دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش هندسه دیفرانسیل

عنوان

ناورداهای دیفرانسیلی و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

استاد مشاور

دکتر سید رضا حجازی

پژوهشگر

زینب بادپیما

۹۱/۱۰/۰۳

نام خانوادگی دانشجو: بادپیما نام: زینب

عنوان: ناورداهای دیفرانسیلی و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل

استاد راهنما: دکتر احمد زیره
استاد مشاور: دکتر سید رضا حجازی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه دیفرانسیل

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۹۱/۱۰/۰۳ تعداد صفحات: ۸۸

واژگان کلیدی: گروه تقارن، امتداد، فضای جت، ناورداهای دیفرانسیلی، معادلات دیفرانسیل

چکیده

در این رساله سعی بر آن است تا با استفاده از ناورداهای دیفرانسیلی و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل، روشی عمومی برای یافتن جواب معادلات دیفرانسیل بیان کنیم.

در فصل اول مفاهیم و تعاریف اولیه مورد نیاز را عنوان می‌کنیم. در فصل دوم ابتدا امتداد را تعریف نموده، سپس امتداد میدان‌های برداری و عمل‌گروه‌ها را با ذکر مثال توضیح می‌دهیم، در ادامه‌ی این فصل، ناورداهای دیفرانسیلی را با ذکر مثال و روش محاسبه‌ی آنها می‌آوریم. در فصل سوم، معادلات دیفرانسیل و گروه تقارن را به همراه روش محاسبه‌ی آنها ذکر می‌کنیم.

در فصل چهارم با استفاده از گروه تقارن دستگاه معادلات دیفرانسیل و ناورداهای گروه تقارن به کاهش مرتبه و یافتن جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول و بالاتر می‌پردازیم. در ادامه‌ی فصل، روش کاهش مرتبه‌ی معادلات را با استفاده از گروه‌های تقارن چند پارامتری بیان می‌کنیم.

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :
تاریخ :
ویرایش :

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم: زینب بادپیما رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه دیفرانسیل تحت عنوان: ناورداهای دیفرانسیلی و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل

که در تاریخ: ۹۱/۱۰/۰۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : عالی امتیاز ۱۹) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹)
۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)
۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶)
۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر احمد زیره	استادیار	
۲ـ استاد مشاور	دکتر سید رضا حجازی	استادیار	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر کامران شریفی	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر الهام دسترنج	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر حسن حسن آبادی	استادیار	

رئیس دانشکده :دکتر احمد زیره

دانشکده ریاضی
دانشگاه صنعتی شاهرود

تقدیم به همه‌ی کسانی که

می خواهند بیشتر بدانند.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر احمد زیره و جناب آقای دکتر سید رضا حجازی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

هم‌چنین از سرکار خانم دکتر الهه دسترنج و جناب آقای دکتر حسن حسن‌آبادی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

زینب بادپیما

۹۱/۱۰/۰۳

تعهد نامه

اینجانب ......زینب عربی........ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ......هندسه دیفرانسیل

دانشکده ....ریاضی........ دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه ناوردهای دیفرانسیلی

و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل.........تحت راهنمائی دکتر احمدزاده متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۲ / ۱۲ / ۹۱

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

*** متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .**

فهرست مطالب

۱ مقدمه و پیشنیازها ۱

۱.۱ مقدمه . . . ۲

۲.۱ مفاهیم بنیادی هندسه . . . ۳

۱.۲.۱ گروه‌های لی . . . ۷

۲ ناورداهای دیفرانسیلی ۱۸

۱.۲ امتداد . . . ۱۹

۱.۱.۲ امتداد عمل گروه . . . ۱۹

۲.۱.۲ امتداد میدان‌های برداری . . . ۲۰

۲.۲ ناورداها . . . ۲۴

۳ تقارن‌های معادلات دیفرانسیل ۳۹

۱.۳ معادلات دیفرانسیل . . . ۴۰

۲.۳ تقارن‌ها . . . ۴۰

۴ معادلات دیفرانسیل و جواب‌های گروه-ناوردا ۵۷

۱.۴ معادلات مرتبه‌ی اول . . . ۵۸

۲.۴ معادلات مرتبه‌ی بالاتر . . . ۶۲

۳.۴ گروه تقارن چند پارامتری . . . ۶۸

آ ۷۴

مراجع ۷۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۱

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۴

فصل ۱

مقدمه و پیشنیازها

۱.۱ مقدمه

شاید به جدیت می‌توان معادلات دیفرانسیل را زبان اصلی علوم کاربردی امروزی مثل مهندسی، اقتصاد، فیزیک و ... نامید. همیشه با دیدن یک دستگاه معادله دیفرانسیل اولین مساله‌ای که به ذهن می‌رسد، یافتن جواب یا جواب‌های آن سیستم است. به همین دلیل روش‌های گوناگونی برای معادلات مختلف بیان شده است. در این پایان‌نامه سعی بر این است که با دیدگاهی هندسی به کمک فضاهای جت، گروه‌های لی و ناورداها روش‌هایی بسیار کارآمد و اساسی برای حل معادلات دیفرانسیل بیان شود.

از طرفی روش‌های حل معادلات دیفرانسیل موجود بیشتر مختص حل دسته‌ای خاص از معادلات است و برای هر گروه باید از روش خاص آن گروه استفاده کرد. اما روشی که در این پایان‌نامه مورد بحث است کلی بوده و قابل اجرا برای تمامی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی یا غیرخطی می‌باشد.

