بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

توپولوژی رخنه بر فضای عملگرهای بسته

استاد راهنما

دکتر کامران شریفی

استاد مشاور

دکتر احمد زیره

پژوهشگر

پریسا پاکروان

بهمن ۱۳۹۱

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (6)

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **پریسا پاکروان** رشته **ریاضی محض** گرایش **آنالیز ریاضی** تحت عنوان« **توپولوژی رخنه بر فضای عملگرهای بسته** » که در تاریخ ۹۱/۱۱/۲۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول ☐ (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸٫۴) دفاع مجدد ☐ مردود ☐

1ـ عالی (20 ـ 19) 2ـ بسیار خوب (18/99 ـ 18)

3ـ خوب (16ـ 17/99) 4ـ قابل قبول (15/99 ـ 14)

5- نمره کمتر از 14 غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
1ـ استاد راهنمای اول	دکترکامران شریفی	دانشیار	
2ـ استاد مشاور	دکتراحمد زیره	استادیار	
3ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکترالهام دسترنج	استادیار	
4ـ استاد ممتحن	دکترمهدی ایرانمنش	استادیار	
5 ـ استاد ممتحن	دکترغلامرضا عباسپور	استادیار	

رئیس دانشکده ریاضی : دکتر احمد زیره

دانشکده ریاضی آموزش

دانشگاه صنعتی شاهرود

تقدیم به

همه کسانی که لحظه ای بعد انسانی و وجدانی خود را فراموش نمی کنند و بر آستان گران سنگ انسانیت سر فرود می آورند و انسان را با همه تفاوت هایش ارج می نهند.

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر کامران شریفی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر احمد زیره که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

پریسا پاکروان

بهمن ۱۳۹۱

تعهد نامه

اینجانب **پریسا پاکروان** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **توپولوژی رخنه بر عملگرهای بسته**تحت راهنمائی دکتر کامران شریفی متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۹۱/۱۱/۳۰

امضای دانشجو پریسا پاکروان

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

نام خانوادگی دانشجو: پاکروان نام: پریسا

عنوان: توپولوژی رخنه برفضای عملگرهای بسته

استاد راهنما: دکتر کامران شریفی

استاد مشاور: دکتر احمد زیره

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۶۴

واژگان کلیدی: عملگربه‌طورچگال تعریف شده، عملگر بسته، نمودار یک عملگر، ریشه دوم یک عملگر مثبت، متریک رخنه بین عملگرها

چکیده

بحث توپولوژی رخنه برعملگرهای بسته در سالهای اخیر به طور گسترده‌ای در بخش‌های مختلف ریاضیات از جمله هندسه و توپولوژی، کنترل سیستم‌های غیرخطی و تجزیه‌ی سیگنال‌ها و سیستم‌ها و ... نقش ایفا می‌کند. مثال ساده و شهودی آن متریک رخنه می‌باشد که کاربردهای زیادی دارد.

ما در این پایان نامه ابتدا متریک رخنه بین زیرفضاهای بسته از یک فضای هیلبرت را معرفی کرده، و سپس به بیان خواص مقدماتی آن می‌پردازیم. سپس به‌طور خاص متریک رخنه بین عملگرهای بی‌کران را مورد بررسی قرار داده و فرمولی جدید برای محاسبه متریک رخنه بین دو عملگر بسته به‌طورچگال تعریف شده ارائه می‌دهیم.

پیشگفتار

توپولوژی رخنه همواره نقش مهمی در بخش‌های مختلفی از ریاضیات از جمله هندسه و توپولوژی، کنترل سیستم‌های غیرخطی و تجزیه‌ی سیگنال‌ها و سیستم‌ها ایفا می‌کند. اگر چه بحث توپولوژی رخنه بر عملگرهای بسته در فضای هیلبرت کاربرد زیاد و مهمی در ریاضیات و دیگر علوم داشته است، اما گاهی اوقات کراندار بودن از شرایط محدود کننده مسئله می‌باشد. لذا محققان به دنبال شرایطی هستند که بتوانند قضایا و مسائل مطرح شده در بحث متریک رخنه روی عملگرهای کراندار را به نوعی روی عملگرهای بی‌کران تعمیم و گسترش دهند.

در این راستا ابتدا افرادی چون اچ. کوردس [۲] و جی. لابروشه [۳] به معرفی متریک رخنه روی عملگرهای به طور چگال تعریف شده پر داختند. در سالهای بعد دبلیو. کافمن [۴] به مقایسه متریک فوق با متریک دیگری پرداخت. سپس ناکاموتو [۵] برای رخنه بین عملگرهای کراندار یک فرمول ارائه داد، در سال ۱۹۹۳ حبیبی [۶] برای هر ماتریس $m \times n$، فرمولی برای رخنه به‌دست آورد، سپس این متریک توسط کامران شریفی [۷] برای نگاشت‌های مدولی مورد بررسی قرار گرفت. ما در این پایان نامه ابتدا به گوشه‌هایی از این اقدامات انجام شده خواهیم پرداخت.

این پایان نامه دارای چهار فصل می‌باشد. فصل اول شامل مقدماتی از مباحث اساسی در آنالیز تابعی و تعاریف اولیه می‌باشد. در فصل دوم به معرفی نگاشت یک‌به‌یک Γ که از مجموعه‌ی انقباض‌های سره و یک‌به‌یک و پوشا به مجموعه عملگرهای بسته و به‌طورچگال تعریف شده در فضای هیلبرت H است می‌پردازیم. در فصل سوم به معرفی متریکی پرداخته که از متریک رخنه قوی‌تر و در بسیاری از خواص با آن اشتراک دارد و همچنین نشان می‌دهیم این متریک در عملگرهای کراندار معادل با نرم عملگری است.

در فصل چهارم ابتدا متریک رخنه بین زیرفضاهای بسته از یک فضای هیلبرت را معرفی کرده و سپس

---

[۲] H. O. Cordes
[۳] J. P. Labrousse
[۴] W. E. Kaufman
[۵] Nakamoto
[۶] Habibi
[۷] K. Sharifi

به بیان خواص مقدماتی آنها می‌پردازیم. سپس به‌طور خاص متریک رخنه بین عملگرهای بی‌کران را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

مقدمه

این بخش شامل دو قسمت اساسی، مقدماتی راجع به، آنالیز تابعی، و بحث عملگرها می باشد. اما چون انتظار می‌رود خواننده با آنها آشنایی داشته باشد، از بیان جزییات و اثبات آنها خودداری می‌کنیم. مطالب این بخش از مرجع [۲۳] گرفته شده است.

۱.۱ نظریه مقدماتی فضای هیلبرت

تعریف ۱.۱.۱. فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم، اگر به‌هر زوج مرتب $(x, y) \in H$ یک عدد مختلط مانند $\langle x, y\rangle$ به نام حاصل‌ضرب داخلی (یا حاصل‌ضرب اسکالر) x و y چنان مربوط شده باشد که خواص زیر برقرار باشند:

۱. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ (علامت بار نشانگر مزدوج مختلط است)؛

۲. اگر $x, y, z \in H$ آنگاه $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$؛

۳. اگر $x, y \in H$ و α یک اسکالر باشد، $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$؛

۴. به‌ازای‌هر $x \in H$، $\langle x, x\rangle \geqslant ۰$؛

۵. $\langle x, x\rangle = ۰$ اگروفقط‌اگر $x = ۰$.

حال چند نتیجه فوری از این اصول را ذکر می‌کنیم: قاعده‌ی (۳) ایجاب می‌کند که به‌ازای‌هر $y \in H$، $\langle ۰, y\rangle = ۰$؛ توجه کنید که خواص(۲) و(۳) را می‌توان در غالب یک حکم بیان‌کرد: به‌ازای‌هر $y \in H$، نگاشت $x \longrightarrow \langle x, y\rangle$ یک تابع خطی بر H است؛ (۱) و (۳) نشان می‌دهند $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$؛ (۱) و (۲) قانون پخشپذیری را ایجاب می‌کند:

$$\langle z, x + y\rangle = \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle.$$

بنابر(۴) می توان $\| x \|$، یعنی نرم بردار $x \in H$، را ریشه‌ی دوم نامنفی $\langle x, x\rangle$ تعریف کرد. لذا

$$\| x \|^{2}= \langle x,x\rangle.$$

نامساوی شوارتز ۲.۱.۱. [1] *خواص تعریف (۱) تا (۴) ایجاب می‌کند که به‌ازای‌هر $x,y \in H$،*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \| x \| \| y \|.$$

برهان. رجوع شود به[۲۳. قضیه‌ی ۱۲.۲ صفحه ۳۲۳] □

نامساوی مثلثی ۳.۱.۱. *به‌ازای‌هر x و y در H داریم:*

$$\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|.$$

برهان. رجوع شود به[۲۳. قضیه‌ی ۱۲.۲ صفحه ۳۲۳] □

تعریف ۴.۱.۱. از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که برای‌هر $x,y,z \in H$،

$$\| x-z \| \leq \| x-y \| + \| y-z \|$$

اگر فاصله ی بین x و y را مساوی $\| x-y \|$ تعریف کنیم، تمام اصول موضوع یک فضای متری برقراند. در اینجا برای نخستین بار از قسمت (۵)تعریف استفاده می‌کنیم. به‌عبارت دیگر H یک فضای متری است. هرگاه این فضای متری تام باشد یعنی هر دنباله‌ی کشی در H در آن همگرا باشد، آنگاه H یک فضای هیلبرت [2] نام دارد.

تا پایان این پایان نامه حرف H, H_1, H_2 و... یک فضای هیلبرت خواهد بود.

قضیه ۵.۱.۱. *نگاشتهای*

$$x \to \langle x,y\rangle \text{،} \ x \to \langle y,x\rangle \text{ و } x \to \| x \|$$

به‌ازای‌هر $y \in H$، توابع پیوسته‌ای بر H هستند.

[1] Schwartz
[2] Hilbert

زیر فضاها ۶.۱.۱. *زیرمجموعه‌ی M از فضای برداری H را یک زیرفضای H نامیم اگر M نسبت به جمع و ضرب اسکالر تعریف شده در H خود یک فضای برداری باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه‌ی $M \subset H$ یک زیرفضا باشد این است که برای‌هر $x, y \in M$ و هر اسکالر α، $x + y \in M$ و $\alpha x \in M$. در فضاهای برداری، واژه زیرفضا را به مفهوم یاد شده بکار می‌بریم و گاهی جهت تاکید از واژه‌ی زیرفضای خطی استفاده می‌کنیم. منظور از یک زیرفضای بسته‌ی H، زیرفضایی است که نسبت به توپولوژی القا شده به وسیله متر H مجموعه‌ای بسته باشد.*

تذکر ۷.۱.۱. *توجه کنید که اگر M زیرفضای H باشد، بستار آن یعنی $\overline{M}$ نیز چنین خواهد بود.*

تعریف ۸.۱.۱. اگر $x, y \in H$ و داشته باشیم $\langle x, y \rangle = ۰$، گوییم x عمود بر y است و می‌نویسیم $x \perp y$. چون $\langle x, y \rangle = ۰$ تساوی $\langle y, x \rangle = ۰$ را ایجاب می‌کند، رابطه‌ی تعامد (یا همان $\perp$) متقارن می‌باشد.

تعریف ۹.۱.۱. فرض می‌کنیم M یک زیرفضا از فضای هیلبرت H باشد، دراین صورت متمم متعامد M را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M^{\perp} = \{y \in H : \langle x, y \rangle = ۰; \forall x \in M\}.$$

تذکر ۱۰.۱.۱. *اگر M یک زیرفضا از H باشد، $M^{\perp}$ همواره یک زیرفضای بسته از H خواهد بود.*

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم M زیرفضای بسته‌ای از فضای هیلبرت H باشد. هرگاه زیرفضای بسته‌ای مانند N از H باشد به‌طوری‌که

$$H = M + N \qquad \text{و} \qquad M \cap N = \{۰\}$$

آنگاه گوییم M در H متمم می‌شود. در این حالت گوییم H مجموع مستقیم M و N است و گاهی از نماد

$$H = M \oplus N$$

استفاده می‌شود.

