیم

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v),$$

$$C(u, 1) = u, \quad C(1, v) = v.$$

۲- برای هر  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$  به طوری که  $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$  داشته باشیم

<sup>۱</sup> Subcopula



$$V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

شرط (۲) بیانگر این مطلب است که مفصل  $C$  برای هر مستطیل  $B = [0, u] \times [0, v]$  ;  $u, v \in I$  عدد  $C(u, v)$  را نسبت می‌دهد که مقداری در  $I$  است.

ملاحظه می‌کنید که تفاوت میان زیرمفصل و مفصل در دامنهی آنها است و واضح است که هر مفصل یک زیرمفصل می‌باشد ولی عکس آن برقرار نیست. لازم به ذکر است که تمامی خواص مهم مفصل برای زیرمفصل نیز برقرار هستند.

### مثال ۱-۵-۱:

توابع  $C(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$  ,  $C(u, v) = \min\{u, v\}$  و  $C(u, v) = uv$  مفصل

هستند، که برای هر یک به طور جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$C(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\} \quad \checkmark \text{ از آن جا که برای هر } u, v \in I \text{ داریم}$$

$$C(0, v) = \max\{v - 1, 0\} = 0 = C(u, 0) = \max\{u - 1, 0\},$$

لذا تابع  $C$  زمین‌گیر است. همچنین

$$C(1, v) = \max\{v, 0\} = v \quad \text{و} \quad C(u, 1) = \max\{u, 0\} = u.$$

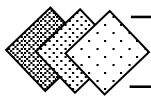
بنابراین ویژگی (۱) برقرار است. حال برای بررسی ویژگی دوم فرض کنید برای هر

$$u_1, u_2, v_1, v_2 \in I \text{ به طوری که } u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2 \text{ داشته باشیم}$$

$$\begin{aligned} V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \\ &= \max\{u_2 + v_2 - 1, 0\} - \max\{u_1 + v_2 - 1, 0\} \\ &\quad - \max\{u_2 + v_1 - 1, 0\} + \max\{u_1 + v_1 - 1, 0\} \end{aligned}$$

که با توجه به فرض  $v_1 \leq v_2$  و لم (۱-۴-۱)، بدیهی است که

$$\begin{aligned} \max\{u_2 + v_2 - 1, 0\} - \max\{u_1 + v_2 - 1, 0\} &\geq \max\{u_2 + v_1 - 1, 0\} \\ &\quad - \max\{u_1 + v_1 - 1, 0\}. \end{aligned}$$



از این رو ویژگی (۲) نیز برقرار است و داریم  $V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) \geq 0$

✓  $M(u, v) = \min\{u, v\}$ : به صورت مشابه، برای هر  $u, v \in I$  داریم

$$C(0, v) = \min\{0, v\} = 0 = C(u, 0) = \min\{u, 0\},$$

$$C(1, v) = \min\{1, v\} = v, \quad C(u, 1) = \min\{u, 1\} = u.$$

لذا خاصیت اول برقرار می‌باشد و برای بررسی خاصیت دوم نیز مشابه تابع قبلی داریم

$$V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = \min\{u_2, v_2\} - \min\{u_1, v_2\} - \min\{u_2, v_1\} + \min\{u_1, v_1\},$$

که با توجه به فرض  $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$  و لم (۱-۴-۱) خواهیم داشت

$$\min\{u_2, v_2\} - \min\{u_1, v_2\} \geq \min\{u_2, v_1\} - \min\{u_1, v_1\}.$$

و لذا  $V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) \geq 0$

✓  $C(u, v) = uv$ : به صورت مشابه، برای هر  $u, v \in I$  داریم

$$C(0, v) = 0 = C(u, 0)$$

$$C(1, v) = v \quad \text{و} \quad C(u, 1) = u$$

و با توجه به فرض  $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$  و استفاده‌ی مجدد از لم (۱-۴-۱)، بدیهی است که

$$\begin{aligned} V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= u_2 v_2 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + u_1 v_1 \\ &= v_2(u_2 - u_1) - v_1(u_2 - u_1) \geq 0. \end{aligned}$$

ملاحظه کردید که کلیه‌ی ویژگی‌های مفصل برای توابع فوق برقرار و بنابراین همگی مفصل هستند.

■

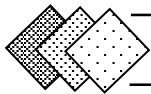
### قضیه ۱-۵-۱ (نلسن، ۲۰۰۶): (کران‌های مفصل)

فرض کنید  $C'$  یک زیرمفصل باشد، آن‌گاه

$$\forall (u, v) \in S_1 \times S_2 = \text{Dom}(C'),$$

$$W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\} \leq C'(u, v) \leq \min\{u, v\} = M(u, v). \quad (8-1)$$

(قابل ذکر است که در برخی مقالات  $W$  و  $M$  را به ترتیب با نمادهای  $C^+$  و  $C^-$  نیز نمایش می‌دهند)



(بالاکریشنان<sup>۱</sup>، ۲۰۰۹).

### اثبات:

با توجه به تعریف زیرمفصل و ویژگی (۱) آن، بر طبق لم (۱-۴-۲) می‌توان نتیجه گرفت که  $C'$

تابعی نانزولی نسبت به هر مؤلفه است. بنابراین داریم

$$C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u, \quad (9 - 1)$$

$$C'(u, v) \leq C'(1, v) = v. \quad (10 - 1)$$

لذا با توجه به (۹-۱) و (۱۰-۱) خواهیم داشت:

$$C'(u, v) \leq \min\{u, v\}. \quad (11 - 1)$$

حال برای به دست آوردن کران پایین، مستطیل  $B = [u, 1] \times [v, 1]$  را در نظر گرفته و از آن‌جا که  $C'$  دو-صعودی است، می‌توان گفت

$$V_{C'}(B) = C'(1,1) - C'(u,1) - C'(1,v) + C'(u,v) \geq 0$$

بنابراین

$$C'(u, v) \geq u + v - 1$$

و همچنین با استفاده از نکته‌ی (۱-۵-۱) همواره داریم  $C'(u, v) \leq 0$ ، لذا نتیجه حاصل می‌شود و خواهیم داشت

$$\max\{u + v - 1, 0\} \leq C'(u, v). \quad (12 - 1)$$

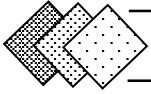
با توجه به نتایج به دست آمده در (۱۱-۱) و (۱۲-۱) حکم ثابت می‌شود.  $\square$

همانطور که گفتیم هر مفصل یک زیرمفصل است بنابراین نامساوی (۸-۱) برای مفصل‌ها نیز برقرار

هستند. از آن‌جا که این کران‌ها طی مطالعات فرشه (۱۹۹۵) و هافدینگ (۱۹۴۰) به دست آمد، قضیه‌ی

فوق به کران‌های فرشه-هافدینگ شهرت یافته‌اند. بنابراین می‌توان گفت هر مفصل  $C$  بین دو مفصل

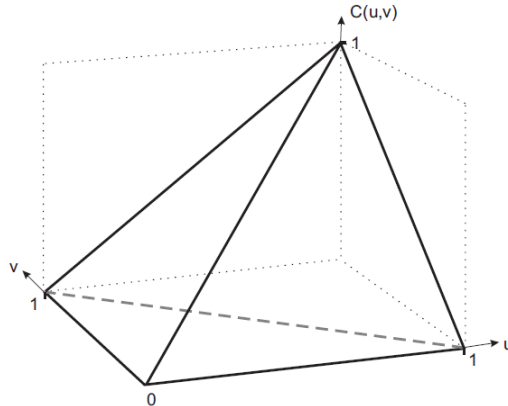
<sup>1</sup> Balakrishnan



$W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$  و  $M(u, v) = \min\{u, v\}$  قرار دارد. یعنی

$$W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\} \leq C(u, v) \leq \min\{u, v\} = M(u, v).$$

این مطلب را می‌توان در شکل ۱-۱ مشاهده کرد (اشمیت، ۲۰۰۶).



شکل ۱-۱: براساس کران‌های فرشه-هافدینگ هر مفصل در داخل هرمی که در شکل نشان داده شده است، قرار می‌گیرد. سطح مربوط به قاعده و سطح پشت هرم، کران پایین؛ یعنی  $W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$  و سطح جلوی هرم، کران بالا؛ یعنی  $M(u, v) = \min\{u, v\}$  می‌باشد.

**قضیه ۱-۵-۲** (نلسن، ۲۰۰۶): فرض کنید  $C'$  یک زیرمفصل باشد آن‌گاه برای هر  $(u_1, u_2)$  و

$(v_1, v_2)$  عضو  $Dom(C')$ ، رابطه‌ی زیر که تحت عنوان نامساوی لیپ‌شیتز<sup>۱</sup> مشهور است همواره برقرار است:

$$|C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

ازاینرو  $C'$  بر روی دامنه‌اش به طور یکنواخت پیوسته است.

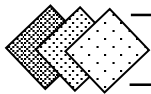
اثبات با توجه به لم (۱-۴-۳) بدیهی به نظر می‌رسد.

**تعریف ۱-۵-۳**: فرض کنید  $C$  یک مفصل و  $a \in I$  باشد. بخش افقی<sup>۲</sup> مفصل  $C$  در  $a$ ، تابعی از  $I$

<sup>۱</sup> Lipschitz

<sup>۲</sup> Horizontal





به  $I$ ، به صورت  $t \mapsto C(t, a)$  می‌باشد. بخش عمودی<sup>۱</sup> مفصل  $C$  در  $a$ ، تابعی از  $I$  به  $I$ ، به صورت  $t \mapsto C(t, a)$  می‌باشد. همچنین می‌توان دو بخش افقی و عمودی را به ترتیب به صورت نگاشت‌های زیر معرفی کرد:

$$h_a^C: [0, 1] \rightarrow [0, a], \quad h_a(t) := C(t, a),$$

$$v_a^C: [0, 1] \rightarrow [0, a], \quad v_a(t) := C(a, t).$$

و بخش قطری<sup>۲</sup> مفصل  $C$ ، تابع  $\delta_C$  از  $I$  به  $I$ ، تعریف به صورت  $\delta_C(t) = C(t, t)$  می‌باشد.

**نتیجه ۱-۵-۱:** هر یک از بخش‌های افقی، عمودی و قطری مفصل  $C$  در  $I$ ، نانزولی و به طور

یکنواخت پیوسته هستند.

**اثبات:**

با توجه به تعریف مفصل و تعریف ۱-۵-۳ نانزولی بودن بدیهی است. همچنین طبق تعریف ۱-۴-۱

به ازای هر  $p$  و  $q$  در  $X$  که  $|p - q| < \delta$ ، باید ثابت کنیم

$$|C(p, a) - C(q, a)| < \varepsilon,$$

با توجه به قضیه ۱-۵-۲ داریم

$$|C(p, a) - C(q, a)| \leq |p - q| + |a - a|$$

بنابراین با در نظر گرفتن  $\varepsilon = \delta$ ، بخش افقی به طور یکنواخت پیوسته است برای بخش‌های عمودی و

قطری نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود.  $\square$

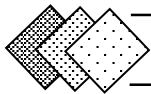
باتوجه به تعریف مفصل، نامساوی لیبشیتز و کران‌های مفصل (شکل ۱-۱)، مشخص می‌شود که

نمودار هر مفصل  $(z = C(u, v))$  سطحی پیوسته داخل هرم واقع در یک مکعب یکه در  $I^3$ ، که رئوس آن

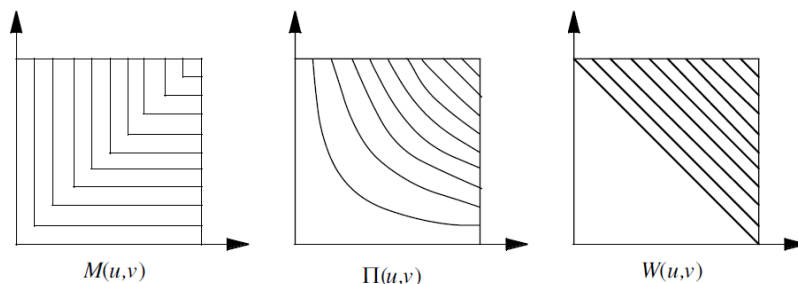
را نقاط  $(0, 0, 0)$  و  $(1, 0, 0)$  و  $(0, 1, 0)$  و  $(1, 1, 1)$  تشکیل می‌دهند، می‌باشد.

<sup>1</sup> Vertical

<sup>2</sup> Diagonal



یک روش ساده اما مفید برای ارزیابی نمودار مفصل، نمودارهای تراز<sup>۱</sup> مفصل می‌باشد که توسط کانوی<sup>۲</sup> (۱۹۷۹) مطرح شد و با قرار دادن  $a = C(u, v)$ ، که  $a$  عددی ثابت در  $I$  است، مقاطع بریده‌شده‌ی نمودار مفصل را در  $I^2$  نمایش می‌دهد. برای مثال در شکل (۲-۱) نمودار تراز هر یک از مفصل‌های  $M$ ،  $\Pi$  و  $W$  را مشاهده می‌کنید.



شکل ۲-۱: نمودار تراز مفصل‌های  $M$ ،  $\Pi$  و  $W$

در دو قضیه‌ای که در ادامه‌ی این بخش مطرح شده‌اند به مبحث مشتق جزئی مفصل‌ها می‌پردازیم. بنا به تعریف، هر مفصل یک تابع توزیع تجمعی است و طبیعتاً تفسیر نظری نمودارهای این توابع به طور یکنوا صعودی، بسیار مشکل است. به همین دلیل برای تفسیر توزیع آن‌ها به جای نمودارهای تابع توزیع تجمعی، از نمودارهای چگالی آن‌ها استفاده می‌شود. البته مفصل‌ها همیشه دارای چگالی نیستند. در ادامه نمونه‌هایی از مفصل‌هایی که تابع چگالی ندارند ارائه می‌شود (اشمیت، ۲۰۰۶).

### قضیه ۱-۵-۳: فرض کنید $C$ یک مفصل باشد، آن‌گاه

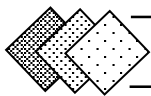
(الف) تقریباً برای هر  $v \in I$ ،  $\frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$  موجود و مقداری بین صفر و ۱ می‌باشد.

(ب) تقریباً برای هر  $u \in I$ ،  $\frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$  موجود و مقداری بین صفر و ۱ می‌باشد.

علاوه بر این  $\frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$  و  $\frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$  تقریباً همه جا نانزولی هستند.

<sup>1</sup> Contour diagram

<sup>2</sup> Conway



## اثبات:

از آن جا که مقاطع افقی و عمودی  $C$ ، نانزولی و به طور یکنواخت پیوسته هستند، وجود مشتقات  $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$  و

بدیهی است. برای نشان دادن این که دو مشتق فوق، مقداری بین صفر و یک هستند، از قضیه

۱-۵-۲ استفاده کرده و قرار می‌دهیم  $v_1 = v_2 = v$ . لذا خواهیم داشت

$$|C(u_2, v) - C(u_1, v)| \leq |u_2 - u_1|$$

حال با توجه به نانزولی بودن  $C(u, v)$  و قراردادن  $u_2 = u + h$  و  $u_1 = u$  داریم

$$0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(u+h, v) - C(u, v)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

به طور مشابه، ثابت می‌شود  $0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \leq 1$ .

نانزولی هستند زیرا با توجه به دو-صعودی بودن  $C$  و لم ۱-۴-۱، داریم

$$h_1(u) = C(u, v_2) - C(u, v_1),$$

که برای هر  $v_1 \leq v_2$ ، نسبت به  $u$  نانزولی است. لذا

$$h'_1(u) = \frac{\partial C(u, v_2)}{\partial u} - \frac{\partial C(u, v_1)}{\partial u} \geq 0.$$

بنابراین  $\frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$  برای هر  $v \in I$  نانزولی است، برای  $\frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$  نیز به طور مشابه ثابت می‌شود. □

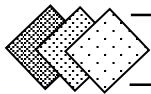
**قضیه ۱-۵-۴** (سیلی<sup>۱</sup>، ۱۹۶۱): فرض کنید  $C$  یک مفصل باشد. اگر  $\frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$  و  $\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$  در  $I^2$

پیوسته و  $\frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$  برای هر  $u \in (0, 1)$  زمانی که  $v = 0$  است، موجود باشد، آن گاه  $\frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$  و  $\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial v \partial u}$  در

$(0, 1)^2$  موجود است و خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial v \partial u}.$$

<sup>1</sup> Seeley



## ۱-۶ قضیه‌ی اسکالر

حال به موضوع اساسی این فصل یعنی قضیه‌ی اسکالر که از پرکاربردترین قضایا در به‌کارگیری مفصل‌ها به شمار می‌آید، می‌رسیم. قضیه‌ی اسکالر به نقشی که مفصل‌ها در ارتباط میان توابع توزیع توأم چندمتغیره و توابع کناری یک‌متغیره‌ی آن‌ها ایفا می‌کنند، اشاره دارد.

بیان و اثبات این قضیه در گرو بیان لم‌هایی است که ابتدا به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

**لم ۱-۶-۱** (نلسن، ۲۰۰۶): فرض کنید  $H$  تابع توزیع توأم با توابع توزیع کناری  $F$  و  $G$  باشد آن‌گاه

زیرمفصل یکتای  $C'$  موجود است به طوری که:

$$Dom(C') = Ran F \times Ran G - 1$$

۲- برای هر  $x, y \in \bar{R}$  داشته باشیم

$$H(x, y) = C'(F(x), G(y)).$$

**اثبات:**

تعریف تابع توزیع توأم، نشان می‌دهد که تابع  $H$  شرایط لم ۱-۴-۳ را با در نظر گرفتن  $S_1 = S_2$

دارا می‌باشد. از این‌رو برای هر دو نقطه مانند  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \bar{R}^2$  داریم

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|,$$

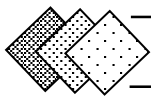
که می‌توان با قرار دادن  $F(x_1) = F(x_2)$  و  $G(y_1) = G(y_2)$  نتیجه گرفت  $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$  و

لذا شرایط تابع بودن را بررسی کردیم. از این‌رو مجموعه نقاط  $\{(F(x), G(y)), H(x, y) \mid x, y \in \bar{R}\}$ ،

تابع حقیقی دومتغیره‌ی  $C'$  را با دامنه‌ی  $Ran F \times Ran G$  تعریف می‌کنند. این تابع یک زیرمفصل می‌-

باشد که مستقیماً از خواص تابع  $H$  به دست آمده است. حال کلیه‌ی خواص زیرمفصل را برای  $C'$  بررسی

می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم دو-صعودی است:



$$\forall u_1, u_2 \in \text{Ran } F: u_1 \leq u_2, \forall v_1, v_2 \in \text{Ran } G: v_1 \leq v_2.$$

از آن جا که  $F$  و  $G$  تابع هستند

$$\exists x_1 \leq x_2 \in \text{Dom } F: F(x_i) = u_i \quad \text{و} \quad \exists y_1 \leq y_2 \in \text{Dom } G: G(y_i) = v_i.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_2) - C'(u_2, v_1) + C'(u_1, v_1) \\ &= C'(F(x_2), G(y_2)) - C'(F(x_1), G(y_2)) \\ &\quad - C'(F(x_2), G(y_1)) + C'(F(x_1), G(y_1)), \end{aligned}$$

که با توجه به مجموعه‌ی نقاطی که در نظر گرفته شده و فرض تابع توزیع توأم بودن  $H$ ، داریم

$$V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) - H(x_2, y_1) + H(x_1, y_1) \geq 0.$$

بنابراین  $C'$  دو-صعودی است.

در این قسمت نیز از مجموعه‌ی نقاطی که در نظر گرفته شده و خاصیت تابع توزیع بودن  $F$  و  $G$

استفاده می‌کنیم و درستی ویژگی‌های دیگر زیرمفصل را نشان می‌دهیم:

$$\forall u \in \text{Ran } F \subseteq I: \exists x \in \text{Dom } F: u = F(x)$$

$$C'(u, 1) = C'(F(x), G(+\infty)) = H(x, +\infty) = F(x) = u,$$

$$\forall v \in \text{Ran } G \subseteq I: \exists y \in \text{Dom } G: v = G(y)$$

$$C'(1, v) = C'(F(+\infty), G(y)) = H(+\infty, y) = G(y) = v.$$

و  $C'$  زمین‌گیر است، زیرا

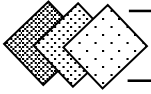
$$C'(u, 0) = C'(F(x), G(-\infty)) = H(x, -\infty) = 0,$$

$$C'(0, v) = C'(F(-\infty), G(y)) = H(-\infty, y) = 0.$$

لذا حکم ثابت می‌شود.  $\square$

**لم ۱-۶-۲** (نلسن، ۲۰۰۶): برای هر تابع زیرمفصل  $C'$ ، تابع مفصل  $C$  وجود دارد به طوری که

$$\forall (u, v) \in \text{Dom } C': \quad C(u, v) = C'(u, v)$$



یعنی می توان یک زیرمفصل را به یک مفصل تعمیم داد که البته این مفصل یکتا نیست.

حال برای درک بهتر لم فوق به مثال زیر توجه فرمایید.

مثال ۱-۶-۱: تابع توزیع توأم  $H$  را برای هر  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  که به صورت زیر تعریف شده در نظر

بگیرید:

$$H(x, y) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ یا } y < b, \\ 1, & x \geq a \text{ و } y \geq b. \end{cases}$$

در این صورت توابع کناری عبارتند از

$$F(x) = \varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, a) \\ 1 & x \in [a, +\infty) \end{cases} \quad \text{و} \quad G(y) = \varepsilon_b(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, b) \\ 1 & y \in [b, +\infty) \end{cases}$$

بنا به لم ۱-۶-۱، زیرمفصلی مانند  $C'$ ، با  $\text{Dom}(C') = \text{Ran } F \times \text{Ran } G = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ ، به شکل

$$H(x, y) = C'(F(x), G(y)) \text{ وجود دارد و بنابراین داریم:}$$

$$C'(0, 0) = C'(0, 1) = C'(1, 0) = 0, \\ C'(1, 1) = 1.$$

واضح است که مفصل  $\Pi(u, v) = uv$ ، یک تعمیم از  $C'$  است، زیرا

$$\forall (u, v) \in \text{Dom } C': \quad C'(u, v) = \Pi(u, v) = uv.$$

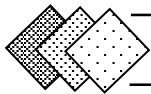
همچنین مفصل‌های دیگری چون  $M(u, v) = \min\{u, v\}$  و  $W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$  یک

تعمیم از زیرمفصل  $C'$  هستند. بنابراین تابع مفصلی که در لم فوق صدق می‌کند، یکتا نیست. ■

اسکلار با بیان و اثبات قضیه زیر، پایه‌های اساسی نظریه مفصل را بنا نهاد.

**قضیه ۱-۶-۱** (نلسن، ۲۰۰۶): (قضیه‌ی اسکلار)

فرض کنید  $H$  تابع توزیع توأم با توابع توزیع کناری  $F$  و  $G$  باشد، در این صورت مفصل  $C$  وجود دارد



به طوری که برای هر  $x, y \in \bar{R}$  داشته باشیم

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (13 - 1)$$

اگر توابع کناری  $F$  و  $G$  پیوسته باشند آن گاه  $C$  یکتاست. در غیر این صورت  $C$  روی  $Ran F \times Ran G$  به طور یکتا تعیین می شود.

برعکس، اگر  $C$  یک مفصل باشد و  $F$  و  $G$  توابع توزیع باشند، آن گاه تابع  $H$  تعریف شده به شکل تساوی (۱۳-۱)، یک تابع توزیع توأم با توابع کناری  $F$  و  $G$  است.

### اثبات

از آن جا که  $H$  یک تابع توزیع توأم با توابع توزیع کناری  $F$  و  $G$  می باشد لذا طبق لم ۱-۶-۱، زیرمفصل یکتای  $C'$  موجود است به طوری که،  $Dom(C') = Ran F \times Ran G$  و برای هر  $x, y \in \bar{R}$  داریم

$$H(x, y) = C'(F(x), G(y)).$$

از طرفی طبق لم ۱-۶-۲، می توان این زیرمفصل را به مفصل تعمیم داد و خواهیم داشت

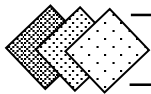
$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

بنابراین، طرف اول قضیه ثابت می شود. اما اثبات سوی دیگر قضیه بسیار آسان است زیرا کافیت که خواص تابع توزیع توأم را بررسی کنیم. چون  $C$  مفصل است لذا دو-صعودی و زمین گیر می باشد. از طرفی با توجه به ویژگی دیگر  $C$  و این که  $F$  و  $G$  تابع توزیع هستند، بدیهی است

$$H(+\infty, +\infty) = C(F(+\infty), G(+\infty)) = C(1, 1) = 1.$$

و همچنین با توجه به این که هر یک از  $F$  و  $G$  تابع توزیع بوده و از راست پیوسته هستند، داریم

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} H(x+h, y) = \lim_{h \rightarrow 0^+} C(F(x+h), G(y)) = C(F(x), G(y)) = H(x, y),$$



$$\lim_{h \rightarrow 0^+} H(x, y + h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} C(F(x), G(y + h)) = C(F(x), G(y)) = H(x, y).$$

بنابراین  $H$  نسبت به هر یک از مؤلفه‌هایش از راست پیوسته می‌باشد. بدین ترتیب  $H$  کلیه‌ی خواص تابع توزیع توأم را دارا بوده و حکم ثابت می‌شود.  $\square$

همان‌طور که ملاحظه کردید، قضیه‌ی اسکالر ارتباط بین توزیع توأم  $H$  با تابع مفصل  $C$  و توابع توزیع کناری  $F$  و  $G$  را بیان می‌کند. به علاوه، این قضیه قابلیت بیان مفصل  $C$  برحسب تابع توزیع توأم و وارون توابع توزیع کناری را نیز دارد. در صورتی که توابع توزیع کناری اکیداً صعودی نباشند، به شیوه‌های معمول نمی‌توان وارون آن را به دست آورد به همین سبب "شبه‌وارون" را تعریف کرده‌اند. البته برخی از نویسندگان آن را "وارون تعمیم‌یافته"<sup>۱</sup> نیز نامیده‌اند و بر اساس تبدیل‌های چندکی<sup>۲</sup> به دست آمده است که در تعریف ۱-۴-۶، به آن اشاره شد (اشمیت، ۲۰۰۶).

**نتیجه ۱-۶-۱:** فرض کنید  $H$  تابع توزیع توأم با توابع توزیع کناری  $F$  و  $G$  و دارای زیرمفصل  $C'$

داده‌شده در لم (۱-۶-۱) باشد و همچنین فرض کنید  $F^{(-1)}$  و  $G^{(-1)}$  به ترتیب شبه‌وارون‌های  $F$  و  $G$  باشند. آن‌گاه برای هر  $(u, v) \in \text{Dom}(C')$  داریم

$$C'(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)).$$

زمانی که  $F$  و  $G$  پیوسته باشند، نتیجه‌ی فوق، می‌تواند شیوه‌ای کارا برای به دست آوردن مفصل با استفاده از تابع توزیع توأم باشد.

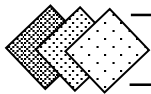
**مثال ۱-۶-۲:** فرض کنید  $(X, Y)$  دارای توزیع گامبل با پارامتر  $\theta$ ،  $(X, Y) \sim \text{Gumbel}(\theta)$ ، و  $H_\theta$

تابع توزیع توأم  $(X, Y)$  به شکل زیر باشد

<sup>1</sup> Generalized-Inverse

<sup>2</sup> Quantile transformations





$$H_{\theta} = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y+\theta xy)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

به طوری که  $\theta$  پارامتری در  $[0, 1]$  است و توابع توزیع کناری، نمایی ( $Exp(1)$ ) می‌باشند که دارای معکوسی به صورت  $F^{(-1)}(u) = -\ln(1-u)$  و  $G^{(-1)}(v) = -\ln(1-v)$  برای هر  $u, v \in I$  هستند. از این‌رو، می‌توان طبق قضیه اسکالر گفت که مفصل به شکل

$$C_{\theta}(u, v) = H_{\theta}(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)),$$

$$C_{\theta}(u, v) = u + v - 1 + (1-u)(1-v)e^{-\theta \ln(1-u) \ln(1-v)},$$

خواهد بود.  $\square$

## ۷-۱ تابع مفصل و متغیرهای تصادفی

در این بخش، برخی از ویژگی‌های تابع مفصل، بر مبنای متغیرهای تصادفی، ذکر می‌شوند.