آغاز سیستماتیک این روش مرهون ریاضیدان نامی قرن ۱۹ ماریوس سوفوس لی است و هنوز هم مورد توجه ریاضیدانان است.

لی نشان داد اگر معادله‌ی دیفرانسیل معمولی داده شده گروه لی یک-پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای بپذیرد می‌تواند تا یک مرتبه کاهش یابد. از این‌رو جواب‌های معادله دیفرانسیل کاهش‌یافته با یک کوادراتور، جواب‌های معادله دیفرانسیل معمولی اصلی را فراهم می‌کند. اگر معادله دیفرانسیل معمولی داده شده گروه لی r-پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای بپذیرد و جبر لی متناظر حل‌پذیر باشد سپس مرتبه‌ی معادله r تا کاهش می‌یابد. کاهش مرتبه‌ی معادله دیفرانسیل معمولی به‌وسیله‌ی ساختن ناورداهای دیفرانسیلی یا به‌وسیله متغیرهای استاندارد انجام می‌پذیرد. هم‌چنین از گروه‌های تقارن علاوه بر کاهش مرتبه‌ی معادلات دیفرانسیل معمولی می‌توانیم برای یافتن جواب‌های ناوردا و یا جواب‌های جدید معادلات دیفرانسیل معمولی یا جزئی با استفاده از جواب‌های داده شده استفاده کنیم.

بیانچی، [۵]، از گروه‌های لی حل‌پذیر برای کاهش مرتبه‌ی سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول استفاده کرد. الور، [۱۷]، قضیه‌ای وجودی ارایه کرد که نشان می‌دهد اگر معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی n-ام گروه لی حل‌پذیر r-پارامتری از تبدیلات بپذیرد جواب‌های عمومی آن می‌تواند با استفاه از کوادراتورها از جواب‌های عمومی معادله دیفرانسیل معمولی کاهش‌یافته‌ی مرتبه‌ی $(n-r)$-ام بدست آید.

در این رساله ابتدا مفاهیمی اساسی از هندسه را بیان می‌کنیم، در ادامه گروه‌های لی و نحوه‌ی عمل آن‌ها را همراه با مثال توضیح می‌دهیم. در فصل دوم، فضای جت و امتداد را آورده و ناورداهای دیفرانسیلی را در ادامه تعریف می‌کنیم، چگونگی محاسبه‌ی ناورداها در مورد گروه‌های یک-پارامتری و بالاتر را در ادامه توضیح داده و هم‌چنین مطالبی برای تشخیص تعداد ناورداها در حالت‌های مختلف را در انتهای فصل دو قرار داده‌ایم. در فصل بعدی، معادلات دیفرانسیل را تعریف کرده و روش محاسبه‌ی گروه تقارن و هم‌چنین در مورد بعد گروه تقارنی که معادله می‌پذیرد مطالبی را آورده‌ایم. در انتهای فصل سوم نیز مطالبی در مورد گروه‌های تقارن زیرماکسیمال، معادلات تکاملی و معادلات اویلر-لاگرانژ گنجانده شده است و در فصل

آخر با استفاده از مطالب عنوان شده، به‌خصوص با استفاده از مولدهای گروه تقارن و محاسبه‌ی ناورداهای آن، به کاهش مرتبه‌ی معادلات و یافتن جواب آن‌ها می‌پردازیم.

۲.۱ مفاهیم بنیادی هندسه

در این قسمت مفاهیم ابتدایی مورد نیاز در فصل‌های بعدی از جمله عمل‌گروه‌ها و نحوه‌ی عمل آن‌ها را همراه با مثالی توضیح می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱. فضای توپولوژیک M را یک **منیفلد توپولوژیکی n-بعدی** گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

- M هاسدورف باشد، یعنی هر دو نقطه‌ی $p, q \in M$ بترتیب مشمول در زیرمجموعه‌های باز $U, V \subset M$ باشند به‌طوری‌که $U \cap V = \emptyset$.
- M شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه‌ی شمارا داشته باشد.
- M به‌طور موضعی اقلیدسی از بعد n باشد، یعنی هر نقطه آن مشمول در یک همسایگی همیومورف با یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^n$ باشد.

فرض می‌کنیم $\{U_\alpha\}_\alpha$ گردایه‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های منیفلد M و V_α زیرمجموعه‌های باز همبند از $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر $\cup_\alpha U_\alpha = M$ و $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ همیومورفیسم باشد آنگاه $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ را **چارت مختصاتی** روی منیفلد M می‌نامیم.

حال اگر (U, φ) و (V, ψ) دو چارت روی منیفلد M باشند نگاشت

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V).$$

را **نگاشت گذر** از φ به ψ می‌نامیم. دو چارت فوق را به‌طور **هموار سازگار** می‌نامیم هرگاه $\psi \circ \varphi^{-1}$ دیفیومورفیسم باشد.

مجموعه‌ی $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ را یک **اطلس** روی M می‌نامیم هرگاه اعضای $\mathcal{A}$ دو به دو به‌طور هموار سازگار باشند. اطلس $\mathcal{A}$ **ماکسیمال** است هرگاه مشمول در هیچ اطلس دیگری نباشد.

یک **ساختار هموار** روی منیفلد توپولوژیکی M، یک اطلس ماکسیمال هموار است. هر منیفلد توپولوژیکی مجهز به یک ساختار هموار $\mathcal{A}$ را یک **منیفلد هموار** می‌نامیم و با $(M, \mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۲.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک منیفلد هموار n-بعدی با چارت مختصاتی $(\mathbb{R}^n, \mathbb{I})$ می‌باشد .