قضیه ۱۲.۱.۱. *هرگاه M زیرفضای بسته‌ی H باشد، آنگاه*

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

نتیجه به‌طور صریح یعنی M و $M^{\perp}$ زیرفضاهای بسته‌ی H اند که اشتراکشان $\{0\}$ بوده و مجموعشان H می باشد. فضای $M^{\perp}$ متمم متعامد M نام دارد.

برهان. رجوع شود به[۲۳. قضیه‌ی ۱۲.۴ صفحه ۳۲۴] $\square$

قضیه ۱۳.۱.۱. *هرگاه M زیرفضای بسته‌ی H باشد، آنگاه*

$$(M^{\perp})^{\perp} = M$$

برهان. رجوع شود به[۲۳. نتیجه‌ی صفحه ۳۲۴] $\square$

تعریف ۱۴.۱.۱. فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرمدار نامیم اگر به‌هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\| x \|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که

۱. برای‌هر $x, y \in X$، $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$؛

۲. برای‌هر $x \in X$ و هر اسکالر α، $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$؛

۳. $\| x \| = 0$ تساوی $x = 0$ را ایجاب کند.

تعریف ۱۵.۱.۱. جبر مختلط یک فضای برداری مانند A روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ است که در آن یک ضرب تعریف شده است که در روابط

$$x(yz) = (xy)z,$$

$$(x+y)z = xz + yz، \qquad x(y+z) = xy + xz،$$

و

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$$

به‌ازای‌هر x, y و z در A و هر اسکالر α صدق می‌کند.

۲.۱ عملگرها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. منظور از یک عملگر در H یعنی یک نگاشت خطی مانند T که قلمروش $\mathcal{D}(T)$ زیرفضایی از H بوده و بردش $\mathcal{R}(T)$ در H واقع باشد.

تعریف ۲.۲.۱. تابع $T : H_۱ \longrightarrow H_۲$ را عملگر خطی نامیم هرگاه برای‌هر $x, y \in H_۱$ و α اسکالر داشته باشیم:

$$T(\alpha x + y) = \alpha Tx + Ty$$

نمادگذاری ۳.۲.۱. *اگر $T : H_۱ \longrightarrow H_۲$ یک عملگر خطی با دامنه‌ی $\mathcal{D}(T) \subseteq H_۱$ باشد آنگاه می‌نویسیم $T \in \mathcal{L}(H_۱, H_۲)$.*

تعریف ۴.۲.۱. نرم عملگر $T : H_۱ \longrightarrow H_۲$ را به‌صورت زیر تعریف کرده:

$$\| T \| = \sup\{\| Tx \| : \forall x \in H_۱, \| x \| \leq ۱\}$$

تعریف ۵.۲.۱. عملگر خطی $T : H_۱ \longrightarrow H_۲$ را کراندار گوییم اگر مقدار ثابت c وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $x \in H_۱$،

$$\| T(x) \| \leq c \| x \|$$

نمادگذاری ۶.۲.۱. *مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای کراندار از فضای هیلبرت $H_۱$ به $H_۲$ را با $\mathcal{B}(H_۱, H_۲)$ نشان می‌دهیم.*

تذکر ۷.۲.۱. *اگر $H = H_۱ = H_۲$ باشد، آنگاه $\mathcal{B}(H_۱, H_۲)$ را با نماد $\mathcal{B}(H)$ نشان می‌دهیم.*

قضیه ۸.۲.۱. *هرگاه $T \in \mathcal{B}(H)$ و به‌ازای‌هر $x \in H$، $(Tx, x) = ۰$، آنگاه $T = ۰$.*

برهان. چون $(T(x + y), x + y) = ۰$، می‌بینیم که

$$(۱) \qquad (Tx, y) + (Ty, x) = ۰ \qquad (x \in H, y \in H).$$

اگر y را در(۱)با iy عوض کنیم نتیجه خواهد بود

$$(۲) \qquad -i(Tx, y) + i(Ty, x) = ۰ \qquad (x \in H, y \in H).$$

از ضرب (۲)در i وجمع با(۱)به دست می‌آوریم

$$(۳) \qquad (Tx, y) = ۰ \qquad (x \in H, y \in H).$$

رابطه (۳)به‌ازای $y = Tx$ نتیجه می‌دهد که $\| Tx \|^۲ = ۰$ لذا $Tx = ۰$. □

نتیجه ۹.۲.۱. *هرگاه* $T \in \mathcal{B}(H)$، $S \in \mathcal{B}(H)$، *و به‌ازای‌هر* $x \in H$،

$$(Sx, x) = (Tx, x),$$

آنگاه $S = T$.

برهان. رجوع شود به[۲۳. نتیجه‌ی صفحه ۳۲۶] □

تعریف ۱۰.۲.۱. اگر $T : \mathcal{D}(T) \subseteq H_۱ \longrightarrow H_۲$ یک عملگر با دامنه‌ی $\mathcal{D}(T)$ باشد آنگاه نمودار T به صورت $G(T) = \{(x, Tx) : x \in \mathcal{D}(T)\} \subseteq H_۱ \times H_۲$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱۱.۲.۱. گوییم S یک توسیع T است [یعنی $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ و، به ازای $x \in \mathcal{D}(T)$، $Sx = Tx$] اگروفقط‌اگر $G(T) \subset G(S)$. این شمول اغلب به شکل ساده‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$T \subset S.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. یک عملگر بسته عملگری است که گرافش زیرفضای بسته‌ای از $H \times H$ است. بنابر قضیه گراف بسته، $T \in \mathcal{B}(H)$ اگروفقط‌اگر $\mathcal{D}(T) = H$ و T بسته باشد.

نمادگذاری ۱۳.۲.۱. *مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای بسته بین* $H_۱$ *و* $H_۲$ *را با* $\mathcal{C}(H_۱, H_۲)$ *نشان می‌دهیم.*

تذکر ۱۴.۲.۱. اگر $H = H_1 = H_2$ باشد، آنگاه $\mathcal{C}(H_1, H_2)$ را با نماد $\mathcal{C}(H)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۵.۲.۱. اگر $T : H_1 \longrightarrow H_2$ یک عملگر خطی و بسته باشد، آنگاه T، کراندار است.

برهان. رجوع شود به[۲۳] $\square$

قضیه ۱۶.۲.۱. هرگاه $T \in \mathcal{B}(H)$، آنگاه (Tx, y) نسبت به x خطی، نسبت به y مزدوج خطی، و کراندار است. لذا عملگر منحصر به فردی مانند $T^* \in \mathcal{B}(H)$ موجود است که

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \qquad (x \in H, y \in H)$$

و نیز

$$\| T \| = \| T^* \|.$$

یادآوری می‌کنیم که $T \longrightarrow T^*$ یک برگشت بر $\mathcal{B}(H)$ است، یعنی چهار خاصیت زیر برقرارند:

$$(T + S)^* = T^* + S^*$$

$$(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$$

$$(ST)^* = T^* S^*$$

$$T^{**} = T.$$

برهان. رجوع شود به[۲۳. صفحه ۳۰۶] $\square$

تعریف ۱۷.۲.۱. گوییم عملگر $T \in \mathcal{B}(H)$

۱. خود الحاق (یا هرمیتی) است اگر $T = T^*$،

۲. نرمال است اگر $TT^* = T^*T$،

۳. T یکه‌ای است اگر $T^*T = TT^* = I$ که در آن I عملگر همانی بر H است،

۴. تصویر است اگر $T^۲ = T$.

تعریف ۱.۲.۱۸. اگر $T : H_۱ \longrightarrow H_۲$، فضای پوچ و برد T را به ترتیب با $\mathcal{N}(T)$ و $\mathcal{R}(T)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in H_۱ : Tx = ۰\}$$

$$\mathcal{R}(T) = \{y \in H_۲, \exists x \in H_۱ \quad s.t \quad Tx = y\}$$

تعریف ۱.۲.۱۹. عملگر $T \in \mathcal{B}(H)$ یک ایزومتری است(یعنی در $\| Tx \|=\| x \|$ به‌ازای‌هر $x \in H$ صدق می‌کند) اگروفقط‌اگر $TT^* = I$.

تعریف ۱.۲.۲۰. گوییم عملگر $T \in \mathcal{B}(H)$ معکوس‌پذیر است اگر $S \in \mathcal{B}(H)$ ی چنان موجود باشد که

$$ST = I = TS.$$

در این حالت می‌نویسیم $S = T^{-۱}$.

تعریف ۱.۲.۲۱. طیف $\sigma(T)$ از عملگر $T \in \mathcal{B}(H)$ مجموعه‌ی تمام اسکالرهای λ است به‌طوری‌که $T - \lambda I$ معکوس‌پذیر نیست. لذا $\lambda \in \sigma(T)$ اگروفقط اگر دست کم یکی از دو حکم زیر درست باشد:

۱. برد $T - \lambda I$ تمام H نباشد؛

۱. $T - \lambda I$ یک به یک نباشد.

تعریف ۱.۲.۲۲. فرض کنیم $T \in \mathcal{B}(H)$ دراین‌صورت به‌ازای‌هر $x \in H$، $(Tx, x) \geqslant ۰$ اگروفقط‌اگر $T = T^*$ و $\sigma(T) \subset [۰, \infty)$ که دراین‌صورت T را یک عملگر مثبت نامیده و می‌نویسیم $T \geq ۰$.

تعریف ۱.۲.۲۳. فرض کنید $T : H_۱ \longrightarrow H_۲$ یک عملگر خطی باشد، T را به‌طور چگال تعریف شده گوییم اگر دامنه‌ی T زیرمجموعه چگالی از $H_۱$ وبرد T مشمول $H_۲$ باشد.

قضیه ۲۴.۲.۱. *فرض کنیم S, T، و ST عملگرهایی باشند که در H به‌طورچگال تعریف شده‌اند. دراین‌صورت*

$$T^*S^* \subseteq (ST)^*.$$

هرگاه، علاوه براین، $S \in \mathcal{B}(H)$، آنگاه

$$T^*S^* = (ST)^*.$$

برهان. رجوع شود به[۲۳. قضیه‌ی ۱۳.۲ صفحه ۳۶۴] □

تعریف ۲۵.۲.۱. گوییم عملگر T در H متقارن است اگر برای $x \in \mathcal{D}(T)$ و $y \in \mathcal{D}(T)$ داشته باشیم:

$$(Tx, y) = (x, Ty)$$

لذا عملگرهای متقارن به‌طورچگال تعریف شده دقیقا آنهایی هستند که در رابطه‌ی

$$T \subset T^*$$

صدق می‌کنند.

هرگاه $T = T^*$، آنگاه گوییم T خودالحاق است.

وقتی $T \in \mathcal{B}(H)$، این دو خاصیت به وضوح یکی‌اند. این دو خاصیت در حالت کلی یکی نیستند.

به‌علاوه، هرگاه $\mathcal{D}(T)$ چگال بوده و به‌ازای‌هر $x \in \mathcal{D}(T)$ و $y \in \mathcal{D}(T)$، $(Tx, y) = (x, Sy)$، آنگاه $S \subset T^*$.

تعریف ۲۶.۲.۱. عملگر خطی (نه لزوماً کراندار) T در H را نرمال گوییم اگر T به‌طورچگال تعریف شده باشد و

$$T^*T = TT^*.$$

فصل ۲

عملگرهای بسته و انقباض های سره در فضای هیلبرت

مقدمه

ما در این فصل ابتدا برخی از خواص نگاشت یک‌به‌یک $\Gamma : A \to A(1 - A^*A)^{-1/2}$ که از مجموعه‌ی انقباض‌های سره یک‌به‌یک و پوشا به مجموعه‌ی عملگرهای بسته و به‌طورچگال تعریف شده در H است؛ را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. چون نگاشت Γ بسیاری از خواص عملگرها را حفظ می‌کند در جهت طبقه بندی کردن سوالاتی درباره ی عملگرهای بی‌کران مورد استفاده قرار می‌گیرد. در انتها به ساختن برخی از پیوستگی‌ها و وابستگی‌ها بین عملگرهای متقارن، بی‌کران و انقباض‌های فوق نرمال می‌پردازیم.

تمامی تعاریف، تذکرها، لم و قضایای ارائه شده در این فصل از مراجع [۲۳، ۱۸، ۱۷، ۱۵، ۱۲، ۱۱، ۵، ۲] گرفته شده است.