**قضیه ۱-۷-۱** (نلسن، ۲۰۰۶): (اسکلار بر مبنای متغیر تصادفی)

فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی با تابع توزیع توأم  $H$  و توابع توزیع کناری به ترتیب  $F$  و  $G$

باشند، در این صورت مفصل  $C$  وجود دارد، به طوری که برای هر  $x, y \in \bar{R}$  داریم

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

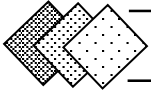
اگر توابع کناری  $F$  و  $G$  پیوسته باشند آن‌گاه  $C$  یکتاست. در غیر این صورت  $C$  روی  $Ran F \times Ran G$  به طور یکتا تعیین می‌شود.

برعکس، اگر  $C$  یک مفصل باشد و  $F$  و  $G$  توابع توزیع باشند، آن‌گاه تابع  $H$  تعریف شده به فرم

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)),$$

یک تابع توزیع توأم با توابع کناری  $F$  و  $G$  است.

**(\*) قضیه ۲-۷-۱** (نلسن، ۲۰۰۶): فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع



توأم  $H$  و توابع توزیع کناری به ترتیب  $F$  و  $G$  باشند. آن گاه  $X$  و  $Y$  مستقل هستند، اگر و تنها اگر

$$\forall (u, v) \in \text{Ran } F \times \text{Ran } G \text{ داشته باشیم}$$

$$C_{XY}(u, v) = \Pi(u, v) = uv.$$

اثبات:

می دانیم  $X$  و  $Y$  مستقل هستند، اگر و تنها اگر برای هر  $x, y \in \bar{R}$  داشته باشیم

$$H(x, y) = F(x) \cdot G(y)$$

و طبق نتیجه‌ی ۱-۶-۱، اگر و تنها اگر

$$\forall u, v \in I :$$

$$C_{XY}(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) = F(F^{-1}(u)) \cdot G(G^{-1}(v)) = uv = \Pi(u, v).$$

□

توجه کنید که در کل  $C_{XY}$  یعنی مفصلی که مربوط به متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  می‌شود و تنها

برای مفصل حاصل ضربی به کار نمی‌رود.

**قضیه ۱-۷-۳** (نلسن، ۲۰۰۶): فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی پیوسته با مفصل  $C_{XY}$

باشند. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب، دو تابع اکیداً صعودی تعریف شده روی  $\text{Ran } X$  و  $\text{Ran } Y$  باشند. در این

صورت:

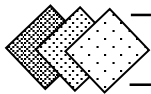
$$C_{XY} = C_{\alpha(X)\beta(Y)}.$$

یعنی مفصل‌ها، تحت تبدیلات صعودی پایا هستند.

اثبات:

فرض کنید  $F_1, G_1, F_2, G_2$  به ترتیب توابع توزیع  $X, Y, X, Y$  را مشخص کنند در این

<sup>1</sup> Invariant



صورت:

$$F_2(x) = P(\alpha(X) \leq x) = P(X \leq \alpha^{-1}(x)) = F_1(\alpha^{-1}(x)), \quad (14 - 1)$$

$$G_2(y) = P(\beta(Y) \leq y) = P(Y \leq \beta^{-1}(y)) = G_1(\beta^{-1}(y)). \quad (15 - 1)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}[F_2(x), G_2(y)] &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\ &= P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] = H[\alpha^{-1}(x), \beta^{-1}(y)], \end{aligned}$$

و با استفاده از قضیه‌ی اسکالر و (14 - 1) و (15 - 1) داریم

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}[F_2(x), G_2(y)] = C_{XY}[F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))] = C_{XY}[F_2(x), G_2(y)].$$

از آن جا که  $X$  و  $Y$  پیوسته هستند و  $Ran F_2 = Ran G_2 = I$  بنابراین روی  $I^2$  خواهیم داشت

$$C_{XY} = C_{\alpha(X)\beta(Y)}. \quad \square$$

(\*) **قضیه ۱-۷-۴:** فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی پیوسته با مفصل  $C_{XY}$  باشند، اگر  $\alpha$  و $\beta$  دو تابع یکنوای تعریف شده به ترتیب، روی  $Ran X$  و  $Ran Y$  باشند، در این صورت۱- اگر  $\alpha$  اکیداً صعودی و  $\beta$  اکیداً نزولی باشد، آن گاه:

$$\forall u, v \in I, \quad C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v).$$

۲- اگر  $\alpha$  اکیداً نزولی و  $\beta$  اکیداً صعودی باشد، آن گاه:

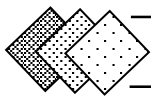
$$\forall u, v \in I, \quad C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v).$$

۳- اگر  $\alpha$  و  $\beta$ ، هر دو اکیداً نزولی باشند، آن گاه:

$$\forall u, v \in I, \quad C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v).$$

اثبات:

فرض کنید  $F_2$  و  $G_2$  به ترتیب توابع توزیع  $\alpha(X)$  و  $\beta(Y)$  باشند، در این صورتبرای قسمت اول با توجه به اینکه  $\beta$  اکیداً نزولی است، داریم:



$$G_2(y) = P(\beta(Y) \leq y) = P(Y \geq \beta^{-1}(y)) = 1 - G_1(\beta^{-1}(y)). \quad (16 - 1)$$

بنابراین

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}[F_2(x), G_2(y)] = P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] = P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)].$$

حال با توجه به قاعده‌ی  $p(A \cap B') = p(A) - p(A \cap B)$  داریم:

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}[F_2(x), G_2(y)] = P[X \leq \alpha^{-1}(x)] - P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)].$$

و با توجه به (14 - 1) در قضیه‌ی ۱-۷-۳ و (16 - 1)، داریم

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}[F_2(x), G_2(y)] &= F_1(\alpha^{-1}(x)) - H[\alpha^{-1}(x), \beta^{-1}(y)] \\ &= F_2(x) - C_{XY}[F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))] \\ &= F_2(x) - C_{XY}[F_2(x), 1 - G_2(y)] \end{aligned}$$

از آن جا که  $X$  و  $Y$  پیوسته هستند و  $RanF_2 = RanG_2 = I$ ، بنابراین روی  $I^2$  با قراردادن

$u = F_2(x)$  و  $v = G_2(y)$  خواهیم داشت

$$\forall u, v \in I, \quad C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v).$$

لذا برای قسمت اول حکم ثابت می‌شود. دو قسمت دیگر نیز به صورت مشابه قابل اثبات هستند. □

### تعریف ۱-۷-۱:

- اگر  $H$  تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  باشد، آن گاه "H-اندازه" به صورت

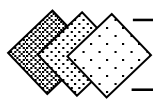
$$V_H((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = H(x, y)$$

- اگر  $C$  یک تابع مفصل باشد، آن گاه "C-اندازه" به صورت  $V_C([0, u] \times (0, v)) = C(u, v)$  به صورت

تعریف می‌شود.

ملاحظه می‌کنید دو تعریف فوق حالت خاصی از H-حجم می‌باشند.

**تعریف ۱-۷-۲:** برای هر مفصل  $C$  فرض کنید  $C(u, v) = A_C(u, v) + S_C(u, v)$  به طوری که



$$A_C(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2 C(t, s)}{\partial t \partial s} dt ds \quad \text{و} \quad S_C(u, v) = C(u, v) - A_C(u, v)$$

- اگر روی  $I^2$ ،  $C \equiv A_C$  در این صورت مفصل  $C$  را مطلقاً پیوسته<sup>۱</sup> با تابع چگالی توأم زیر می‌نامند.

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}.$$

- اگر روی  $I^2$ ،  $C \equiv S_C$  در این حالت  $\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = 0$  و مفصل  $C$  را تکین<sup>۲</sup> می‌نامند.

- در غیر این صورت مفصل  $C$  دارای یک مؤلفه‌ی مطلقاً پیوسته به نام  $A_C(u, v)$  و یک مؤلفه‌ی تکین به نام  $S_C(u, v)$  می‌باشد.

**تعریف ۱-۷-۳:** متمم اجتماع تمام زیرمجموعه‌های باز  $I^2$  (مستطیل‌های  $(u_1, u_2) \times (v_1, v_2)$ )

با  $C$ -اندازه‌ی صفر را تکیه‌گاه<sup>۳</sup> مفصل  $C$  گویند و مفصل  $C$  دارای تکیه‌گاه کامل<sup>۴</sup> است اگر تکیه‌گاه آن برابر  $I^2$  باشد.

مثال ۱-۷-۱: مفصل حاصل ضربی مطلقاً پیوسته است و دارای تکیه‌گاه کامل می‌باشد زیرا

$$A_{\Pi}(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2 C(t, s)}{\partial t \partial s} dt ds = \int_0^u \int_0^v 1 dt ds = uv = \Pi(u, v).$$

■

<sup>1</sup> Absolutely continuous

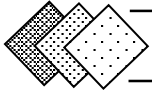
<sup>2</sup> Singular

<sup>3</sup> Support

<sup>4</sup> Full support

فصل ۲

معرفی چند مفصل مهم



## ۱-۲ مقدمه

در این فصل به معرفی چند مفصل مهم می‌پردازیم که برخی از آنها را در قضایا، لم‌ها و مثال‌های فصل‌های دیگر ملاحظه می‌کنید. مفصل‌ها به شکل‌های مختلفی پدیدار شده‌اند، برخی از آنها بر اساس وابستگی میان متغیرها مانند مفصل استقلال<sup>۱</sup>، برخی دیگر با توجه به تابع توزیع به دست آمده‌اند مانند مفصل  $t$ <sup>۲</sup> و تعدادی نیز، مانند مفصل ارشمیدسی مستقیماً مطرح شده‌اند (اشمیت، ۲۰۰۶).

در ابتدا سه مفصلی را معرفی می‌کنیم که از لحاظ وابستگی کاملاً متفاوت هستند، بدین صورت که در اولی متغیرها مستقل و در دو تای دیگر، میان متغیرها همبستگی کامل وجود دارد که البته در قسمت‌های قبل با آنها آشنا شده‌اید.

## ۲-۲ مفصل استقلال

این مفصل به حالت عدم وابستگی میان متغیرها مربوط می‌شود و با نمادهای متفاوت از جمله نمادهای زیر نمایش داده شده است:

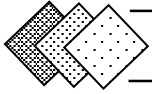
$$\prod(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2) = \prod_{i=1}^2 u_i$$

همانطور که در فصل قبل ملاحظه کردید، به عنوان یک نتیجه مستقیم از قضیه اسکالر می‌توان گفت، متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  مستقل هستند اگر و تنها اگر مفصل مربوط به آنها مفصل استقلال باشد (نلسن، ۲۰۰۶ و اشمیت، ۲۰۰۶).

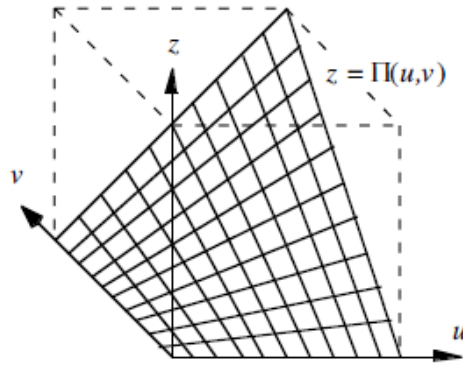
چگالی این مفصل مقدار ثابت است و در حالت دوبعدی داریم:

<sup>1</sup> Independence copula

<sup>2</sup> t-copula



$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = 1$$



شکل ۲-۱: نمودار مفصل استقلال

## ۲-۳ مفصل هماهنگی

همانطور که قبلاً اشاره کردیم کران‌های فرشه-هافدینگ با مفصل‌ها ارتباط دارند. به طور مثال، مفصل هماهنگی<sup>۱</sup> همان کران بالای فرشه-هافدینگ است و به شکل زیر تعریف می‌شود:

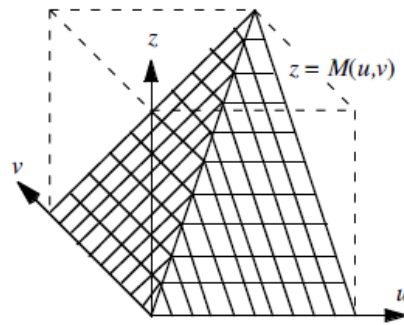
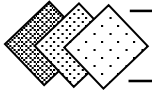
$$M(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2) = \min\{u_1, u_2\}$$

هماهنگی به حالتی برمی‌گردد که میان متغیرها وابستگی مثبت کامل برقرار باشد. تابع اکیداً

صعودی  $T$  را در نظر گرفته و قرار می‌دهیم  $X_2 = T(X_1)$  لذا بنابه قضیه ۱-۷-۳، مفصل متناظر با این متغیرهای تصادفی مفصل هماهنگی است (اشمیت، ۲۰۰۶).

<sup>1</sup> Comonotonicity copula





شکل ۲-۲: نمودار مفصل هماهنگی

## ۴-۲ مفصل ناهماهنگی

حالت دیگر ناهماهنگی کامل است و فقط برای حالت دوبعدی قابل حصول است. مفصل ناهماهنگی<sup>۱</sup> یا

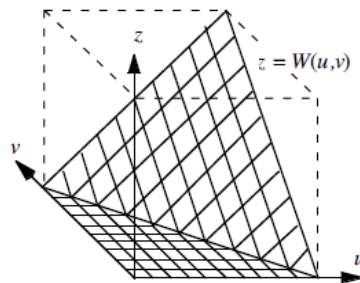
کران پایین فرشه-هافدینگ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(u_1, u_2) = C^-(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$$

ساختار وابستگی این مفصل وابستگی منفی کامل است تابع اکیداً نزولی T را در نظر گرفته و قرار

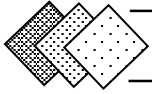
می‌دهیم  $X_2 = T(X_1)$  لذا بنابه قضیه ۱-۷-۳، مفصل متناظر با این متغیرهای تصادفی مفصل

ناهماهنگی است (اشمیت، ۲۰۰۶).



شکل ۳-۲: نمودار مفصل ناهماهنگی

<sup>1</sup>Countermonotonicity copula



از آن جایی که هر دو مفصل فوق (هماهنگی و ناهماهنگی) پیچشی<sup>۱</sup> را پذیرفته‌اند، بنابراین مشتق-پذیر نبوده و دارای چگالی مفصل نیستند. برای مثال با شرط معلوم بودن  $U_1$  و  $U_2$ ، در حالت هماهنگی کامل، اگر فرض کنیم  $U_1 = U_2$  آن‌گاه جرم توزیع تنها روی قطر  $u_1 = u_2$  جمع شده است و این دلیلی است که مفصل هماهنگی نمی‌تواند دارای چگالی باشد. به طور مشابه در حالت ناهماهنگی کامل اگر فرض کنیم  $U_1 = 1 - U_2$ ، توزیع تنها روی قطر  $u_1 = 1 - u_2$  دارای جرم خواهد بود (اشمیت، ۲۰۰۶).

## ۲-۵ مفصل بقا

فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی با تابع توزیع توأم  $H$  و دارای توابع توزیع کناری به ترتیب  $F$  و  $G$  باشند. بنابراین با توجه به تعریف  $\bar{H}$  داریم

$$\bar{H}(x, y) = P(X > x, Y > y) = 1 - F(x) - G(y) + H(x, y).$$

و همچنین با توجه به تعاریف  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  و  $\bar{G}(y) = 1 - G(y)$  می‌توان گفت

$$\bar{H}(x, y) = 1 - F(x) - 1 + 1 - G(y) + H(x, y) = \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + H(x, y).$$

از طرفی طبق قضیه‌ی اسکالر

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) = C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)).$$

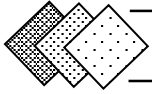
بنابراین

$$\forall x, y \in \bar{R}^+, \quad \bar{H}(x, y) = \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)).$$

بنابراین اگر تابع  $\hat{C}: I^2 \rightarrow I$  را با ضابطه‌ی زیر تعریف کنیم:

$$\forall u, v \in I, \quad \hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) \quad (1 - 2)$$

<sup>1</sup> kink



بدیهی است که

$$\hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)) = \bar{H}(x, y).$$

نکته‌ی قابل توجه این است که در رابطه‌ی (2-1)،  $C$  یک مفصل است و به راحتی می‌توان نشان داد که  $\hat{C}$  نیز تابع مفصل است و تحت عنوان "مفصل بقا" شناخته می‌شود (نلسن، 2006 و سالوادوری، 2007).

## 2-6 مفصل‌های ارشمیدسی

در این قسمت به بررسی یک کلاس مهم از مفصل‌ها، تحت عنوان مفصل‌های ارشمیدسی<sup>2</sup> می‌پردازیم که به چندین دلیل حائز اهمیت هستند. از جمله آن دلایل، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

1- تشخیص ساختار آن‌ها آسان است.

2- گوناگونی خانواده‌های مفصل که در این کلاس عضویت دارند، زیاد است.

3- اعضای این کلاس دارای خواص بسیار خوبی از قبیل: تقارن، شرکت‌پذیری و غیره هستند.

برای مطالعه‌ی تاریخچه‌ی مفصل‌های ارشمیدسی به سوئیزر<sup>3</sup>، (1991) مراجعه کنید.

**تعریف 2-6-1:** فرض کنید  $\varphi$  یک تابع پیوسته‌ی اکیداً نزولی از  $I$  به  $[0, \infty]$  باشد، به طوری که

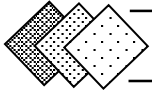
$\varphi(1) = 0$ . در این صورت شبه‌وارون  $\varphi$ ، تابع  $\varphi^{[-1]}$  با دامنه  $[0, \infty]$  و برد  $I$ ، به صورت زیر تعریف

می‌شود:

<sup>1</sup> Survival copula

<sup>2</sup> Archimedean copula

<sup>3</sup> Schweizer



$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t < \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

توجه کنید که  $\varphi^{[-1]}$  تابعی پیوسته و نزولی روی  $[0, \infty]$  و تابعی اکیداً نزولی روی  $[0, \varphi(0)]$

است. به علاوه روی  $I$  داریم،  $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$  و

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t, & 0 \leq t < \varphi(0), \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \\ &= \min(t, \varphi(0)) \end{aligned}$$

و اگر  $\varphi(0) = \infty$ ، آن گاه  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ .

قضیه زیر روش ساختن تابع مفصل را با استفاده از تابع  $\varphi$  بیان می کند.

**قضیه ۲-۶-۱** (نلسن ۲۰۰۶): تابع پیوسته و اکیداً نزولی  $\varphi: I \rightarrow [0, \infty]$  به طوری که  $\varphi(1) = 0$

و  $\varphi^{[-1]}$  شبه وارون آن باشد را در نظر بگیرید، در این صورت تابع

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)), & \varphi(u) + \varphi(v) \leq \varphi(0), \\ 0, & o.w. \end{cases} \quad (2-2)$$

یک مفصل است، اگر و تنها اگر  $\varphi$  محدب باشد.

مفصل (۲-۲) را "مفصل ارشمیدسی" می نامند و تابع  $\varphi$  را "تابع مولد" مفصل می نامند. علاوه بر

این اگر داشته باشیم  $\varphi(0) = \infty$ ، آن گاه  $\varphi$  مولد اکید<sup>۲</sup> می باشد. از این رو طبق تعریف ۲-۶-۱ داریم

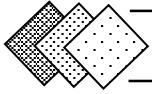
$$\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1} \text{ و بنابراین}$$

$$\forall u, v \in I^2, \quad C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)),$$

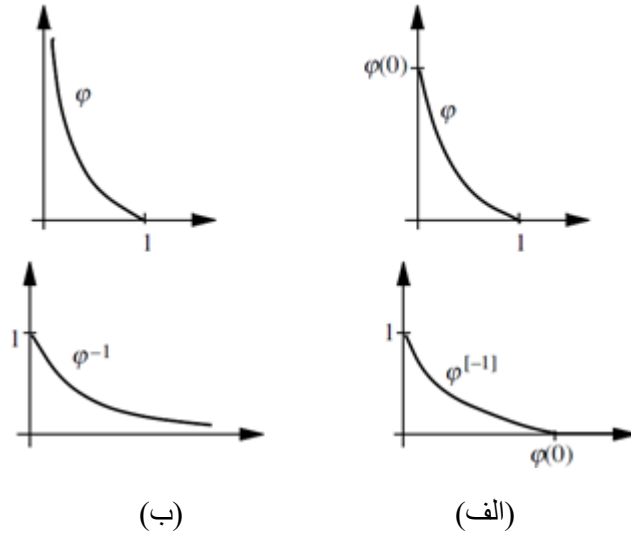
را "مفصل ارشمیدسی اکید" می نامند.

<sup>1</sup> Generator

<sup>2</sup> Strict generator



می‌توانید در شکل ۴-۲ نمونه‌ای از توابع مولد اکید و غیراکید را مشاهده کنید.



شکل ۴-۲: مولد و معکوس آن در حالت های غیر اکید (الف) و اکید (ب)

مولد  $\varphi$  برای مفصل  $C$  یکتا نیست، زیرا اگر  $\varphi$  مولد مفصل  $C$  باشد، آن‌گاه  $\forall a \in R^+, a\varphi$  نیز یک مولد برای مفصل  $C$  است. با به‌کارگیری این ویژگی، می‌توان مفصل‌های بسیاری تولید کرد. از این‌رو به معرفی چند مفصل ارشمیدسی می‌پردازیم.

✓ مفصل دومتغیره "گامبل" یا مفصل "گامبل-هوگارد"<sup>۱</sup> به صورت زیر تعریف می‌شود:

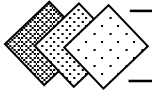
$$C_{\theta}^{GU}(u, v) = \exp \left[ - \left( (-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right], \quad \theta \in [1, \infty).$$

تابع مولد آن نیز عبارت است از

$$\varphi_{GU}(u) = (-\ln u)^{\theta}.$$

اگر  $\theta = 1$ ، مفصل استقلال  $(\Pi(u))$  را خواهیم داشت و وقتی  $\theta \rightarrow \infty$ ، مفصل گامبل به مفصل هم‌هنگی  $(M(u))$  نزدیک می‌شود (اشمیت، ۲۰۰۶). بنابراین مفصل گامبل میان دو حالت استقلال و هم‌هنگی کامل تغییر می‌کند.

<sup>1</sup> Gumbel-Hougaard



✓ مفصل "علی-میخائیل-حق"<sup>۱</sup>، به صورت

$$C_{\theta}^A(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}, \quad \theta \in [-1, 1).$$

و تابع مولد آن به صورت

$$\varphi_A(u) = \ln \left[ \frac{(1 - \theta(1-u))}{u} \right].$$

تعریف می‌شود.

✓ مفصل "کلیتون"<sup>۲</sup>، به صورت

$$C_{\theta}^{Cl}(u, v) = (\max\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0\})^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta \in [-1, \infty) - \{0\}.$$

و تابع مولد آن نیز به صورت

$$\varphi_{Cl}(u) = \frac{1}{\theta}(u^{-\theta} - 1).$$

تعریف می‌شود.

اگر  $\theta \rightarrow 0$ ، مفصل کلیتون به مفصل استقلال ( $\Pi(\underline{u})$ ) نزدیک می‌گردد. اگر  $\theta \rightarrow \infty$ ، مفصل کلیتون به

سمت مفصل هماهنگی ( $M(\underline{u})$ ) میل می‌کند و برای  $\theta = -1$ ، کران پایین فرشه-هافدینگ، یعنی مفصل

ناهماهنگی ( $W(u_1, u_2)$ ) حاصل خواهد شد. بنابراین مفصل کلیتون هر سه حالت اساسی وابستگی، یعنی

ناهماهنگی کامل، استقلال و هماهنگی کامل را تبیین می‌کند.

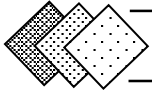
مولد مفصل کلیتون، اکید است، تنها اگر  $\theta > 0$  باشد. لذا داریم

$$C_{\theta}^{Cl}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

توجه می‌کنید که برای تولید مفصل کلیتون، استفاده از  $(u^{-\theta} - 1)$  به جای  $\frac{1}{\theta}(u^{-\theta} - 1)$ ، کافی به

<sup>1</sup> Ali-mikhail-haq

<sup>2</sup> Clayton



نظر می‌رسد اما در این صورت برای مقادیر منفی  $\theta$  تابع  $(u^{-\theta} - 1)$  صعودی خواهد بود و این با تعریف  $\varphi$  به عنوان یک تابع نزولی در تناقض است.

✓ مفصل "فرانک"<sup>۱</sup>، به صورت زیر می‌باشد:

$$C_{\theta}^F(u, v) = \frac{1}{\theta} \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right), \quad \theta \in (-\infty, +\infty) - \{0\}.$$

و تابع مولد آن عبارت است از:

$$\varphi_F(u) = \ln(e^{-\theta} - 1) - \ln(e^{-\theta u} - 1).$$

در جدول ۱-۲ مفصل‌های ارشمیدسی معرفی شده را به طور خلاصه ملاحظه می‌کنید.

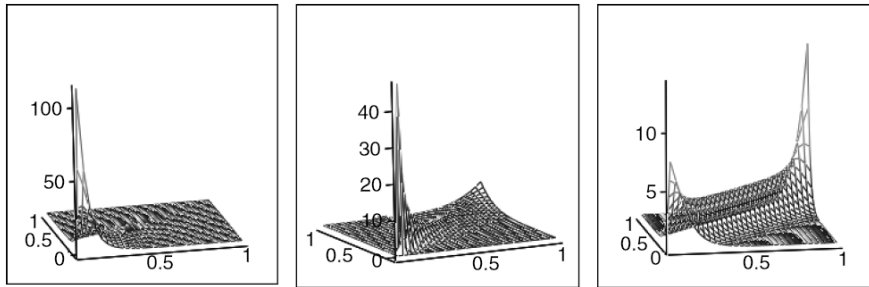
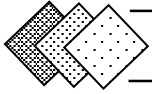
جدول ۱-۲: معرفی مفصل‌های گامبل، علی-میخائیل-حق، کلیتون و فرانک عضو خانواده‌ی مفصل‌های ارشمیدسی

خانواده	فضای پارامتر	مولد $(\varphi(u))$
گامبل	$\theta \in [1, \infty)$	$(-lnu)^{\theta}$
علی-میخائیل-حق	$\theta \in [-1, 1)$	$\ln \left[ \frac{(1 - \theta(1 - u))}{u} \right]$
کلیتون	$\theta \in [-1, \infty) - \{0\}$	$\frac{1}{\theta}(u^{-\theta} - 1)$
فرانک	$\theta \in (-\infty, +\infty) - \{0\}$	$\ln(e^{-\theta} - 1) - \ln(e^{-\theta u} - 1).$

همچنین می‌توانید نمودارهای چگالی برخی از مفصل‌های معرفی شده را در شکل ۲-۵ مشاهده

می‌کنید.

<sup>1</sup> Frank



(ج)

(ب)

(الف)

شکل ۲-۵: نمودارهای چگالی مربوط به مفصل فرانک به ازای  $\theta = 14/14$  (الف)، مفصل کلیتون به ازای  $\theta = 6$  (ب) و

مفصل گامبل به ازای  $\theta = 2$ .

کلیه‌ی مطالب این قسمت در حالت دومتغیره بیان شد ولی آن‌ها را می‌توان به حالت چندمتغیره نیز تعمیم داد. برای مشاهده‌ی مثال‌ها و نیز جزئیات بیشتر به نلسن (۲۰۰۶)، اشمیت (۲۰۰۶) و بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۹) مراجعه کنید.

## ۲-۷ مفصل‌های مقدار فرین

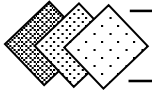
ابتدا توضیحی از تبدیل یک تابع مفصل و قضیه‌ای در این راستا را بیان و سپس این خانواده از مفصل‌ها را معرفی می‌کنیم.

فرض کنید  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  زوج متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع توأم  $H(x, y)$  و توابع توزیع کناری  $X_i \sim F$  و  $Y_i \sim G$  و همچنین دارای تابع مفصل متناظر  $C(u, v)$  باشند. اگر  $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  و  $Y_{(n)} = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}$  در این صورت مفصل متناظر آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\forall n \geq 1; u, v \in I, \quad C_{(n)}(u, v) = C^n\left(u_{(n)}^1, v_{(n)}^1\right).$$

زیرا اگر فرض کنیم  $F_{(n)}$  و  $G_{(n)}$  به ترتیب توابع توزیع متناظر با  $X_{(n)}$  و  $Y_{(n)}$  باشند، در این صورت





$$F_{(n)}(x) = P(X_{(n)} \leq x) = P(\text{all } X_i \leq x) = [P(X_1 \leq x)]^n = [F(x)]^n \quad (3-2)$$

به صورت مشابه برای  $Y_{(n)}$  داریم

$$G_{(n)}(y) = [G(y)]^n. \quad (4-2)$$

بنابراین

$$H_{(n)}(x, y) = P(X_{(n)} \leq x, Y_{(n)} \leq y) = P(\text{all } X_i \leq x, \text{all } Y_i \leq y) = [H(x, y)]^n,$$

و با استفاده از قضیه‌ی اسکالر و روابط (3-2) و (4-2)،

$$H_{(n)}(x, y) = [C(F(x), G(y))]^n = \left[ C\left([F_{(n)}(x)]^{1/n}, [G_{(n)}(y)]^{1/n}\right) \right]^n.$$

از این رو می‌توان گفت

$$\forall n \geq 1; u, v \in I, \quad C_{(n)}(u, v) = C^n\left(u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}}\right).$$

حال مطالب فوق را به طور خلاصه در قضیه‌ی زیر ملاحظه می‌کنید.