تعریف ۳.۲.۱. فرض می‌کنیم $F : M \to N$ نگاشتی هموار (بی‌نهایت مشتق‌پذیر) از منیفلد m-بعدی M به منیفلد n-بعدی N باشد. **رتبه‌ی** F در نقطه‌ی $x = (x^1, \dots, x^m) \in M$ برابر با رتبه‌ی ماتریس

ژاکوبین $(\partial F^i/\partial x^j),\ i = ۱, \ldots, n,\ j = ۱, \ldots, m$ از مرتبه‌ی $n \times m$ در x می‌باشد، که $y = F(x)$ در هر مختصات موضعی مناسبی در همسایگی x بیان می‌شود. نگاشت F روی زیرمجموعه‌ی $S \subset M$ دارای **رتبه‌ی ماکسیمال** است اگر برای هر $x \in S$ رتبه‌ی F برابر با بزرگترین مقدار ممکن (حداکثر n یا m) باشد.

تعریف ۴.۲.۱. فرض می‌کنیم M منیفلدی هموار باشد. یک **زیرمنیفلد** از M زیرمجموعه‌ی $N \subset M$ با نگاشت هموار و یک‌به‌یک $\phi : \tilde{N} \to N \subset M$ است که همه‌جا دارای رتبه‌ی ماکسیمال است و $\tilde{N}$ منیفلدی دیگر و $N = \phi(\tilde{N})$ تصویر ϕ می‌باشد. بویژه، بعد N با بعد $\tilde{N}$ برابر است و از بعد M تجاوز نمی‌کند.

تعریف ۵.۲.۱. اگر M و N منیفلدهایی هموار باشند، نگاشت $F : M \to N$ را **نگاشتی هموار** گوییم هرگاه برای هر چارت مختصاتی $\chi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ روی M و هر چارت $\tilde{\chi}_\beta : \tilde{U}_\beta \to \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ روی N، نگاشت مرکب $\tilde{\chi}_\beta \circ F \circ \chi_\alpha^{-۱} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار باشد.

تعریف ۶.۲.۱. منیفلد هموار M را در نظر می‌گیریم. عملگر خطی $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ که برای توابع هموار روی M تعریف می‌شود را یک مشتق در نقطه $x \in M$ می‌نامیم اگر $X(fg)(x) = f(x)X(g) + g(x)X(f)$ باشد.

قرار می‌دهیم:

$$TM|_x = \{X : \text{است } x \in M \text{ عملگر مشتق در نقطه } X\},$$

و آنرا **فضای مماسی** منیفلد M در نقطه $x \in M$ می‌نامیم. اگر منیفلد M، m-بعدی باشد سپس فضای مماسی $TM|_x$ نیز m-بعدی است و $\{\partial/\partial x^۱, \ldots, \partial/\partial x^m\}$ پایه‌ای برای $TM|_x$ در مختصات موضعی داده شده تشکیل می‌دهد. هم‌چنین اجتمای مجزای $TM = \bigsqcup_{x \in M} TM|_x$ را **کلاف مماسی** منیفلد M می‌گوییم. هر کلاف مماسی ساختار منیفلدی هموار می‌پذیرد و $(۲m)$-بعدی است.

تعریف ۷.۲.۱. بردار مماس بر منیفلد M در نقطه‌ی $x \in M$، به‌وسیله‌ی مماس بر منحنی هموار گذرنده از x تعریف می‌شود. در مختصات موضعی، بردار مماس $\mathbf{v}|_x$ بر منحنی $x = \phi(t)$ به‌وسیله‌ی مشتق $\mathbf{v}|_x = \phi'(t)$ مشخص می‌شود. گردایه‌ای از چنین بردارهای مماسی، فضای مماس بر M در x تشکیل می‌دهند. هر فضای مماس $TM|_x$، فضایی برداری از بعد یکسان با M است. فضاهای مماسی با هم کلافی برداری روی منیفلد M تشکیل می‌دهند. **میدان برداری** $\mathbf{v}$ روی M بردار مماس $\mathbf{v}|_x \in TM|_x$ در هر نقطه‌ی $x \in M$ می‌باشد که $\mathbf{v}|_x$ به‌طور هموار از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کند. در مختصات موضعی $(x^۱, \ldots, x^m)$، میدان برداری برای هر تابع هموار $\xi^i(x)$ از x دارای فرم

$$\mathbf{v}|_x = \xi^۱ \frac{\partial}{\partial x^۱} + \xi^۲ \frac{\partial}{\partial x^۲} + \cdots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

می‌باشد.

تعریف ۸.۲.۱. فرض می‌کنیم M و N منیفلدهایی هموار و $F : M \to N$ نگاشتی هموار بین آن‌ها باشد. به ازای هر $x \in M$ نگاشت $dF|_x : TM|_x \to TN|_x$ را **نگاشت دیفرانسیل** F می‌نامیم که به ازای هر $f \in C^\infty(N)$ و $\mathbf{v}|_x \in TM|_x$ با ضابطه‌ی

$$dF(\mathbf{v}|_x)f(y) = \mathbf{v}(f \circ F)(x), \qquad y = F(x),$$

تعریف می‌شود. هم‌چنین در مختصات موضعی $x = (x^۱, \ldots, x^m)$ روی M و در مختصات موضعی $y = (y^۱, \ldots, y^n)$ روی N داریم:

$$dF(\mathbf{v}|_x) = dF\left(\sum_{i=۱}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{j=۱}^{n}\left(\sum_{i=۱}^{m} \xi^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x)\right)\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=۱}^{n} \mathbf{v}(F^j(x))\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

نگاشت دیفرانسیل F را با F_* نیز نشان می‌دهند و آن‌را نگاشت پیش‌برنده می‌نامند.