۱.۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

فرض کنیم $A : H_1 \longrightarrow H_2$ یک عملگر خطی باشد، دراین‌صورت عملگرهای A^* و A^{-1} به ترتیب نشان دهنده‌ی الحاق و معکوس عملگر A هستند.

تعریف ۱.۱.۲. عملگر خطی T را روی فضای هیلبرت H یک انقباض سره گوییم اگر:

$$\| Tx \| < \| x \|, \qquad \forall 0 \neq x \in H$$

تعریف ۲.۱.۲. نگاشت $\Gamma(A)$ از مجموعه‌ی انقباض‌های سره یک‌به‌یک و پوشا به مجموعه‌ی عملگرهای بسته و به‌طورچگال تعریف شده در H را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma(A) = A(1 - A^*A)^{-1/2}$$

تعریف ۳.۱.۲. اگر A یک انقباض سره باشد، عملگرهای B و B_* را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B = (1 - A^*A)^{1/2}$$

و

$$B_* = (1 - AA^*)^{1/2}$$

عملگر بسته و به‌طورچگال تعریف شده‌ی T را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$T = \Gamma(A) = AB^{-1}$$

در نتیجه

$$T^* = \Gamma(A^*) = A^*B_*^{-1}$$

روابط فوق یکدیگر را نتیجه می‌دهند و ثابت می‌شود که:

$$\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(T)$$

$$T^* = B^{-1}A^*$$

$$B = (1 + T^*T)^{-1/2}$$

$$T^*T = B^{-2} - 1.$$

رجوع شود به [۱۱]

تذکر ۴.۱.۲. *اگر A یک انقباض سره باشد، B و B^* یک‌به‌یک هستند.*

قضیه ۵.۱.۲. *فرض کنیم که $T : \mathcal{D}(T) \subseteq H \to H$ یک عملگر خطی باشد دراین‌صورت موارد زیر معادلند:*

۱. *T یک عملگر بسته در H می‌باشد، و*

۲. *T خارج قسمت AB^{-1} در $\mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H)$ است به‌طوری‌که جمع برداری $A^*(H) + B^*(H)$ در H بسته باشد.*

برهان. فرض کنیم گزاره (۱) درست باشد، یعنی؛ T یک عملگر بسته در H باشد. اگر S دامنه‌ی T باشد، برای‌هر (x,y) در $S \times S$ داریم:

$$< x, y >=< (x, Tx), (y, Ty) >.$$

طبق فرض T خطی و بسته است، لذا $(S, < ., . >)$ فضای ضرب داخلی است. به‌عبارت دیگر برای‌هر x در S داریم:

$$\| x \|^{۲} \leqslant < x, x >. \qquad \text{و} \qquad \| Tx \|^{۲} \leqslant < x, x >$$

بنابه نتیجه مک نیرنی [1] [۱۶، قضیه ۳، صفحه. ۶۶۶] عضو نامنفی مانند B در $\mathcal{B}(H)$ وجود دارد، به‌طوری‌که $S = B(H)$ است و برای‌هر (x,y) در $S \times S$ داریم:

$$< x, y >=< B^{-۱}x, B^{-۱}y >.$$

اگر $A = TB$ و x در H باشد؛ آنگاه

$$\| Ax \|^{۲} \leqslant < Bx, Bx > \leqslant \| x \|^{۲}$$

و بنابراین A در $\mathcal{B}(H)$ است.

حال P را تصویر متعامد $B^{-۱}B$ قرار می‌دهیم، آنگاه

$$AP = A \qquad \text{و} \qquad AB^{-۱} = T$$

است و برای‌همه‌ی (x,y) در $H \times H$، داریم:

$$< x, [B^{۲} + A^*A]y >=< (Bx, TBx), (By, TBy) >=< Bx, By >=< x, Py >.$$

از این‌رو $B^{۲} + A^*A = P$ و

$$A^*(H) + B(H) = [B^{۲} + A^*A]^{۱/۲}(H)$$

[1] Mac Nerney

است رجوع شود به [۵، قضیه ۲.۲، صفحه. ۲۶۰]. و درنتیجه $A^*(H) + B(H)$ بسته است، بنابراین گزاره (۲) درست است. برای درستی گزاره (۱) به [۱۱، قضیه۱، ص. ۵۳۲] رجوع شود.

نتیجه ۶.۱.۲. *اگر T یک عملگر بسته در H باشد، آنگاه T خارج قسمت $AB^{-۱}$ از زوج (A, B) در $\mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H)$ است به‌طوری‌که B نامنفی و $A = AB^{-۱}B$ است، و دامنه‌ی T برابر $B(H)$ و برد آن $A(H)$ است. و $A^*A + B^۲$ تصویر متعامد $B^{-۱}B$ بروی بستار $B(H)$، که بستار آن مجموعه $A^*(H) + B(H)$ است.*

تذکر ۷.۱.۲. *اگر $T = AB^{-۱}$ باشد، آنگاه تصویرهای متعامد از $H \times H$ بروی زیرمجموعه‌های $G(T)$ و $G(T^*)$ به ترتیب به‌صورت زیر می‌باشند:*

$$\begin{bmatrix} B^۲ & BA^* \\ AB & AA^* \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} ۱ - AA^* & AB \\ BA^* & ۱ - B^۲ \end{bmatrix}$$

برهان. رجوع شود به [۱۱] □

قضیه ۸.۱.۲. *فرض کنیم $\mathcal{V}(H)$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{B}(H)$ باشد و تابع $\Gamma(A)$ به‌صورت*

$$\Gamma(A) = A(۱ - A^*A)^{-۱/۲} \qquad \forall A \in \mathcal{V}(H)$$

آنگاه

$$\Gamma^{-۱}(T) = T[(۱ + T^*T]^{-۱/۲} \qquad \forall T \in \mathcal{C}(H)$$

برهان. فرض کنیم $A \in \mathcal{V}(H)$ باشد، و B عضو مثبت از $\mathcal{V}(H)$ به‌صورت زیر باشد

$$B = (۱ - A^*A)^{۱/۲}$$

آنگاه

$$\Gamma(A) = AB^{-۱}$$

و

$$AA^* + B^۲ = ۱$$

با توجه به این‌که دامنه‌ی $\Gamma(A)$ برابر $B(H)$ است و $B(H)$ در H چگال است. (زیرا B یک عملگر مثبت است). لذا $\Gamma(A)$ در $\mathcal{C}(H)$ است. اکنون فرض می‌کنیم $T \in \mathcal{C}(H)$ با استفاده از قضیه ی ۵.۱.۲، زوج (A, B) در $\mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H)$ وجود دارد به‌طوری‌که: $T = AB^{-۱}$ است و B مثبت، $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{D}(T)$، و

$$A^*A + B^۲ = ۱,$$

یعنی؛

$$B = (۱ - A^*A)^{۱/۲}.$$

و برای‌هر $۰ \neq x \in H$ داریم:

$$\| x \|^۲ - \| Ax \|^۲ = \| Bx \|^۲ > ۰$$

درنتیجه $A \in \mathcal{V}(H)$ و $T = \Gamma(A)$ است. فرض می‌کنیم T مجموعه‌ی تمام (Bz, Az) در H باشد که $z \in H$، پس T^* تشکیل شده است از تمام $(x, y) \in H \times H$ به‌طوری‌که برای $z \in H$ داریم:

$$< x, Az > = < y, Bz >$$

به‌عبارت دیگر برای‌هر $z \in H$ داریم:

$$< A^*x, z > = < By, z >$$

بنابراین

$$T^* = B^{-۱}A^*$$

نیومن [2] در [۲۳، ص. ۳۰۱] نشان داد که $۱ + T^*T$ در $\mathcal{B}(H)$ معکوس‌پذیر است.

[2] Von Neumann

و برای‌هر x در H داریم:

$$x = B^{۲}x + B^{-۱}(۱ - B^{۲})B^{-۱}B^{۲}x$$

$$= (۱ + B^{-۱}A^{*}AB^{-۱})B^{۲}x = (۱ + T^{*}T)B^{۲}x$$

از این‌رو

$$(۱ + T^{*}T)^{-۱} = B^{۲}$$

است و

$$A = TB = T[(۱ + T^{*}T)^{-۱}]^{۱/۲}$$

درنتیجه

$$\Gamma^{-۱}(T) = T[(۱ + T^{*}T)^{-۱}]^{۱/۲}$$

و حکم ثابت می‌شود. $\square$

۲.۲ عملگرهای بسته و انقباض‌های سره

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت، و عملگر خطی A روی H یک انقباض سره باشد. در این‌صورت نشان دادیم نگاشت $\Gamma(A)$ از مجموعه‌ی انقباض‌های سره یک‌به‌یک و پوشا به مجموعه عملگرهای بسته و به‌طورچگال تعریف شده در H به‌صورت زیر است:

$$\Gamma(A) = A(۱ - A^*A)^{-۱/۲}$$

حال در ادامه به بیان قضایایی که برخی از پیوستگی‌ها و وابستگی‌ها را بین عملگرهای متقارن، بی‌کران و انقباض‌های فوق نرمال نشان می‌دهد، می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۲. *عملگر $T = AB^{-۱}$ همه جا تعریف شده و معکوس‌پذیر کراندار است اگروفقط‌اگر عملگر A معکوس‌پذیر باشد.*

برهان. فرض کنیم B یک‌به‌یک و $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(T)$ باشد، A معکوس‌پذیر است اگروفقط‌اگر T روی $\mathcal{R}(H)$ یک‌به‌یک باشد. با استفاده از قضیه‌ی گراف بسته، T معکوس‌پذیر کراندار روی دامنه‌ی H می‌باشد. □

لم ۲.۲.۲. *تبدیل Γ الحاق را حفظ می‌کند یعنی؛ $\Gamma(A^*) = \Gamma(A)^*$.*

برهان. می‌دانیم $A^*B_* = BA^*$ و دوگان آن، $AB = B_*A$ بنابراین

$$\Gamma(A)^*|_{\mathcal{R}(B_*)} = B^{-۱}A^*B_*B_*^{-۱} = B^{-۱}BA^*B_*^{-۱} = \Gamma(A^*).$$

کافی است نشان‌دهیم:

$$\mathcal{D}(\Gamma(A)^*) \subseteq \mathcal{R}(B_*)$$

یعنی؛ اگر A^*x در $\mathcal{R}(B)$ باشد، آنگاه x در $\mathcal{R}(B_*)$ است.

فرض کنیم $A^*x = By$ آنگاه

$$(۱ - B_*^۲)x = AA^*x = ABy = B_*Ay$$

درنتیجه

$$x = B_*(B_*x - Ay)$$

و حکم ثابت می‌شود. $\square$

لم ۳.۲.۲. *اگر $AB = BA$ باشد، آنگاه $AB^{-1} = B^{-1}A$.*

برهان. با استفاده از برهان لم ۲.۲.۲ داریم: اگر $AB = BA$ آنگاه $B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1}$ است، بنابراین

$$B^{-1}A|_{\mathcal{R}(B)} = AB^{-1},$$

فرض کنیم $Ax = By$ آنگاه

$$(1 - B^2)x = A^*Ax = A^*By = BA^*y$$

(می‌دانیم که $A^*B = BA^*$) از این‌رو داریم:

$$x = B(Bx - A^*y)$$

درنتیجه

$$B^{-1}A = AB^{-1}.$$

و حکم ثابت می‌شود. $\square$

تعریف ۴.۲.۲. عملگر T را شبه نرمال گوییم، اگر $T(T^*T) = (T^*T)T$.

قضیه ۵.۲.۲. *عملگرهای Γ و Γ^{-1} نرمال و شبه نرمال بودن را حفظ می‌کند. یعنی؛ T نرمال (شبه نرمال) است اگروفقط‌اگر A نرمال (شبه نرمال) باشد.*

برهان. می‌دانیم Γ یک‌به‌یک است، لذا با توجه به لم۲.۲.۲ و این‌که $\Gamma^{-1}(T^*) = A^*$ است، نتیجه می‌شود:

$$B_* = (1 + TT^*)^{-1/2}$$

از این‌رو، نرمال بودن A و T معادل است با A نرمال است اگروفقط‌اگر

$$(1 - A^*A)^{1/2} = (1 - AA^*)^{1/2}$$

(یعنی؛ $B = B_*$)، به‌عبارت‌دیگر

$$(1 + T^*T)^{1/2} = (1 + TT^*)^{1/2},$$

اگروفقط‌اگر $T^*T = TT^*$ باشد.