**قضیه ۲-۷-۱** (نلسن، ۲۰۰۶): اگر  $C$  یک مفصل باشد، آن‌گاه

$$\forall n \geq 1; u, v \in I, \quad C_{(n)}(u, v) = C^n\left(u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}}\right),$$

یک مفصل است. علاوه بر این اگر  $(X_i, Y_i), i = 1 \dots n$  زوج متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع

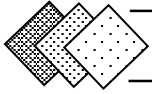
با مفصل  $C$  باشند، آن‌گاه  $C_{(n)}$  مفصل متناظر با متغیرهای تصادفی  $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  و  $Y_{(n)} = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}$  می‌باشد.

برای درک بیشتر به مثال ساده‌ی زیر توجه کنید.

**مثال ۲-۷-۱:** فرض کنید  $X_i$  و  $Y_i$  متغیرهای تصادفی مستقل باشند، لذا

$$\Pi_n(u, v) = \left[ u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}} \right]^n = uv,$$

■ مفصل متناظر با  $X_{(n)}$  و  $Y_{(n)}$  است.



**تعریف ۲-۷-۱** (جنست و همکاران، ۲۰۰۶): مفصل  $C_*$ ، مقدار فرین<sup>۱</sup> (EV) است، هرگاه مفصل

C موجود باشد به طوری که:

$$u, v \in I, \quad C_*(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} C^n \left( u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}} \right).$$

به عبارتی مفصل EV همان حد دنباله‌ی مفصل‌های  $\{C_{(n)}\}$  می‌باشد و توجه کنید زمانی  $C_*$  یک مفصل است که حد نقطه به نقطه‌ی دنباله مفصل  $\{C_{(n)}\}$  برای هر نقطه در  $I^2$  موجود باشد.

اما طبق مطالعات انجام‌شده توسط پیکندز<sup>۲</sup> (۱۹۸۱) و کاپرا<sup>۳</sup> (۲۰۰۰)، شکل عمومی مفصل

دومتغیره‌ی EV، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C_A(u, v) = \exp \left( \log(uv) A \left( \frac{\log(u)}{\log(uv)} \right) \right),$$

به طوری که  $A: [0, 1] \rightarrow [1/2, 1]$  یک تابع محدب است و برای هر  $0 \leq t \leq 1$ ، داریم

$$\max(t, 1-t) \leq A(t) \leq 1.$$

در جدول 2-2 برخی از مفصل‌های EV به همراه جزییات آن‌ها آمده‌اند (جنست<sup>۴</sup> و همکاران، ۲۰۰۶).

جدول ۲-۲: معرفی مفصل‌های گامبل، گامبل-هوگارد، گلامبُس و مارشال الکین تعمیم‌یافته عضو خانواده‌ی مفصل‌های EV

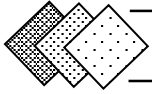
$C_A(u, v)$	$A(t)$	خانواده
$uv \exp \left( -\theta \frac{\log u \log v}{\log uv} \right)$	$\theta t^2 - \theta t + 1$	گامبل
$\exp \left[ -\left\{  \log u ^{\frac{1}{1-\theta}} +  \log v ^{\frac{1}{1-\theta}} \right\}^{1-\theta} \right]$	$\left\{ t^{\frac{1}{1-\theta}} + (1-t)^{\frac{1}{1-\theta}} \right\}^{1-\theta}$	گامبل-هوگارد
$uv \exp \left[ -\left\{  \log u ^{-\theta} +  \log v ^{-\theta} \right\}^{-\frac{1}{\theta}} \right]$	$1 - \left\{ t^{-\theta} + (1-t)^{-\theta} \right\}^{-\frac{1}{\theta}}$	گلامبُس
$u^{1-\theta_1} v^{1-\theta_2} \min(u^{\theta_1}, v^{\theta_2})$	$\max\{1 - \theta_1 t, 1 - \theta_2(1-t)\}$	مارشال الکین تعمیم‌یافته

<sup>1</sup> Extreme value (EV)

<sup>2</sup> Pickands

<sup>3</sup> Caperaa

<sup>4</sup> Genest



## ۸-۲ مفصل‌های آرچیماکس

کاپرا (۲۰۰۰) خانواده‌ای جدید از مفصل‌ها را معرفی کرد که مفصل‌های ارشمیدسی و مقدار فرین را نیز شامل می‌شود.

فرض کنید  $\varphi$  تابع مولد یک مفصل و همانند مفصل مقدار فرین،  $A: [0, 1] \rightarrow [1/2, 1]$  تابعی محدب باشد، به طوری که برای هر  $0 \leq t \leq 1$  داشته باشیم  $\max(t, 1-t) \leq A(t) \leq 1$ . در این صورت تابع تعریف‌شده به صورت زیر مفصل آرچیماکس<sup>۱</sup> نامیده می‌شود:

$$C_{\varphi, A}(u, v) = \varphi^{-1} \left( \{ \varphi(u) + \varphi(v) \} A \left( \frac{\varphi(u)}{\varphi(u) + \varphi(v)} \right) \right).$$

ملاحظه می‌کنید که برای  $A \equiv 1$  مفصل آرچیماکس برابر با مفصل ارشمیدسی می‌شود و همچنین اگر قرار دهیم  $\varphi(t) = \log(t)$ ، مفصل EV به دست خواهد آمد (بالاکریشنان، ۲۰۰۹ و جنست، ۲۰۰۶).

## ۹-۲ مفصل‌های FGM

اعضای خانواده‌ی مفصل‌های فارلی-گامبل-مونگسترون<sup>۲</sup> (FGM) تنها مفصل‌هایی هستند که به صورت عبارت چندجمله‌ای درجه دو از  $u$  و  $v$  می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v), \quad \theta \in [-1, 1], u, v \in I.$$

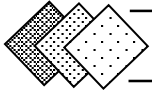
واضح است که به ازای  $\theta = 0$  مفصل FGM برابر مفصل استقلال می‌شود. همچنین لازم به ذکر است که اعضای این خانواده، اکیداً پیوسته و دارای چگالی به شکل زیر هستند:

$$c_{\theta}(u, v) = 1 + \theta(1-2u)(1-2v).$$

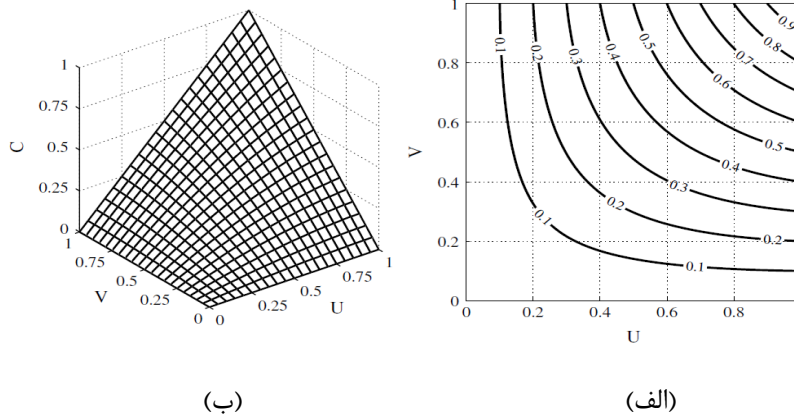
نمودارهای چگالی و تراز مفصل FGM را در شکل ۶-۲ مشاهده می‌کنید (سالوادوری، ۲۰۰۷ و

<sup>1</sup> Archimax

<sup>2</sup> Farlie-Gumbel-Morgenstern(FGM)



چنست، (۲۰۰۶).

شکل ۲-۶: نمودار تراز (الف) و چگالی (ب) مفصل FGM به ازای  $\theta = 0.99$ 

## ۲-۱۰ مفصل‌های سینوسی

در این قسمت به معرفی کلاس جدیدی از مفصل‌ها تحت عنوان مفصل‌های سینوسی<sup>۱</sup> پرداخته می‌شود، که توسط لی و فنگ<sup>۲</sup> (۲۰۱۲) معرفی شده‌اند.

فرض کنید  $X$  و  $Y$  دارای تابع چگالی توأم به صورت زیر باشند:

$$f(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)(1 + \sin x \sin y),$$

که در آن  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$  و تابع مفصل متناظر با آن عبارت است از

$$C_\varphi(u, v) = uv + \int_0^u \sin(\varphi^{-1}(t)) dt \int_0^v \sin(\varphi^{-1}(t)) dt, \quad (5-2)$$

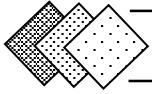
که در آن  $\varphi$  تابع توزیع نرمال بوده و داریم

$$\forall t \in I, \quad \varphi^{-1}(t) = \sup\{x: \varphi(x) \leq t\}$$

البته می‌توان مفصل فوق را به شکل کلی‌تری بیان کرد که به جای تابع  $\varphi$ ، هر تابع دیگری مانند  $\Psi$  را

<sup>1</sup> Sine copula

<sup>2</sup> Li and Fang



بتوان در فرمول (2-5) جایگزین کرد. یعنی می‌توانیم داشته باشیم

$$\forall u, v \in I, \quad C_{\Psi}(u, v) = uv + \int_0^u \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \int_0^v \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \quad (6-2)$$

در این صورت تحت شرط خاصی می‌توان گفت  $C_{\Psi}$  "مفصل سینوسی" است که در ادامه به آن اشاره می‌کنیم.

**قضیه 2-10-1** (لی و فنگ، 2012):  $C_{\Psi}$  داده‌شده در فرمول (2-6) مفصل است، اگر و تنها اگر

$$\int_0^1 \sin(\Psi^{-1}(t)) dt = 0. \quad (7-2)$$

**اثبات:**

شرط لازم: فرض کنید  $C_{\Psi}(u, v)$  یک مفصل باشد. بنابراین طبق ویژگی‌های مفصل که در فصل

گذشته به آن‌ها اشاره شد، خواهیم داشت

$$C_{\Psi}(1, 1) = 1$$

بنابراین با جایگذاری در رابطه‌ی (2-6) داریم

$$1 + \left( \int_0^1 \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \right)^2 = 1$$

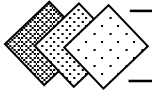
$$\int_0^1 \sin(\Psi^{-1}(t)) dt = 0$$

از این‌رو طرف اول قضیه ثابت می‌شود.

شرط کافی: فرض می‌کنیم  $\int_0^1 \sin(\Psi^{-1}(t)) dt = 0$  برقرار باشد و ویژگی‌های مفصل بودن

$C_{\Psi}(u, v)$  را بررسی می‌کنیم. واضح است که با جایگذاری مقادیر و استفاده از رابطه‌ی (2-7)، در مفصل

(2-6) داریم



$$\forall (u, v) \in I^2, \quad C_{\Psi}(1,1) = 1, \quad C_{\Psi}(u, \circ) = C_{\Psi}(\circ, v) = \circ,$$

$$\forall (u, v) \in I^2, \quad \lim_{v \rightarrow 1} C_{\Psi}(u, v) = u, \quad \lim_{u \rightarrow 1} C_{\Psi}(u, v) = v.$$

از طرفی برای هر  $u \in I$

$$\frac{\partial C_{\Psi}(u, v)}{\partial v} = u + \sin\left(\Psi^{-1}(v)\right) \int_{\circ}^u \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt$$

و با توجه به خاصیت تابع سینوس، که همواره مقداری بین ۱ و -۱ است و خواص قدر مطلق

$(-|x| \leq x \leq |x|)$  بدیهی است

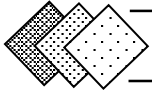
$$\frac{\partial C_{\Psi}(u, v)}{\partial v} \geq u - \left| \int_{\circ}^u \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt \right| \geq \circ.$$

بنابراین  $C_{\Psi}(u, v)$  نسبت به  $v$  نانزولی است. از طرفی، متقارن بودن  $C_{\Psi}$  واضح است و داریم

$$\circ \leq u_i \leq v_i \leq 1 \text{ هر } (u, v) \in I^2 \text{ نانزولی می‌باشد. از این رو برای هر } i = 1, 2$$

. با جایگذاری و دسته‌بندی و استفاده از خواص تابع قدر مطلق که قبلاً به آن اشاره شد، داریم

$$\begin{aligned} & C_{\Psi}(u_1, u_2) + C_{\Psi}(v_1, v_2) - C_{\Psi}(u_1, v_2) - C_{\Psi}(v_1, u_2) \\ &= u_1 u_2 + \int_{\circ}^{u_1} \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt \int_{\circ}^{u_2} \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt \\ &\quad + v_1 v_2 + \int_{\circ}^{v_1} \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt \int_{\circ}^{v_2} \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt \\ &\quad - u_1 v_2 - \int_{\circ}^{u_1} \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt \int_{\circ}^{v_2} \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt \\ &\quad - v_1 u_2 - \int_{\circ}^{v_1} \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt \int_{\circ}^{u_2} \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt \\ &= (v_2 - u_2)(v_1 - u_1) + \int_{u_1}^{v_1} \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt \int_{u_2}^{v_2} \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt \\ &\geq (v_2 - u_2)(v_1 - u_1) - \left| \int_{u_1}^{v_1} \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt \right| \left| \int_{u_2}^{v_2} \sin\left(\Psi^{-1}(t)\right) dt \right| \geq \circ. \end{aligned}$$



بنابراین ویژگی دوم یعنی  $V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) \geq 0$  برقرار بوده و  $C_\Psi$  مفصل است.  $\square$

**نکته ۱-۱۰-۲** (لی و فنگ، ۲۰۱۲): اگر فرض کنیم  $X$  متغیر تصادفی با تابع توزیع  $\Psi$  باشد، در

این صورت با توجه به تعریف امید ریاضی و تغییر متغیر  $t = \Psi(x)$  می‌توان رابطه‌ی (۷-۲) را به صورت

$E[\sin(X)] = 0$  نیز بیان کرد، زیرا

$$E[\sin(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x) d\Psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\Psi^{-1}(t)) dt,$$

و محاسبه‌ی آن در برخی موارد آسان‌تر می‌باشد.

برای درک بهتر مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید.

**مثال ۱-۱۰-۲:** (مولد یکنواخت)

فرض کنید  $\Psi$  تابع توزیع متغیر تصادفی یکنواخت  $X$  در بازه‌ی  $[c, c + 2\pi]$ ، به طوری که  $c$  عددی

ثابت است، باشد. بنابراین

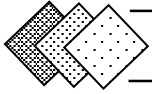
$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ \frac{x-c}{2\pi} & c \leq x < c+2\pi \\ 1 & x \geq c+2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E[\sin(X)] &= \int_c^{c+2\pi} \sin x d\Psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_c^{c+2\pi} \sin x dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( -\cos x \Big|_c^{c+2\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} (-\cos(c+2\pi) + \cos c) = 0 \end{aligned}$$

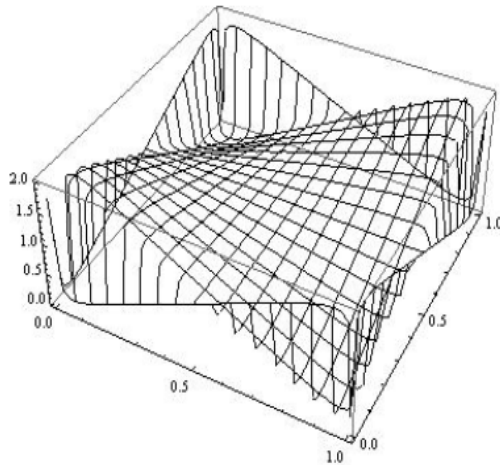
از این رو طبق قضیه‌ی (۱-۱۰-۲)،  $C_\Psi$  یک مفصل سینوسی است.  $\blacksquare$

**مثال ۲-۱۰-۲:** (مولدهای متقارن)

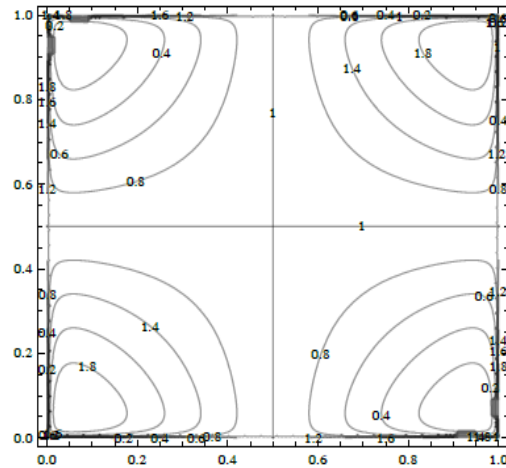
فرض کنید  $\Psi$  تابع توزیع متقارن با میانگین  $n\pi$ ؛  $n \in \mathbb{Z}$  باشد. لذا با توجه به نکته‌ی ۱-۱۰-۲،



رابطه‌ی (۷-۲) برای هر  $n \in \mathbb{Z}$ ، برقرار بوده و از اینرو طبق قضیه ۲-۱۰-۱،  $C_{\Psi}$  به شکل (۶-۲) یک مفصل سینوسی است. حال اگر فرض کنیم که  $\Psi$ ، توزیع نرمال استاندارد باشد، نمودار چگالی مفصل آن را در شکل ۷-۲ مشاهده می‌کنید. ■



(ب)



(الف)

شکل ۷-۲: نمودار تراز (الف) و چگالی (ب) مفصل سینوسی تولیدشده توسط تابع توزیع  $N(0,1)$ .

### مثال ۲-۱۰-۳: (مولد گاما<sup>۱</sup>)

فرض کنید  $\Psi$  تابع توزیع گاما با پارامترهای  $n \in \mathbb{Z}^+$ ،  $(4n, 1)$  باشد. حال برای اثبات این که

مفصلی به شکل (۶-۲) با تابع توزیع گاما مفصل سینوسی می‌باشد، کافایت طبق قضیه‌ی ۲-۱۰-۱

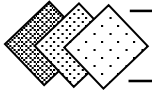
درستی رابطه‌ی (۷-۲) را بررسی کنیم و بدین منظور با تغییر متغیر  $x = \Psi^{-1}(t)$  که می‌تواند به صورت

$t = \Psi(x)$  نیز بیان شود، به دست می‌آوریم  $dt = \Psi'(x)dx$ . همچنین با توجه به تابع چگالی توزیع

گاما، بدیهی است که باید ثابت کنیم:

<sup>1</sup> Gamma





$$\int_0^1 \sin(\Psi^{-1}(t)) dt = \int_0^\infty \frac{x^{4n-1} e^{-x} \sin x}{(4n-1)!} dx = 0 \quad (8-2)$$

که این اثبات را با روش استقرا انجام خواهیم داد.

محاسبه‌ی رابطه‌ی (8-2) به ازای  $n = 1$  با استفاده از اعداد مختلط کار چندان مشکلی نخواهد بود

و داریم

$$\int_0^\infty \frac{x^{4n-1} e^{-x} e^{ix}}{(4n-1)!} dx = \int_0^\infty \frac{x^{4n-1} e^{-x} \cos x}{(4n-1)!} dx + i \int_0^\infty \frac{x^{4n-1} e^{-x} \sin x}{(4n-1)!} dx. \quad (9-2)$$

بنابراین با محاسبه‌ی انتگرال سمت چپ تساوی (9-2) با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء و در

نظر گرفتن قسمت موهومی پاسخ، به نتیجه‌ی مورد نظر خود خواهیم رسید:

$$\int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x} e^{ix}}{(3)!} dx = \frac{1}{6} \int_0^\infty x^3 e^{(i-1)x} dx = \frac{1}{6} \left[ \frac{x^3}{(i-1)} e^{(i-1)x} - \frac{3}{(i-1)} \int_0^\infty x^2 e^{(i-1)x} dx \right].$$

به همین طریق انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء را ادامه داده و به جواب نهایی زیر می‌رسیم:

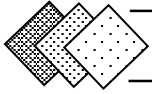
$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x} e^{ix}}{(3)!} dx \\ &= \frac{1}{6} \left[ \frac{x^3}{(i-1)} e^{(i-1)x} - \frac{3x^2}{(i-1)^2} e^{(i-1)x} + \frac{6x}{(i-1)^3} e^{(i-1)x} - \frac{6}{(i-1)^4} e^{(i-1)x} \right] \Bigg|_0^\infty \\ &= \frac{1}{6} \left( \frac{6}{(i-1)^4} \right) = \frac{1}{(-2i)^2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید، انتگرال رابطه‌ی (9-2) برای  $n = 1$  داری قسمت موهومی نمی‌باشد و لذا

$$\frac{1}{6} \int_0^\infty x^3 e^{-x} \sin x dx = 0.$$

حال فرض می‌کنیم انتگرال رابطه‌ی (8-2) برای  $n$  برقرار باشد و با استفاده‌ی مجدد از انتگرال-

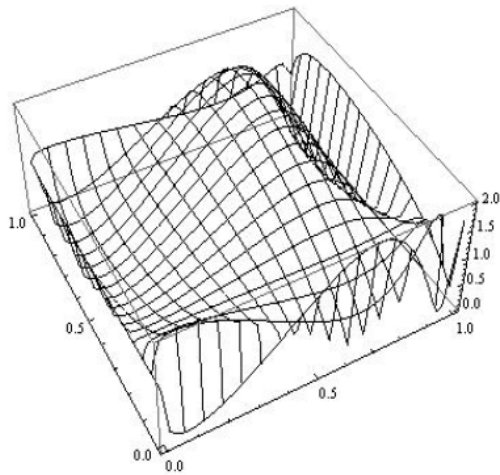
گیری جزءبه‌جزء و اعداد مختلط و به صورت مشابه با حالت  $n = 1$ ، برای  $n + 1$  به دست می‌آوریم



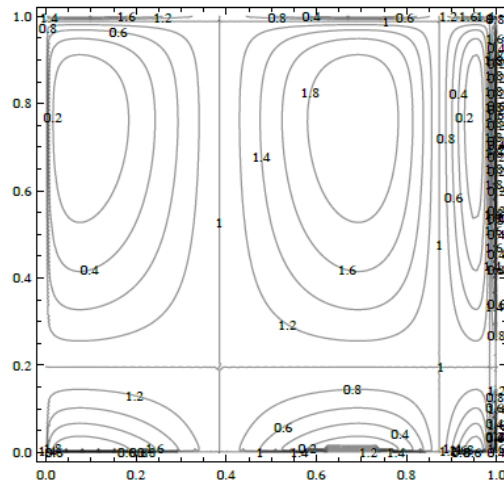
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{4n+3} e^{-x} \sin x}{(4n-3)!} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^{4n+1} e^{-x} \cos x}{(4n+1)!} dx$$
$$= -\frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{x^{4n-1} e^{-x} \sin x}{(4n-1)!} dx = 0.$$

لذا توسط استقرا و قضیه‌ی ۲-۱۰-۱ به نتیجه‌ی مطلوب می‌رسیم. ■

شکل ۲-۸ نمودار چگالی  $C_{\Psi}$  را با در نظر گرفتن  $\Psi$  به عنوان تابع توزیع  $\Gamma(4,1)$  نشان می‌دهد.



(ب)



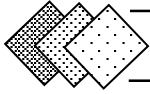
(الف)

شکل ۲-۸: نمودار تراز (الف) و چگالی (ب) مفصل سینوسی تولیدشده توسط تابع توزیع  $\Gamma(4,1)$

برای مطالعه‌ی بیشتر در خصوص مفصل سینوسی می‌توانید به لی و فَنگ (۲۰۱۲) مراجعه کنید.

فصل ۳

تابع مفصل و اندازه های وابستگی



### ۳-۱ مقدمه

معیارهای وابستگی ابزارهایی معمول برای خلاصه کردن ساختار پیچیده وابستگی، در قالب یک عدد (در حالت دو متغیره) هستند (اشمیت، ۲۰۰۶). در این مبحث سه مفهوم اساسی وجود دارد:

۱- مفهوم کلاسیک آن، که همان همبستگی خطی<sup>۱</sup> است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho_{XY} = \text{Corr}(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}} .$$

در آمار کلاسیک این پارامتر معمولاً به عنوان معیار نسبی همبستگی در یک توزیع دومتغیره به کار می رود. این ضریب تنها برای اعضای خانواده توزیع های بیضوی<sup>۲</sup> صادق است و در خارج از این خانواده صحت ندارد. این خانواده شامل توزیع های نرمال و نرمال آمیخته می شود و کاملاً معلوم شده است که استفاده از این معیار در خارج از این خانواده به استدلال های نادرستی خواهد انجامید.

۲- معیار دوم، همبستگی رتبه ای<sup>۳</sup> است.

۳- معیار سوم، ضرایب وابستگی دمی<sup>۴</sup> هستند.

جهت ارایه معیارهای محسوس و عملی از ساختار وابستگی به کارگیری دو معیار آخر کافی به نظر

می رسد (اشمیت، ۲۰۰۶).

### ۳-۲ همبستگی خطی

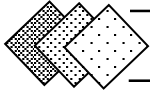
همانطور که مطرح شد این معیار تنها برای توزیع های بیضوی مناسب است و یک توزیع بیضوی، حاصل

<sup>1</sup> Linear correlation

<sup>2</sup> Elliptical distributions

<sup>3</sup> Rank correlation

<sup>4</sup> Tail dependence



یک تبدیل خطی از توزیع کروی  $Y^1$  (نشان فوق به مفهوم برداری است) به صورت زیر است:

$$\underline{X} = \underline{\mu} + A\underline{Y}, \quad \underline{\mu} \in R^d, A \in R^d \times R^d.$$

بنا به تعریف،  $Y$  دارای توزیع کروی است اگر و تنها اگر، بتوان تابع مشخصه ی آن را بر اساس تابع

حقیقی از یک صورت درجه دوم نوشت

$$E(\exp(it\underline{Y})) = \Psi(t_1^2 + \dots + t_d^2), \quad \Psi: R \rightarrow R^+.$$

توزیع نرمال نقش بسیار مهمی در توزیع های کروی ایفا می کند، زیرا در بسیاری از موارد توزیع های

کروی به صورت آمیخته ای از توزیع نرمال هستند.

توجه به این نکته اساسی است که اشتباهات زمانی رخ می دهند که همبستگی خطی در خارج از

خانواده ی توزیع های بیضوی، مورد استفاده قرار می گیرد. برای جزییات بیشتر به (ایمپرچتر<sup>۲</sup>، ۲۰۰۳ و

مکنیل<sup>۳</sup>، ۲۰۰۵) مراجعه کنید.

۱- در توزیع های نرمال، همبستگی صفر، هم ارز با استقلال است. در صورتی که برای متغیرهای

تصادفی با توزیع  $t$ -استودنت این موضوع دیگر صادق نیست.

۲- همبستگی خطی تحت تبدیلات خطی تغییر نمی کند. اما برای تبدیلات غیرخطی این موضوع

صادق نیست. برای مثال، همبستگی خطی دو متغیر لگ-نرمال با همبستگی متغیرهای نرمال

متفاوت است.

۳- از سوی دیگر ممکن است تصور کنیم که برای تعیین توزیع توأم متغیرها، داشتن توزیع های

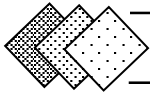
کناری و معلوم بودن  $p$  کافی است. اگر چه این امر در توزیع های بیضوی ممکن است، اما در حالت

کلی انجام این کار امکان پذیر نیست. مثلاً اگر توزیع های کناری لگ-نرمال باشند، بازه ی

<sup>1</sup> Spherical distribution

<sup>2</sup> Embrechts

<sup>3</sup> McNeil



همبستگی‌های به دست آمده با افزایش تغییرپذیری، کوچکتر می‌شود. برای روشن شدن این موضوع فرض کنید  $X_i \sim N(0, \sigma^2)$  ,  $i = 1, 2$  و  $\rho$  ضریب همبستگی میان  $X_1$  و  $X_2$  باشد. در این صورت ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی لگ-نرمال،  $Y_i = \exp(X_i)$  ;  $i = 1, 2$ ، برابر است با:

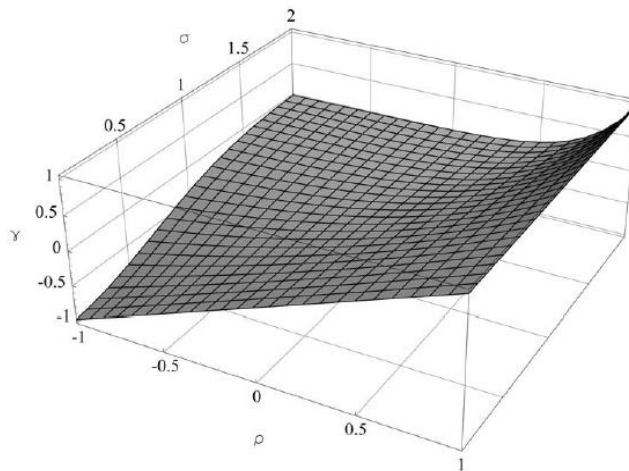
$$\text{Corr}(Y_1, Y_2) = \frac{e^{\rho\sigma^2} - 1}{\sqrt{(e^{\sigma^2} - 1)(e^{\sigma^2} - 1)}}.$$

حال اگر  $\rho = 1$  باشد، بدیهی است  $\text{Corr}(Y_1, Y_2) = 1$ .