تعریف ۹.۲.۱. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دو میدان برداری روی M باشند، **کروشه‌ی لی** آن‌ها، $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$، نیز یک میدان برداری است که برای همه‌ی توابع هموار $f : M \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f) = \mathbf{v}(\mathbf{w}(f)) - \mathbf{w}(\mathbf{v}(f)). \tag{۱.۱}$$

هم‌چنین در مختصات موضعی، اگر داشته باشیم:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=۱}^{m} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \mathbf{w} = \sum_{i=۱}^{m} \eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

سپس داریم:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \sum_{i=۱}^{m}(\mathbf{v}(\eta^i) - \mathbf{w}(\xi^i))\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{m}\left(\xi^j\frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۲.۱}$$

گزاره ۱۰.۲.۱. *میدان‌های برداری $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ و $\mathbf{u}$ روی M و ثابت‌های c و c' را در نظر می‌گیریم، سپس کروشه‌ی لی آن‌ها در خواص زیر صدق می‌کند،*

- *دوخطی*

$$[c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}', \mathbf{w}] = c[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}', \mathbf{w}],$$

$$[\mathbf{v}, c\mathbf{w} + c'\mathbf{w}'] = c[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}, \mathbf{w}'].$$

- *پادمتقارن*

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}].$$

- *اتحاد ژاکوبی*

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] = ۰.$$

برهان. با توجه به دو رابطه‌ی (۱.۱) و (۲.۱) درستی حکم روشن است. $\square$

تعریف ۱۱.۲.۱. فرم‌های دیفرانسیلی نقشی اساسی در فضاهای توپولوژیکی هندسه دیفرانسیل بازی می‌کنند و دوگان میدان‌های برداری‌اند. نقطه‌ی داده شده‌ی $x \in M$ را در نظر می‌گیریم، تابع خطی و حقیقی مقدار $\omega : TM|_x \to \mathbb{R}$ روی فضای مماسی، **یک-فرمی دیفرانسیلی** در x تعریف می‌کند. فضای یک-فرم‌ها دوگان فضای برداری مماسی $TM|_x$ است و آنرا فضای هم‌مماسی می‌نامیم و به صورت $T^*M|_x$ نشان می‌دهیم. فضاهای هم‌مماسی با هم تشکیل کلاف هم‌مماسی $T^*M = \coprod_{x\in M} T^*M|_x$ را می‌دهند که مشابه کلاف مماسی، تشکیل کلاف برداری $(۲m)$-بعدی روی منیفلد m-بعدی M می‌دهد. تابع حقیقی مقدار و هموار $f : M \to \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم، دیفرانسیل آن، $df = \sum_{i=۱}^m \dfrac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$، یک-فرم است. در مختصات موضعی $x = (x^۱, \dots, x^m)$ دیفرانسیل‌های dx^i از توابع مختصاتی، که دوگان پایه‌های مختصاتی $\partial_{x^j} = \partial/\partial x^j$ از فضای مماسی‌اند، پایه‌ای برای فضاهای هم‌مماسی در هر نقطه از چارت مختصاتی فراهم می‌کنند. برحسب این پایه هر یک-فرم در حالت عمومی فرم مختصات موضعی زیر را دارد،

$$\omega = \sum_{i=۱}^{m} h_i(x)dx^i.$$

فرم‌های دیفرانسیلی از مراتب بالاتر به عنوان نگاشت چند خطی متناوب روی فضای مماسی تعریف می‌شوند. بنابراین **k-فرم دیفرانسیلی** Ω در نقطه‌ی $x \in M$ نگاشت k-خطی زیر است،

$$\Omega : \underbrace{TM|_x \times \cdots \times TM|_x}_{k\text{بار}} \to \mathbb{R},$$

تابع حقیقی مقدار f به عنوان فرمی از مرتبه‌ی صفر در نظر گرفته می‌شود. فضای همه‌ی k-فرم‌ها در x به‌وسیله‌ی $\Lambda^k T^*M|_x$ نمایش داده می‌شود و فضایی برداری از بعد $\binom{m}{k}$ می‌باشد. بعلاوه در مختصات موضعی روی M برای تابع هموار و حقیقی مقدار α_I، هر k-فرم را بصورت $\sum_I \alpha_I(x)dx^I$ نمایش می‌دهیم، که $I = (i_۱, \dots, i_k)$ می‌باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. اگر $F : M \to N$ نگاشتی هموار بین منیفلدها باشد، دیفرانسیل آن dF بردارهای مماس روی M را به بردارهای مماس روی N نگاشت می‌کند. به همین ترتیب نگاشت خطی القایی F^* وجود دارد که **هم‌دیفرانسیل** F نامیده می‌شود و k-فرم‌های دیفرانسیلی روی N را به k-فرم‌های دیفرانسیلی روی M می‌برد،

$$F^* : \Lambda^k T^*N|_{F(x)} \to \Lambda^k T^*M|_x.$$

اگر $x = (x^۱, \dots, x^m)$ مختصات موضعی روی M و $y = (y^۱, \dots, y^n)$ مختصات موضعی روی N باشد، سپس

$$F^*(dy^i) = \sum_{j=۱}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \cdot dx^j,$$

که $y = F(x)$، عملی را از F^* روی یک-فرم‌های پایه می‌برد. همچنین در حالت کلی برای یک k-فرم داریم،

$$F^*\left(\sum_I \alpha_I(y)dy^I\right) = \sum_{I,J} \alpha_I(F(x))\frac{\partial y^I}{\partial x^J}dx^J,$$