حال فرض می‌کنیم A شبه نرمال باشد، آنگاه $AB = BA$ است. از این‌رو با استفاده از لم ۳.۲.۲،

$$T = AB^{-1} = B^{-1}A.$$

از طرفی می‌دانیم $T^*T = B^{-2} - 1$ است، درنتیجه داریم:

$$T(T^*T) = AB^{-1}(B^{-2} - 1) = B^{-1}AB^{-2} - AB^{-1} = B^{-2}AB^{-1} - AB^{-1} = (T^*T)T.$$

برعکس، از شبه نرمال بودن T داریم $TB = BT$ و بنابراین

$$AB = TB^2 = B(TB) = BA,$$

پس نتیجه می‌گیریم A شبه نرمال است. □

تعریف ۶.۲.۲. این امر که هر عدد مختلط λ را می‌توان به شکل $\lambda = \alpha|\lambda|$ تجزیه کرد که در آن $|\alpha| = 1$ مسئله‌ی تجزیه‌ی $T \in \mathcal{B}(H)$ به شکل $T = UP$ با U ی یکه‌ای و $P \geq 0$ را پیشنهاد می‌کند. وقتی این کار ممکن باشد، UP را یک تجزیه‌ی قطبی T می‌نامیم.

قضیه ۷.۲.۲.

۱. *هرگاه $T \in \mathcal{B}(H)$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه T تجزیه‌ی قطبی منحصر به فردی مانند $T = UP$ دارد.*

۲. هرگاه $T \in \mathcal{B}(H)$ نرمال باشد، آنگاه T یک تجزیه‌ی قطبی مانند $T = UP$ دارد که در آن U و P با یکدیگر و با T تعویض می‌شوند.

برهان. رجوع شود به [۲۳] $\square$

تذکر ۸.۲.۲. *این طور نیست که هر $T \in \mathcal{B}(H)$ تجزیه‌ی قطبی دارد. با این حال، اگر P ریشه‌ی دوم مثبت T^*T باشد، آنگاه به‌ازای‌هر $x \in H$، $\| Tx \| = \| Px \|$؛ درنتیجه، اگر $Px = Py$، طبق خاصیت خطی، $Tx = Ty$. فرمول*

$$VPx = Tx$$

یک ایزومتری خطی مانند V از $\mathcal{R}(P)$ بروی $\mathcal{R}(T)$ تعریف می‌کند که دارای یک توسیع پیوسته به یک ایزومتری خطی از بست $\mathcal{R}(P)$ بروی بست $\mathcal{R}(T)$ است.

هرگاه یک ایزومتری خطی از $\mathcal{R}(P)^{\perp}$ بروی $\mathcal{R}(T)^{\perp}$ موجود باشد، آنگاه V را می‌توان به یک عملگر یکه‌ای بر H توسیع داد، و در این‌صورت T یک تجزیه‌ی قطبی خواهد داشت. وقتی $dim < \infty$، این همواره رخ می‌دهد زیرا در این‌صورت $\mathcal{R}(P)$ و $\mathcal{R}(T)$ دارای بعد یکسان می‌باشند.

تعریف ۹.۲.۲. هرگاه V را با تعریف $Vy = 0$ به‌ازای‌هر $y \in \mathcal{R}(P)^{\perp}$ به عضوی از $\mathcal{B}(H)$ وسعت دهیم، آنگاه V یک ایزومتری جزئی نام دارد.

قضیه ۱۰.۲.۲. *لذا هر $T \in \mathcal{B}(H)$ دارای یک تجزیه مانند $T = VP$ است که در آن P مثبت بوده و V یک ایزومتری جزئی می‌باشد.*

برهان. رجوع شود به [۲۳] $\square$

لم ۱۱.۲.۲. *فرض کنیم $|T| = \Gamma(|A|)$ است، هرگاه $V(|A|)$ تجزیه‌ی قطبی A باشد، آنگاه $V(|T|)$ تجزیه‌ی قطبی T است.*

برهان. می‌دانیم $|T| = (T^*T)^{1/۲}$ است، لذا

$$|T| = (B^{-۲} - ۱)^{۱/۲} = (۱ - B^۲)^{۱/۲}B^{-۱} = (A^*A)^{۱/۲}B^{-۱} = \Gamma(|A|)$$

درنتیجه

$$V(|T|) = V|A|B^{-۱} = AB^{-۱} = T.$$

$\square$

تعریف ۱۲.۲.۲. عملگر T را فوق نرمال گوییم هرگاه به‌ازای‌هر $x \in H$ داشته باشیم

$$\| Tx \| \leqslant \| T^*x \|,$$

یا

$$T^*T - TT^* \geqslant ۰$$

قضیه ۱۳.۲.۲. عملگر T *متقارن است، اگروفقط‌اگر* A^*B *خودالحاق باشد، دراین‌صورت* A *فوق نرمال است.*

برهان. فرض کنیم $< ., . >$ ضرب داخلی در H باشد، آنگاه T متقارن است اگروتنهااگر برای‌تمام $(x,y) \in H \times H$ داشته باشیم:

$$< TBx, By > = < Bx, TBy >$$

پس $A = TB$ و درنتیجه

$$< x, A^*By > = < A^*Bx, y >$$

بنابراین شرط خودالحاق بودن روی A^*B نتیجه می‌شود. لذا T متقارن است، هرگاه A^*B خودالحاق باشد. حال فرض می‌کنیم برای‌تمام $x \in \mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(T)$ داشته باشیم:

$$\| B_*^{-1}x \|^2 = \| (1 + TT^*)^{1/2}x \|^2 = \| x \|^2 + \| T^*x \|^2$$

$$= \| x \|^2 + \| Tx \|^2 = \| B^{-1}x \|^2.$$

لذا $B_*^{-1}B$ یک ایزومتری روی H است و بنابراین

$$B_*^{-1}B^2B_*^{-1} \subseteq (B_*^{-1}B)(B_*^{-1}B)^* \leqslant 1$$

درنتیجه $B^2 \leqslant B_*^2$. پس

$$AA^* = 1 - B_*^2 \leqslant 1 - B^2 = A^*A$$

یعنی؛ A فوق نرمال است.

□

قضیه ۱۴.۲.۲. *فرض کنیم یک عملگر بسته، به‌طورچگال تعریف شده و شبه نرمال، متقارن باشد؛ آنگاه خودالحاق است.*

برهان. اگر عملگر T شبه نرمال باشد، آنگاه با استفاده از قضیه‌ی ۵.۲.۲، $A = \Gamma^{-1}(T)$ است. اگر عملگر T متقارن باشد با استفاده از قضیه‌ی ۱۱.۲.۲، داریم

$$A^*B = (A^*B)^* = BA.$$

چون A شبه نرمال است، پس $BA = AB$؛ از طرفی A^* با A روی زیرفضای چگال $\mathcal{R}(B)$ از H برابر است پس $A = A^*$ و با استفاده از لم ۲.۲.۲، $T = T^*$ می‌باشد و حکم ثابت می‌شود. □

لم ۱۵.۲.۲. *اگر T یک عملگر متقارن باشد؛ آنگاه $B_*^{-1}B = A^2 + B_*B$ یک عملگر ایزومتری از H بروی $B_*^{-1}(\mathcal{D}(T))$ است، و $(AB_* - B_*A)(A^2 + B_*B) = 0$ است.*

برهان. با استفاده از برهان قضیه ی ۱۱.۲.۲، $B_*^{-1}B$ یک ایزومتری است؛ واضح است که برد آن $B_*^{-1}(\mathcal{D}(T))$ است. از طرفی $A = TB = T^*B$ (Tمتقارن) و $AA^* + B_*^2 = 1$، پس داریم

$$B_*^{-۱}B = AA^*B_*^{-۱}B + B_*^۲B_*^{-۱}B = AT^*B + B_*B = A^۲ + B_*B.$$

با محاسبه نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$(AB_* - B_*A^*)(A^۲ + B_*B) = (AB_* - B_*A^*)B_*^{-۱}B = AB - B_*T^*B$$

$$= AB - B_*TB = AB - B_*A = ۰$$

و حکم ثابت می‌شود. □

فصل ۳

تعیین یک متریک قوی برای عملگرهای بسته در فضای هیلبرت

مقدمه

در ۱۱.۱.۲ یک نمایش برای عملگرهای بسته به دست آوردیم. حال با استفاده از این نمایش برای فضای عملگرهای بسته و به‌طورچگال تعریف شده بر یک فضای هیلبرت، یک متریک تعریف کرده، و در ادامه به خواص آن پرداخته و نشان می‌دهیم که این متریک، از متریک رخنه قوی‌تر است. این متریک در بسیاری از خواص با متریک رخنه اشتراک دارد. همچنین نشان خواهیم داد که تحدید این متریک بر فضای عملگرهای کراندار، معادل با نرم عملگری است.

تمامی تعاریف، تذکرها، لم و قضایای ارائه شده در این فصل از مراجع [۲۳، ۱۳، ۱۲، ۱۱، ۱۰] گرفته شده است.

۱.۳ مفاهیم مقدماتی

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $CD(H)$ مجموعه‌ی عملگرهای خطی بسته و به‌طورچگال تعریف شده در H باشد، حال متریک رخنه را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم $G(T)$ و $G(S)$ به‌ترتیب نمودارهای عملگرهای T و S باشند و $P_{G(T)}$ و $P_{G(S)}$ به‌ترتیب تصویرهای متعامد بر $G(T)$ و $G(S)$ باشند در این‌صورت متریک رخنه به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$d(T,S) = \| P_{G(T)} - P_{G(S)} \|$$

که $\| . \|$ نشانگر نرم عملگر $P_{G(T)} - P_{G(S)}$ است.

حال به‌معرفی متریک دیگری برای $CD(H)$ که قوی‌تر از متریک d است، و در بسیاری از خواص با آن اشتراک دارد، می‌پردازیم. برای به دست آوردن این متریک، تابع α را برای همه‌ی $T \in CD(H)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(T) = T(1 + T^*T)^{-1/2}$$

رجوع شود به قضیه‌ی ۲ .۱. ۸ ، لازم به ذکر است که تبدیل α همان Γ^{-1} است و به‌علاوه این تبدیل بر روی انقباض‌های سره یک‌به‌یک و پوشا است. اکنون به تعریف متریک فوق که با نگاشت α شناخته می‌شود، می‌پردازیم. این تعریف مشابه با تعریف d است. در واقع برای‌هر S و T در $\mathcal{CD}(H)$ داریم:

$$\delta(S,T) = \| \alpha(S) - \alpha(T) \|$$

واضح است که $\mathcal{CD}(H)$ با زیرمجموعه‌ی $\mathcal{V}(H)$ (از گوی‌های واحد $\mathcal{B}(H)$) تحت متریک δ ایزومتری است، بنابراین برای‌همه‌ی S و T ها داریم:

$$\delta(S,T) \leqslant ۲$$

رجوع شود به [۱۰]

۲.۳ یک متریک قوی تر برای عملگرهای بسته

لم ۱.۲.۳. فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله‌ای نامتناهی از عملگرهای مثبت کراندار روی H باشد، و $B \in \mathcal{B}(H)$ است. و $\lim_{n\to\infty} \| A_n - B \| = 0$، آنگاه B مثبت است و $\lim_{n\to\infty} \| A_n^{1/2} - B^{1/2} \| = 0$.

برهان. فرض کنیم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابع پیوسته باشد و $\| A_n - B \| \to 0$ آنگاه $\| f(A_n) - f(B) \| \to 0$، از طرفی می‌دانیم حد عملگرهای مثبت، مثبت است. پس حکم ثابت می‌شود. □

درحقیقت لم فوق بیان می‌کندکه تابع ریشه دوم در توپولوژی نرم پیوسته است.