می‌دانید کمترین مقدار همبستگی همواره بزرگتر از -۱ است، از این رو با فرض  $\sigma = 1$ ، خواهیم

$$\text{Corr}(Y_1, Y_2) \in [-0.368, 1]$$

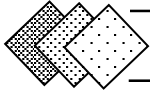
در شکل ۱-۳ نموداری از مقادیر همبستگی به صورت تابعی از  $\sigma$  و  $\rho$  رسم شده است.



شکل ۱-۳: نمودار مقادیر همبستگی به صورت تابعی از  $\sigma$  و  $\rho$

شکل ۱-۳، نمودار  $\gamma = \text{Corr}(Y_1, Y_2)$  را نشان می‌دهد، که در آن  $Y_i = \exp(\sigma X_i)$  ;  $i = 1, 2$  به

طوری که  $X_1 \sim N(0, \sigma^2)$  و  $\rho = \text{Corr}(X_1, X_2)$ . توجه کنید که کوچکترین ضریب همبستگی به دست



آمده نسبت به  $\sigma$  صعودی است. مثلاً برای  $\sigma = 1$  داریم  $\text{Corr}(Y_1, Y_2) \geq -0.368$  و برای  $\sigma = 2$  داریم  $\text{Corr}(Y_1, Y_2) \geq -0.18$ .

از سوی دیگر مشاهدات بالا بیانگر این نکته ی مهم است که در حالت کلی، اگر از مقدار کوچک همبستگی خطی نتیجه بگیریم درجه و میزان وابستگی متغیرها نیز کوچک است، اشتباه کرده ایم و متغیرهای تصادفی کاملاً وابسته، ممکن است دارای همبستگی صفر باشند. به طور مثال فرض کنید  $X_1 \sim N(0, 1)$  و  $X_2 = X_1^2$  در این صورت داریم:

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 \cdot (X_1^2 - 1)) = E(X_1^3) - E(X_1) = 0.$$

و البته کوواریانس صفر، همبستگی خطی صفر را نتیجه می دهد. در حالی که با مشاهده ی  $X_1$  تمام اطلاعات در مورد  $X_2$  را داریم.

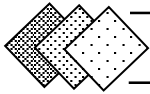
این نقاط ضعف و ناتوانی ضریب همبستگی خطی در کاربردهای گوناگون، باعث شد که آماردانان به دنبال یافتن برآوردهای دیگری جهت تبیین ساختارهای وابستگی متغیرها باشند.

در ادامه به بررسی روش هایی که مفصل نیز می تواند در بیان وابستگی میان متغیرهای تصادفی مورد استفاده قرار گیرد، پرداخته می شود. روش ها و اندازه های گوناگونی در این خصوص بیان شده که ریشه ی بیشتر آن ها را می توان در نوشته های هافدینگ طی سال های (۱۹۴۰-۱۹۴۱) یافت (نلسن، ۲۰۰۶).

### ۳-۳ همبستگی رتبه ای

#### ۳-۳-۱ مقدمه

یکی از روش های معمول و آشنا در آمار ناپارامتری بر این پایه استوار است که به جای توجه به داده،



رتبه‌ی آن مورد توجه قرار داده می‌شود. این موضوع منجر به تعریف برآوردگرهای مهم همبستگی  $\tau$ -کندال<sup>۱</sup> و  $\rho$ -اسپیرمن<sup>۲</sup> گردید. در این قسمت ضمن ارایه تعریف این معیارها، آن‌ها را با عباراتی بر حسب مفصل‌ها بیان خواهیم کرد.

در نظر گرفتن رتبه‌ها منجر به ساختن برآوردگرهایی می‌گردد که تحت تغییر مقیاس، پایا بوده و برای کار با مفصل‌ها بسیار مناسب به نظر می‌رسند. بنابراین می‌توان از طریق همبستگی رتبه‌ای، مفصل مناسب جهت برآزش به داده‌ها را انتخاب کرد.

هر دو برآوردگر مهم همبستگی، یعنی  $\tau$ -کندال و  $\rho$ -اسپیرمن را می‌توان بر اساس شکلی از وابستگی یعنی "هماهنگی"<sup>۳</sup> تعریف کرد. در این‌جا ضمن تعریف دقیق‌تر آن خواهید دید که چگونه ضرایب همبستگی رتبه‌ای را می‌توان بر اساس این تعریف بازنویسی کرد.

تعریف ۳-۳-۱ (نلسن، ۲۰۰۶): فرض کنید  $(X, Y)$  بردار متغیرهای تصادفی پیوسته باشد، در این

صورت دو مشاهده  $(x_i, y_i)$  و  $(x_j, y_j)$  را "هماهنگ" گویند، هرگاه

- اگر  $x_i < x_j$ ، آن‌گاه  $y_i < y_j$ ؛

- یا اگر  $x_i > x_j$ ، آن‌گاه  $y_i > y_j$ ؛

و به بیان دیگر، هرگاه

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0 \quad (1 - 3)$$

به همین ترتیب دو مشاهده‌ی  $(x_i, y_i)$  و  $(x_j, y_j)$  را "ناهماهنگ"<sup>۴</sup> گویند، هرگاه

- اگر  $x_i < x_j$ ، آن‌گاه  $y_i > y_j$ ؛

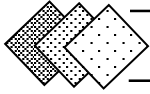
<sup>1</sup> Kendall's tau

<sup>2</sup> Spearman's rho

<sup>3</sup> Concordant

<sup>4</sup> Discordant





- یا اگر  $x_i > x_j$ ، آن گاه  $y_i < y_j$ ؛

و به بیان دیگر، هرگاه

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0 \quad (2-3)$$

از نظر هندسی اگر نقاط متناظر با  $(x_i, y_i)$  و  $(x_j, y_j)$  روی نمودار رسم شود، در صورت وجود هماهنگی، خط واصل این دو نقطه دارای شیب مثبت و در حالت ناهماهنگی، شیب این خط منفی است.

با در نظر گرفتن عبارت  $(x_i - x_j)(y_i - y_j)$  نیز، علامت مثبت برای این حاصل ضرب نشانه ی صعودی بودن خط واصل و علامت منفی نشانگر نزولی بودن آن می باشد.

### ۲-۳-۲ ضریب همبستگی $\tau$ -کندال

ضریب همبستگی  $\tau$ -کندال در نمونه را می توان بر اساس تعریف هماهنگی به روش زیر تعریف کرد (کروسکال<sup>۱</sup>، ۱۹۵۸ و لِهمن<sup>۲</sup>، ۱۹۷۵).

فرض کنید  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ، یک نمونه ی تصادفی  $n$ تایی از بردار متغیرهای تصادفی پیوسته ی  $(X, Y)$  باشد. در این صورت تعداد  $\binom{n}{2}$  جفت مشاهده از زوج های  $(x_i, y_i)$  و  $(x_j, y_j)$  موجودند، که ممکن است هماهنگ یا ناهماهنگ باشند (نلسن، ۲۰۰۶). در این صورت اگر قرار دهیم

$t$ : برآورد  $\tau$  در نمونه

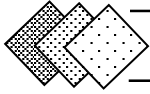
$c$ : تعداد جفت های هماهنگ

$d$ : تعداد جفت های ناهماهنگ،

آن گاه  $\tau$ -کندال در نمونه به صورت زیر برآورد می شود:

<sup>1</sup> Kruskal

<sup>2</sup> Lehmann



$$t = \frac{c-d}{c+d} = \frac{c-d}{\binom{n}{2}}. \quad (3-3)$$

با بیانی دیگر،  $\tau$  برابر با احتمال هماهنگی دوتایی مرتب  $(x_i, y_i)$  و  $(x_j, y_j)$  از مشاهدات نمونه تصادفی (که در بالا اشاره شد) منهای احتمال ناهماهنگی آن‌ها می‌باشد.

**تعریف ۳-۳-۲:** فرض کنید  $(X_1, Y_1)$  و  $(X_2, Y_2)$  دو بردار تصادفی مستقل و با توزیع توأم

مشترک  $H$  (هم‌توزیع) باشند. در این صورت  $\tau$ -کندال در جامعه به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\tau = \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (4-3)$$

یعنی، اگر احتمال هماهنگی با  $\pi_c = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]$  و احتمال ناهماهنگی با

$\pi_d = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$  نشان داده شود، آنگاه ضریب  $\tau$ -کندال به صورت تفاضل زیر

تعریف می‌شود

$$\tau = \pi_c - \pi_d. \quad (5-3)$$

و همچنین با توجه به تعریف تابع علامت، که به صورت زیر است:

$$\text{sgn}(u) = \begin{cases} -1 & , u < 0 \\ 0 & , u = 0 \\ 1 & , u > 0 \end{cases}$$

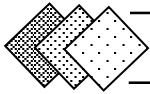
با در نظر گرفتن  $u = (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)$  و تعاریف  $\pi_c$  و  $\pi_d$ ، داریم:

$$E[\text{sgn}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2))] = (1 \times \pi_c) + (-1 \times \pi_d) = \tau. \quad (6-3)$$

حال به نکات زیر توجه کنید:

اگر  $\pi_c$  برابر با  $\pi_d$  باشد، واضح است که  $\tau = 0$  و این یعنی با همان احتمالی که شیب مثبت را

انتظار داریم شیب منفی را نیز انتظار داریم که این حالت در زمان استقلال متغیرها رخ می‌دهد. همچنین



اگر  $\tau > 0$  احتمال بیشتری برای هماهنگی و اگر  $\tau < 0$ ، احتمال بیشتری برای ناهماهنگی وجود دارد. با توجه به تعریف، همواره  $-1 \leq \tau \leq 1$ . حال اگر  $\tau = 1$ ، متغیرها در یک جهت تغییر می کنند و اگر  $\tau = -1$  در دو جهت مخالف تغییر می کنند (کروسکال، ۱۹۵۸ و گینز، ۱۳۶۷).

در این قسمت برای ارزیابی  $\tau$ -کندال توسط مفصل‌ها ابتدا نیاز به تعریف تابع هماهنگی<sup>۱</sup>،  $Q$ ، داریم لذا به تعریف زیر توجه کنید.

**تعریف ۳-۳-۳:** فرض کنید  $(X_1, Y_1)$  و  $(X_2, Y_2)$  دو بردار تصادفی پیوسته با توابع توزیع توأم (احتمالاً) متفاوت  $H_1$  و  $H_2$ ؛ اما با توابع کناری مشترک  $F$  (برای  $X_1$  و  $X_2$ ) و  $G$  (برای  $Y_1$  و  $Y_2$ ) باشند. همچنین فرض کنید  $C_1$  و  $C_2$ ، به ترتیب مفصل‌های متناظر با  $(X_1, Y_1)$  و  $(X_2, Y_2)$  باشند. بنابراین طبق قضیه اسکالر، تساوی‌های زیر برقرار خواهند بود:

$$H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y)), \quad H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y)).$$

حال تفاضل احتمال‌های هماهنگی و ناهماهنگی میان بردارهای  $(X_1, Y_1)$  و  $(X_2, Y_2)$  را تابع هماهنگی نامیده و با نماد  $Q$  نمایش می دهند:

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \quad (7-3)$$

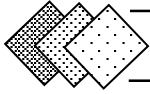
اکنون قضیه زیر، نشان می دهد  $Q$  تنها به  $C_1$  و  $C_2$  بستگی دارد.

**قضیه ۳-۳-۱:** با در نظر گرفتن کلیه ی فرض‌های تعریف (۳-۳-۳) برای دو بردار تصادفی

$(X_1, Y_1)$  و  $(X_2, Y_2)$  رابطه ی زیر برقرار است:

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \quad (8-3)$$

<sup>1</sup> Concordance function



## اثبات:

از آنجا که متغیرهای تصادفی پیوسته هستند، بنابراین

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = 1 - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0].$$

از این رو رابطه ی (۷-۳) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$Q = 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1. \quad (9 - 3)$$

همچنین با توجه به عبارت

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] + P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2], \quad (10 - 3)$$

این احتمال ها را می توان با روش شرطی کردن نسبت به  $(X_1, Y_1)$  محاسبه کرد

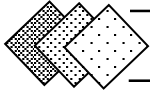
$$\begin{aligned} P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] &= \iint_{R^2} P[X_2 < X_1, Y_2 < Y_1 | X_1 = x_1, Y_1 = y_1] dH_1(x, y) \\ &= \iint_{R^2} P[X_2 \leq x, Y_2 \leq y] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{R^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

اکنون استفاده از تبدیل های چندکی  $u = F(x)$  و  $v = G(y)$  منجر به رابطه ی زیر می شود:

$$P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] = \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \quad (11 - 3)$$

به طور مشابه

$$\begin{aligned} P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= \iint_{R^2} P[X_2 > X_1, Y_2 > Y_1 | X_1 = x_1, Y_1 = y_1] dH_1(x, y) \\ &= \iint_{R^2} P[X_2 > x, Y_2 > y] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{R^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))] dC_1(F(x), G(y)) \end{aligned}$$



$$= \iint_{I^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v). \quad (12 - 3)$$

و چون تابع  $C_1$  توزیع توأم زوج  $(U, V)$  از متغیرهای تصادفی یکنواخت استاندارد است، از این رو

$$E(U) = E(V) = \frac{1}{2},$$

و لذا در عبارت (۱۲-۳) جایگزین کرده و داریم:

$$\begin{aligned} P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \\ &= \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \end{aligned} \quad (13 - 3)$$

بنابراین با جایگذاری (۱۱-۳) و (۱۳-۳) در رابطه‌ی (۱۰-۳) به دست می‌آید:

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 2 \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).$$

حال با قرار دادن رابطه‌ی فوق در تساوی (۹-۳)، نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود:

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1$$

و حکم ثابت می‌شود.  $\square$

(\*) نتیجه ۱-۳-۳: با فرض اینکه  $C_1$  و  $C_2$  و  $Q$  توابع نامبرده در قضیه‌ی ۱-۳-۳ باشند در این

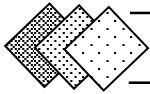
صورت:

۱-  $Q$  نسبت به مؤلفه‌های متقارن است.

$$Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1) \quad (14 - 3)$$

۲-  $Q$  نسبت به هر یک از مؤلفه‌های نانزولی است. بدین معنا که اگر برای هر  $(u, v) \in I^2$  روابط

زیر برقرار باشد:



$$C_1(u, v) \leq C'_1(u, v), \quad C_2(u, v) \leq C'_2(u, v)$$

آن گاه نامساوی زیر به دست می آید:

$$Q(C_1, C_2) \leq Q(C'_1, C'_2). \quad (15 - 3)$$

۳- در  $Q$  می توان مفصل های بقای  $\hat{C}_1$  و  $\hat{C}_2$  را به ترتیب جایگزین  $C_1$  و  $C_2$  کرد و بدین صورت

تساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$Q(C_1, C_2) = Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2). \quad (16 - 3)$$

اثبات:

(۱): همانطور که در رابطه ی (۳-۱۰) ملاحظه کردید

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] + P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2].$$

کافیست احتمال های رابطه ی فوق را نسبت به  $(X_2, Y_2)$  شرطی کرده و مراحل را کاملاً مشابه اثبات

قضیه ی ۳-۳-۱ انجام دهیم، در نتیجه با جایگذاری در رابطه ی (۳-۹) به دست می آید:

$$Q = 4 \iint_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) - 1.$$

و در مقایسه رابطه ی فوق با رابطه ی (۳-۸) نتیجه ی مطلوب حاصل می شود.

(۲): با توجه به فرض

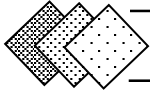
$$C_1(u, v) \leq C'_1(u, v),$$

بنابراین

$$\iint_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) \leq \iint_{I^2} C'_1(u, v) dC_2(u, v)$$

حال با استفاده از قسمت اول نتیجه طرف راست تساوی فوق برابر است با

$$\iint_{I^2} C_2(u, v) dC'_1(u, v) \text{ و لذا با توجه به اینکه } C_2(u, v) \leq C'_2(u, v) \text{ بدیهی است:}$$



$$\iint_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) \leq \iint_{I^2} C_2(u, v) dC'_1(u, v) \leq \iint_{I^2} C'_2(u, v) dC'_1(u, v)$$

در نتیجه ضرب طرفین نامساوی در عدد ۴ و کم کردن عدد ۱، رابطه ی (۳-۱۵) را به دست می دهد.

(۳): در بخش (۳-۴)، مفصل بقا به صورت زیر معرفی شد:

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v), \quad \forall u, v \in I^2.$$

به طوری که  $u = \bar{F}(x)$  و  $v = \bar{G}(y)$ . بنابراین

$$\iint_{I^2} \hat{C}_2(u, v) d\hat{C}_1(u, v) = \iint_{I^2} [u + v - 1 + C_2(1 - u, 1 - v)] d\hat{C}_1(u, v)$$

و چون تابع  $\hat{C}_1$  توزیع توأم زوج  $(U, V)$  از متغیرهای تصادفی یکنواخت استاندارد است، از این رو

$$E(U) = E(V) = \frac{1}{2}$$

لذا با توجه به مورد فوق و جایگذاری  $u = \bar{F}(x) = 1 - F(x)$  و  $v = \bar{G}(y) = 1 - G(y)$

خواهیم داشت

$$\iint_{I^2} \hat{C}_2(u, v) d\hat{C}_1(u, v) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \iint_{I^2} C_2(F(x), G(y)) d\hat{C}_1(u, v).$$

همچنین با استفاده از قسمت اول نتیجه بدیهی است که

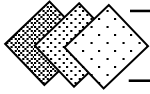
$$\iint_{I^2} \hat{C}_2(u, v) d\hat{C}_1(u, v) = \iint_{I^2} \hat{C}_1(u, v) dC_2(F(x), G(y))$$

و مشابه اعمالی که بر روی  $\hat{C}_2$  اجرا شد، انجام داده و مجدد از قسمت اول نتیجه کمک گرفته و

به دست می آوریم

$$\iint_{I^2} \hat{C}_2(u, v) d\hat{C}_1(u, v) = \iint_{I^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)),$$

و لذا تساوی (۳-۱۶) بدیهی به نظر می رسد.  $\square$



**مثال ۳-۳-۱** (نلسن، ۲۰۰۶): با توجه به فرمول (۳-۸)، محاسبه ی تابع هماهنگی  $Q$  برای

مفصل های معروف  $M, W$  و  $\Pi$  بسیار آسان است. برای مثال از آنجا که تکیه گاه مفصل  $M$  قطر  $u = v$  در

$I^2$  است و توابع کناری  $M$  یکنواخت استاندارد هستند، نتیجه می شود که اگر  $g$  یک تابع انتگرال پذیر در

$I^2$  باشد، آن گاه

$$\iint_{I^2} g(u, v) dM(u, v) = \int_0^1 g(u, u) du.$$

لذا داریم

$$Q(M, M) = 4 \iint_{I^2} M(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u du - 1 = 4 \left( \frac{1}{2} \right) - 1 = 1$$

به همین ترتیب برای دیگر حالات به راحتی محاسبه می شود. ■

حال اگر فرض کنیم  $C$  مفصلی دلخواه باشد لذا برای هر  $C$ ، با توجه نتیجه ی ۳-۳-۱ و مثال ۳-۳-۱

می توان نوشت

$$Q(C, W) \in [-1, 0] \text{ و } Q(C, M) \in [0, 1]$$

$$Q(C, \Pi) \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \text{ و } Q(C, C) \in [-1, 1]$$

بنا به نامساوی قسمت دوم نتیجه ی ۳-۳-۱ یک رابطه ی ترتیب در مجموعه مفصل های  $C$  تعریف

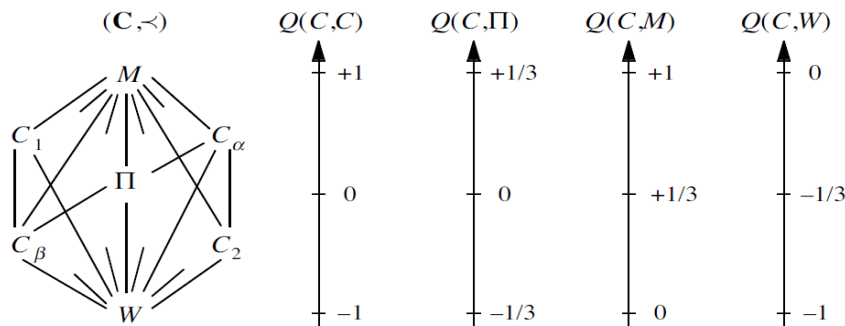
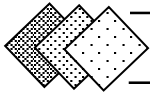
می شود (نلسن، ۲۰۰۶). بدین صورت که برای هر جفت مفصل  $C$  و  $C'$ ، می گوئیم  $C$  کمتر از  $C'$  در ترتیب

هماهنگ است و می نویسیم  $C < C'$  هر گاه

$$\forall (u, v) \in I^2; \quad C(u, v) \leq C'(u, v)$$

در شکل ۳-۲ نمایشی از مجموعه مفصل های  $C$  با رابطه ی ترتیب  $<$  آورده شده است.





شکل ۳-۲: مجموعه مرتب  $(C, <)$  و محورهای هماهنگی.

اینک با توجه به مطالبی که تا این قسمت مطرح شده‌اند، معیارهای همبستگی رتبه‌ای را توسط مفصل‌ها بازنویسی می‌کنیم.

### قضیه ۳-۳-۲: (محاسبه ی ضریب همبستگی $\tau$ -کندال توسط مفصل)

اگر  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی پیوسته با مفصل  $C$  باشند،  $\tau$ -کندال (در جامعه) برحسب مفصل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tau_C = \tau_{X,Y} = Q(C, C) = 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (17-3)$$

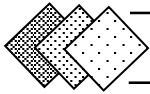
ملاحظه می‌کنید که  $\tau$ -کندال اولین محور هماهنگی در شکل (۳-۲) است.

با نگاهی دقیق‌تر به رابطه ی (۳-۱۷) درمی‌یابیم که اگر  $C(U, V)$  را به عنوان تابع توزیع توأم متغیرهای تصادفی یکنواخت استاندارد  $U$  و  $V$  در نظر بگیریم، آن‌گاه انتگرال موجود در این رابطه را می‌توان امید ریاضی تابع  $C(U, V)$  انگاشت و در این صورت می‌توان گفت:

$$\tau_C = 4E[C(U, V)] - 1. \quad (18-3)$$

**مثال ۳-۳-۲:** فرض کنیم  $C = C_\theta$  یکی از اعضای خانواده مفصل‌های FGM باشد، یعنی:

$$C(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v), \quad \theta \in [-1, 1].$$



در این صورت با جایگذاری در رابطه ی (۳-۱۷) و محاسبات ساده به دست می آوریم:  $\tau_C = \frac{2\theta}{9}$ . از آن جا که  $\theta \in [-1, 1]$  لذا  $\tau_C \in \left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right]$ . بنابراین مفصل های FGM تنها می توانند همبستگی های نسبتاً ضعیف را مدل سازی کنند. ■

حال اگر  $C$  یک مفصل ارشمیدسی با مولد  $\varphi$  باشد، جنست و مک کی (۱۹۸۶) نشان دادند که تابع توزیع متغیر تصادفی  $C(U, V)$  به صورت زیر به دست می آید:

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}. \quad (19 - 3)$$

و لذا در مفصل های ارشمیدسی، می توان به جای کارکردن با تابع دوبعدی (مفصل) از یک تابع یک بعدی (تابع مولد) برای محاسبه ی  $\tau$ -کندال استفاده کرد، که ساده تر می باشد. به نتیجه ی زیر در این باب، توجه کنید.

**نتیجه ۳-۳-۲:** فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی با مفصل ارشمیدسی  $C$  تولید شده توسط

$\varphi$  باشند.  $\tau_C$  در جامعه، متناظر با  $\tau$ -کندال برای متغیرهای  $X$  و  $Y$  از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \quad (20 - 3)$$

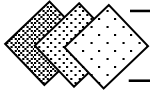
**اثبات:**

فرض کنید  $U$  و  $V$  متغیرهای تصادفی یکنواخت استاندارد با تابع توزیع توأم  $C$  باشند، و  $K_C(t)$  تابع

توزیع متغیر تصادفی  $C(U, V)$  باشد. بنابراین از رابطه ی (۳-۱۸) داریم:

$$\tau_C = 4E[C(U, V)] - 1 = 4 \int_0^1 t dK_C(t) - 1.$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء به دست می آید:



$$\tau_C = 3 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt.$$

لذا با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۱۹) داریم:

$$\tau_C = 3 - 4 \int_0^1 \left( t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} \right) dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

و در پاسخ به این که چرا توانستیم  $\varphi'(t)$  را جایگزین  $\varphi'(t^+)$  کنیم، باید بگوییم توابع محدب مانند  $\varphi$  تقریباً همه جا مشتق پذیرند، لذا این کار بلامانع است.  $\square$

**مثال ۳-۳-۳:** فرض کنید  $C$  یک مفصل کلیتون با مولد

$$\varphi_{Cl}(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1), \quad \theta \in [-1, \infty) - \{0\},$$

باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)}{-t^{-(\theta+1)}} = \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} \quad (\theta \neq 0), \quad \frac{\varphi_0(t)}{\varphi'_0(t)} = t \ln t.$$

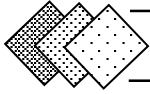
و از این رو  $\tau$ -کندال برای مفصل کلیتون از رابطه‌ی (۳-۲۰) محاسبه می‌شود:

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt = \frac{\theta}{\theta + 2}.$$

■

در جدول ۳-۱ توابع مولد،  $K_C(t)$ ، مقادیر  $\tau$ -کندال و بازه‌ی  $\theta$ ، برای برخی از مفصل‌های

ارشمیدسی در حالت دوبعدی که در فصل دوم معرفی شده‌اند، به طور خلاصه بیان شده‌اند.



جدول ۳-۱: بیان توابع مولد و  $K_C(t)$  و مقادیر  $\tau$ -کندال برای مفصل ارشمیدسی علی-میخائیل-حق، کلیتون، فرانک و گامبل-هوگارد.

$\tau_C$	$K_C(t)$	مولد $(\varphi(t))$	خانواده
$\theta$	$t - (1 - \theta)t \log t$	$ \log t ^{1/(1-\theta)}$	گامبل- هوگارد
$\frac{3\theta - 2}{3\theta} - \frac{2(1 - \theta)^2 \log(1 - \theta)}{3\theta^2}$	$t + \frac{t^2}{1 - \theta} \left( \frac{1 - \theta}{t} + \theta \right) \times \log \left( \frac{1 - \theta}{t} + \theta \right)$	$\frac{\log(1 - \theta)/t + \theta}{1 - \theta}$	علی- میخائیل-حق
$\frac{\theta}{\theta + 2}$	$t + \frac{t(1 - t^\theta)}{\theta}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	کلیتون
$1 - \frac{4}{\theta} + \frac{4D_1(\theta)}{\theta}$	$t - \frac{(1 - e^{\theta t})}{\theta} \log \left( \frac{1 - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta t}} \right)$	$\ln(e^{-\theta} - 1) - \ln(e^{-\theta t} - 1)$	فرانک

از آن جا که به دست آوردن  $\tau_C$  داده شده در رابطه ی (۳-۱۷)، در برخی از موارد به خصوص زمانی-  
که  $C$  تکین باشد و یا شامل دو مؤلفه ی تکین و اکیداً پیوسته باشد، دشوار است، لذا برای حل این مسأله،  
قضیه ی زیر ارایه شده است.