که $\partial y^I/\partial x^J = \det(\partial y^{i_k}/\partial x^{j_\nu})$، $I = (i_۱, \ldots, i_k)$ و $J = (j_۱, \ldots, j_k)$ می‌باشد. نگاشت هم‌دیفرانسیل را نگاشت پس‌کشنده نیز می‌نامند.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض می‌کنیم $\mathbf{v}$ میدان برداری روی M و σ میدان برداری یا فرم دیفرانسیلی تعریف شده روی M باشد. مشتق لی σ نسبت به $\mathbf{v}$ و مقدار آن در $x \in M$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{v}(\sigma)|_x = \lim_{\varepsilon\to ۰}\frac{\phi_\varepsilon^*(\sigma|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x}) - \sigma|_x}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=۰} \phi_\varepsilon^*(\sigma|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x}). \tag{۳.۱}$$

برای میدان‌های برداری،

$$\phi_\varepsilon^* \equiv d\ \exp(-\varepsilon\mathbf{v}):\ TM|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x} \to TM|_x,$$

است، در حالیکه برای فرم‌های دیفرانسیلی داریم:

$$\phi_\varepsilon^* \equiv \exp(-\varepsilon\mathbf{v})^*:\ \Lambda^k T^*M|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x} \to \Lambda^k T^*M|_x.$$

توجه کنید که $\mathbf{v}(\sigma)$ شیئی از نوع یکسان با خود σ می‌باشد.

گزاره ۱۴.۲.۱. *فرض کنید $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ میدان‌های برداری هموار روی M باشند. مشتق لی $\mathbf{w}$ نسبت به $\mathbf{v}$ همان کروشه‌ی لی $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ است:*

$$\mathbf{v}(\mathbf{w}) = [\mathbf{v}, \mathbf{w}].$$

برهان. به [۱۷] رجوع کنید. □

۱.۲.۱ گروه‌های لی

تعریف ۱۵.۲.۱. یک **گروه لی** r-پارامتری، یک گروه G با ساختار منیفلدی هموار r-بعدی است به‌طوری‌که عمل گروه

$$m : G \times G \to G, \qquad m(g,h) = g\cdot h, \qquad g,h \in G,$$

و وارون

$$i : G \to G, \qquad i(g) = g^{-۱}, \qquad g \in G,$$

نگاشت‌هایی هموار بین منیفلدها باشند.

مثال ۱۶.۲.۱. در اینجا مثال‌هایی از گروه‌های لی بیان می‌کنیم.

- $G = \mathbb{R}^r$ که دارای ساختار منیفلدی معلومی است را در نظر می‌گیریم، عمل‌گروه آن‌را جمع برداری $(x, y) \mapsto x + y$ و نگاشت وارون آن‌را، وارون معمولی یک میدان برداری نسبت به عمل جمعی $(-x)$ در نظر می‌گیریم. این دو عمل‌گروه بوضوح هموارند بنابراین $\mathbb{R}^r$ گروه لی آبلی r-پارامتری می‌باشد. (عمل جمع بردارها جابجایی‌پذیر می‌باشد.)

- فرض می‌کنیم $G = \mathrm{SO}(۲)$ گروه دوران‌ها در صفحه باشد. به عبارت دیگر،

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : ۰ \leq \theta < ۲\pi \right\},$$

که در آن θ زاویه‌ی دوران است. توجه کنید که G را با دایره‌ی واحد

$$S^۱ = \{(\cos\theta, \sin\theta) : ۰ \leq \theta < ۲\pi\}, \tag{۴.۱}$$

در $\mathbb{R}^۲$ مشخص می‌کنیم که برای تعریف ساختار منیفلدی $\mathrm{SO}(۲)$ بکار می‌رود. $\mathrm{SO}(۲)$ با عمل جمع ماتریسی و وارون ماتریس‌ها نسبت به عمل جمع، گروه آبلی یک-پارامتری می‌باشد.

- به‌طور کلی، گروه‌های ماتریسی زیر با عمل جمع معمولی ماتریس‌ها و وارون آن‌ها نسبت به عمل جمع، مثال‌های دیگری از گروه‌های لی می‌باشند. هم‌چنین این گروه‌ها نسبت به ضرب ماتریسی یک گروه لی هستند. گروه خطی عمومی

$$\mathrm{GL}(n) = \{X : \det X \neq ۰\},$$

شامل همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ وارون‌پذیر و یک گروه لی $n^۲$-پارامتری است. گروه خطی ویژه‌ی

$$\mathrm{SL}(n) = \{X \in \mathrm{GL}(n) : \det X = ۱\},$$

شامل همه‌ی ماتریس‌های وارون‌پذیر با دترمینان یک و یک گروه لی $(n^۲ - ۱)$-پارامتری است. گروه متعامد

$$\mathrm{O}(n) = \{X \in \mathrm{GL}(n) : X^T X = I\},$$

گروه لی $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$-پارامتری و گروه متعامد ویژه‌ی

$$\mathrm{SO}(n) = \{X \in \mathrm{O}(n) : \det X = ۱\},$$

گروه لی $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$-پارامتری می‌باشد. هم‌چنین گروه آفین

$$\mathrm{A}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{A} & a \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} : \mathrm{A} \in \mathrm{GL}(n-۱)\ ,\ a \in \mathbb{R}^{n-۱} \right\},$$