قضیه ۲.۲.۳. *متریک δ قوی‌تر از متریک رخنه d است.*

برهان. فرض کنیم برای‌هر T در $\mathcal{CD}(H)$، عملگر مثبت کراندار $\beta(T)$ به‌صورت زیر باشد

$$\beta(T) = (1 + T^*T)^{-1/2}$$

پس $\alpha(T) = T\beta(T)$ است. لذا بنا به تذکر ۷.۱.۲ می‌توان یک نمایش از ماتریس عملگر برای تابع تصویر P که در شرایط α و β صدق می‌کند، به‌صورت زیر بیاوریم :

$$P(T) = \begin{pmatrix} \beta(T)^2 & \beta(T)\alpha(T)^* \\ \alpha(T)\beta(T) & \alpha(T)\alpha(T)^* \end{pmatrix}.$$

از این رو برای‌هر T در $\mathcal{CD}(H)$ یک دنباله مانند $\{S_n\}$ در $\mathcal{CD}(H)$ وجود دارد، به‌طوری‌که می‌توان گفت $\delta(S_n, T) \to 0$ اگروفقط‌اگر هر یک از گزاره‌های زیر برقرار باشند:

۱. $\| \beta(S_n)^2 - \beta(T)^2 \| \to 0$؛

۲. $\| \beta(S_n)\alpha(S_n)^* - \beta(T)\alpha(T)^* \| \to 0$؛

۳. $\| \alpha(S_n)\beta(S_n) - \alpha(T)\beta(T) \| \to 0$؛

۴. $\| \alpha(S_n)\alpha(S_n)^* - \alpha(T)\alpha(T)^* \| \to 0$.

حال فرض کنیم برای‌هر $\{S_n\}$ و T، $\delta(S_n,T) \to ۰$، یعنی؛

$$\| \alpha(S_n) - \alpha(T) \| \to ۰$$

از این‌رو، با استفاده از خاصیت پیوستگی نرم، (۴) برقرار است.

با استفاده از [۱۱. قضیه ۲ و برهان صفحه ۵۳۳]، می‌توانیم β را برحسب α بیان کنیم:

$$\beta = (۱ - \alpha^*\alpha)^{۱/۲}$$

بنابراین گزاره (۱) از دوگان گزاره (۴) نتیجه می‌شود، یعنی داریم:

$$\| \beta(S_n)^۲ - \beta(T)^۲ \| = \| [۱ - \alpha(S_n)^*\alpha(S_n)] - [۱ - \alpha(T)^*\alpha(T)] \|$$

$$= \| \alpha(S_n)^*\alpha(S_n) - \alpha(T)^*\alpha(T) \| \to ۰.$$

حال با به‌کارگیری لم ۱.۲.۳ به دست می‌آوریم:

$$\| \beta(S_n) - \beta(T) \| \to ۰,$$

که از آن (۲) و (۳) نتیجه می‌شود. □

اثبات مرحله قوی‌تر بودن متریک δ از متریک d را با مثال زیر نشان می‌دهیم.

مثال ۳.۲.۳. فرض کنیم H تفکیک‌پذیر است و ϕ_n پایه‌ی متعامد یکه باشد. برای‌هر عدد صحیح مثبت n، فرض کنیم $C_n \in \mathcal{B}(H)$ باشد به‌طوری‌که

$$C_n\phi_p = \begin{cases} p\phi_p & p \neq n\,, \\ -p\phi_p & p = n\,. \end{cases}$$

فرض کنیم اگر $C \in \mathcal{CD}(H)$ باشد به‌طوری‌که برای‌همه‌ی p ها $C\phi_p = p\phi_p$ باشد، ($C^{-۱} \in \mathcal{B}(H)$).
حال فرض می‌کنیم

$$B = \beta(C) \quad \text{و} \quad A = \alpha(C)$$

است، و برای‌هر n،

$$B_n = \beta(C_n) \quad \text{و} \quad A_n = \alpha(C_n)$$

باشد. واضح است

$$B_n = B \quad \text{و} \quad A_n^۲ = A^۲$$

از این‌رو گزاره های (۱) تا (۴) در برهان قضیه برقرار است، بنابراین $d(C_n, C) \to ۰$. به‌عبارت‌دیگر وقتی $n \to \infty$،

$$\delta(C_n, C) = \| A_n - A \| = ۲n(۱ + n^۲)^{-۱/۲} \to ۲.$$

یکی از خواص متریک d در $B(H)$ آن است که تحدید این متریک بر فضای عملگرهای کراندار، معادل با عملگر نرم است. متریک δ نیز دارای چنین ویژگی می‌باشد.

قضیه ۴.۲.۳. *متریک δ و نرم عملگری در $B(H)$ معادل هستند.*

برهان. عملگر T در $CD(H)$ کراندار است اگروفقط‌اگر دامنه‌ی آن H باشد؛ و $\beta(T)$ وارون‌پذیر است (مثبت با برد H) . اگر S_n یک دنباله در $\beta(T)$ باشد و $\| S_n - T \| \to ۰$ آنگاه

$$\| \beta(S_n)^{-۲} - \beta(T)^{-۲} \| = \| T^*T - S_n^*S_n \| \to ۰,$$

با استفاده از لم ۱.۲.۳ نتیجه می‌شود

$$\| \beta(S_n)^{-۱} - \beta(T)^{-۱} \| \to ۰$$

بنابراین

$$\delta(S_n, T) = \| \alpha(S_n) - \alpha(T) \| = \| S_n\beta(S_n)^{-۱} - T\beta(T)^{-۱} \| \to ۰$$

برعکس، اگر

$$\| \alpha(S_n) - \alpha(T) \| \to ۰$$

با استفاده از رابطه‌ی

$$\beta = (1 - \alpha^*\alpha)^{1/2},$$

و نیز پیوستگی نرم و به کار گیری لم ۳.۲.۱، و با توجه به این‌که $\| S_n\beta(S_n) - T\beta(T) \| \to 0$ ($\alpha(T) = T\beta(T)^{-1}$) نتیجه می‌شود

$$\| S_n - T \| = \| S_n\beta(S_n)^{-1}\beta(S_n) - T\beta(T)^{-1}\beta(T) \|$$

$$= \| \alpha(S_n)\beta(S_n) - \alpha(T)\beta(T) \| \to 0$$

که اثبات را کامل می‌کند. □

قضیه ۳.۲.۵. *نسبت به متریک δ، $\mathcal{B}(H)$ یک زیرمجموعه‌ی باز و چگال در $\mathcal{CD}(H)$ است.*

برهان. می‌خواهیم ثابت کنیم $\mathcal{B}(H)$، δ- باز است، T عضو $\mathcal{CD}(H)$ کراندار است اگروفقط‌اگر $\| \alpha(T) \| <$ ۱ باشد. اگر فرض کنیم $T \in \mathcal{CD}(H)$ باشد، آنگاه $\alpha(T)$ گوی واحد بسته از $\mathcal{B}(H)$ می‌باشد، از این‌رو $\{(n+1)^{-1}\alpha(T)\}$ دنباله‌ای از عملگرهای A_n است، به‌طوری‌که برای‌هر n داریم، $\| A_n \| < 1$ است(A_n یک انقباض سره)، و $\| A_n - \alpha(T) \| \to 0$. حال فرض می‌کنیم برای‌هر n، $S_n = \alpha^{-1}(A_n)$ است؛ بنا به [۱۱. قضیه ۲] هر $S_n \in \mathcal{B}(H)$ است. از این‌رو واضح است که، $\| \alpha(S_n) - \alpha(T) \| \to 0$، بنابراین T حد دنباله‌ی $\{S_n\}$ است و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۳.۲.۶. *فرض کنیم برای‌هر S و T در $\mathcal{CD}(H)$، که $V|S|$ و $V|T|$ تجزیه‌های قطبی S و T باشند. آنگاه عبارات زیر نتیجه می‌شوند:*

۱. $\delta(S^*, T^*) = \delta(S, T)$

۲. $\delta(|S|, |T|) = \| |\alpha(S)| - |\alpha(T)| \|$

۳. $\delta(V, W) = \sqrt{1/2} \| V - W \|$

۴. $\delta(S,T) \leqslant \sqrt{۲}\delta(V,W)+\delta(|S|,|T|)$

برهان. گزاره ی (۱) از آن‌که برای‌هر C در $\mathcal{CD}(H)$، $\alpha(C^*)=\alpha(C)^*$ است، نتیجه می‌شود، رجوع شود به لم [۲.۲.۲].

گزاره‌ی (۲) از لم ۱۱.۲.۲ نتیجه می‌شود.

با استفاده از تعریف تجزیه قطبی، V و W ایزومتری‌های جزیی‌اند، لذا با به‌کارگیری [۱۱، قضیه ۳] داریم:

$$\alpha(W)=\sqrt{۱/۲}W \quad \text{و} \quad \alpha(V)=\sqrt{۱/۲}V$$

درنتیجه گزاره (۴) را از گزاره(۳) و لم ۱۱.۲.۲ اثبات می‌شود؛

$$\begin{aligned}
\delta(S,T) &= \| \alpha(S)-\alpha(T) \| \\
&= \| \alpha(V|S|)-\alpha(W|T|) \| = \| V\alpha(|S|)-W\alpha(|T|) \| \\
&\leqslant \| V-W \| . \| \alpha(|S|) \| + \| W \| . \| \alpha|S|)-\alpha(|T|) \| \\
&\leqslant \sqrt{۱/۲}\delta(V,W)+\delta(|S|,|T|)
\end{aligned}$$

□

حال در ادامه مطلب رابطه‌ی بین همگرایی δ و تجزیه‌ی قطبی را به دست می‌آوریم.

قضیه ۷.۲.۳. *فرض می‌کنیم $\{S_n\}$ و T در $\mathcal{CD}(H)$ باشد، $W|T|$ تجزیه‌ی قطبی T و برای‌هر n، $V_n|S_n|$ تجزیه قطبی از S_n است، آنگاه*

۱. *وقتی‌که $n\to\infty$، اگر $\delta(S_n,T)\to ۰$ آنگاه $\delta(|S_n|,|T|)\to ۰$*

۲. *وقتی‌که $n\to\infty$، اگر $\delta(V_n,W)\to ۰$ (معادل با $\| V_n-W \|\to ۰$) و $\delta(|S_n|,|T|)\to ۰$ آنگاه* $\delta(S_n,T)\to ۰$.

برهان. فرض کنیم وقتی‌که $n \to \infty$، $\delta(S_n, T) \to ۰$. لذا

$$\| \alpha(S_n)^*\alpha(S_n) - \alpha(T)^*\alpha(T) \| \to ۰$$

و بنابراین با توجه به لم ۱.۲.۳ داریم:

$$\| \, |\alpha(S_n)| - |\alpha(T)| \, \| \to ۰$$

اکنون با به‌کارگیری گزاره (۲) قضیه ۶.۲.۳ گزاره (۱) ثابت می‌شود. گزاره (۲) نیز از گزاره (۴) قضیه ۶.۲.۳ نتیجه می‌شود. □

قضیه ۸.۲.۳. *فرض کنیم $C \in \mathcal{CD}(H)$ و $\{C_n\}$ یک دنباله‌ی نامتناهی باشد به‌طوری‌که برای‌هر n داشته باشیم، $\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(C_n)$. آنگاه برای‌هر n، عملگر $T_n = ۱ - \beta(C_n)^{-۱}\beta(C)$ در $\mathcal{B}(H)$ است. همچنین $\delta(C_n, C) \to ۰$، و برای‌هر $x \in H$، وقتی $n \to \infty$، $\| T_n x \| \to ۰$، و برای همه‌ی y ها در $domC$، وقتی $n \to \infty$، $\| C_n y - Cy \| \to ۰$.*

برهان. در [۱۱.قضیه ۲ و برهان صفحه ۵۳۳] نشان دادیم اگر برای‌هر $S \in \mathcal{CD}(H)$ است، $\beta(S)$ یک‌به‌یک است. و $\mathcal{R}(\beta(S)) = \mathcal{D}(S)$. پس، $\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(C_n)$ معادل است با این‌که $\mathcal{R}(\beta(C)) \subseteq \mathcal{D}(\beta(C_n)^{-۱})$: به‌عبارت دیگر $\mathcal{D}\beta(C_n)^{-۱}\beta(C) = H$ و، بنابراین با توجه به قضیه گراف بسته و این‌که T_n عملگر بسته است پس $T_n \in \mathcal{B}(H)$ است. و همچنین

$$y \in \mathcal{D}(C) = (\mathcal{R}\beta(C)) \quad : \exists x \in H \quad s.t. \quad y = \beta(C)x \Leftrightarrow \beta(C)^{-۱}y = x$$

با توجه به این‌که $\alpha(S) = S\beta(S)$ برای‌همه‌ی n داریم:

$$\| (C - C_n)y \| = \| (C - C_n)\beta(C)x \| = \| [\alpha(C) - C_n\beta(C)]x \|$$

$$\leqslant \| [\alpha(C) - \alpha(C_n)]x \| + \| [\alpha(C_n) - C_n\beta(C)]x \|$$

$$\leqslant \delta(C_n, C) \| x \| + \| [\alpha(C_n) - C_n\beta(C_n)\beta(C_n)^{-۱}\beta(C)]x \|$$

$$\leqslant \delta(C_n, C) \parallel x \parallel + \parallel \alpha(C_n) \parallel . \parallel [1 - \beta(C_n)^{-1}\beta(C)]x \parallel$$

$$\leqslant \delta(C_n, C) \parallel x \parallel + \parallel T_n x \parallel$$

بنابراین، اگر C_n، δ همگرا به C و T_n همگرایی قوی به ۰ داشته باشد آنگاه C_n همگرایی قوی به C روی دامنه دارد و حکم ثابت می‌شود.