**قضیه ۳-۳-۳:** فرض کنید  $C_1$  و  $C_2$  مفصل باشند، آن گاه

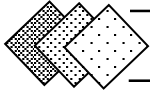
$$\iint_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) = \frac{1}{2} - \iint_{I^2} \frac{\partial}{\partial u} C_1(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C_2(u, v) dudv. \quad (21 - 3)$$

برهان:

از آن جا که مفصل ها اکیداً پیوسته هستند، در این صورت سمت چپ رابطه ی (۳-۲۰) با استفاده از

انتگرال گیری جزءبه جزء، برابر است با:

$$\iint_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 C_1(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_2(u, v) dudv.$$



از محاسبه ی انتگرال داخلی به روش جزء به جزء نتیجه می شود:

$$\int_0^1 C_1(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_2(u, v) du$$

$$= C_1(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C_2(u, v) \Big|_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C_1(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C_2(u, v) du.$$

و با توجه به خواص مفصل داریم

$$\int_0^1 C_1(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_2(u, v) du = v - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C_1(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C_2(u, v) du.$$

حال با انتگرال گیری روی  $v$ ، نتیجه می شود:

$$\int_0^1 \left( v - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C_1(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C_2(u, v) du \right) dv = \frac{1}{2} - \iint_{I^2} \frac{\partial}{\partial u} C_1(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C_2(u, v) dudv.$$

و حکم ثابت می شود.  $\square$

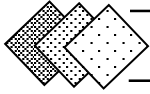
### ۳-۳-۳ ضریب همبستگی $\rho$ -اسپیرمن

همانند ضریب همبستگی  $\tau$ -کندال، ضریب همبستگی  $\rho$ -اسپیرمن نیز بر پایه ی مشاهدات هماهنگ و ناهماهنگ می باشد. این اندازه برای جامعه توسط کروسکال (۱۹۵۸) و لِهمن (۱۹۶۶) معرفی شده است. حال فرض کنید  $(X_1, Y_1)$ ،  $(X_2, Y_2)$  و  $(X_3, Y_3)$  سه بردار تصادفی مستقل دارای توزیع توأم  $H$  (که توزیع های کناری آن  $F$  و  $G$  هستند) و مفصل  $C$  باشند، از این رو می توان تعریف زیر را ارائه داد.

**تعریف ۳-۳-۴:** با توجه به شرایط فوق،  $\rho$ -اسپیرمن به صورت تفاضل احتمال های هماهنگی و

ناهماهنگی دو زوج  $(X_1, Y_1)$  و  $(X_2, Y_3)$  بیان می شود:

$$\rho_{X,Y} = 3[P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]]. \quad (22 - 3)$$



لازم به ذکر است که می توان در رابطه ی (۲۲-۳) به جای زوج  $(X_2, Y_3)$ ، از زوج  $(X_3, Y_2)$  استفاده کرد و نتیجه ی یکسانی حاصل می شود.

از آن جا که  $H(x, y)$  تابع توزیع توأم  $(X_1, Y_1)$  و تابع توزیع توأم  $(X_2, Y_3)$ ، با توجه به استقلال،  $F(x)G(y)$  می باشد، بنابراین  $C$  مفصل متناظر با  $(X_1, Y_1)$  و  $\Pi$  مفصل مربوط به  $(X_2, Y_3)$ ، خواهد بود و با توجه به تعریف تابع هماهنگی در قضیه ی ۴-۳-۱، ضریب همبستگی  $\rho$ -اسپیرمن محاسبه می شود.

(\*) **قضیه ۳-۳-۴:** (محاسبه ی ضریب همبستگی  $\rho$ -اسپیرمن توسط مفصل)

فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی پیوسته دارای مفصل  $C$  باشند، آن گاه  $\rho$ -اسپیرمن (در جامعه) بر حسب مفصل به صورت زیر بیان می شود:

$$\rho_{X,Y} = \rho_C = 3 Q(C, \Pi) \quad (23 - 3)$$

$$= 12 \iint_{I^2} uv dC(u, v) - 3 \quad (24 - 3)$$

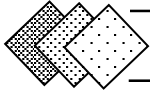
$$= 12 \iint_{I^2} C(u, v) dudv - 3 \quad (25 - 3)$$

اثبات:

با توجه به رابطه ی (۲۲-۳) و قضیه ی ۱-۳-۳ و با توجه به اینکه  $C$  مفصل متناظر با  $(X_1, Y_1)$  و  $\Pi$  مفصل مربوط به  $(X_2, Y_3)$  است، تساوی های (۲۳-۳) و (۲۴-۳) بدیهی می باشند و همچنین رابطه ی (۲۵-۳) با استفاده از قسمت اول نتیجه ی ۱-۳-۳ به دست می آید.  $\square$

ملاحظه می کنید که  $\rho$ -اسپیرمن، دومین محور هماهنگی در شکل ۲-۳ است و با توجه به این که

$Q(C, \Pi) \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ ، بنابراین رابطه ی (۲۳-۳) توسط ثابت ۳ نرمال شده که در این صورت  $\rho_C \in [-1, 1]$  می شود.



**مثال ۳-۳-۴:** فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی دارای توابع کناری نمایی استاندارد و

مفصل  $C$  عضو خانواده ی FGM باشند. یعنی

$$C(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v), \quad \theta \in [-1, 1].$$

در این صورت طبق رابطه ی (۳-۲۵) خواهیم داشت

$$\rho_C = 12 \iint_{I^2} [uv + \theta uv(1 - u)(1 - v)] dudv - 3 = 12 \left( \frac{1}{4} + \frac{\theta}{36} \right) - 3 = \frac{\theta}{3}.$$

■

### ۳-۳-۴ ارتباط بین ضرایب $\rho$ و $\tau$

در دو قسمت قبل ضرایب  $\rho$ -اسپیرمن و  $\tau$ -کندال به طور کامل معرفی شدند. این دو مقدار در اکثر موارد

متفاوت می باشند. لذا در این قسمت وجود ارتباط، بین این دو مقدار را بررسی می کنیم.

در زیر قضیه ای در این ارتباط آمده و برای کلیه ی خانواده های مفصل ها برقرار می باشد، که توسط

دانیلز<sup>۱</sup> (۱۹۵۰) مطرح ولی توسط کروسکال (۱۹۵۸) اثبات شده است.

**قضیه ۳-۳-۵:** فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی پیوسته و  $\tau$  و  $\rho$  به ترتیب ضرایب  $\tau$ -

کندال و  $\rho$ -اسپیرمن تعریف شده در دو بخش گذشته باشند در این صورت:

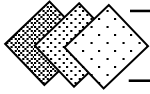
$$-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1.$$

اثبات:

فرض کنید  $(X_1, Y_1)$ ،  $(X_2, Y_2)$  و  $(X_3, Y_3)$  سه بردار تصادفی مستقل و دارای توزیع توأم مشترک

باشند، بنابراین طبق روابط (۳-۴) و (۳-۲۲) داریم

<sup>1</sup> Daniels



$$\tau = 2 P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1,$$

$$\rho = 6 P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - 3.$$

از طرفی می توان با توجه به استقلال و تساوی احتمال های زیر،  $\tau$  و  $\rho$  را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \tau = \frac{2}{3} \{ & P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] + P[(X_2 - X_3)(Y_2 - Y_3) > 0] \\ & + P[(X_3 - X_1)(Y_3 - Y_1) > 0] \} - 1, \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} \rho = \{ & P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] + P[(X_1 - X_3)(Y_1 - Y_2) > 0] \\ & + P[(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_3) > 0] + P[(X_3 - X_2)(Y_3 - Y_1) > 0] \\ & + P[(X_2 - X_3)(Y_2 - Y_1) > 0] + P[(X_3 - X_1)(Y_3 - Y_2) > 0] \} - 3. \end{aligned}$$

از آنجا که عبارات فوق تحت هر جایگشت اندیس ها ثابت هستند لذا می توان در هر حالت فرض کرد  $X_1 < X_2 < X_3$  در این صورت:

$$\tau = \frac{2}{3} \{ P(Y_1 < Y_2) + P(Y_2 < Y_3) + P(Y_1 < Y_3) \} - 1,$$

9

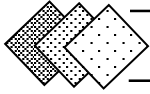
$$\begin{aligned} \rho = \{ & P(Y_1 < Y_3) + P(Y_1 < Y_2) + P(Y_2 > Y_3) \\ & + P(Y_3 > Y_1) + P(Y_2 < Y_1) + P(Y_3 > Y_2) \} - 3. \end{aligned}$$

حال فرض کنید نشان دهنده ی احتمال شرطی  $Y_1 < Y_2 < Y_3$  به شرط  $X_1 < X_2 < X_3$  باشد در- این صورت جمع شش تا  $p_{ijk}$  برابر یک می شود و داریم

$$\begin{aligned} \tau = \frac{2}{3} \{ & (p_{123} + p_{132} + p_{312}) + (p_{123} + p_{213} + p_{231}) + (p_{123} + p_{132} + p_{213}) \} - 1 \\ = & p_{123} + \frac{1}{3}(p_{132} + p_{213}) - \frac{1}{3}(p_{231} + p_{312}) - p_{321}, \end{aligned}$$

9





$$\begin{aligned}\rho &= \tau(p_{123} + p_{132} + p_{213}) - \tau \\ &= p_{123} + p_{132} + p_{213} - p_{231} - p_{312} - p_{321}.\end{aligned}$$

از این رو

$$\begin{aligned}3\tau - 2\rho &= p_{123} - p_{132} - p_{213} + p_{231} + p_{312} - p_{321} \\ &= (p_{123} + p_{231} + p_{312}) - (p_{132} + p_{213} + p_{321}).\end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت  $1 \leq 3\tau - 2\rho \leq -1$ ، که حکم ثابت می شود. □

نکته ی شایان توجه این است که می توان ارتباط بین  $\rho$  و  $\tau$  را برای خانواده های گوناگون، به طور ویژه، محاسبه کرد. برای مثال به گزاره ی زیر توجه کنید.

**گزاره ۳-۳-۱:** برای هر بردار تصادفی  $(X_1, X_2)$  با مفصل سینوسی

$$\forall (u, v) \in I^2, \quad C_\Psi(u, v) = uv + \int_0^u \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \int_0^v \sin(\Psi^{-1}(t)) dt,$$

خواهیم داشت

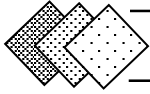
$$\rho(X_1, X_2) = \frac{3}{2}\tau(X_1, X_2).$$

اثبات:

ابتدا  $dC_\Psi(u, v)$  را با استفاده از اولین قضیه ی اساسی حساب، محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned}dC_\Psi(u, v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left[ uv + \int_0^u \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \int_0^v \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \right] \\ &= \left[ 1 + \sin(\Psi^{-1}(u)) \sin(\Psi^{-1}(v)) \right] dudv.\end{aligned}$$

حال با توجه به فرمول های به دست آمده برای  $\tau$  و  $\rho$  و همچنین با جایگذاری، داریم



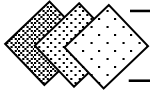
$$\begin{aligned}
 \tau(X_1, X_2) &= 4 \iint_{I^2} C_{\Psi}(u, v) dC_{\Psi}(u, v) - 1 \\
 &= 4 \int_0^1 \int_0^1 \left[ uv + \int_0^u \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \int_0^v \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \right] \\
 &\quad \cdot \left[ 1 + \sin(\Psi^{-1}(u)) \sin(\Psi^{-1}(v)) \right] dudv - 1 \\
 &= 4 \left( \int_0^1 \int_0^1 uv dudv + \int_0^1 \int_0^1 uv \cdot \left[ \sin(\Psi^{-1}(u)) \sin(\Psi^{-1}(v)) \right] dudv \right. \\
 &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \left[ \int_0^u \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \int_0^v \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \right] dudv \\
 &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \left[ \sin(\Psi^{-1}(u)) \sin(\Psi^{-1}(v)) \right] \\
 &\quad \cdot \left. \left[ \int_0^u \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \int_0^v \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \right] dudv \right) - 1.
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\tau(X_1, X_2) = 8 \left[ \int_0^1 u \sin(\Psi^{-1}(u)) du \right]^2, \quad (26 - 3)$$

و

$$\begin{aligned}
 \rho(X_1, X_2) &= 12 \iint_{I^2} uv dC_{\Psi}(u, v) - 3, \\
 \rho(X_1, X_2) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv \cdot \left[ 1 + \sin(\Psi^{-1}(u)) \sin(\Psi^{-1}(v)) \right] dudv - 3 \\
 &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dudv + 12 \int_0^1 \int_0^1 uv \cdot \left[ \sin(\Psi^{-1}(u)) \sin(\Psi^{-1}(v)) \right] dudv - 3 \\
 &= 12 \left[ \int_0^1 u \sin(\Psi^{-1}(u)) du \right] \left[ \int_0^1 v \sin(\Psi^{-1}(v)) dv \right]
 \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 u \sin(\Psi^{-1}(u)) du \right]^2. \quad (27-3)$$

و با توجه به (۲۶-۳) و (۲۷-۳) داریم

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{3}{2} \tau(X_1, X_2).$$

و حکم ثابت می شود. □

نکته ای که می توان به آن اشاره کرد این است که گزاره ی فوق، حتی می تواند روشی برای تشخیص مفصل سینوسی باشد. به نتیجه ی زیر توجه کنید.

**نتیجه ۳-۳-۳:** مفصل نرمال عضو خانواده ی مفصل سینوسی نمی باشد.

**اثبات:**

با توجه به دینویت<sup>۱</sup> (۲۰۰۵) برای مفصل نرمال، داریم

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \alpha, \quad \rho = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\alpha}{2}$$

در این صورت خواهیم داشت

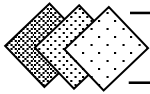
$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{3 \arcsin \frac{\alpha}{2}}{\arcsin \alpha} \neq \frac{3}{2}.$$

□ لذا مفصل نرمال، یک مفصل سینوسی نیست.

در بخش فوق، همانطور که ملاحظه کردید تنها به مختصری از رابطه ی میان  $\rho$  و  $\tau$  پرداخته شد

برای اطلاعات بیشتر نلسن، (۲۰۰۶) را ببینید.

<sup>1</sup> Denuit



## ۳-۴ وابستگی دمی

سرانجام در این بخش به معرفی معیار سوم همبستگی یعنی وابستگی دمی پرداخته و آن را نیز از طریق مفصل بیان کرده ایم.

دو متغیر تصادفی یکنواخت  $U_1$  و  $U_2$  با مفصل  $C$  را در نظر بگیرید. به طور شهودی، همبستگی دمی بالایی (پایینی) میان این دو متغیر بدان معناست که همواره با مقادیر بزرگ (کوچک) برای  $U_1$ ، انتظار مقادیر بزرگ (کوچک) برای  $U_2$  را نیز داشته باشیم.

به طور دقیق تر، احتمال آنکه  $U_1$  بزرگتر از مقدار حدی داده شده ی  $q$  باشد به شرط آن که  $U_2$  نیز از همان سطح یعنی  $q$  بیشتر باشد، زمانی که  $q$  به ۱ میل می کند، مورد بررسی قرار می گیرد. اگر این احتمال کوچک باشد، آن گاه مانند حالت استقلال، متغیرهای تصادفی همبستگی دمی ندارند اما در غیر این صورت دارای همبستگی دمی هستند (اشمیت، ۲۰۰۶).

**تعریف ۳-۴-۱:** برای متغیرهای تصادفی پیوسته ی  $X_1$  و  $X_2$  با توابع توزیع کناری  $F_i$  ;  $i = 1, 2$ ,

ضریب همبستگی دمی بالایی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\lambda_u = \lim_{q \rightarrow \Gamma^-} P(X_2 > F_2^{(-1)}(q) | X_1 > F_1^{(-1)}(q)), \quad (28 - 3)$$

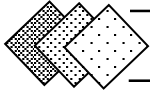
به شرط اینکه حد موجود باشد و  $\lambda_u \in [0, 1]$ .

و ضریب همبستگی دمی پایینی نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow \circ^+} P(X_2 \leq F_2^{(-1)}(q) | X_1 \leq F_1^{(-1)}(q)). \quad (29 - 3)$$

خاطر نشان می کنیم که  $F_i^{(-1)}(q)$  ;  $i = 1, 2$  چندک مرتبه ی  $q$ ام توزیع  $X_i$  است. بنابراین

✓ اگر  $\lambda_u > 0$  می گوئیم  $X_1$  و  $X_2$  همبستگی دمی بالایی دارند.



✓ اگر  $\lambda_u = 0$ ، می‌گوییم  $X_1$  و  $X_2$  به طور مجانبی<sup>۱</sup>، در دنباله (دم) بالایی، مستقل هستند.

و به همین ترتیب برای  $\lambda_l$  نیز گزاره‌های فوق برقرار است. لذا

✓ اگر  $\lambda_l > 0$ ، می‌گوییم  $X_1$  و  $X_2$ ، همبستگی دمی پایینی دارند.

✓ اگر  $\lambda_l = 0$ ، می‌گوییم  $X_1$  و  $X_2$  به طور مجانبی، در دنباله‌ی (دم) پایینی، مستقل هستند.

حال با استفاده از قانون بیز، می‌توان این ضرایب را برای توابع توزیع کناری پیوسته، با عبارت‌هایی

ساده بر حسب مفصل‌ها به شکل زیر بازنویسی کرد:

**قضیه ۳-۴-۱** (اشمیت، ۲۰۰۶ و نلسن، ۲۰۰۶): (محاسبه‌ی ضرایب همبستگی دمی توسط مفصل)

فرض کنید متغیرهای تصادفی پیوسته  $X_1$  و  $X_2$  با توابع توزیع کناری  $F_i$ ;  $i = 1, 2$  و ضرایب

همبستگی دمی پایینی و بالایی به ترتیب،  $\lambda_u$  و  $\lambda_l$ ، تعریف‌شده در روابط (۳-۲۹) و (۳-۲۸) باشند و

همچنین فرض کنید  $C$  مفصل مربوط به  $X_1$  و  $X_2$  باشد. در این صورت با شرط وجود حدود (۳-۲۸) و

(۳-۲۹)، داریم

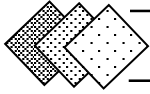
$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q}, \quad (30 - 3)$$

$$\lambda_u = 2 + \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{C(q, q) - 1}{1 - q} = 2 + \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(1 - q, 1 - q) - 1}{q}. \quad (31 - 3)$$

**اثبات:**

طبق رابطه‌ی (۳-۲۹) و قانون بیز داریم

<sup>1</sup> asymptotically



$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{P(X_2 \leq F_2^{(-1)}(q), X_1 \leq F_1^{(-1)}(q))}{P(X_1 \leq F_1^{(-1)}(q))}.$$

همچنین اگر فرض کنیم  $H$  تابع توزیع توأم  $X_1$  و  $X_2$  باشد، با استفاده از قضیه ی اسکالر می توان گفت

$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{H(F_1^{(-1)}(q), F_2^{(-1)}(q))}{q} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(F_1(F_1^{(-1)}(q)), F_2(F_2^{(-1)}(q)))}{q} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q}$$

و به روش مشابه طبق رابطه ی (۳-۲۸) و تعریف مفصل بقا ( $\hat{C}$ ) در فصل دوم، داریم

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{P(X_2 > F_2^{(-1)}(q), X_1 > F_1^{(-1)}(q))}{P(X_1 > F_1^{(-1)}(q))} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{\hat{C}(q, q)}{1 - q} = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C(q, q)}{1 - q} = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + 1 - 1 + C(q, q)}{1 - q} \quad (32 - 3) \\ &= 2 + \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{C(q, q) - 1}{1 - q} = 2 + \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(1 - q, 1 - q) - 1}{q}. \end{aligned}$$

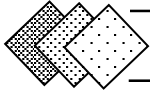
به این صورت حکم ثابت می شود. □

بنابراین اساساً برای بررسی همبستگی دمی، باید شیب مفصل<sup>۱</sup> را هنگام نزدیک شدن به نقاط  $(0, 0)$  و  $(1, 1)$  در نظر بگیریم. حال اگر شیب مفصل از عدد ۱ که دلالت بر حالت استقلال دارد، بیشتر باشد، آن گاه مفصل، نمایانگر وابستگی دمی است و هر چه این شیب بیشتر باشد وابستگی دمی بیشتری وجود خواهد داشت.

حال در این قسمت قضیه ی ۳-۴-۱ را برای مفصل ارشمیدسی مستقیماً بیان می کنیم.

(\*) نتیجه ۳-۴-۱ (نلسن، ۲۰۰۶): فرض کنید  $C$  مفصل ارشمیدسی با مولد  $\varphi \in \Omega$  باشد، آن -

<sup>1</sup> the slope of the copula



گاه روابط (۳۰-۳) و (۳۱-۳) را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{(-1)}(2\varphi(q))}{q} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(-1)}(2x)}{\varphi^{(-1)}(x)}, \quad (33-3)$$

$$\lambda_u = 2 + \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{\varphi^{(-1)}(2\varphi(q)) - 1}{1 - q} = 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{(-1)}(2x) - 1}{1 - \varphi^{(-1)}(x)}. \quad (34-3)$$

اثبات:

همان طور که در فصل دوم بیان شد، مفصل ارشمیدسی با تابع مولد  $\varphi$ ، به فرم زیر تعریف می شود:

$$\forall u, v \in I^2, \quad C(u, v) = \varphi^{(-1)}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

لذا با جایگذاری آن در روابط (۳۰-۳) و (۳۱-۳) و تغییر متغیر  $q = \varphi^{(-1)}(x)$ ، روابط (۳۳-۳) و

(۳۴-۳) به دست می آیند. ■

**مثال ۳-۴-۱** (اشمیت، ۲۰۰۶): همبستگی های دمی برای مفصل های کلیتون و گامبل که عضو

خانواده ی مفصل های ارشمیدسی هستند، به سادگی محاسبه می شوند.

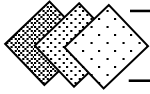
$I$ : مفصل کلیتون را در نظر بگیرید:

$$C_{\theta}^{cl}(u, v) = (\max\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0\})^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta \in [-1, \infty) - \{0\}.$$

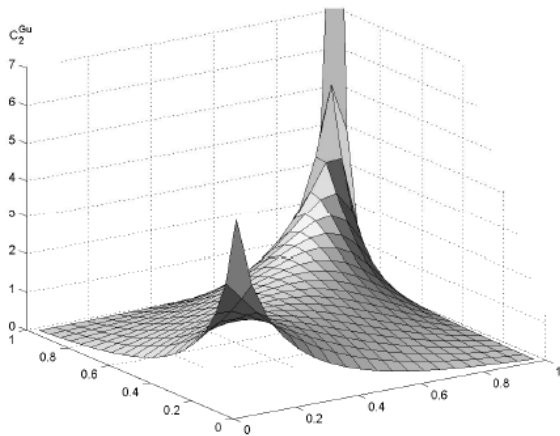
بنا به شکل ۳-۳ هیچ همبستگی دمی بالایی وجود ندارد. ولی ضریب همبستگی دمی پایینی با توجه به

رابطه ی (۳۰-۳) به روش زیر محاسبه می شود:

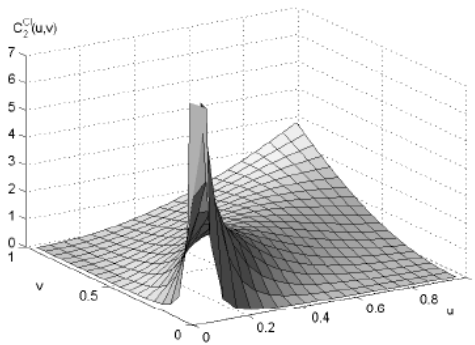
$$\begin{aligned} \lambda_l &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{(2q^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}}{q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{2 - q^{\theta}}{q^{\theta}}\right)^{-\frac{1}{\theta}}}{q} = \lim_{q \rightarrow 0^+} (2 - q^{\theta})^{-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$



اکنون با حدگیری  $\lambda_1 = 2^{-\frac{1}{\theta}}$  به دست می آید. بنابراین برای  $\theta > 0$ ، مفصل کلیتون دارای همبستگی دمی پایینی است. همچنین وقتی  $\theta \rightarrow \infty$ ، همبستگی دمی پایینی به سمت عدد ۱ میل می کند. علت آن است که مفصل کلیتون، هنگامی که  $\theta$  به سمت بی نهایت میل می کند، به مفصل هماهنگی نزدیک می شود.



(ب)



(الف)

شکل ۳-۳: چگالی مفصل کلیتون به ازای  $\theta = 2$  (الف) و چگالی مفصل گامبل به ازای  $\theta = 2$  (ب)

(\*) II: همانطور که در شکل ملاحظه می کنید برای مفصل گامبل که به صورت

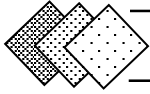
$$C_{\theta}^{GU}(u, v) = \exp \left[ - \left( (-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right], \quad \theta \in [1, \infty)$$

تعریف می شود برعکس مفصل کلیتون، همبستگی دمی پایینی وجود ندارد اما با اثباتی پیچیده تر

می توان همبستگی دمی بالایی آن را به صورت زیر و با استفاده از رابطه ی (۴-۳۱) به دست آورد:

$$\lambda_u = 2 + \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(1-q, 1-q) - 1}{q}$$





$$\begin{aligned}
 &= \gamma + \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\exp \left[ - \left( (-\text{Ln}(1-q))^\theta + (-\text{Ln}(1-q))^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right] - 1}{q} \\
 &= \gamma + \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\exp \left[ -2^{\frac{1}{\theta}} (-\text{Ln}(1-q)) \right] - 1}{q} = \gamma + \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\exp \left[ \text{Ln}(1-q)^{2^{\frac{1}{\theta}}} \right] - 1}{q} .
 \end{aligned}$$

حال با توجه به این که حد فوق حالت  $\theta > 1$  دارد، از قاعده ی هوییتال استفاده کرده و داریم:

$$\lambda_u = \gamma + \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{\theta}} \cdot \left( \frac{-1}{1-q} \right) \exp \left[ \text{Ln}(1-q)^{2^{\frac{1}{\theta}}} \right]}{1} = \gamma - \gamma^{\frac{1}{\theta}}$$

همانطور که ملاحظه می کنید؛ مفصل گامبل برای  $\theta > 1$ ، وابستگی دمی بالایی را نشان می دهد.

این مثال تأییدی بر نمودار آن ها می باشد، که وجود همبستگی دمی پایینی را برای مفصل کلیتون

و همبستگی دمی بالایی را برای مفصل گامبل پیشنهاد می دهد.

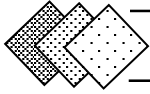
در جدول ۲-۳ مقادیر ضرایب همبستگی دمی برای مفصل های ارشمیدسی بیان شده اند.

جدول ۲-۳: مقادیر ضرایب همبستگی دمی برای مفصل های ارشمیدسی علی-میخائیل-حق، کلیتون، فرانک و گامبل

خانواده	پارامتر	$\lambda_l$	$\lambda_u$
علی-میخائیل-حق	$\theta \in (0, 1)$	0	0
کلیتون	$\theta \in (0, \infty)$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	0
فرانک	$\theta \in (0, \infty)$	0	0
گامبل	$\theta \in [1, \infty)$	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$

شایان توجه است که در برخی از خانواده ها، همبستگی دمی بالایی و پایینی صفر می باشد به این

مفهوم که به طور مجانبی مستقل هستند. به گزاره زیر توجه کنید.



گزاره ۳-۴-۱: برای هر بردار تصادفی  $(X_1, X_2)$  با مفصل سینوسی

$$\forall (u, v) \in I^2, \quad C_{\Psi}(u, v) = uv + \int_0^u \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \int_0^v \sin(\Psi^{-1}(t)) dt.$$

هر دو ضریب همبستگی دمی بالایی و پایینی برابر صفر هستند.

اثبات:

با توجه به رابطه ی (۳-۳۰)، داریم

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C_{\Psi}(q, q)}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + q^2 + \left( \int_0^q \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \right)^2}{1 - q}. \end{aligned}$$

با حدگیری و توجه به قضیه ی ۲-۱۰-۱ به حالت ۰ خواهیم رسید و لذا با استفاده از قاعده ی

هوپیتال خواهیم داشت

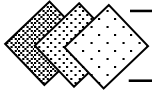
$$\lambda_u = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{-2 + 2q + 2 \sin(\Psi^{-1}(q)) \int_0^q \sin(\Psi^{-1}(t)) dt}{-1} = 0.$$

همچنین با توجه به رابطه ی (۳-۳۰) خواهیم داشت:

$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{q^2 + \left( \int_0^q \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \right)^2}{q}.$$

حال به طور مشابه با استفاده از قضیه ی ۲-۱۰-۱ و قاعده ی هوپیتال، داریم

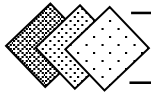
$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0^+} \left[ 2q + 2 \sin(\Psi^{-1}(q)) \int_0^q \sin(\Psi^{-1}(t)) dt \right] = 0. \quad \square$$



ملاحظه می کنید، گزاره ی فوق بیانگر این مطلب است که هر بردار تصادفی  $(X_1, X_2)$  با مفصل سینوسی، به طور مجانبی مستقل است.