گروه لی $n(n-۱)$-پارامتری است. اگر همه‌ی این گروه‌های ماتریسی را روی صفحه‌ی مختلط در نظر بگیریم بعد آن‌ها دو برابر می‌شود.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه لی باشد. برای هر عنصر گروهی $g \in G$، ضرب از راست $R_g : G \to G$ که به‌وسیله‌ی $R_g(h) = h \cdot g$ با معکوس $R_{g^{-۱}} = (R_g)^{-۱}$ تعریف می‌شود، دیفیومورفیسم است. یک میدان برداری $\mathbf{v}$ روی G **ناوردای راست** نامیده می‌شود اگر برای هر g و h در G داشته باشیم:

$$dR_g(\mathbf{v}|_h) = \mathbf{v}|_{R_g(h)} = \mathbf{v}|_{hg}.$$

تعریف ۱۸.۲.۱. **جبر لی راست** $\mathcal{G}$ از گروه لی G یک فضای برداری از همه‌ی میدان‌های برداری ناوردای راست روی G می‌باشد.

به‌طور کلی، جبر لی، فضای برداری $\mathcal{G}$ با عملگر دوخطی

$$[\ ,\ ] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G},$$

است که کروشه‌ی لی نامیده می‌شود و در خواص کروشه‌ی لی صدق می‌کند.

میدان‌های برداری ناوردای چپ و جبر لی چپ نیز به طریق مشابه تعریف می‌شوند.

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض می‌کنیم M یک منیفلد هموار باشد. یک **گروه موضعی از تبدیلات** که روی M عمل می‌کنند به‌وسیله‌ی الف) یک گروه لی G، ب) زیرمجموعه‌ی باز $\mathcal{U}$ که حوزه‌ی تعریف عمل‌گروه است به‌طوری‌که $\{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M$ و ج) نگاشت هموار $\Psi : \mathcal{U} \to M$ داده می‌شود و دارای خاصیت‌های زیر است:

- اگر $(h,x) \in \mathcal{U}$، $(g, \Psi(h,x)) \in \mathcal{U}$ و هم‌چنین $(g \cdot h, x) \in \mathcal{U}$ سپس $\Psi(g, \Psi(h,x)) = \Psi(g \cdot h, x)$.
- برای هر $x \in M$، $\Psi(e,x) = x$.
- اگر $(g,x) \in \mathcal{U}$ سپس $(g^{-۱}, \Psi(g,x)) \in \mathcal{U}$ و $\Psi(g^{-۱}, \Psi(g,x)) = x$.

نحوه‌ی عمل گروه تبدیلات

در اینجا نحوه‌ی تبدیل تابع $u = f(x)$ تحت عنصر گروهی $g \in G$ را توضیح می‌دهیم. تابع $u = f(x)$ را با گراف آن $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\} \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ در نظر می‌گیریم، Ω حوزه تعریف تابع

$u = f(x)$ است. توجه کنید که Γ_f یک زیرمنیفلد p-بعدی معین از $X \times U$ می‌باشد. اگر گراف تابع f زیرمجموعه‌ای از حوزه‌ی تعریف گروه تبدیلات g باشد، تبدیل Γ_f به‌وسیله‌ی g به صورت زیر است:

$$g \cdot \Gamma_f = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) \ ; \ (x, u) \in \Gamma_f\}.$$

مجموعه‌ی $g \cdot \Gamma_f$ لزوما گراف تابع دیگری مثل $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ نیست. با این وجود، چون G به‌طور هموار عمل می‌کند و عناصر همانی G، Γ_f را بدون تغییر می‌گذارند، با تعریف مناسب و محدود کردن حوزه‌ی تعریف f (Ω) و برای عناصر g در همسایگی عنصر همانی، مطمین می‌شویم $g \cdot \Gamma_f = \Gamma_{\tilde{f}}$ گراف تابع دیگری مانند $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ است و می‌نویسیم $\tilde{f} = g \cdot f$ و تابع $\tilde{f}$ را تبدیل تابع f به‌وسیله‌ی g می‌نامیم.

در حالت کلی فرض می‌کنیم:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) = (\Xi_g(x, u), \phi_g(x, u)),$$

که ϕ_g و Ξ_g توابعی هموار باشند. گراف $\Gamma_{\tilde{f}} = g \cdot \Gamma_f$ از $g \cdot f$ به‌وسیله‌ی معادلات زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \Xi_g(x, f(x)) = \Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f)(x), \\ \tilde{u} &= \phi_g(x, f(x)) = \phi_g \circ (\mathbb{I} \times f)(x), \qquad x \in \Omega. \end{aligned}$$

در اینجا $x \in \Omega$ و $\mathbb{I}$ تابع همانی روی X است. بایستی x را از دستگاه معادلات بالا حذف کنیم. چون برای $g = e$ داریم $\Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f) = \mathbb{I}$ و می‌دانیم در صورتیکه g به اندازه کافی به عنصر همانی نزدیک شود ماتریس ژاکوبین $\Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f)$ غیرتکین است، از اینرو به‌وسیله‌ی قضیه‌ی تابع معکوس به‌طور موضعی برای x داریم،

$$x = [\Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-۱}(\tilde{x}).$$

لذا هرگاه عامل دوم وارون پذیر باشد $\tilde{u}$ قابل محاسبه است.

$$\tilde{u} = g \cdot f(x) = [\phi_g \circ (\mathbb{I} \times f)] \circ [\Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-۱}(\tilde{x}).$$

در بعضی موارد ممکن است فقط متغیر مستقل تبدیل شود،

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) = (\Xi_g(x), u),$$

Ξ_g یک دیفیومورفیسم از X است و با $\Xi_g^{-۱} = \Xi_{g^{-۱}}$ تعریف می‌شود. به آسانی می‌توانیم x را حذف کنیم،

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \Xi_g(x), \\ \Rightarrow x &= \Xi_g^{-۱}(\tilde{x}) = \Xi_{g^{-۱}}(\tilde{x}). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{u} = u = f(x) = f(\Xi_{g^{-۱}}(\tilde{x})).$$

حال مطالب گفته شده را در مثال زیر بکار می‌بریم.