□

فصل ۴

تعیین فرمولی برای متریک رخنه میان دو عملگر بسته

مقدمه

ما در این فصل ابتدا متریک رخنه را بین زیرفضاها بسته از یک فضای هیلبرت را معرفی کرده، و سپس به بیان خواص مقدماتی آنها می‌پردازیم. سپس به‌طور خاص متریک رخنه بین عملگرهای بی‌کران را مورد بحث و بررسی قرار داده و فرمولی جدید برای محاسبه متریک رخنه بین دو عملگر بسته‌ی به‌طورچگال تعریف شده ارائه می‌دهیم.

تمامی تعاریف، تذکرها، لم و قضایای ارائه شده در این فصل از مراجع [۲۳، ۲۱، ۱۹، ۱۷، ۱۵، ۸، ۷، ۴، ۳، ۲، ۱] گرفته شده است.

۱.۴ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۴. فرض کنیم M و N زیرفضاهای بسته از فضای هیلبرت H باشد و P_M و P_N به ترتیب تصویرهای متعامد بروی M و N باشند، در این‌صورت متریک رخنه میان دو زیرفضای بسته M و N به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$d(M,N) = \| P_M - P_N \|$$

تعریف ۲.۱.۴. هرگاه H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت باشند و $B : H_1 \longrightarrow H_2$ و A عملگرهای بسته باشند، در این‌صورت رخنه میان A و B که آن را با $\theta(A$ و $B)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta(A,B) = \| P_A - P_B \|$$

و تعریف زیر را داریم:

تعریف ۳.۱.۴. فرض کنیم $G(A)$ و $G(B)$ به ترتیب نمودارهای عملگرهای A و B باشند و $P_{G(A)}$ و $P_{G(B)}$ به ترتیب تصویرهای متعامد بر $G(A)$ و $G(B)$ باشند در این صورت متریک رخنه به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\theta(A,B) = \| P_{G(A)} - P_{G(B)} \|$$

تذکر ۴.۱.۴. *در حالت خاص اگر $B = 0$ باشد، آنگاه $\theta(A)$ را برابر $\theta(A, 0)$ تعریف کرده و آن را رخنه A می‌نامیم.*

تذکر ۵.۱.۴. *برای هر ماتریس $m \times n$، مانند A داریم:*

$$\theta(A) = \frac{\| A \|}{\sqrt{1 + \| A \|^2}}$$

رجوع شود به [۴]

تذکر ۶.۱.۴. *فرمول زیر برای رخنه میان عملگرهای کراندار ارائه شده است. اگر A و $B \in \mathcal{B}(H)$، آنگاه*

$$\theta(A,B) = max\Big\{ \| (I + BB^*)^{-1/2}(A - B)(I + A^*A)^{-1/2} \|,$$
$$\| (I + AA^*)^{-1/2}(A - B)(I + B^*B)^{-1/2} \| \Big\}$$

رجوع شود به [۱۷]

حال با توجه به تعریف فوق می‌توان رخنه بین عملگرهای بی‌کران را به‌صورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۷.۱.۴. اگر A و B عملگرهای به‌طورچگال تعریف شده و بسته باشند آنگاه رخنه بین A و B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| P_{G(A)} - P_{G(B)} \|$$

متریک فوق روی رده عملگرهای بسته یک توپولوژی تولید می‌کند که به آن توپولوژی رخنه می‌گوییم. لازم به ذکر است که تحدید توپولوژی رخنه به رده عملگرهای کراندار با توپولوژی تولید شده توسط نرم یکسان می‌باشد.

تعریف ۸.۱.۴. اگر S و T عملگرهای بسته باشند به‌طوری‌که $\mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{D}(T)$ و برای‌هر $x \in \mathcal{D}(S)$، $Sx = Tx$، در این‌صورت S را تحدیدی از T و T را توسیعی از S می‌نامیم.

نمادگذاری ۹.۱.۴. *اگر $T \in \mathcal{C}(H_1, H_2)$ به‌طورچگال تعریف شده باشد، آنگاه*

$$\widehat{T} = (1 + TT^*)^{-1} \quad \text{و} \quad \check{T} = (1 + T^*T)^{-1}$$

به‌طور مشابه اگر $A \in \mathcal{C}(H_1, H_2)$ به‌طور چگال تعریف شده باشد، آنگاه

$$\widehat{A} = (1 + AA^*)^{-1} \quad \text{و} \quad \check{A} = (1 + A^*A)^{-1}$$

را به‌صورت بالا نشان می‌دهیم.

حال قصد داریم برخی از مفاهیمی که در بخش بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، مورد بررسی قرار دهیم.

گزاره ۱۰.۱.۴. *اگر M و N زیرفضاهای بسته از فضای هیلبرت H باشند، آنگاه*

$$d(M,N) = \| P_M - P_N \| = max\Big\{ \| P_M(I - P_N) \|, \| P_N(I - P_M) \| \Big\}$$

برهان. رجوع شود به [۱. صفحه ۷۰] □

گزاره ۱۱.۱.۴. *اگر H_i فضای هیلبرت باشد. $A_i \in \mathcal{B}(H_i)$ و $i = 1, 2$، $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$، آنگاه $A \in \mathcal{B}(H_1 \oplus H_2)$، $\| A \| = max\Big\{ \| A_1 \|, \| A_2 \| \Big\}$*

برهان. رجوع شود به [۳. صفحه ۷۱-۷۰] □

تعریف ۱۲.۱.۴. فرض کنیم عملگر $T \in \mathcal{C}(H)$ یک عملگر مثبت باشد، اگر عملگر S وجود داشته باشد به‌طوری‌که $T = S^2$، آنگاه S را ریشه‌ی دوم از T می‌نامیم و به‌صورت $S = T^{1/2}$ می‌نویسیم.

گزاره ۱۳.۱.۴. *اگر $T \in \mathcal{C}(H_1, H_2)$ به‌طورچگال تعریف شده باشد، آنگاه عملگر $1 + T^*T : D(T^*T) \longrightarrow H_1$ دوسویی و $\check{T}$ کراندار است.*

برهان. قرار می‌دهیم $Q = 1 + T^*T$، تحت این مفروضات، Q یک نگاشت یک‌به‌یک از

$$\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(T^*T) = \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx \in \mathcal{D}(T^*)\}$$

بروی H است. هرگاه $x \in \mathcal{D}(T)$، آنگاه $Tx \in \mathcal{D}(T^*)$؛ درنتیجه

$$(x,x)+(Tx,Tx)=(x,x)+(x,T^*Tx)=(x,Qx)$$

بنابراین،

$$\| x \|^۲ \leq \| x \| \| Qx \|$$

که یک‌به‌یک بودن Q را نشان می‌دهد. برای ادامه برهان رجوع شود به[۲۳] □

لم ۱۴.۱.۴. *اگر $A \in \mathcal{C}(H_۱, H_۲)$ به طور چگال تعریف شده باشد، آنگاه*

۱. $\widehat{A} \in \mathcal{B}(H_۲)$ و $\breve{A} \in \mathcal{B}(H_۱)$

۲. $\| A^*\widehat{A} \| \leq ۱/۲$ و $\breve{A}A^* \subseteq A^*\widehat{A}$ و $\| A\breve{A} \| \leq ۱/۲$ و $\widehat{A}A \subseteq A\breve{A}$

برهان. رجوع شود به [۲۱، ۸، ۷] □

لم ۱۵.۱.۴. *اگر $A \in \mathcal{C}(H_۱, H_۲)$ به‌طورچگال تعریف شده باشد، آنگاه*

۱. $\breve{A}^{۱/۲}$ و $A\breve{A}^{۱/۲}$ *کراندار هستند.*

۲. $\| A\breve{A}^{۱/۲} \| \leq ۱$ و $\| \breve{A}^{۱/۲} \| \leq ۱$

برهان. حکم برای $\breve{A}^{۱/۲}$ واضح است. و برای‌هر $u \in H$ داریم:

$$\| A\breve{A}u \|^۲ \leq (\breve{A}u, u) = \| \breve{A}^{۱/۲}u \|^{۱/۲}$$

بنابراین

$$\mathcal{R}(\breve{A}^{۱/۲}) \subset \mathcal{D}(A\breve{A}^{۱/۲}),$$

و برای‌هر $v \in \mathcal{R}(\breve{A}^{۱/۲})$ داریم:

$$\| A\breve{A}^{۱/۲} \leq \| v \|$$

از طرفی واضح است که $\mathcal{R}(\breve{A}^{1/2})$ چگال است. با گرفتن بستار اثبات کامل می‌شود، و حکم ثابت می‌شود. □

۲.۴ رخنه میان دو عملگر بسته

قضیه ۱.۲.۴. *اگر $A \in \mathcal{C}(H_1, H_2)$ به‌طورچگال تعریف شده باشد و $P := P_{G(A)}$، آنگاه*

$$P = \begin{pmatrix} \check{A} & A^*\widehat{A} \\ A\check{A} & 1 - \widehat{A} \end{pmatrix}$$

و به‌طور مشابه اگر $B \in \mathcal{C}(H_1, H_2)$ به‌طورچگال تعریف شده باشد و $Q = P_{G(B)}$، آنگاه

$$\| \theta(A, B) =\| P - Q \|= \begin{pmatrix} \check{A} - \check{B} & A^*\check{A} - B^*\widehat{B} \\ A\check{A} - B\check{B} & \widehat{B} - \widehat{A} \end{pmatrix} \|$$

برهان. رجوع شود به [۱۹، ۲] □

قضیه ۲.۲.۴. *اگر $A \in \mathcal{C}(H_1, H_2)$ به‌طورچگال تعریف شده باشد، آنگاه عملگر $A\check{A}^{1/2}$ کراندار است و*

$$\theta(A, 0) =\| A\check{A}^{1/2} \|$$

برهان. بنابر لم ۱۵.۱.۴ عملگر $A\check{A}^{1/2}$ کراندار است. فرض کنیم $P := P_{G(A)}$ و $Q := P_{G(B)}$، آنگاه با استفاده از گزاره‌ی ۱۰.۱.۴

$$\theta(A, 0) = max\Big\{ \| P(I - Q) \|, \| Q(I - P) \| \Big\}$$

از طرفی داریم؛

$$I - Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

و

$$P(I - Q) = \begin{pmatrix} \check{A} & A^*\widehat{A} \\ A\check{A} & AA^*\widehat{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A^*\widehat{A} \\ 0 & -AA^*\widehat{A} \end{pmatrix} := T$$

لذا

$$T^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\widehat{A}A & -\widehat{A}AA^* \end{pmatrix}$$

و

$$T^*T = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \widehat{A}AA^*\widehat{A} + \widehat{A}AA^*AA^*\widehat{A} \end{pmatrix}$$

بنابراین با استفاده از لم ۴.۱.۱۴ و گزاره‌ی ۴.۱.۱۱

$$\begin{aligned} \| T \|^{۲} = \| T^*T \| &= max\Big\{ \| \cdot \|, \| \widehat{A}AA^*\widehat{A} + \widehat{A}AA^*AA^*\widehat{A} \| \Big\} \\ &= \| \widehat{A}AA^*\widehat{A} + \widehat{A}AA^*AA^*\widehat{A} \| \\ &= \| \widehat{A}AA^*(I + AA^*)\widehat{A} \| \\ &= \| \widehat{A}AA^* \| \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\| T \| = \| \widehat{A}AA^* \|^{۱/۲} = \| A(I + A^*A)^{-۱/۲} \| = \| A\breve{A}^{۱/۲} \|$$

و به‌طور مشابه

$$\| A\breve{A}^{۱/۲} \| = \| Q(I - P) \|$$

که برهان را کامل می‌کند.