فصل ۲۰

غیر تعویض پذیری



## ۴-۱ مقدمه

در این فصل با مفاهیم نسبتاً جدیدی، تحت عناوین تعویض پذیری، غیرتعویض پذیری و اندازه‌ی غیرتعویض پذیری که از مفهوم قدیمی تر تقارن ناشی شده است، آشنا می‌شوید. بدین منظور، در ابتدا برای یادآوری، خلاصه‌ای از مفهوم تقارن ارائه می‌کنیم.

## ۴-۱-۱ تقارن

**تعریف ۴-۱-۱:** اگر  $X$  یک متغیر تصادفی و  $a$  یک عدد حقیقی باشد، می‌گوییم  $X$  حول  $a$  متقارن است اگر توابع توزیع متغیرهای تصادفی  $X - a$  و  $a - X$  یکسان باشند یا به عبارتی اگر برای هر  $x \in R$  داشته باشیم:

$$P[X - a \leq x] = P[a - X \leq x]$$

زمانی که  $X$  پیوسته با تابع توزیع  $F$  باشد، تساوی فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$F(a + x) = \bar{F}(a - x)$$

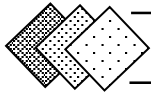
توجه کنید زمانی که  $F$  ناپیوسته باشد تساوی فقط در نقاط پیوسته  $F$  برقرار است.

حال پرسشی در اینجا مطرح می‌شود که "تقارن برای زوج متغیرهای تصادفی  $(X, Y)$  حول نقطه‌ی  $(a, b)$  یا به عبارتی در حالت دومتغیره به چه مفهوم است؟" پاسخ این پرسش در تعریف زیر، که به انواع مختلف تقارن در حالت دومتغیره پرداخته است، یافت می‌شود.

**تعریف ۴-۱-۲:** فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی هستند و  $(a, b)$  نقطه‌ای در  $R^2$  باشد.

۱-  $(X, Y)$  دارای تقارن حاشیه‌ای<sup>۱</sup> حول  $(a, b)$  است، اگر  $X$  و  $Y$  به ترتیب حول  $a$  و  $b$  متقارن باشند.

<sup>1</sup> Marginally symmetric



۲-  $(X, Y)$  دارای تقارن شعاعی<sup>1</sup> حول  $(a, b)$  است اگر تابع توزیع توأم  $X - a$  و  $Y - b$  با تابع

توزیع توأم  $a - X$  و  $b - Y$  یکسان باشد، به عبارتی

$$H(X - a, Y - b) = H(a - X, b - Y)$$

۳-  $(X, Y)$  دارای تقارن توأم<sup>2</sup> حول  $(a, b)$  است، اگر چهار جفت متغیرهای تصادفی زیر دارای تابع

توزیع توأم یکسان باشند:  $(X - a, Y - b)$ ،  $(X - a, b - Y)$ ،  $(X - a, Y - b)$  و  $(a - X, b - Y)$

$Y$ .

تعریف ۴-۱-۲ بر اساس توابع توزیع توأم و کناری ذکر شد، می‌توانید تعمیم تعریف فوق را بر

مبنای مفصل در نلسن (۲۰۰۶) مطالعه کنید. اما شکل دیگری از تقارن تعویض‌پذیری<sup>3</sup> نام دارد که به

طور کامل به آن خواهیم پرداخت.

## ۴-۲ تعویض پذیری

مقدمه‌ی این مبحث توسط دی‌فینتی<sup>4</sup> (۱۹۳۰) مطرح شد و از آن پس متغیرهای تصادفی تعویض‌پذیر

کاربردهای مهمی در بسیاری از مباحث آماری از جمله قوانین حدی، قضیه‌ی مقدار فرین و آمار بیزی پیدا

کردند. (برای اطلاعات بیشتر در خصوص کاربردها و خصوصیات به گالامبوس<sup>5</sup> (۱۹۸۲) مراجعه کنید)

**تعریف ۴-۲-۱** (نلسن، ۲۰۰۷): متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  را "تعویض‌پذیر" گویند، هرگاه بردارهای

$(X, Y)$  و  $(Y, X)$  دارای توزیع یکسان (هم‌توزیع) باشند. به عبارتی اگر تابع توزیع توأم  $X$  و  $Y$  را  $H$  در نظر

بگیریم آن‌گاه برای هر  $x, y \in \bar{R}^2$  تساوی زیر برقرار باشد:

$$H(x, y) = H(y, x).$$

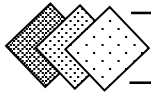
<sup>1</sup> Radially symmetric

<sup>2</sup> Jointly symmetric

<sup>3</sup> Exchangeability

<sup>4</sup> de Finetti

<sup>5</sup> Galambos



واضح است که متغیرهای تصادفی تعویض پذیر باید هم توزیع باشند یا به عبارتی دارای تابع توزیع یک متغیره‌ی مشترک باشند. برای متغیرهای تصادفی هم توزیع، تعویض پذیری یکسان با تقارن در مفصل آن‌ها تعریف می‌شود که در قضیه‌ی زیر ملاحظه می‌کنید.

**قضیه ۴-۲-۱** (نلسن، ۲۰۰۶): فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع توزیع توأم

$H$  و به ترتیب دارای توابع کناری  $F$  و  $G$  و مفصل  $C$  باشند. آن گاه  $X$  و  $Y$  تعویض پذیر هستند، اگر و تنها اگر  $F = G$  و برای هر  $(u, v) \in I^2$  داشته باشیم

$$C(u, v) = C(v, u). \quad (1-4)$$

لازم به ذکر است زمانی که برای هر  $(u, v) \in I^2$  رابطه‌ی (۴-۱) برقرار باشد، می‌توان گفت  $C$  متقارن است.

**مثال ۴-۲-۲** (نلسن، ۲۰۰۶): اگر چه متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع، از آن جا که مفصل

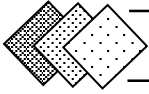
آن‌ها،  $\Pi$ ، متقارن است، همواره تعویض پذیر هستند، اما عکس این مطلب درست نیست. به عبارتی متغیرهای تصادفی تعویض پذیر هم توزیع، لزوماً مستقل نیستند. برای اثبات این مسئله، مثال ۱-۶-۲ را در نظر بگیرید. اگر دقت کنید، واضح است که  $C(u, v) = C(v, u)$  و همچنین  $F = G$ . بنابراین  $(X, Y)$  تعویض پذیر هستند، اما با وجود هم توزیعی، مستقل نیستند. ■

حال که با مفهوم تعویض پذیری تا حدودی آشنا شدید، مطلب را از منظر دیگر بررسی می‌کنیم.

یعنی زمانی که  $X$  و  $Y$  غیر تعویض پذیر باشند و برای برخی از  $x, y \in \bar{R}^2$  داشته باشیم

$$H(x, y) \neq H(y, x).$$

بنابراین می‌توان سوپریمم  $|H(x, y) - H(y, x)|$  را به عنوان اندازه‌ای برای مقدار یا درجه‌ی غیر-



تعویض پذیری 1  $X$  و  $Y$  در نظر گرفت. این مقدار می تواند برابر 1 باشد. برای مثال، زمانی که تکیه گاه های  $X$  و  $Y$  به ترتیب زیر مجموعه هایی از  $(0, 1)$  و  $(1, 2)$  باشند، آن گاه با توجه به ویژگی دوم تابع توزیع توأم در تعریف 1-4-5، داریم  $H(1, 2) = 1$  و  $H(2, 1) = 0$ .

اگر  $X$  و  $Y$  پیوسته و هم توزیع باشند، مجموعه مقادیر  $|H(x, y) - H(y, x)|$ ، برای  $x$  و  $y$  حقیقی، مشابه مجموعه مقادیر  $|C(u, v) - C(v, u)|$ ، برای  $u$  و  $v$  در  $I$  است، به طوری که  $C$  مفصل مربوط به  $X$  و  $Y$  را مشخص می کند. همانطور که ملاحظه کردید در قضیه 4-2-1، این تشابه را برای حالت تعویض پذیری نیز بیان کردیم.

در ادامه به معرفی ساختار یک اندازه برای غیر تعویض پذیری و ماکزیمم آن می پردازیم بدین منظور به دو مفصل زیر احتیاج خواهیم داشت:

$$C_1(u, v) = \min(u, v, (u - 2/3)^+ + (v - 1/3)^+), \quad (2 - 4)$$

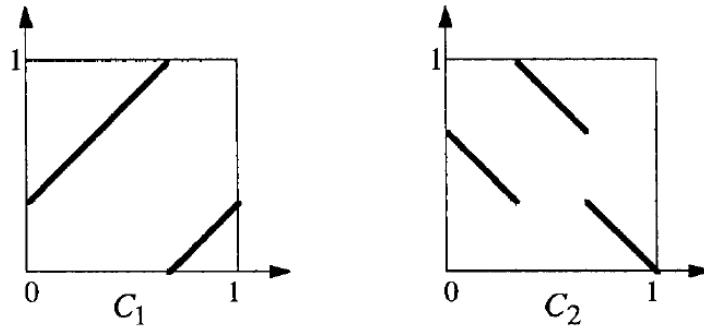
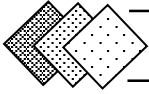
$$C_2(u, v) = \max(0, u + v - 1, 1/3 - (1/3 - u)^+ - (2/3 - v)^+), \quad (3 - 4)$$

به طوری که  $x^+ = \max(x, 0)$  است. با توجه به تعریف 1-7-2، بدیهی است که  $C_1$  و  $C_2$  تکین هستند و تکیه گاه  $C_1$  شامل دو بخش خطی در  $I^2$  می باشد که یکی از آنها خط واصل میان دو نقطه  $(0, 1/3)$  و  $(2/3, 1)$  و دیگری خط واصل میان دو نقطه  $(2/3, 1)$  و  $(1, 1/3)$  می باشد. تکیه گاه  $C_2$  نیز از سه قسمت خطی در  $I^2$  تشکیل شده است که به ترتیب خطوط، دو نقطه  $(0, 2/3)$  به  $(1/3, 1/3)$ ،  $(1/3, 1)$  به  $(2/3, 2/3)$  و  $(2/3, 1/3)$  به  $(1, 0)$  را به یکدیگر وصل می کنند (نلسن، 2007).

در شکل 4-1 تکیه گاه های  $C_1$  و  $C_2$  را مشاهده می کنید.

<sup>1</sup> Nonexchangeability



شکل ۴-۱: تکیه‌گاه‌های  $C_1$  و  $C_2$ 

### ۳-۴ اندازه‌ی غیر تعویض پذیری

در ابتدا نشان می‌دهیم که کران بالای مقدار  $|C(u, v) - C(v, u)|$  برابر با  $1/3$  است.

لم ۳-۴-۱ (نلسن، ۲۰۰۷): برای هر مفصل  $C$  و هر  $u, v \in I$  داریم

$$|C(u, v) - C(v, u)| \leq \min(u, v, 1 - u, 1 - v, |u - v|) \quad (4 - 4)$$

اثبات:

در ابتدا فرض کنید  $u \leq v$ ، لذا کفایت ثابت کنیم

$$|C(u, v) - C(v, u)| \leq \min(u, 1 - v, v - u). \quad (5 - 4)$$

با توجه به ویژگی اول تعریف مفصل

$$|C(u, v) - C(v, u)| \leq \max(C(u, v), C(v, u)) \leq \max(C(u, 1), C(1, u)) = u$$

و با استفاده از ویژگی دوم مفصل و تعریف  $\circ$  داریم  $V_C([v, 1] \times [u, 1]) \geq \circ$

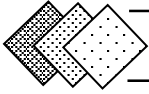
$$C(1, 1) - C(v, 1) - C(1, u) + C(v, u) = 1 - v - u + C(v, u) \geq \circ,$$

می‌توان گفت

$$C(u, v) - C(v, u) \leq u - C(v, u) \leq 1 - v.$$

به صورت مشابه، فقط کفایت جای  $u$  و  $v$  را در  $V_C$  تغییر داده و به دست آورد

$$C(v, u) - C(u, v) \leq 1 - v.$$



بنابراین با توجه به تعریف قدرمطلق داریم

$$|C(u, v) - C(v, u)| \leq 1 - v. \quad (6 - 4)$$

همچنین با توجه به اینکه  $V_C([u, 1] \times [u, v]) \geq 0$  به دست می آوریم

$$C(1, v) - C(1, u) - C(u, v) + C(u, u) = v - u - C(u, v) + C(u, u) \geq 0.$$

بنابراین

$$C(u, v) - C(v, u) \leq C(u, v) - C(u, u) \leq v - u.$$

به صورت مشابه با استفاده از  $V_C([v, 1] \times [v, u]) \geq 0$  داریم

$$C(v, u) - C(u, v) \leq v - u.$$

بنابراین

$$|C(u, v) - C(v, u)| \leq v - u. \quad (7 - 4)$$

در نتیجه با توجه به فرض  $u \leq v$  و دو نامساوی (۴-۶) و (۴-۷)، رابطه‌ی (۴-۵) ثابت می شود البته باید برای حالتی که  $v \leq u$  نیز مراحل فوق را به صورت کاملاً مشابه انجام داد و در این صورت اثبات کامل می شود.  $\square$

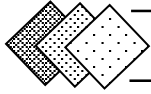
حال با توجه به این که نمودار  $z = \min(u, 1 - v, v - u)$  برای  $0 \leq u \leq v \leq 1$  شامل سه رویه‌ی یک چهاروجهی با پایه‌ی مثلثی شکل به طوری که یکدیگر را در نقطه‌ی  $(1/3, 2/3, 1/3)$  قطع می کنند و همچنین  $z = \min(u, 1 - v, u - v)$  نیز برای  $0 \leq v \leq u \leq 1$  دارای نموداری مشابه است، می توان برای هر  $u, v \in I$  نتیجه گرفت

$$\min(u, v, 1 - u, 1 - v, |u - v|) \leq \frac{1}{3}.$$

علاوه بر این برای مفصل‌های  $C_1$  و  $C_2$  در (۴-۲) و (۴-۳)، نیز به دست می آید:

$$C_1(1/3, 2/3) - C_1(1/3, 2/3) = C_2(1/3, 2/3) - C_2(1/3, 2/3) = 1/3.$$

بنابراین می توان قضیه‌ی زیر را مطرح کرد.



**قضیه ۱-۳-۴** (نلسن، ۲۰۰۷): برای هر مفصل  $C$  داریم

$$\sup_{u,v \in I} |C(u,v) - C(v,u)| \leq \frac{1}{3}. \quad (8-4)$$

که بهترین نامساوی ممکن<sup>1</sup> می باشد.

**نتیجه ۱-۳-۴** (نلسن، ۲۰۰۷): برای هر تابع توزیع دومتغیره  $H$  با توابع توزیع کناری دلخواه،

داریم

$$\sup_{x,y \in R} |H(x,y) - H(y,x)| \leq \frac{1}{3}.$$

که بهترین نامساوی ممکن می باشد.

حال با توجه به نامساوی (۸-۴) در قضیه ۱-۳-۴، تعریف زیر را ارائه می دهیم:

**تعریف ۱-۳-۴** (نلسن، ۲۰۰۷): فرض کنید  $C$  یک مفصل باشد. "درجه‌ی غیر تعویض پذیری"  $C$ ،

که با نمادهای  $\delta(C)$  و  $\mu_\infty(C)$  نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می شود

$$\mu_\infty(C) = \delta(C) = 3 \sup_{u,v \in I} |C(u,v) - C(v,u)|.$$

درجه‌ی غیر تعویض پذیری یک مفصل، می تواند اندازه‌ی نامتقارن بودن یک مفصل را نیز نشان دهد.

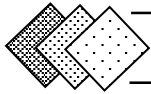
از این رو  $\delta(C) = 0$ ، اگر و تنها اگر  $C(u,v) = C(v,u)$ .

اگر  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع توزیع دلخواه و مفصل  $C$  باشند آن گاه  $X$  و  $Y$

تعویض پذیرند، اگر و تنها اگر  $\delta(C) = 0$ . در حالتی دیگر داریم:

**تعریف ۲-۳-۴** (نلسن، ۲۰۰۷): اگر  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع توزیع دلخواه و

<sup>1</sup> Best-possible



مفصل  $C$  باشند، به طوری که  $\delta(C) = 1$ ، آن گاه  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی غیر تعویض پذیر ماکزیمال<sup>۱</sup> و  $C$  یک مفصل غیر تعویض پذیر ماکزیمال نامیده می شوند.

برای مثال مفصل های  $C_1$  و  $C_2$  در (۲-۴) و (۳-۴)، مفصل های غیر تعویض پذیر ماکزیمال می باشند. برای اطلاعات بیشتر در خصوص مطالب فوق، به (نلسن ۲۰۰۷ و کلیمنت<sup>۲</sup>، ۲۰۰۶) مراجعه کنید.

حال به منظور آشنایی هر چه بیشتر با اندازه‌ی غیر تعویض پذیری به بررسی چند نمونه اندازه‌ی غیر تعویض پذیری برای متغیرهای تصادفی مختلف و خانواده‌های گوناگون می پردازیم.

#### ۴-۴ اندازه‌ی غیر تعویض پذیری برای متغیرهای تصادفی وابسته‌ی ربعی منفی

در ابتدا به معرفی متغیرهای تصادفی وابسته‌ی ربعی منفی<sup>۳</sup> (NQD) می پردازیم.

**تعریف ۴-۴-۱** (لهمن، ۱۹۶۶): دو متغیر تصادفی پیوسته  $X$  و  $Y$  را NQD گوئیم اگر و تنها اگر،

برای هر دو عدد حقیقی  $x, y \in R$  داشته باشیم:

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y). \quad (9 - 4)$$

از این رو خانواده‌ی مفصل های مربوط به متغیرهای فوق را NQD نامیده و با نماد  $C_{NQD}$  شناخته

می شوند.

**نکته ۴-۴-۱:** با توجه به رابطه‌ی (۹-۴) برای مفصل های  $C_{NQD}$  بدیهی است که همواره رابطه‌ی

زیر برقرار است:

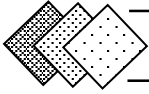
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad C_{NQD}(x, y) \leq \Pi(x, y) = xy. \quad (10 - 4)$$

حال اندازه‌ی  $\mu_\infty$  در خانواده‌ی  $C_{NQD}$  در قالب قضیه‌ی زیر محاسبه می شود.

<sup>1</sup> Maximally nonexchangeability

<sup>2</sup> Klement

<sup>3</sup> Negatively quadrant dependent



(\*) قضیه ۴-۴-۱ (دورانت و پاپینی<sup>۱</sup>، ۲۰۱۰): خانواده‌ی مفصل‌های  $C_{NQD}$  را در نظر بگیرید در

این صورت:

$$\mu_{\infty}(C_{NQD}) = 3(\sqrt{5} - 2) \approx 0.708.$$

اثبات:

فرض کنید  $C$  بزرگترین عضو تعویض‌پذیر در  $C_{NQD}$  باشد بنابراین می‌توان بدون این که به کلیت مسأله خللی وارد شود، می‌توان فرض کرد  $x, y \in ]0, 1[$  و  $x < y$  وجود دارد به طوری که

$$\mu_{\infty}(C) = 3(C(x, y) - C(y, x)).$$

برای  $x \in [0, 1]$  داده‌شده، فرض کنید  $h_x$  و  $v_x$  به ترتیب بخش‌های افقی و عمودی مفصل  $C$ ،

تعریف‌شده در تعریف ۱-۵-۳ باشند. هدف، تعیین  $(x, y)$  و مقدار  $\mathcal{E}(x, y) = C(x, y) - C(y, x)$

می‌باشد. برای ثابت  $x$  و  $\alpha \in [\max\{2x - 1, 0\}, x^2]$  که بازه‌ی  $\alpha$  با توجه به کران-

های مفصل و رابطه‌ی (۴-۱۰) مشخص شده است، فرض کنید

$$h_x(x) = \alpha, \quad (11 - 4)$$

باشد. سعی داریم

$$y \in [x, 1] \quad (12 - 4)$$

را طوری پیدا کنیم که نگاشت  $t \mapsto (v_x(t) - h_x(t))$  بیشترین مقدار را کسب کند.

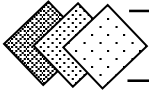
بدین منظور برای  $\alpha \leq t \leq y$  تعریف می‌کنیم

$$h_x(t) = \alpha. \quad (13 - 4)$$

به طوری که  $y$  تا حد امکان بزرگ باشد و از این‌رو  $h_x$  بزرگترین دامنه‌ی ممکن را که حداکثر می‌تواند  $[0$

$1]$  باشد، دربر بگیرد.

<sup>1</sup> Durante and Papini



با توجه به نامساوی لیپشیتز برای مفصل در قضیه ۱-۵-۲، تعریف بخش افقی مفصل و رابطه‌ی

(۱۲-۴) به دست می‌آید:

$$2 - x - y = 1 - y + 1 - x \geq C(1,1) - C(y,x) = C(1,1) - h_x(y) = 1 - \alpha.$$

بنابراین (۱۴-۴)  $y \leq 1 - (x - \alpha)$  و با توجه به انتخاب  $C$ ، باید مقدار ماکزیمم  $\varepsilon$  را بیابیم؛

لذا بدین منظور باید کمترین مقدار را برای  $h_x(y)$  و بیشترین مقدار را برای  $v_x(y)$  در نظر گرفت.

از این‌رو:

$$h_x(t) = \begin{cases} \alpha, & t \in [x, 1 - (x - \alpha)] \\ t - 1 + x, & t \in [1 - (x - \alpha), 1] \end{cases}$$

از طرفی با استفاده‌ی مجدد از نامساوی لیپشیتز در مورد مفصل  $C$  و تعریف (۱-۵-۳)، داریم:

$$v_x(y) - \alpha = v_x(y) - h_x(x) = C(x,y) - C(x,x) \leq |x - x| + |x - y| = y - x$$

لذا با در نظر گرفتن تساوی (۴-۱۴) و جایگذاری می‌توان گفت:

$$v_x(y) \leq y - x + \alpha = 2\alpha + 1 - 2x \quad (15 - 4)$$

همچنین با توجه به این که مفصل مورد نظر  $C_{NQD}$  است لذا با توجه به رابطه‌ی (۴-۱۰) و

جایگذاری مقدار ماکزیمم  $y$  در نامساوی (۴-۱۴)، خواهیم داشت

$$v_x(y) \leq xy = x(1 - x + \alpha) \quad (16 - 4)$$

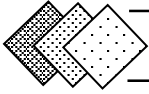
بنابراین با توجه به روابط (۴-۱۵) و (۴-۱۶) به دست می‌آید

$$v_x(y) = \begin{cases} x(1 - x + \alpha), & y - x \geq xy - \alpha \\ 2\alpha + 1 - 2x, & y - x < xy - \alpha \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \varepsilon(x,y) &= v_x(y) - h_x(y) \\ &= \begin{cases} x(1 - x + \alpha) - \alpha = (x - \alpha)(1 - x), & y - x \geq xy - \alpha \\ \alpha + 1 - 2x, & y - x < xy - \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

حال کفایت  $\alpha$  را طوری تعیین کنیم که  $\varepsilon$  بیشترین مقدار خود را کسب کند. به این منظور دو



حالت در نظر می‌گیریم:

✓ حالت اول:  $y - x \geq xy - \alpha$ . از آنجاکه با توجه به رابطه‌ی (۴-۱۴) داریم  $y = 1 - x + \alpha$  لذا

باجایگذاری می‌توان گفت:

$$1 - x + \alpha - x \geq x(1 - x + \alpha) - \alpha$$

و بعد از محاسباتی ساده خواهیم داشت

$$\alpha(2 - x) \geq 3x - 1 - x^2$$

و با توجه به این که  $3x - 1 - x^2 \geq 0$  هم‌ارز  $x \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  است. لذا می‌توان گفت

- اگر  $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ، آن‌گاه باید  $\alpha = 0$  انتخاب شود؛

- در غیر این صورت،  $\alpha = \frac{3x-1-x^2}{2-x}$  انتخاب می‌شود.

✓ حالت دوم:  $y - x < xy - \alpha$ . همانند حالت اول، با جایگذاری  $y$  از رابطه‌ی (۴-۱۴)، به دست

می‌آید  $\alpha(2 - x) < 3x - 1 - x^2$ . از این‌رو بهترین انتخاب  $\alpha = \frac{3x-1-x^2}{2-x}$  است.

حال بنا به دو حالت فوق، نتایج را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

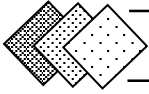
- برای  $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  و  $y = 1 - x$ :  $\mathcal{E}(x, y) = x(1 - x)$

- برای  $x > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  و  $y = 1 - x + \alpha = \frac{1}{2-x}$ :  $\mathcal{E}(x, y) = \frac{(x-1)^2}{2-x}$

از آن‌جا که  $\mathcal{E}(x, y) = x(1 - x)$  در دامنه‌اش صعودی و  $\mathcal{E}(x, y) = \frac{(x-1)^2}{2-x}$  در دامنه‌اش نزولی

است، از این‌رو  $\mathcal{E}(x, y)$  بیشترین مقدار خود را در  $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  می‌گیرد و در نتیجه  $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

بنابراین با جایگذاری به دست می‌آید:  $\mathcal{E}(x, y) = \sqrt{5} - 2$  و لذا حکم ثابت می‌شود. □



## ۴-۵ اندازه‌ی غیر تعویض‌پذیری برای متغیرهای تصادفی به طور تصادفی نزولی

در ابتدا به معرفی متغیرهای تصادفی به طور تصادفی نزولی<sup>۱</sup> (SD) می‌پردازیم.

**تعریف ۴-۵-۱** (لهمن، ۱۹۶۶): دو متغیر تصادفی پیوسته  $X$  و  $Y$  را SD نامند، اگر همبستگی

میان آن‌ها از ویژگی‌های زیر پیروی کند:

-  $Y$  به‌طور تصادفی نزولی در  $X$  باشد به عبارتی،  $P(Y > y | X = x)$  برای هر  $y$ ، تابعی نزولی از  $x$

باشد.

-  $X$  به‌طور تصادفی نزولی در  $Y$  باشد به عبارتی،  $P(X > x | Y = y)$  برای هر  $x$ ، تابعی نزولی از  $y$

باشد.

از این‌رو خانواده‌ی مفصل‌های مربوط به متغیرهای تصادفی به‌طور تصادفی نزولی که برای هر  $x \in [0, 1]$

بخش‌های افقی و عمودی ( $h_x^C$  و  $v_x^C$ ) آن محدب<sup>۲</sup> هستند را SD نامیده و با نماد  $C_{SD}$  مشخص می‌شود.

**نکته ۴-۵-۱** (نلسن، ۲۰۰۶): اگر  $C \in C_{SD}$ ، آن‌گاه خواهیم داشت:  $C \in C_{NQD}$ .

**(\*) قضیه ۴-۵-۱** (دورانتو و پاپینی، ۲۰۱۰): خانواده‌ی مفصل‌های  $C_{SD}$  را در نظر بگیرید، در

این صورت:

$$\mu_{\infty}(C_{SD}) = 3(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0.514.$$

**اثبات:**

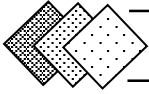
فرض کنید  $C$  عضوی از خانواده‌ی مفصل‌های  $C_{SD}$  باشد. بدون اینکه خللی وارد شود، می‌توان برای

برخی  $x, y \in (0, 1)$  به طوری که  $x < y$  باشد در نظر گرفت

<sup>1</sup> Stochastically decreasing(SD)

<sup>2</sup> Convex





$$\mu_{\infty}(C) = 3(C(x, y) - C(y, x))$$

قرار دهید  $\varepsilon(x, y) = C(x, y) - C(y, x)$ . لذا کفایت برای هر نقطه‌ی  $(x, y)$  عضو مجموعه‌ی

$$H = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x < y\}.$$

ثابت کنیم

$$\varepsilon(x, y) \leq a = 3 - 2\sqrt{2}. \quad (17 - 4)$$

با توجه به (۱۷-۴) و نامساوی لیپ‌شیتز در قضیه‌ی (۱-۵-۲) داریم:

$$C(x, y) - C(y, x) \leq C(x, y) - C(x, x) \leq |x - x| + |x - y| = y - x \leq a,$$

لذا  $\varepsilon(x, y) \leq a$  زمانی رخ می‌دهد که (۱۸-۴)  $y \leq x + a$ .

به طور مشابه، با توجه به (۱۷-۴) و خاصیت اول مفصل و تعریف  $H$  داریم:

$$C(x, y) - C(y, x) \leq C(x, 1) - C(y, x) = x - C(y, x) \leq 1 - y \leq a,$$

از این رو  $\varepsilon(x, y) \leq a$  نیز زمانی رخ می‌دهد که (۱۹-۴)  $y \geq 1 - a$ .