مثال ۲۰.۲.۱. فرض می‌کنیم $G = \mathrm{SO}(2)$ عمل‌گروه دوران‌ها روی $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$ باشد. تبدیلات G به‌صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta \cdot (x, u) = (x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta). \qquad (۵.۱)$$

فرض کنید $u = f(x)$ یک تابع باشد، که گراف آن $\Gamma_f \subset X \times U$ است. گروه $\mathrm{SO}(2)$ روی f به‌وسیله‌ی دوران گراف آن عمل می‌کند. اگر θ بزرگ باشد آنگاه $\theta \cdot \Gamma_f$ گراف تابع دیگری نخواهد بود. اما اگر $f(x)$ روی بازه‌ی متناهی $a \leq x \leq b$ تعریف شده باشد و $|\theta|$ خیلی بزرگ نباشد سپس $\theta \cdot \Gamma_f$ گراف تابع خوش‌تعریف $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ خواهد بود که $\Gamma_{\tilde{f}} = \theta \cdot \Gamma_f$ می‌باشد.

تابع خطی $u = f(x) = ax + b$ را در نظر می‌گیریم. گراف f یک خط مستقیم است. بنابراین دوران آن با زاویه θ یک خط مستقیم دیگر خواهد بود. حال تبدیل f تحت θ (یعنی $\tilde{f}$) را می‌یابیم.

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta \cdot (x, ax + b) = (x\cos\theta - (ax+b)\sin\theta, x\sin\theta + (ax+b)\cos\theta).$$

برای پیدا کردن $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ بایستی x را از جفت معادلات بالا حذف کنیم،

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x\cos\theta - (ax+b)\sin\theta \\ \Rightarrow x &= \frac{\tilde{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}. \end{aligned}$$

با فرض $\cot\theta \neq a$ داریم،

$$\begin{aligned} \tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) &= x\sin\theta + (ax+b)\cos\theta \\ &= \frac{\tilde{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\sin\theta + (a\frac{\tilde{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta} + b)\cos\theta \\ &\vdots \\ &= \frac{\sin\theta + a\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\tilde{x} + \frac{b}{\cos\theta - a\cos\theta}. \end{aligned}$$

می‌بینیم که تبدیل f تحت θ دوباره تابعی خطی شد.

تعریف ۲۱.۲.۱. یک **مدار** از گروه تبدیلات موضعی، زیرمجموعه‌ی گروه-ناوردای غیرتهی مینیمال از منیفلد M می‌باشد. به‌عبارت دیگر، $\mathcal{O} \subset M$ در صورتی مدار است که در شرایط زیر صدق کند،

- اگر $x \in \mathcal{O}$، $g \in G$ و $g \cdot x$ تعریف شده باشد، سپس $g \cdot x \in \mathcal{O}$ است.
- اگر $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ و $\tilde{\mathcal{O}}$ در بخش قبل صدق کند سپس یا $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ یا $\tilde{\mathcal{O}}$ تهی می‌باشد.

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کند.

- گروه G به‌طور **نیم-منظم** عمل می‌کند اگر همه مدارهای آن به عنوان زیرمنیفلدی از M دارای بعد یکسان باشند.

- گروه G به‌طور **منظم** عمل می‌کند اگر علاوه بر نیم-منظم بودن عمل، برای هر نقطه $x \in M$ همسایگی کوچک دلخواه U از x وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر مدار از G، U را به زیرمجموعه‌های همبند مسیری تقسیم کند.

تعریف ۲۳.۲.۱. گروه تبدیلات G به‌طور **موثر** عمل می‌کند اگر عناصر گروهی متفاوت عمل‌های متفاوت داشته باشند، به‌طوری‌که برای هر $x \in M$ داشته باشیم $g \cdot x = h \cdot x$ اگر و تنها اگر $g = h$.

زیرگروه ایزوتروپی سراسری $G_M = \{g \mid g.x = x, \ \ \forall x \in M\}$، که زیرگروه نرمال بسته از G می‌باشد موثر بودن عمل G را اندازه می‌گیرد به این معنی که G به‌طور موثر عمل می‌کند اگر و تنها اگر $G_M = \{e\}$. اگر G به‌طور موثر عمل نکند آن‌را با گروه خارج‌قسمتی $\dfrac{G}{G_M}$ که به‌طور موثر روی M همانند خود G عمل می‌کند جایگزین می‌کنیم. بنابراین در حالت کلی می‌توانیم تصور کنیم که همه‌ی عمل گروه‌ها به‌طور (موضعا) موثر عمل می‌کنند. می‌گوییم گروه لی G به‌طور موضعا موثر عمل می‌کند اگر زیرگروه ایزوتروپی سراسری G_M زیرگروهی گسسته از G باشد.