$\square$

تذکر ۳.۲.۴. *اگر $A \in \mathcal{B}(H_۱, H_۲)$، آنگاه $\| A\breve{A}^{۱/۲} \| = \frac{\| A \|}{\sqrt{۱ + \| A \|^۲}}$ و با استفاده از قضیه‌ی ۱.۲.۴*

$$\theta(A) := \theta(A, \cdot) = \frac{\| A \|}{\sqrt{۱ + \| A \|^۲}}$$

در ادامه یک فرمول برای $\theta(A, B)$ که $A \neq \cdot$ و $B \neq \cdot$ ارائه می‌دهیم.

لم ۴.۲.۴. *فرض کنیم $P := P_{G(A)}$ و $Q := P_{G(B)}$، آنگاه*

۱. $\| P - Q \| = max\Big\{ \| P(I - Q) \|, \| Q(I - P) \| \Big\}$

۲. $\| PQ \| = sup\Big\{ \frac{| < x, y > |}{\| x \| \| y \|} \ : \ px = x \neq \cdot \ , \ Qy = y \neq \cdot \Big\}$

برهان. رجوع شود به [۱] □

حال در ادامه به بیان چند قضیه که در روند برهان قضیه‌ی ۹.۲.۳ مورد استفاده قرار می‌گیرند می‌پردازیم:

هرگاه H یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه $H \times H$ را می‌توان با تعریف حاصل‌ضرب داخلی دو عنصر $\{x,y\}$ و $\{z,w\}$ از $H \times H$ به‌صورت

$$\Big(\{x,y\},\{z,w\}\Big) = \langle x,z\rangle + \langle y,w\rangle,$$

که در آن $\langle x,z\rangle$ حاصل‌ضرب داخلی در H است، به یک فضای هیلبرت بدل ساخت. نرم در $H \times H$ عبارت است از

$$\| \{x,y\} \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2.$$

تعریف ۵.۲.۴. تعریف می‌کنیم

$$V\{x,y\} = \{-y,x\} \qquad (x \in H, y \in H).$$

در این‌صورت V یک عملگر یکه‌ای بر $H \times H$ است که در $V^2 = -I$ صدق می‌کند. لذا، اگر M زیرفضایی از $H \times H$ باشد، $V^2 M = M$.

این عملگر T^* را به نحو جالبی برحسب T توصیف می‌کند:

قضیه ۶.۲.۴. *هرگاه T یک عملگر در H باشد که به‌طورچگال تعریف شده است، آنگاه*

$$G(T^*) = [VG(T)]^{\perp},$$

یعنی مساوی متمم متعامد $VG(T)$ در $H \times H$.

برهان. واضح است که هر یک از چهار حکم زیر با حکم بعد و یا حکم قبل از آن هم ارز است.

$$\{y,z\} \in G(T^*).$$

به ازای‌هر $x \in \mathcal{D}(T)$ ، $(Tx,y) = (x,z)$

به ازای‌هر $x \in \mathcal{D}(T)$, $(\{-Tx, x\}, \{y, z\}) = 0$

$$\{y, z\} \in [VG(T)]^{\perp}.$$

□

قضیه ۷.۲.۴. *هرگاه T یک عملگر در H باشد که به‌طورچگال تعریف شده است، آنگاه T^* یک عملگر بسته است. به‌خصوص، عملگرهای خودالحاق بسته می‌باشند.*

برهان. $M^{\perp}$ به‌ازای‌هر $M \subset H \times H$ بسته است. لذا، طبق قضیه‌ی ۶.۲.۴، $G(T^*)$ در $H \times H$ بسته است. □

قضیه ۸.۲.۴. *هرگاه T یک عملگر بسته به‌طورچگال تعریف شده در H باشد، آنگاه*

$$H \times H = VG(T) \oplus G(T^*),$$

یعنی مجموع مستقیم دو زیرفضای متعامد.

برهان. اگر $G(T)$ بسته باشد، $VG(T)$ نیز چنین است زیرا V یکه‌ای است، و لذا قضیه‌ی ۶.۲.۴ ایجاب می‌کند که $VG(T) = [G(T^*)]^{\perp}$. □

از قضیه‌های بالا چند نتیجه می‌گیریم:

$$H \times H = VG(T) + G(T^{**})$$

$$G(T^{**}) = [VG(T)]^{\perp} = G(T)$$

$$H \times H = G(T) \oplus VG(T^*)$$

حال به بیان قضیه‌ی ۹.۲.۴ می‌پردازیم:

قضیه ۹.۲.۴. *اگر* $A, B \in \mathcal{C}(H_۱, H_۲)$ *به‌طورچگال تعریف شده باشد، آنگاه عملگرهای* $\widehat{B}^{۱/۲}A\breve{A}^{۱/۲}$، $B\breve{B}^{۱/۲}\breve{A}^{۱/۲}$، $A\breve{A}^{۱/۲}\breve{B}^{۱/۲}$ *و* $\widehat{A}^{۱/۲}B\breve{B}^{۱/۲}$ *کراندار می‌باشند و*

$$\theta(A,B) = max\Big\{ \parallel B\breve{B}^{۱/۲}\breve{A}^{۱/۲} - \widehat{B}^{۱/۲}A\breve{A}^{۱/۲} \parallel$$
$$\parallel A\breve{A}^{۱/۲}\breve{B}^{۱/۲} - \widehat{A}^{۱/۲}B\breve{B}^{۱/۲} \parallel \Big\}$$

برهان. فرض می‌کنیم P و Q همانند لم ۴.۲.۴ باشد، عملگر $\widehat{B}^{۱/۲}A\breve{A}^{۱/۲}$ کراندار است، زیرا ترکیب دو عملگر کراندار $\widehat{B}^{۱/۲}$ و $A\breve{A}^{۱/۲}$ می‌باشد. به‌طور مشابه عملگرهای $B\breve{B}^{۱/۲}\breve{A}^{۱/۲}$، $A\breve{A}^{۱/۲}\breve{B}^{۱/۲}$ و $\widehat{A}^{۱/۲}B\breve{B}^{۱/۲}$ کراندارند.

مشاهده می‌کنیم که $I - Q$ تصویر متعامدی بروی زیرفضای $\Big\{(-B^*y, y) \ : \ y \in D(B^*)\Big\}$ است. از طرفی با استفاده از لم ۴.۲.۴ $\parallel P(I-Q) \parallel$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\parallel P(I-Q) \parallel &= \sup_{۰\neq x\in D(A)\ ,\ ۰\neq y\in D(B^*)} \Big\{\frac{|<(x,Ax),(-B^*y,y)>|}{\parallel (x,Ax) \parallel\parallel (-B^*y,y) \parallel}\Big\} \\ &= \sup_{۰\neq x\in D(A)\ ,\ ۰\neq y\in D(B^*)} \Big\{\frac{|<x,-B^*y> + <Ax,y>|}{\sqrt{\parallel x \parallel^۲ + \parallel Ax \parallel^۲}\ \sqrt{\parallel y \parallel^۲ + \parallel B^*y \parallel^۲}}\Big\}\end{aligned}$$

نگاشت‌های $\breve{A}^{۱/۲} \ : \ H_۱ \longrightarrow \mathcal{D}(A)$ و $\widehat{B}^{۱/۲} \ : \ H_۲ \longrightarrow \mathcal{D}(B^*)$ دوسویی می‌باشند. پس برای هر $۰ \neq x \in \mathcal{D}(A)$ عنصر منحصربه‌فرد $۰ \neq u \in H_۱$ وجود دارد به‌طوری‌که $x = \breve{A}^{۱/۲}u$ و به‌طور مشابه برای‌هر $۰ \neq y \in \mathcal{D}(B^*)$ عنصر منحصربه‌فرد $۰ \neq v \in H_۲$ وجود دارد به‌طوری‌که $y = \widehat{B}^{۱/۲}v$ از طرفی داریم

$$\begin{aligned}\parallel x \parallel^۲ + \parallel Ax \parallel^۲ &= <x,x> + <Ax,Ax> \\ &= <\breve{A}^{۱/۲}u, \breve{A}^{۱/۲}u> + <A\breve{A}^{۱/۲}u, A\breve{A}^{۱/۲}u> \\ &= <\breve{A}u,u> + <A^*A\breve{A}u,u> \\ &= <u,u> = \parallel u \parallel^۲\end{aligned}$$

و به‌طور مشابه داریم $\| v \|^{۲} = \| B^{*}y \|^{۲} + \| y \|^{۲}$ درنتیجه:

$$\begin{aligned}
\| P(I-Q) \| &= \sup_{\cdot \neq u \in H_{۱}\ ,\ \cdot \neq v \in H_{۲}} \left\{ \frac{| < \breve{A}^{۱/۲}u, -B^{*}\widehat{B}^{۱/۲}v > + < A\breve{A}^{۱/۲}u, \widehat{B}^{۱/۲}v > |}{\| u \| \| v \|} \right\} \\
&= \sup_{\cdot \neq u \in H_{۱}\ ,\ \cdot \neq v \in H_{۲}} \left\{ \frac{| < B\breve{B}^{۱/۲}\breve{A}^{۱/۲}u, v > - < \widehat{B}^{۱/۲}A\breve{A}^{۱/۲}u, v > |}{\| u \| \| v \|} \right\} \\
&= \sup_{\cdot \neq u \in H_{۱}\ ,\ \cdot \neq v \in H_{۲}} \left\{ \frac{| < (B\breve{B}^{۱/۲}\breve{A}^{۱/۲} - \widehat{B}^{۱/۲}A\breve{A}^{۱/۲})u, v > |}{\| u \| \| v \|} \right\} \\
&= \| B\breve{B}^{۱/۲}\breve{A}^{۱/۲} - \widehat{B}^{۱/۲}A\breve{A}^{۱/۲} \|
\end{aligned}$$

به‌طور مشابه $\| Q(I-P) \|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\| Q(I-P) \| = \| A\breve{A}^{۱/۲}\breve{B}^{۱/۲} - \widehat{A}^{۱/۲}B\breve{B}^{۱/۲} \|$$

در نتیجه رخنه میان A و B به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\theta(A,B) = max\Big\{ &\| B\breve{B}^{۱/۲}\breve{A}^{۱/۲} - \widehat{B}^{۱/۲}A\breve{A}^{۱/۲} \|, \\
&\| A\breve{A}^{۱/۲}\breve{B}^{۱/۲} - \widehat{A}^{۱/۲}B\breve{B}^{۱/۲} \| \Big\}
\end{aligned}$$

□

مراجع

[1] *Akhiezer. N. I, Glazman. I. M,* Theory of Linear Operators in Hilbert Space, *Dover Publications Inc., New York 1993, Translated from the Russian and With a Perfact by Merlynd Nesell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one, MR MR1255973 (94i: 47001).*

[2] *Cordes. H. O, Labrousse. J. P,* The invariance of the index in the metric space of closed operators, *J. Math. Mech. 12 (1963)693–719. MR MR0162142 (28 -5341).*

[3] *Eidelman. Y, Milman. V,* Antonis Tsolomitis, Functional Analysis, *Graduate Studies in Mathematics, vol. 66, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. An introduction. MR MR2067694 (2006a:46001).*

[4] *Faghih Habibi. J,* The gap of the graph of a matrix, *Linear Algebra Appl. 186 (1993) 55–57. MR MR1217198 (94c:15039).*

[5] *Fillmore. P. A and Williams. J. P.* On operator ranges, *Advances in Math. 7 (1971), 254-271.*

[6] *Gohberg. I, Goldberg. S, Kaashoek. M. A,* Basic Classes of Linear Operators, *Birkhäuser Verlag, Basel 2003. MR MR2015498 (2005g:47001).*