طبق محاسبات مارشال و آلکین<sup>۱</sup> (۱۹۷۹) بر روی بخش‌های افقی و عمودی محدب مفصل  $C$ ، برای

ثابت  $x$  داریم:

$$\frac{v_x^C(x)}{x} \leq \frac{v_x^C(y) - v_x^C(x)}{y - x} \leq \frac{v_x^C(1) - v_x^C(x)}{1 - x},$$

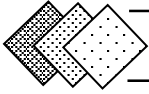
که با توجه به تعریف (۱-۵-۳) برابر است با

$$\frac{C(x, x)}{x} \leq \frac{C(x, y) - C(x, x)}{y - x} \leq \frac{x - C(x, x)}{1 - x}. \quad (20 - 4)$$

حال برای بخش افقی و ثابت  $y$  همانند حالت عمودی داریم

$$\frac{h_x^C(x)}{x} \leq \frac{h_x^C(y) - h_x^C(x)}{y - x},$$

<sup>1</sup> Marshall And Olkin



به طور مشابه برابر است با

$$\frac{C(x, x)}{x} \leq \frac{C(y, x) - C(x, x)}{y - x}. \quad (21 - 4)$$

بنابراین با اضافه و کم کردن مقدار  $C(x, x)$  در صورت کسر زیر و استفاده از نامساوی‌های (۴-۲۰) و

(۴-۲۱) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \frac{C(x, y) - C(y, x)}{y - x} &= \frac{C(x, y) - C(x, x)}{y - x} + \frac{C(x, x) - C(y, x)}{y - x} \leq \frac{x - C(x, x)}{1 - x} - \frac{C(x, x)}{x} \\ &= \frac{x^2 - C(x, x)}{x(1 - x)} \leq \frac{x}{1 - x}. \end{aligned}$$

از این رو با توجه به تعریف  $\varepsilon(x, y)$  بدیهی است که

$$\varepsilon(x, y) \leq \frac{x(y - x)}{1 - x} = g(x, y). \quad (22 - 4)$$

تابع  $g$  در داخل مجموعه‌ی  $K$  به فرم زیر، دارای نقطه‌ی بحرانی نمی‌باشد

$$K = \{(x, y) \in H \mid x + y \leq 1\}.$$

لذا ماکزیمم مقدار  $g$  در مجموعه‌ی  $K$  هنگامی رخ می‌دهد که  $y = 1 - x$  باشد، و با جایگذاری و مشتق-

گیری ماکزیمم مقدار  $g$  به‌ازای  $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، به دست می‌آید:

$$\max_{(x, y) \in K} g(x, y) = \max_{x \in [0, 1/2]} \frac{x(1 - 2x)}{1 - x} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

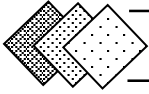
بنابراین طبق نامساوی (۴-۲۲) روی مجموعه‌ی  $K$ ، درستی رابطه زیر اثبات می‌شود:

$$\varepsilon(x, y) \leq a = 3 - 2\sqrt{2}.$$

حال باید برای سایر نقاط درستی رابطه‌ی فوق بررسی شود بدین منظور قرار دهید

$$L = \{(x, y) \in H \mid x + y \geq 1, x + a \leq y \leq 1 - a\} = L_1 \cup L_2$$

به طوری که



$$L_1 = \left\{ (x, y) \in L \mid y \leq \frac{1-4a}{2a-1}x + \frac{2a^2+2a-1}{2a-1} \right\},$$

$$L_2 = \left\{ (x, y) \in L \mid y \geq \frac{1-4a}{2a-1}x + \frac{2a^2+2a-1}{2a-1} \right\}.$$

با نگاه هندسی می توان گفت  $L$  مثلث یکانی است که رئوس آن نقاط زیر هستند:

$$(a, 1-a) \text{ و } \left(\frac{1-a}{2}, \frac{1+a}{2}\right) \text{ و } (1-2a, 1-a)$$

زمانی که  $L$  را توسط خط واصل بین دو نقطه‌ی  $(a, 1-a)$  با  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+a)$  تقسیم کنیم،  $L_1$  و  $L_2$

دو زیرمثلث  $L$  را تعیین می کنند لذا برای اینکه به ازای هر  $(x, y) \in L$  ثابت کنیم:  $\varepsilon(x, y) \leq a$  دو حالت را بررسی می کنیم.

✓ حالت اول:  $(x, y) \in L_1$ . برای هر  $(x, y) \in L$ ، با توجه به کران پایین هر مفصل و نکته‌ی (۴-۵-۱)،

رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$C(x, y) - C(y, x) \leq xy - (x + y - 1) = h(x, y). \quad (23-4)$$

از آن جا که تابع  $h$  هیچ نقطه‌ی بحرانی در مجموعه‌ی  $L_1$  ندارد سه گزینه‌ی زیر باید بررسی شود.

۱- اگر  $y = 1 - a$ ، آن گاه با جایگذاری در تساوی (۴-۲۳) داریم:  $h(x, y) = a(1-x) < a$

۲- اگر  $y = x + a$  آن گاه  $h(x, y) = x^2 + (a-2)x + 1 - a$  که نزولی است (در این ناحیه). از

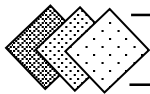
$$h(x, y) \leq h\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + a\right) = \frac{1-2a}{4} < a \text{ این رو}$$

$$۳- \text{ اگر } y = \frac{1-4a}{2a-1}x + \frac{2a^2+2a-1}{2a-1} \text{ آن گاه}$$

$$h(x, y) = 1 - x - \frac{2a-1+2a^2+(1-4a)x}{2a-1} + \frac{x(2a-1+2a^2+(1-4a)x)}{2a-1}.$$

و در این صورت  $h(x, y)$  مقدار ماکزیمم خود را به ازای  $x = \frac{-1+4a+2a^2}{2(-1+4a)}$  کسب کرده و خواهیم داشت

$$\max_{(x,y) \in L_1} h(x, y) = \frac{(-1+4a+2a^2)^2}{4(1-6a+8a^2)} \approx 0.168 < a.$$



بنابراین در حالت اول  $\varepsilon(x, y) \leq a$  می‌باشد.

✓ حالت دوم:  $(x, y) \in L_2$ . همانند قبل با توجه به محدب بودن بخش‌های عمودی و افقی  $C$  داریم

$$\frac{x + y - 1}{y} \leq \frac{C(y, x)}{y} \leq \frac{C(y, x) - C(x, x)}{y - x}, \quad (24 - 4)$$

و

$$\frac{C(x, y) - C(x, x)}{y - x} \leq \frac{C(x, 1) - C(x, x)}{1 - x} \leq \frac{x}{1 - x}. \quad (25 - 4)$$

بنابراین با کم کردن طرفین روابط (۲۴-۴) و (۲۵-۴) از یکدیگر، به دست می‌آید:

$$\frac{C(x, y) - C(y, x)}{y - x} \leq \frac{x}{1 - x} - \frac{x + y - 1}{y},$$

لذا با توجه به فرض خواهیم داشت

$$\varepsilon(x, y) = C(x, y) - C(y, x) = \left( \frac{x}{1 - x} - \frac{x + y - 1}{y} \right) (y - x) = h(x, y). \quad (26 - 4)$$

بنابراین هدف یافتن مقدار ماکزیمم  $h$  روی مجموعه‌ی  $L_2$  است. بعد از محاسبات ساده‌ی جبری روی

مشتق اول  $h$  نسبت به متغیرهای به ترتیب  $x$  و  $y$ ، مشخص می‌شود که بر روی  $L_2$  دارای نقطه‌ی بحرانی

نمی‌باشد؛ ازاینرو در این حالت نیز، سه مورد قابل بررسی است:

۱- اگر  $y = 1 - x$ ، آن‌گاه با توجه به قسمت‌های قبل اثبات، رابطه‌ی (۲۲-۴)، متوجه می‌شویم که

$$h(x, y) = g(x, y) \leq a.$$

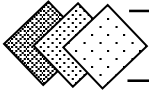
۲- اگر  $y = x + a$ ، آن‌گاه

$$h(x, x + a) = a \left( \frac{x}{1 - x} - \frac{-1 + a + 2x}{x + a} \right).$$

به راحتی می‌توان مشتق  $h(x, x + a)$  را نسبت به  $x$  به دست آورد:

$$\partial_x h(x, x + a) = a \left( \frac{1}{1 - x} + \frac{x}{(1 - x)^2} - \frac{2}{x + a} + \frac{-1 + a + 2x}{(x + a)^2} \right),$$





(\*قضیه ۴-۶-۱) (دورانته و میزار<sup>۱</sup>، ۲۰۱۰): برای هر مفصل مقدار فرین  $C$  داریم:

$$\mu_{\infty}(C) \leq 3 \cdot \frac{4^4}{5^5}.$$

$$\mu_{\infty}(C) = 3 \cdot \frac{4^4}{5^5}.$$

علاوه بر این اگر و تنها اگر،  $C \in \{C_1, C_2\}$  به طوری که

$$C_1(x, y) = \begin{cases} y, & x^2 \geq y \\ x\sqrt{y}, & 0.W \end{cases} \quad \text{یا} \quad C_2(x, y) = \begin{cases} x, & y^2 \geq x \\ y\sqrt{x}, & 0.W \end{cases}$$

اثبات:

فرض کنید  $C$  یک مفصل بی‌نهایت مقدار با تابع وابسته‌ی  $A$  به فرم (۴-۲۷) باشد.

هدف، تعیین مقدار

$$\begin{aligned} \delta_C &= \max_{(x,y) \in [0,1]^2} |C(x, y) - C(y, x)| \\ &= \max_{(x,y) \in [0,1]^2} \left| (xy)^{A\left(\frac{\log(x)}{\log(xy)}\right)} - (xy)^{A\left(\frac{\log(y)}{\log(xy)}\right)} \right|. \end{aligned}$$

با توجه به خاصیت تابع  $\log$ ، که  $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$  می‌توان گفت

$$\frac{\log(y)}{\log(xy)} = \frac{\log(xy) - \log(x)}{\log(xy)} = 1 - \frac{\log(x)}{\log(xy)}.$$

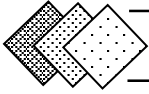
لذا

$$\delta_C = \max_{(x,y) \in [0,1]^2} \left| (xy)^{A\left(\frac{\log(x)}{\log(xy)}\right)} - (xy)^{A\left(1 - \frac{\log(x)}{\log(xy)}\right)} \right|.$$

فرض کنید  $\delta_C$  برای یک نقطه  $(x, y) \in ]0, 1[^2$  به دست آمده باشد، قرار دهید  $t = \frac{\log(x)}{\log(xy)}$  بدون

آن که به کلیت خللی وارد شود، فرض کنید  $0 < y < x < 1$ ، از این رو

<sup>1</sup> Durante And Mesiar



$$0 \leq \frac{\log(x)}{\log(xy)} \leq \frac{\log(x)}{\log(x)^2} = \frac{1}{2},$$

لذا داریم

$$t \in ]0, \frac{1}{2}[.$$

و در نظر بگیرید  $A(t) \leq A(1-t)$  باشد.

همچنین تابع وابسته  $A_\alpha$  را به صورت  $A_\alpha(s) = \max\{1-s, (1-\alpha)s + \alpha\}$  برای  $\alpha, s \in [0, 1]$  در

نظر گرفته، به طوری که  $g(s) = (1-\alpha)s + \alpha$  خط گذرنده از نقاط  $(t, A(t))$  و  $(1, 1)$  است و لذا

$$g(s) - A(t) = \frac{1 - A(t)}{1 - t}(s - t)$$

بنابراین

$$\alpha = \frac{A(t) - t}{1 - t}$$

طبق تعاریف دو تابع  $A(t)$  و  $A_\alpha(s)$  داریم:

$$A_\alpha(t) = \max\left\{1-t, \left(1 - \frac{A(t) - t}{1 - t}\right)t + \frac{A(t) - t}{1 - t}\right\} = A(t). \quad (28-4)$$

همچنین با توجه به محدب بودن  $A$  که هر پاره خط که هر دو نقطه‌ی تابع را به یکدیگر وصل کند بالای

نمودار تابع قرار می‌گیرد بنابراین با در نظر گرفتن نقاط  $t$  و  $1-t$  روی محور  $s$ ها و نقطه‌ی میانی  $1-t$  و

توجه به شکل (۲-۴)، سمت چپ، واضح است که

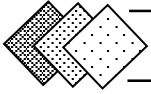
$$A(1-t) \leq A_\alpha(1-t) \quad (29-4)$$

در نتیجه‌ی روابط (۲۸-۴) و (۲۹-۴) داریم:

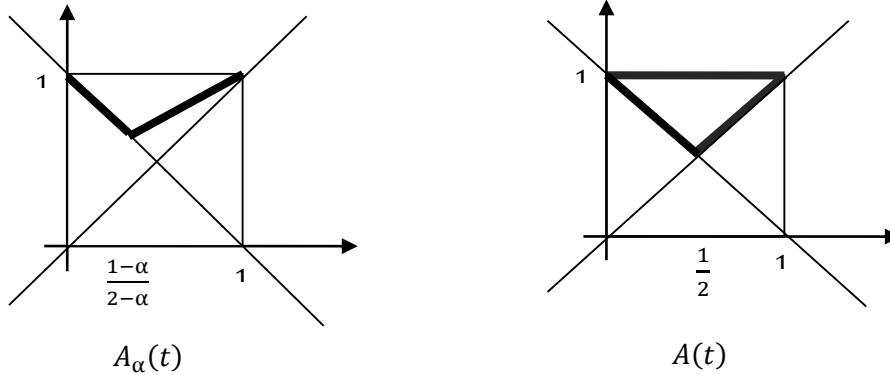
$$A_\alpha(t) - A_\alpha(1-t) \leq A(t) - A(1-t) \quad (30-4)$$

از آنجا که فرض کردیم  $A(t) \leq A(1-t)$ ، عبارت سمت راست در نامساوی (۳۰-۴) منفی است لذا

طبق خواص قدرمطلق خواهیم داشت



$$|A(t) - A(1-t)| \leq |A_\alpha(t) - A_\alpha(1-t)|$$



شکل ۴-۲: خطوط پررنگ در نمودار سمت راست ناحیه‌ای را مشخص می‌کند که تابع  $A(t)$  در آن قرار دارد و خطوط پررنگ در نمودار سمت چپ نمودار تابع  $A_\alpha(t)$  را نمایش می‌دهد.

از طرفی چون برای هر  $(x, y) \in ]0, 1[^2$ ، تابع  $(xy)^s$  نزولی است، و بنابراین طبق روابط (۴-۲۸) و (۴-۲۹) داریم

$$(xy)^{A_\alpha(1-t)} \leq (xy)^{A(1-t)}, \quad (xy)^{A(t)} = (xy)^{A_\alpha(t)}$$

از این رو

$$-(xy)^{A(1-t)} \leq -(xy)^{A_\alpha(1-t)},$$

$$(xy)^{A(t)} - (xy)^{A(1-t)} \leq (xy)^{A_\alpha(t)} - (xy)^{A_\alpha(1-t)}.$$

لذا برای هر  $0 \leq t \leq 1$  به دست می‌آید

$$|(xy)^{A(t)} - (xy)^{A(1-t)}| \leq |(xy)^{A_\alpha(t)} - (xy)^{A_\alpha(1-t)}|$$

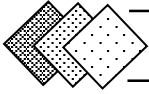
حال فرض کنید  $(t_\alpha, A_\alpha(t_\alpha))$  نقطه‌ی تقاطع یا فصل مشترک دو خط  $f(s) = 1 - s$  و  $g(s) =$

$(1 - \alpha)s + \alpha$  باشد که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$1 - s = (1 - \alpha)s + \alpha,$$

بنابراین





$$t_\alpha = \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \leq \frac{1}{2}.$$

و با جایگذاری  $t_\alpha$  و توجه به نمودار  $A_\alpha$  در شکل (۴-۲) داریم

$$A_\alpha(t_\alpha) = 1 - t_\alpha = 1 - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} = \frac{1}{2-\alpha} \quad (31-4)$$

$$A_\alpha(1-t_\alpha) = (1-\alpha)(1-t_\alpha) + \alpha = \frac{1+\alpha-\alpha^2}{2-\alpha} \quad (32-4)$$

علاوه بر این از آنجا که  $|A_\alpha(s) - A_\alpha(1-s)|$  بیشترین مقدار خود و  $A_\alpha(s)$  کمترین مقدار خود را در  $t_\alpha$  کسب می کنند و تابع  $(xy)^s$  نزولی و محدب است، نتیجه می شود

$$A_\alpha(t_\alpha) \leq A_\alpha(t),$$

لذا

$$(xy)^{A_\alpha(t)} \leq (xy)^{A_\alpha(t_\alpha)}.$$

همچنین

$$A_\alpha(1-t) \leq A_\alpha(1-t_\alpha),$$

بنابراین

$$-(xy)^{A_\alpha(1-t)} \leq -(xy)^{A_\alpha(1-t_\alpha)}.$$

از این رو خواهیم داشت

$$(xy)^{A_\alpha(t)} - (xy)^{A_\alpha(1-t)} \leq (xy)^{A_\alpha(t_\alpha)} - (xy)^{A_\alpha(1-t_\alpha)}.$$

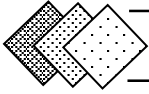
بنابراین برای هر  $0 \leq t \leq 1$  به دست می آید:

$$|(xy)^{A_\alpha(t)} - (xy)^{A_\alpha(1-t)}| \leq |(xy)^{A_\alpha(t_\alpha)} - (xy)^{A_\alpha(1-t_\alpha)}|.$$

در نتیجه  $\delta_C$  به ازای مقادیر (۴-۳۱) و (۴-۳۲) ماکزیمم می شود

$$\delta_C = \max_{(x,y) \in [0,1]^2} \left( \max_{\alpha \in [0,1]} \left| (xy)^{\frac{1}{2-\alpha}} - (xy)^{\frac{1+\alpha-\alpha^2}{2-\alpha}} \right| \right).$$

با در نظر گرفتن نگاشت



$$\Psi_\alpha: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad \Psi_\alpha(k) = k^{\frac{1}{2-\alpha}} - k^{\frac{1+\alpha-\alpha^2}{2-\alpha}}$$

و با مشتق گیری، ماکزیمم تابع فوق را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$\Psi'_\alpha(k) = \frac{1}{2-\alpha} k^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} - \frac{1+\alpha-\alpha^2}{2-\alpha} k^{\frac{1+2\alpha-\alpha^2-2}{2-\alpha}} = 0,$$

$$\frac{1}{2-\alpha} k^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} = \frac{1+\alpha-\alpha^2}{2-\alpha} k^{\frac{1+2\alpha-\alpha^2-2}{2-\alpha}}$$

لذا

$$k_\alpha = (1 + \alpha - \alpha^2)^{\frac{2-\alpha}{\alpha(\alpha-1)}}.$$

بنابراین می توان نشان داد

$$\delta_C = \max_{\alpha \in [0,1]} \Psi_\alpha(k_\alpha) = \max_{\alpha \in [0,1]} \left( (1 + \alpha - \alpha^2)^{\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}} - (1 + \alpha - \alpha^2)^{\frac{1+\alpha-\alpha^2}{\alpha(\alpha-1)}} \right) = \frac{4^4}{5^5}.$$

که ماکزیمم مقدار به ازای  $\alpha = \frac{1}{2}$  به دست آمده است.

حال با توجه به تعریف تابع  $A_\alpha(t)$  و جایگذاری  $\alpha = \frac{1}{2}$ ، تابع وابسته  $A$  که  $\delta_C$  را تولید می کند،

عبارت می شود از:

$$A(t) = \max \left( 1 - t, \frac{t+1}{2} \right). \quad (33-4)$$

همانطور که ملاحظه کردید،  $\delta_C$  به ازای  $\alpha = \frac{1}{2}$  به دست آمد، از آن جا که

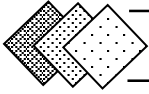
$$t_\alpha = \frac{1-\alpha}{2-\alpha},$$

بنابراین

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\log(x)}{\log(xy)} = \frac{1}{3} \quad (34-4)$$

و با توجه به تعریف  $k_\alpha$  به دست می آید

$$k_\alpha = (1 + \alpha - \alpha^2)^{\frac{2-\alpha}{\alpha(\alpha-1)}},$$



در نتیجه

$$k_{\frac{1}{2}} = xy = \left(\frac{4}{5}\right)^6. \quad (35 - 4)$$

بنابراین طبق روابط (۳۴-۴) و (۳۵-۴) داریم

$$\frac{\log(x)}{\log\left(\frac{4}{5}\right)^6} = \frac{1}{3},$$

از این رو

$$x = \left(\frac{4}{5}\right)^2. \quad (36 - 4)$$

همچنین طبق روابط (۳۵-۴) و (۳۶-۴) می توان محاسبه کرد

$$y = \left(\frac{4}{5}\right)^4.$$

از این رو  $\delta_C$  به ازای نقطه‌ی  $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^2, \left(\frac{4}{5}\right)^4\right)$  به دست می‌آید.

حال به اثبات قسمت دوم می‌پردازیم که البته بسیار بدیهی است.

با در نظر گرفتن تابع وابسته‌ی به دست آمده در (۳۳-۴) و فرم عمومی مفصل EV، مفصل مربوطه به

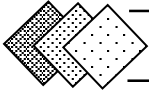
صورت زیر است:

$$C_1(x, y) = \begin{cases} y, & x^2 \geq y \\ x\sqrt{y}, & O.W \end{cases}$$

همچنین برای طرف دیگر یعنی یافتن اندازه‌ی غیرتعویض‌پذیری برای مفصل  $C_1$ ، به راحتی محاسبه

می‌شود:

$$C_1(x, y) - C_1(y, x) = \begin{cases} y - y\sqrt{x}, & x^2 \geq y \\ x\sqrt{y} - x, & O.W \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4^4}{5^5} \\ \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{15}{25}\right) \end{cases}$$



بنابراین

$$\delta_{C_1} = \frac{4^4}{5^5},$$

و همچنین

$$\mu_\infty(C_1) = 3 \cdot \frac{4^4}{5^5}.$$

به همین ترتیب برای  $C_2$  فقط با فرض  $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  محاسبه می‌شود (کلمنت، ۲۰۰۵)، لذا حکم

ثابت می‌شود.  $\square$

#### ۷-۴ اندازه‌ی غیر تعویض پذیری برای مفصل‌های آرچیماکس

در این بخش قضیه‌ای در باب محاسبه‌ی کران بالای اندازه‌ی غیر تعویض پذیری مفصل‌های آرچیماکس، که در بخش (۸-۲) معرفی شد، بیان می‌شود.

(\*) **قضیه ۷-۴-۱** (دورانت و مزیار، ۲۰۱۰): برای هر مفصل آرچیماکس،  $C_{\varphi, A}$  داریم:

$$\mu_\infty(C_{\varphi, A}) \leq 3 \left( \sup_{u \in ]0, +\infty[} \left| \varphi^{(-1)}(u) - \varphi^{(-1)}\left(\frac{5u}{4}\right) \right| \right).$$

علاوه بر این،  $\mu_\infty(C_{\varphi, A})$  برابر با کران بالا خواهد بود اگر و تنها اگر،  $C \in \{C_1, C_2\}$  به طوری که

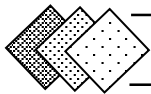
$C_1$  و  $C_2$  مفصل‌های آرچیماکس تولیدشده توسط مولد  $\varphi$  بوده و توابع وابسته‌ی هر یک به ترتیب عبارت

$$\text{باشند از } A^1(t) = \max\left(1 - t, \frac{t+1}{2}\right) \text{ یا } A^2(t) = \max\left(t, \frac{2-t}{2}\right).$$

**اثبات:**

فرض کنید  $C = C_{\varphi, A}$  یک مفصل آرچیماکس باشد:

$$C_{\varphi, A}(u, v) = \varphi^{-1} \left( \{ \varphi(x) + \varphi(y) \} A \left( \frac{\varphi(x)}{\varphi(x) + \varphi(y)} \right) \right).$$



به طوری که  $A$  تابعی پیوسته با شرایط تابع وابسته‌ی مفصل مقدار فرین باشد. هدف، تعیین مقدار  $\delta_C$  می‌باشد:

$$\delta_C = \max_{(x,y) \in [0,1]^2} |C(x,y) - C(y,x)|. \quad (37-4)$$

فرض کنید  $\delta_C$  برای یک نقطه‌ی  $(x,y) \in ]0,1[ \times ]0,1[$  به دست آمده است و قرار دهید  $t = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(y)}$

بدون آن که خللی وارد شود، فرض می‌کنیم  $t \in ]0, \frac{1}{2}[$  و  $A(t) \leq A(1-t)$  باشد. آن‌گاه با جایگذاری در رابطه‌ی (۳۷-۴) خواهیم داشت:

$$\delta_C = \sup_{(x,t) \in [0,1] \times ]0,1/2[} \left| \varphi^{(-1)}\left(\frac{\varphi(x)}{t} \cdot A(t)\right) - \varphi^{(-1)}\left(\frac{\varphi(x)}{t} \cdot A(1-t)\right) \right|,$$

قرار دهید  $u = \frac{\varphi(x)A(t)}{t}$ ، لذا:

$$\delta_C = \sup_{u \in ]0,+\infty[} \left( \sup_{t \in ]0,1/2[} \left| \varphi^{(-1)}(u) - \varphi^{(-1)}\left(u \frac{A(1-t)}{A(t)}\right) \right| \right).$$

با توجه به اثبات قضیه‌ی (۴-۶-۱)، از محدب بودن  $A$  و تعریف تابع وابسته‌ی

$$A_\alpha(s) = \max\{1-s, (1-\alpha)s + \alpha\}, \quad \alpha, s \in [0,1]$$

به طوری که  $g(s) = (1-\alpha)s + \alpha$  خط گذرنده از نقاط  $(t, A(t))$  و  $(1,1)$  باشد می‌توان نتیجه گرفت:

$$A(1-t) \leq A_\alpha(1-t), \quad A(t) = A_\alpha(t)$$

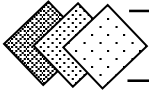
بنابراین

$$\frac{A(1-t)}{A(t)} \leq \frac{A_\alpha(1-t)}{A_\alpha(t)}$$

همچنین با توجه به این که برای  $t_\alpha = \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \leq \frac{1}{2}$  و  $A_\alpha(1-t) = \frac{1+\alpha-\alpha^2}{2-\alpha}$  و  $A_\alpha(t_\alpha) = \frac{1}{2-\alpha}$  به دست

آمد

$$A_\alpha(t_\alpha) \leq A_\alpha(t), \quad A_\alpha(1-t) \leq A_\alpha(1-t_\alpha)$$



بدیهی است که

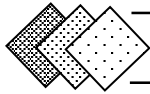
$$\frac{A_\alpha(1-t)}{A_\alpha(t)} \leq \frac{A_\alpha(1-t_\alpha)}{A_\alpha(t_\alpha)}$$

و از آن جا که کسر  $\frac{A_\alpha(1-t_\alpha)}{A_\alpha(t_\alpha)}$  مقدار ماکزیمم خود را به ازای  $\alpha = \frac{1}{2}$  کسب می کند، به دست می آید

$$\begin{aligned} \delta_C &= \sup_{(x,t) \in ]0,+\infty[ \times ]0,1/2[} \left| \varphi^{(-1)}(u) - \varphi^{(-1)}\left(u \frac{A_\alpha(1-t_\alpha)}{A_\alpha(t_\alpha)}\right) \right| \\ &= \sup_{u \in ]0,+\infty[} \left| \varphi^{(-1)}(u) - \varphi^{(-1)}\left(\frac{5u}{4}\right) \right|. \end{aligned}$$

□ و حکم ثابت می شود.

نتیجہ گیری و پیشہاوا



## نتیجه گیری

در سال‌های اخیر کاربرد مفصل‌ها با سرعت چشمگیری در علوم مختلف در حال گسترش بوده است. در این پایان‌نامه سعی کردیم در حدبضاعت، مفهوم مفصل را معرفی و ضمن شرح برخی از ویژگی‌ها و مهم‌ترین انواع آن‌ها، به برخی از موارد قابل توجه در برآزش این توابع در مدل‌سازی بپردازیم.