[7] *Gramsch. S, Schock. E,* Ill-posed equations with transformed argument, *Abstr. Appl. Anal. (13) (2003) 785–791. MR MR1996924 (2004f:47019).*

[8] *Groetsch. C.W,* Spectral methods for linear inverse problems with unbounded operators, *J. Approx. Theory 70 (1) (1992) 16–28. MR MR1168372 (93g:47011).*

[9] *Halmos. P. R,* Two subspaces, *Trans. Amer. Math. Soc. 144 (1969) 381–389. MR MR0251519 (40 -4746).*

[10] *Kato. T,* Perturbation tkeoryfor 11near operators, *2nd ed., Springer-Verlag. New York, 1976.*

[11] *Kaufman. W. E,* Represnting a losed operators as a quotient of conntinuous, *Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 83-87.*

[12] *Kaufman. W. E,* Closed Operators and pure contractions in Hilbert Space , *Proc. Amer. Math. Soc. 90 (1984), 83-87.*

[13] *Kaufman. W. E,* A Stronger Metric for Closed Operators in Hilbert Space, *Proc. Amer. Math. Soc. 90 (1984), 83-87.*

[14] *Kalkarani.S. H, Ramesh. G,* A formula for gap betwen two closed operators, *Linerar Algabra and its Applications , 432 (2010) 3012*$_3$017

[15] *Lance. E. C,* Hilbert C* $- Modules, London Mathematical Society Lecture Note Series$, 1995

[16] *Mac Nerney. J. S,* Investigation concerning positive definite continued fractions, *Duke Math. J. 26(1959), 663*$_6$78

[17] *Nakamoto. R,* Gap formulas of operators and their applications,*Math. Japon. 42 (2) (1995) 219–232. MR MR1356379 (96k:47033).*

[18] *Neumann. J. V,* The versatile continuous order, *Uber adjungierte Funktionaloperatoren, AM. of Math. (2) 33 (1932), 294-3 10*

[19] *Neumann. J. V,* Functional Operators. *II. The Geometry of Orthogonal Spaces, Annals of Mathematics Studies, vol. 22, Princeton University Press. Princeton, NJ, 1950. MR MR0034514 (11,599e).*

[20] *Nussbaum. A. E,* Reduction theory for unbounded closed operators in Hilbert space, *Duke Math. J. 31 (1964) 33–44. MR MR0159221 (28 -2438).*

[21] *Pedersen. G. K,* Analysis Now, *Graduate Texts in Mathematics, vol. 118, Springer-Verlag, NewYork, 1989. MR MR971256 (90f:46001).*

[22] *Reed. M, Simon. B,* Methods of Modern Mathematical Physics, *I, second ed., Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York1980, Functional analysis. MR MR751959 (85e:46002).*

[23] *Rudin. W,* Functional Analysis, *International Series in Pure and Applied Mathematics, second ed., McGraw-Hill, Inc., New York, 1991. MR MR1157815 (92k:46001).*

[24] *Sharifi. K,* The gap between unbounded regular operators, *Available on arXiv:math.OA/0901.1891 v1 13 Jan 2009.*

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الحاقی	*Adjoint*
اسکالر	*Scalar*
انقباض	*Contraction*
انقباض سره	*Pure Contraction*
ایزومتری جزئی	*Partial Isometry*
باز	*Open*
برد	*Range*
برگشت	*Reversible*
بسته	*Closed*
بستار	*Closure*
به طور چگال تعریف شده	*Densely Define*
بیکران	*Unbounded*
پایه	*Basis*
پایه متعامد	*Orthogonal Basis*
پیوسته	*Continuous*
تابع	*Function*
تابعی	*Functional*

تام .... Complete

تبدیل یکانی .... Unitary Transformation

تجزیه قطبی .... Polar Decomposition

تجزیه .... Decomposition

تحدید .... Restrcition

تصویر .... Projection

تصویر متعامد .... Orthogonal Projection

توپولوژی .... Topology

توپولوژی رخنه .... Gap Topology

توپولوژی نرم .... Norm Topology

توسیع .... Extension

جزئی .... Partial

جمع برداری .... Vector Sum

جمع مستقیم .... Direct Sum

جمع متعامد .... Orthogonal Sum

چگال .... Dense

حاصلضرب اسکالر .... Scalar Product

حاصلضرب داخلی .... Inner Product

حد .... Limit

خارج قسمت .... Quotient

خانواده .... Family

خطی .... Linear

خود الحاق .... Selfadjoint

داخلی .... Inner

قلمرو .... Domain

دستگاه .... System

دنباله .... Sequence

دنباله نامتناهی .... Infinite Sequence

دنباله همگرا .... Convergent Sequence

دوگان .... Dually

رخنه .... Gap

رخنه یک عملگر .... Gap Of an Operator

ریشه دوم .... Squre Root

ریشه دوم یک عملگر مثبت .... Squre Root Of an Operator

زیر فضا .... Subspace

زیر فضای بسته .... Closed Subspace

زیر مجموعه .... Subset

شبه نرمال .... Quasinormal

صحیح .... Integer

طولپایی .... Isometry

طولپایی .... Isometry

طیف .... Spectrum

طیفی .... Spectral

عملگر الحاقی .... Adjoint Operator

عملگر بسته	Closed Operator
عملگر به طور چگال تعریف شده	Densely Defined Operator
عملگر بیکران	Unbounded Operator
عملگر پیوسته	Continuous Operator
عملگر خطی	Linear Operator
عملگر خود الحاق	Selfadjoint Operator
عملگر کران دار	Bounded Operator
عملگر مثبت	Positive Operator
عملگر نرم	Operator Norm
فضای برداری	Vector Space
فضای ضرب داخلی	Inner Product Space
فضای متری	Metric Space
فضای نرمدار	Normed Space
فضای هیلبرت	Hilbert Space
فوق نرمال	Hyponormal
قطبی	polar
کران دار	Bounded
گوی	Ball
گوی واحد	Unit Ball
ماتریس	Matrix
متریک	Metric
متریک رخنه	Gap Metric

متریک رخنه بین عملگرها	*Gap Between Operator*
متریک قوی	*Strong Metric*
متعامد	*Orthogonal*
متعامدیکه	*Orthonormal*
متقارن	*Symmetric*
متمم متعامد	*Orthogonal Complement*
مثبت	*Positive*
مزدوج مختلط	*Complex Conjugate*
مختلط	*Complex*
نامتناهی	*Infinite*
نامتناهی البعد	*Infinite Dimensional*
نامنفی	*Nonnegative*
نرم	*Norm*
نرمپذیر	*Normable*
نرمدار	*Normed*
نرمال	*Normal*
نگاشت	*Mapping*
نگاشت خطی	*Linear Mapping*
نگاشت دوسوی	*Bijective Mapping*
نقطه	*Point*
نمودار	*Graph*
نمودار بسته	*Closed Graph*

نمودار یک عملگر .... Graph Of an Operator

واحد .... unit

وارون، معکوس .... Inverse

وارون پذیر، معکوس پذیر .... Invertible

هرمیتی .... Hermitian

همگرا .... Convergent

همگرایی .... Convergence= Convergency

همگرایی دنباله .... Convergence Of a Sequence

همگرایی قوی .... Strong Convergence

یکتا .... Unique

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjoint	الحاقی
Adjoint Operator	عملگر الحاقی
Base	پایه
Ball	گوی
Bijective Mapping	نگاشت دوسوی
Bounded	کران دار
Bounded Operator	عملگر کران دار
Closed	بسته
Closed Graph	نمودار بسته
Closed Operator	عملگر بسته
Closed Subspace	زیر فضای بسته
Closure	بستار
Complete	تام
Complex	مختلط
Complex Conjugate	مزدوج مختلط
Continuous	پیوسته
Continuous Operator	عملگر پیوسته

Contraction	انقباض
Convergent	همگرا
Convergence= Convergency	همگرایی
Convergence Of a Sequence	همگرایی دنباله
Convergent Sequence	دنباله همگرا
Direct Sum	جمع مستقیم
Decomposition	تجزیه
Dense	چگال
Densely Define	به طور چگال تعریف شده
Densely Defined Operator	عملگر به طور چگال تعریف شده
Domain	قلمرو
Dually	دوگان
Extension	توسیع
Family	خانواده
Function	تابع
Functional	تابعی
Gap	رخنه
Gap Between Operator	متریک رخنه بین عملگرها
Gap Of an Operator	رخنه یک عملگر
Gap Metric	متریک رخنه
Gap Topology	توپولوژی رخنه
Graph	نمودار

Graph Of an Operator .... نمودار یک عملگر

Hermitian .... هرمیتی

Hilbert Space .... فضای هیلبرت

Hyponormal .... فوق نرمال

Infinite .... نامتناهی

Infinite Dimensional .... نامتناهی البعد

Infinite Sequence .... دنباله نامتناهی

Inner .... داخلی

Inner Product .... حاصلضرب داخلی

Inner Product Space .... فضای ضرب داخلی

Integer .... صحیح

Isometry .... طولپایی

Inverse .... وارون، معکوس

Invertible .... وارون پذیر، معکوس پذیر

Limit .... حد

Linear .... خطی

Linear Mapping .... نگاشت خطی

Linear Operator .... عملگر خطی

Mapping .... نگاشت

Matrix .... ماتریس

Metric .... متریک

Metric Space .... فضای متری

Nonnegative............ نامنفی

Normable............ نرم پذیر

Norm............ نرم

Normed............ نرم‌دار

Normed Space............ فضای نرم‌دار

Normal............ نرمال

Norm Topology............ توپولوژی نرم

Open............ باز

Operator............ عملگر

Operator Norm............ عملگر نرم

Orthogonal............ متعامد

Orthogonal Basis............ پایه متعامد

Orthogonal Complement............ متمم متعامد

Orthogonal Projection............ تصویر متعامد

Orthogonal Sum............ جمع متعامد

Orthonormal............ متعامدیکه

Partial............ جزئی

Partial Isometry............ ایزومتری جزئی

Point............ نقطه

Polar............ قطبی

Polar Decomposition............ تجزیه قطبی

Positive............ مثبت

Positive Operator .... عملگر مثبت

Projection .... تصویر

Pure Contraction .... انقباض سره

Quasinormal .... شبه نرمال

Quotient .... خارج قسمت

Range .... برد

Restrcition .... تحدید

Reversible .... برگشت

Scalar .... اسکالر

Scalar Product .... حاصلضرب اسکالر

Self adjoint .... خود الحاق

Selfadjoint Operator .... عملگر خود الحاق

Sequence .... دنباله

Squre Root .... ریشه دوم

Squre Root Of an Operator .... ریشه دوم یک عملگر مثبت

Strong Metric .... متریک قوی

Strong Convergence .... همگرایی قوی

Spectral .... طیفی

Spectrum .... طیف

Subset .... زیر مجموعه

Subspace .... زیر فضا

Symmetric .... متقارن

System........ دستگاه

Topology........ توپولوژی

Unbounded........ بیکران

Unbounded Operator........ عملگر بیکران

unit........ واحد

Unit Ball........ گوی واحد

Unitary Transformation........ تبدیل یکانی

Unique........ یکتا

Vector Space........ فضای برداری

Vector Sum........ جمع برداری

Surname: pakravan *Name: parisa*

Title: Gap topology on the space of closed operators

Supervisor: Dr. K. Sharifi
Advisor: Dr. A. Zireh

Degree: Master of Science *Subject: Pure Mathematics*
Field: Mathematical Analysis

Shahrood University of Technology *Faculty Of Mathematical Sciences*
Date: Feb 2013 *Number of pages: 64*

Keywords: Densely defined operator, Closed operator, Graph of an operator, Square root of an operator, Gap between operators

Abstract

Breaches of gap topology on the space of closed operators recent years widely in different parts of mathematics, including geometry and topology, nonlinear control systems, and analysis of signals and systems plays. It is simple and intuitive gap metric for which the application has many flaws.
The first gap metric we penetrate the spaces between the close of a Hilbert space referred, and then we describe basic properties. The particular metric between operators endless leaks and considers new formula for calculating the penetration metric between two densely defined operators to offer packages.

دانشگاه صنعتی شاهرود

Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in

Pure Mathematics

Gap topology on the space of closed operators

Supervisor

Dr. K. Sharifi

Advisor

Dr. A. Zireh

by

parisa pakravan

Feb 2013