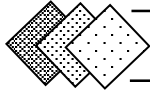
اینک به مواردی که هنگام به‌کارگیری مفصل‌ها نیازمند توجه بیشتر است، اشاره می‌کنیم. همان‌طور که مشاهده کردید، مفصل‌ها ابزارهایی کلی برای بیان ارتباط میان متغیرها هستند و در زمینه‌های گوناگون با موفقیت به‌کار گرفته شده‌اند. هرچند که کلیت بیش از اندازه نیز نقطه‌ضعفی برای مفصل‌ها به‌شمار می‌آید. در اینجا به برخی از نکات قابل توجه اشاره می‌کنیم:

- به‌طور کلی برآورد مفصل‌ها از روی داده‌ها بسیار مشکل است که البته این امر از همان ویژگی کلیت این توابع ناشی می‌شود. در بسیاری از توزیع‌های چندمتغیره چگونگی برآورد ساختار وابستگی کاملاً روشن است، در حالی که لازمه‌ی تهیه‌ی یک برآورد آماری معقول به کمک مفصل‌ها، به‌کارگیری روش‌های پارامتری کردن ویژه است. بنابراین لحاظ کردن یک خانواده از توزیع‌های چندمتغیره و برآورد پارامترها بسیار ساده‌تر خواهد بود.

- برخی از انواع مفصل‌ها (مفصل‌های ارشمیدسی) از توزیع‌های چندمتغیره ناشی نمی‌شوند و عمدتاً بر اساس محاسبات ریاضی ساده و انعطاف‌پذیر شکل گرفته‌اند. بنابراین در هر مورد کاربرد آن‌ها به عنوان مدل‌های طبیعی وابستگی، باید مورد بازبینی قرار گیرد.

- سرانجام این‌که مفصل‌ها بر یک مفهوم آماری یعنی وابستگی دلالت دارند در حالی که بسیاری از ابزارها، به ویژه ابزارهای مالی، به سری‌های زمانی دلالت دارند و لذا یک مفهوم پویا از وابستگی مورد نیاز است.





لذا انتخاب مفصل به عنوان یک راه‌حل برای پاسخ به چگونگی ارتباط بین متغیرها باید با دقت بیشتری صورت پذیرد و مستلزم کسب اطلاعات بیشتر در مورد مفصل‌ها می‌باشد.

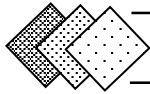
در فصل‌های ۳ و ۴ سعی کردیم با بررسی اندازه‌های وابستگی و تعویض‌پذیری، گامی هر چند کوچک، در جهت انتخاب مفصل مناسب برداریم.

در فصل ۵ که اندازه‌ی غیر تعویض‌پذیری بررسی شد، متوجه می‌شویم که نوع مفصل نیز می‌تواند در تعیین کران بالای اندازه‌ی غیر تعویض‌پذیری مؤثر باشد، به ویژه با دقت در بخش‌های ۴-۶ و ۴-۷ می‌توان گفت که وابستگی منفی در تعویض‌پذیری نقش ایفا می‌کند به طوری که افزایش وابستگی منفی، کران بالای اندازه‌ی غیر تعویض‌پذیری را کاهش می‌دهد و از آن‌جا که کلاس متغیرهای NQD، بزرگترین کلاس وابستگی‌های منفی است، کلاس متغیرهای SD را شامل می‌شود و همان‌طور که ملاحظه کردید کران بالای اندازه‌ی غیر تعویض‌پذیری مفصل‌های NQD، مفصل‌های SD را در بر می‌گیرد. این قبیل ویژگی‌ها و نتایج می‌تواند کمک شایانی در برازش مفصل بر روی داده‌ها، باشد.

## پیشنهادها

✓ در این پایان‌نامه تنها به موارد اندکی راجع به مفصل‌ها پرداختیم در صورتی که مفصل‌ها بسیار گسترده و کاربردی هستند و به صورت نظری به مفصل‌ها پرداخته شده است، در صورتی که می‌توان از نگاه کاملاً کاربردی به این مبحث آماری پرداخت.

✓ تولید و ایجاد یک مفصل کار زیاد پیچیده‌ای نیست و با تغییرات شاید اندک، روی مفصل‌ها، امکان پذیر می‌باشد.

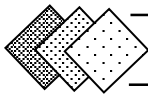


✓ بررسی اندازه‌ی غیرتعویض‌پذیری تقریباً مبحث جدیدی به شمار می‌آید و در بسیاری مفصل‌ها بررسی نشده است برای مثال در مفصل جدید معرفی‌شده در فصل ۳، تحت عنوان مفصل سینوسی با توجه به نمودار آن، واضح است که مفصل فوق‌مقارن نبوده و لذا اندازه‌ی غیرتعویض‌پذیری آن می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد.

✓ در این پایان‌نامه اغلب در مورد داده‌های پیوسته صحبت شد در صورتی که مفصل‌ها را می‌توان روی داده‌های گسسته پیاده‌سازی کرد.

# پوست

همانطور که در فصل مقدمه بیان شد مفصل‌ها ابزارهایی مفید برای مدل‌سازی ساختار وابستگی میان متغیرها می‌باشند و از این حیث در علوم مختلف کاربردهای فراوانی دارند. لذا در بسیاری از مواقع ما نیاز



به انتخاب یک مفصل مناسب برای پیاده‌سازی روی داده‌های مورد نظر خواهیم داشت که البته کار بسیار دشواری می‌باشد و نیاز به اطلاعات کاملی در باب مفصل دارد. خوشبختانه در بسیاری از نرم‌افزارهای آماری از جمله نرم‌افزار R، بسته‌های نرم‌افزاری مربوط به مفصل‌ها موجودند.

بدین منظور بسته‌های اساسی مورد نیاز در محیط R، برای اجرای کدهای مفصل را معرفی می‌کنیم.

در ابتدای کار در فضای R، باید بسته‌های `copula`، `mvtnorm`، `scatterplot3d`، `sn`، `pspline` را فراخوانی کنیم.

```
library(copula)
library(mvtnorm)
library(scatterplot3d)
library(sn)
library(pspline)
```

### الف: کلاس‌های بسته‌ی نرم‌افزاری `copula`

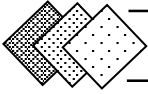
بسته‌ی نرم‌افزاری `copula` شامل دو کلاس اصلی `copula` و `mvdc` می‌باشد:

- کلاس `copula` برای تعریف مفصل‌ها است.

- کلاس `mvdc` برای تعریف توزیع‌های چندمتغیره از طریق مفصل‌ها است.

### الف ۱: کلاس `copula`

در این بخش چگونگی تعیین مفصل‌ها را مطرح کرده و مفصل‌هایی را مد نظر می‌گیریم که در فصل‌های گذشته به آن‌ها اشاره شده است.



✓ **مفصل ارشمیدسی:** قبلاً با ساختار مفصل ارشمیدسی آشنا شده‌ایم و چند نمونه از این مفصل

را معرفی کرده‌ایم. برای تعریف خانواده‌ی مفصل ارشمیدسی از کد برنامه‌ی زیر استفاده می‌شود:

```
myCop.clayton <- archmCopula (family = "clayton", dim = 3,  
+ param = 2)
```

archmCopula: تابع تعریف شده برای مفصل‌های ارشمیدسی در کلاس copula می‌باشد.

Family: در این قسمت نوع مفصل ارشمیدسی را تعیین می‌کنیم، برای مثال:

frank , amh , gumbel , claton, ...

dim: بعد مفصل را مشخص می‌کنیم.

Param: مقدار پارامتر مفصل را معلوم کرده که در خانواده‌ی مفصل ارشمیدسی تنها یک پارامتر

داریم.

myCop: متغیری است که هر مقداری، می‌تواند باشد.

✓ **مفصل مقدار فرین EV:** برای این خانواده از مفصل‌ها، کد برنامه‌ی زیر استفاده می‌شود:

```
myCop <- evCopula (family = "gumbel", dim = 2, param = 2)
```

evCopula: تابع تعریف شده برای مفصل‌های EV در کلاس copula می‌باشد.

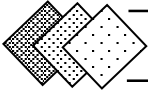
Family: در این قسمت نوع مفصل EV را تعیین می‌کنیم، برای مثال

gumbel , galambos, huslerReiss , ...

dim: بعد مفصل را مشخص می‌کنیم.

Param: مقدار پارامتر مفصل را معلوم کرده که در خانواده‌ی مفصل EV تنها یک پارامتر داریم.

myCop: متغیر است و هر چه، می‌تواند باشد.



## الف ۲: کلاس mvdc

همانطور که گفتیم، کلاس mvdc برای ساختن توزیع‌های چندمتغیره با داشتن توزیع‌های کناری و مفصل معلوم، طراحی شده است و در قطعه برنامه‌ی زیر ملاحظه می‌کنید.

```
myMvd <- mvdc(copula = myCop.clayton, margins = c("norm","norm" +,"norm"),  
+paramMargins = list(list(mean = 0, sd = 2), list(mean =0,sd = 1), +list(mean = 0,  
+sd = 2)))
```

copula: باید مفصل مورد نظر را که در بخش قبل اشاره شد، انتخاب کنیم.

margins: توابع کناری را می‌نویسیم که تعیین توزیع چند متغیره‌ی مربوط به آن‌ها مد نظر ماست.

ParamMargins: به ترتیب پارامتر توابع کناری را تعیین می‌کنیم.

### ب: روش‌ها:

#### ب ۱: توابع توزیع و چگالی

- برای محاسبه‌ی توابع توزیع و چگالی یک نمونه copula در بسته‌ی نرم‌افزاری copula به ترتیب از توابع pcpula و dcpula استفاده می‌شود.

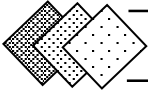
- همچنین جهت محاسبه‌ی توابع توزیع و چگالی یک نمونه mvdc در بسته‌ی نرم‌افزاری copula به ترتیب از توابع pmvdc و dmvc استفاده می‌شود.

#### ب ۲: تولید اعداد تصادفی

در بسته‌ی نرم‌افزاری copula دو رویه‌ی

- rcpula: برای تولید اعداد تصادفی از یک نمونه مفصل است.

- rmvdc: برای تولید اعداد تصادفی از یک نمونه‌ی توزیع چندمتغیره از یک مفصل معلوم می‌باشد.



کد برنامه‌ی این دو بخش عبارت است از (به طور مثال برای مفصل ارشمیدسی کلیتون بیان می‌کنیم):

```
u <- rcopula(myCop.clayton, k)
cbind(dcopula(myCop.clayton, u), pcopula(myCop.clayton, u))
```

myCop.clayton: مفصل مورد نظر را مشخص می‌کند.

k: هر عدد صحیح مثبت دیگری می‌تواند باشد که تعداد اعداد تصادفی را تعیین می‌کنیم.

```
      [ , 1]      [ , 2]
[1, ] ۳.۰۵۱۰۱۹ ۰.۱۵۰۳۷۵۹
[۲, ] ۷.۷۵۴۰۳۵ ۰.۵۲۹۷۸۷۰
[۳, ] ۱.۷۲۲۴۸۵ ۰.۳۵۹۰۲۴۷
[۴, ] ۱.۹۲۴۱۱۲ ۰.۵۰۴۵۷۴۷
```

```
x <- rmvdc(myMvd, k)
cbind(dmvdc(myMvd, x), pmvdc(myMvd, x))
```

myMvd: توزیع چندمتغیره‌ی ساخته شده در قسمت‌های قبلی است.

K: هر عدد صحیح مثبت دیگری می‌تواند باشد که تعداد اعداد تصادفی را تعیین می‌کنیم.

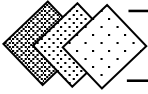
```
      [ , 1]      [ , 2]
[1, ] ۰.۰۴۰۰۴۴۲۲۳ ۰.۰۸۴۵۱۵۰۱
[۲, ] ۰.۰۰۴۱۹۳۱۴۲ ۰.۲۱۲۵۴۱۳۹
[۳, ] ۰.۰۱۷۹۲۵۴۵۷ ۰.۴۱۹۴۳۴۴۷
[۴, ] ۰.۰۲۴۳۴۱۲۵۳ ۰.۴۸۸۴۹۴۰۹
```

## پ: رسم نمودارها

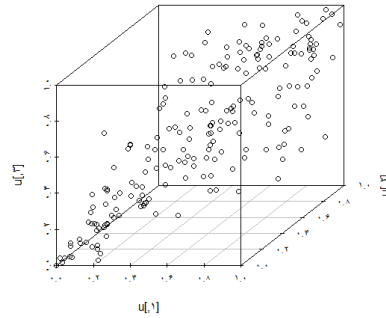
نمودارها یکی از مهم‌ترین ابزارها، برای درک بهتر مفاهیم هستند که منجر به بررسی عینی‌تر و دقیق‌تر مسائل می‌شوند.

## پ ۱: نمودار پراکنش سه‌بعدی

این نمودار توسط تابع scatterplot3d رسم می‌شود:



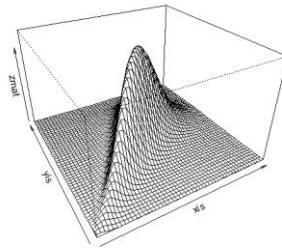
```
u <- rcopula(myCop.clayton, 200)
scatterplot3d(u)
```



## پ ۲: نمودار رویه چگالی

این نمودارها جهت رسم چگالی مفصل‌ها استفاده می‌شود و بدین منظور از تابع `perspectiveplot` استفاده می‌شود:

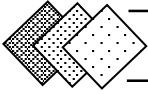
```
persp(myMvd, dmvd, xlim = c(-3, 3), ylim = c(-3, 3))
```



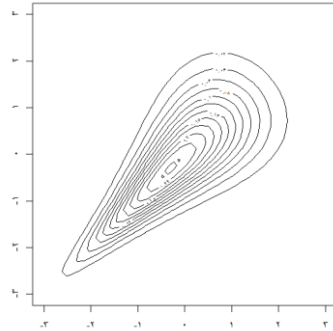
## پ ۳: نمودار تراز

رسم نمودار کانتور توسط تابع `cotourplot` صورت می‌پذیرد:





```
contour(myMvd, dmvdc, xlim = c(-3, 3), ylim = c(-3, 3))
```



### ت: برآورد مفصل

در این قسمت روشی را که برای برآورد مفصل ارایه می‌دهیم، روش درست‌نمایی ماکزیمم می‌باشد. در علم آمار روش درست‌نمایی ماکزیمم (که به طور خلاصه به آن ML گفته می‌شود) روشی است برای برآورد کردن پارامترهای یک مدل آماری. وقتی بر مجموعه‌ای از داده‌ها عملیات انجام می‌شود یک مدل آماری به دست می‌آید آن‌گاه درست‌نمایی ماکزیمم می‌تواند تخمینی از پارامترهای مدل ارایه دهد.

برای درک بهتر، یک نمونه‌ی ۲۰۰ تایی از توزیع دومتغیره با توابع کناری گاما و مفصل کلیتون

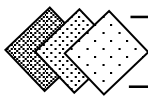
تولید می‌کنیم:

```
myMvd <- mvdc(copula = archmCopula(family = "clayton", param = 2), margins =  
+c("gamma", "gamma"), paramMargins = list(list(shape = 2, scale = 1),  
+ list(shape = 3, scale = 2)))  
n <- 200  
dat <- rmvdc(myMvd, n)
```

مقدار تابع درست‌نمایی از طریق کد برنامه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

```
loglikMvdc(c(2, 1, 3, 2, ۲), dat, myMvd)
```

```
[۱] -۷۲۹.۷۷۲۲
```



و کدهای زیر  $\hat{\theta}_{ML}$  را توسط تابع `fitMvd` در R محاسبه می‌کند:

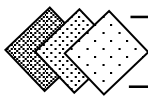
```
mm <- apply(dat, 2, mean)
vv <- apply(dat, 2, var)
b1.0 <- c(mm[1]^2/vv[1], vv[1]/mm[1])
b2.0 <- c(mm[2]^2/vv[2], vv[2]/mm[2])
a.0 <- sin(cor(dat[, 1], dat[, 2], method = "kendall") * pi/2)
start <- c(b1.0, b2.0, a.0)
fit <- fitMvdc(dat, myMvd, start = start, optim.control = list(trace = TRUE,
+maxit = 2000))

initial value ۷۴۸.۷۷۷۴۵۹
iter ۱۰ value ۷۷۷.۹۵۴۲۰۳
final value ۷۷۷.۹۵۲۳۰۳
converged
initial value ۷۷۷.۹۵۲۳۰۳
final value ۷۷۷.۹۵۲۳۰۳
stopped after ۱ iterations
```

و نتایج حاصل از برآورد با فرمان زیر خلاصه می‌شود:

```
fit
The Maximum Likelihood estimation is based on ۲۰۰ observations.
Margin ۱ :
      Estimate Std. Error
m۱.shape ۱.۸۴۹۱۸۳ ۰.۱۵۷۷۴۳۴۲
m۱.scale ۱.۰۵۲۴۱۰ ۰.۰۹۸۴۴۰۲۳
Margin ۲ :
      Estimate Std. Error
m۲.shape ۲.۴۹۴۳۷۴ ۰.۲۳۳۹۳۱۹
m۲.scale ۲.۲۰۵۱۷۲ ۰.۲۰۳۰۷۹۷
Copula:
      Estimate Std. Error
param ۲.۵۱۱۷۴ ۰.۳۰۹۱۲۹
The maximized loglikelihood is -۷۷۷.۹۵۲۳
The convergence code is ۰ see ?optim.
```

ث: تعیین ضرایب همبستگی



منظور از ضرایب همبستگی،  $\rho$ -اسپیرمن و  $\tau$ -کندال و ضریب همبستگی دمی می‌باشد که در فصل ۳ به طور کامل شرح داده شده است.

حال برای تعیین ضرایب فوق در فضای R از قطعه برنامه‌ی زیر استفاده می‌شود:

```
kendallsTau(myCop.clayton)
```

```
0.5 [1]
```

```
tailindex(myCop.clayton)
```

```
lower upper
0.7071068 0.0000000
```

برنامه‌های کامپیوتری فوق برگرفته از (یان، جان، ۲۰۰۷) و (پکیج مفصل، ۲۰۱۲) است.

### ج: توزیع یکنواخت پیوسته

یک متغیر تصادفی دارای توزیع یکنواخت است اگر تابع چگالی احتمال آن برابر با:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ یا } x > b \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \end{cases}$$

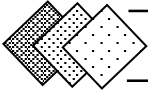
و تابع توزیع تجمعی آن به فرم:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

هر گاه  $a = 0$  و  $b = 1$  باشد، آن‌گاه توزیع یکنواخت پیوسته را توزیع یکنواخت پیوسته

استاندارد گویند.

### ج: توزیع لگ نرمال



در آمار و احتمال، توزیعی است که لگاریتم طبیعی آن دارای توزیع نرمال با پارامترهای  $\mu$  و  $\sigma$  می‌باشد. به عبارت دیگر اگر  $X$  متغیری با توزیع نرمال باشد، آن‌گاه  $Y = \exp(X)$  دارای توزیع لگ نرمال است.

### ج: توزیع نرمال

تابع چگالی احتمال توزیع نرمال با پارامترهای  $\mu$  و  $\sigma^2$  به صورت زیر است

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad ; x \in R$$

### خ: توزیع نمایی

توزیعی پیوسته است که دارای تابع چگالی احتمال زیر می‌باشد:

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

که پارامتر  $\lambda$  در آن وارون میانگین (امید ریاضی) توزیع می‌باشد. توزیع نمایی حالت خاصی از توزیع

گاما است که در آن پارامتر شکل برابر  $k=1$  و پارامتر مقیاس برابر  $\theta = \frac{1}{\lambda}$  می‌باشد و تابع توزیع تجمعی آن

به فرم زیر می‌باشد:

$$F(x; \lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

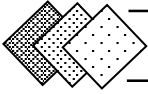
### د: توزیع گاما

یکی از توزیع‌های احتمالی پیوسته است و دارای دو پارامتر  $\theta$  و  $k$  می‌باشد. اگر  $k$  عددی طبیعی باشد آن-

گاه توزیع گاما معادل است با مجموع  $k$  متغیر تصادفی با توزیع نمایی با پارامتر  $\frac{1}{\theta}$  و دارای تابع چگالی

احتمال:

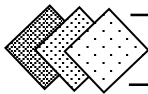
$$f(x; k, \theta) = x^{k-1} \frac{e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)} \quad ; x > 0, k, \theta > 0$$



تابع گاما ( $\Gamma$ )، انتگرالی همگراست و مقدار آن برابر با عددی مثبت است:

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} y^{k-1} \cdot \exp(-y) dy \quad ; k > 0$$

منابع



جین دیکنسن گیبینز(عبدالرحیم شهلایی ، علی عمیدی). "استنباط آماری ناپارمتری ". چاپ اول (۱۳۶۷)، مرکز نشر دانشگاهی تهران.

Alvoni, E., Papini, P. L. (2007). Quasi-concave copulas, asymmetry and transformations .Comment.Math.Univ.Carolin. **48,2** ,311–319.

Balakrishnan, N., Lai, Chin-Diew. (2009). Continuous Bivariate Distributions. Second Edition. Springer Verlag, New York.

Bacigáal T, Jágr V, Mesiar R (2011) Non-exchangeable random variables , Archimax copulas and their fitting to real data. Kybernetika **47** , **4**, 519–531.

Capéraà, P., Fougères, A.-L., Genest, C. (2000). Bivariate distributions with given extreme value attractor, J. Mult Anal. **72** (1) 30–49.

Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W. (2004). Copula Methods in Finance. Wiley Finance.

Clayton DG (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. Biometrika **65**:141-151

Conway, DA. (1979). Multivariate distributions with specified marginals. (Technical Report **145**, Stanford University)

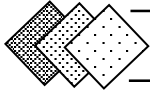
Dall’Aglío, G. (1959). Sulla compatibilit`a delle funzioni di ripartizione doppia. Rend. Mat. **18**, 385-413.

Daniels, HE. (1950). Rank correlation and population models. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B **12**:171-181.

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. (2005). Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models. John Wiley & Sons, New York.

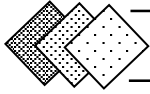
Durante, F., Mesiar, R. (2008). Non-exchangeable bivariate extreme value copulas.

Durante, F., Mesiar, R. (2010).  $L^\infty$ -measure of non-exchangeability for bivariate extreme value and Archimax copulas. J. Math. Anal. Appl. **369**, 610–615.



- Durante, F., Klement, E. P., Sempi, C. Úbeda-Flores, M. (2009). Measures of non-exchangeability for bivariate random vectors. *Stat Papers* **51**:687–699.
- Durante, F. Papini, P.L. (2009). Componentwise concave copulas and their asymmetry, *Kybernetika (Prague)* **45**, 1003–1011.
- Durante, F. Papini, P.L. (2010), Non-exchangeability of negatively dependent random variables. *Metrika* **71**:139–149.
- Embrechts, P., Lindskog, F. McNeil, A. (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. In S. Rachev (Ed.), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*. 331-385. Elsevier.
- Feron, R. (1956). Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, cas de l'espace a trois dimensions. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **5**:3-12.
- Frank, MJ. (1979). On the simultaneous associativity of  $F(x,y)$  and  $x+y-F(x,y)$ . *Aequationes Math.* **19**:194-226.
- Fréchet, M. (1951). Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Ann. Univ. Lyon Sect. A* **9**, 53-77.
- Galambos, J. (1978). *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. Wiley, New York.
- Garralda-Guillem, A. I., (2000). Structure de dépendance des lois de valeurs extrêmes bivariées, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (7) 593–596.
- Genest, C. MacKay, J. (1986a). Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. *Canad J Statist* **14**:145-159.
- Genest, C. MacKay, J. (1986b). The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals. *Amer Statist* **40**:280-285.
- Genest C, Quessy J-F, Rémillard B (2006) Goodness-of-fit Procedures for Copula Models Based on the Probability Integral Transformation Board of the Foundation of the Scandinavian Journal of Statistics.
- Gumbel, E. J. (1960). Bivariate exponential distributions, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **55**,





698–707.

Hoeffding, W. (1940). Masstabinvariante Korrelationstheorie. Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin 5 Heft **3**:179-233 [Reprinted as Scale-invariant correlation theory. In: Fisher NI, Sen PK (eds) The Collected Works of Wassily Hoeffding. Springer, New York pp 57-107].

Hoeffding W (1941) Masstabinvariante Korrelationsmasse für diskontinuierliche Verteilungen. Arkiv für mathematischen Wissenschaften und Sozialforschung **7**:49-70 [Reprinted as Scale-invariant correlation measures for discontinuous distributions. In: Fisher NI, Sen PK (eds) The Collected Works of Wassily Hoeffding. Springer, New York pp 109-133].

Hougaard P (1986) A class of multivariate failure time distributions. Biometrika **73**:671-678.

Hutchinson TP, Lai CD (1990) Continuous Bivariate Distributions, Emphasising Applications. Rumsby Scientific Publishing, Adelaide.

Joe, H. (1997). Multivariate models and dependence concepts, Monographs on Statistics and Applied Probability, Vol **73**. Chapman & Hall, London.

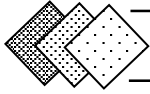
Klement EP, Mesiar R, Pap, E (2004) Transformations of copulas and quasicopulas. In: Lopez-Diaz M, Gil MA, Grzegorzewski P, Hryniewicz O, Lawry J (eds) Soft Methodology and Random Information Systems. Springer, Berlin, pp. 181-188.

Klement, EP., Mesiar, R. (2005). Archimax copulas and invariance under transformations, C.R. Math. Acad. Sci. Paris **340**, 755-758.

Klement, EP., Mesiar, R. (2006). How non-symmetric can a copula be? Comment Math Univ Carolin **47(1)**:141–148.

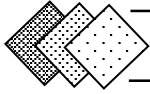
Kotz, K., Nadarajah, S. (2000): Extreme Value Distributions: Theory and Applications. Imperial College Press, London.

Kruskal, W. H. (1958). Ordinal measures of association. J. Amer. Statist. Assoc. **53**, 814-



861.

- Lehmann, E. L. (1966). Some concepts of dependence. *Ann. Math. Statist.* **37**, 1137-1153.
- Lehmann EL (1975). *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*. Holden-Day, San Francisco.
- Li, X., Fang, R. (2012). A New Family of Bivariate Copulas Generated by Univariate Distributions. *Journal of Data Science* **10**, 1-17.
- Marshall A., Olkin I (1979) *Inequalities: theory of majorization and its applications*, *Mathematics in Science and Engineering*, Vol **143**. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York.
- McNeil, A., R. Frey, and P. Embrechts (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press.
- Nelsen R. B. (2004). *Properties and applications of copulas: A brief survey*. Department of Mathematical Sciences, Lewis & Clark College.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*, Vol **139** of *Lecture Notes in Statistics*. Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York.
- Nelsen, R.B. (2007). *Extremes of nonexchangeability*, *Statist. Papers* **48**, 329–336.
- Pickands, J.(1981). *Multivariate extreme value distributions*, in: *Proceedings of the 43rd session of the International Statistical Institute*, Vol. **2**, Buenos Aires, , Vol. **49**, pp. 859–878, 894–902.
- Salvadori ,G., Michele ,C., Kottegoda, N., Rosso,R. (2007). *Extremes In Nature.Ture*. Vol **56**. Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York.
- Schmidt, T.(2006). *Coping with copulas*,(Forthcoming in *Risk Books Copulas-From Theory to Applications in Finance*), Department of Mathematics, University of Leipzig.
- Schweizer B (1991). *Thirty years of copulas*. In: Dall’Aglio G, Kotz S, Salinetti G(eds) *Advances in Probability Distributions with Given Marginals*. Kluwer,



Dordrecht, pp 13-50.

Seeley RT (1961). Fubini implies Leibniz implies  $F_{yx}=F_{xy}$ . Am Math Monthly **68**:56-57.

Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. Publ.Inst.Statist. Univ. Paris, **8**, 229-231.

Yan, Jun. (2007). Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula. Journal of Statistical Software. Vol **21**, Issue **4**.

“Copula” Package URL: <http://cran.project.org/doc/packages/copula.pdf>

## **Astract:**

In many different fields of scientific researchs, other variables affect the response variable and respond to main question is lies in reception joint of behavior and the relationship between both variables.

One of the methods to establish this connection is copulas that entered widely in different sciences today. Word copula is construable from two standpoints: one standpoint is a function that the joint distribution function connects the marginal functions and from another standpoint, is the distribution function that its marginal distribution functions are uniformly distribution. So we can say copulas are useful tools for modeling construction dependence between variables.

In this thesis, introduced concept of copula, properties and some of these functions, we study measures of dependence and nonexchangeability for copula.

**Keywords:** Copula, Coefficients of correlation, Nonexchangeability.



Shahrood University of Technology  
Faculty of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial  
Fulfillment of the Requirements For The  
Degree of Master of Science in Applied mathematics

## **Copulas and its applications**

**Nooshin Rezaei**

Supervisor:

**Dr Ahmad Nezakati Rezazadeh**

Advisor:

**Dr Seyed Mohsen Mirhoseini**

Feb 2013