تعریف ۲۴.۲.۱. **منحنی انتگرال** از یک میدان برداری $\mathbf{v}$ منحنی پارامتری هموار $x = \phi(\varepsilon)$ می‌باشد به‌طوری‌که بردار مماس بر هر نقطه منحنی با مقدار $\mathbf{v}$ در آن نقطه برابر باشد، یعنی:

$$\dot{\phi}(\varepsilon) = \mathbf{v}|_{\phi(\varepsilon)}, \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

در مختصات موضعی، بایستی $x = \phi(\varepsilon) = (\phi^۱(\varepsilon), \ldots, \phi^m(\varepsilon))$ جوابی از سیستم معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \qquad i = ۱, \ldots, m, \tag{۶.۱}$$

باشد که $\xi^i(x)$ ها ضرایب $\mathbf{v}$ در x می‌باشند.

تعریف ۲۵.۲.۱. اگر $\mathbf{v}$ میدانی برداری باشد، منحنی انتگرال ماکسیمال پارامتری که از نقطه x در M می‌گذرد را با $\Psi(\varepsilon, x)$ نشان می‌دهیم و Ψ را **فلوی** تولید شده به‌وسیله $\mathbf{v}$ می‌نامیم.

بنابراین برای هر $x \in M$ و هر ε در بازه‌ی I_x شامل ۰، $\Psi(\varepsilon, x)$ نقطه‌ای روی منحنی انتگرال گذرنده از x در M خواهد بود. فلوی میدان برداری برای هر $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ دارای خاصیت‌های زیر است:

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), \qquad x \in M, \tag{۷.۱}$$

،

$$\Psi(\circ, x) = x, \tag{۸.۱}$$

و

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Psi(\varepsilon,x)=\mathbf{v}|_{\Psi(\varepsilon,x)}. \tag{۹.۱}$$

با مقایسه‌ی دو خاصیت (۷.۱) و (۸.۱) با خاصیت گروه تبدیلات موضعی می‌بینیم که فلوی تولید شده به‌وسیله‌ی میدان برداری با عمل‌گروه موضعی گروه لی $\mathbb{R}$ روی منیفلد M یکسان است و اغلب گروه یک-پارامتری از تبدیلات و میدان برداری $\mathbf{v}$، **مولد بی‌نهایت کوچک** عمل نامیده می‌شود از این‌رو به‌وسیله‌ی قضیه‌ی تیلور در مختصات موضعی داریم:

$$\Psi(\varepsilon,x)=x+\varepsilon\xi(x)+O(\varepsilon^{۲}),$$

که $\xi=(\xi^{۱},\ldots,\xi^{m})$ ضرایب $\mathbf{v}$ هستند. اگر $\Psi(\varepsilon,x)$ گروه یک-پارامتری از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کنند سپس مولد بی‌نهایت کوچک آن به‌وسیله‌ی (۹.۱) با قرار دادن $\varepsilon=۰$ به‌دست می‌آید.

$$\mathbf{v}|_x=\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=۰}\Psi(\varepsilon,x). \tag{۱۰.۱}$$

تناظری یک‌به‌یک بین گروه‌های یک-پارامتری موضعی از تبدیلات و مولدهای بی‌نهایت کوچکشان وجود دارد. اغلب محاسبه‌ی فلو یا گروه یک-پارامتری تولید شده به‌وسیله‌ی میدان برداری $\mathbf{v}$ به‌عنوان نگاشت نمایی آن‌ها در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نمادگذاری

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x\equiv\Psi(\varepsilon,x),$$

را برای زیرگروه یک-پارامتری یا فلوی تولید شده به‌وسیله‌ی میدان برداری $\mathbf{v}$ به‌کار می‌بریم.

مثال ۲۶.۲.۱. مثال‌هایی از میدان‌های برداری و فلوها.

- $M=\mathbb{R}$ را با مختصات x و میدان برداری $\mathbf{v}=\partial/\partial x\equiv\partial_x$ در نظر می‌گیریم. چون بایستی فلوی (عمل‌گروه یک-پارامتری) تولید شده به‌وسیله‌ی $\mathbf{v}$ جوابی از $\dot{x}=۱$ با مقدار اولیه x در $\varepsilon=۰$ باشد، لذا :

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x=\exp(\varepsilon\partial_x)x=x+\varepsilon.$$

که عمل‌گروه انتقالات نامیده می‌شود.

هم‌چنین فلوی تولید شده به‌وسیله‌ی میدان برداری $\mathbf{v}=x\partial_x$ بایستی جوابی از معادله دیفرانسیل معمولی $\dot{x}=x$ با مقدار اولیه x در $\varepsilon=۰$ باشد، بنابراین:

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x=\exp(\varepsilon x\partial_x)x=e^{\varepsilon}x.$$

که گروه تبدیلات مقیاسی نام دارد.

- گروه دوران‌ها را در صفحه در نظر می‌گیریم،

$$\Psi(\varepsilon,(x,y))=(x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon).$$

مولد بی‌نهایت کوچک آن میدان برداری $\mathbf{v}=\xi(x,y)\partial_x+\eta(x,y)\partial_y$ می‌باشد که طبق (۱۰.۱) داریم:

$$\begin{aligned}\xi(x,y) &= \left.\frac{dx}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}(x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon)=-y,\\ \eta(x,y) &= \left.\frac{dx}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}(x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon)=x.\end{aligned}$$

بنابراین مولد بی‌نهایت کوچک آن، $\mathbf{v}=-y\partial_x+x\partial_y$ است. گروه تبدیلات بالا با جواب‌های سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی

$$dx/d\varepsilon=-y,\qquad dy/d\varepsilon=x,$$

مطابقت دارد.

قضیه ۲۷.۲.۱. *فرض می‌کنیم $\mathbf{v}$ میدان برداری تعریف شده روی M باشد. اگر x_0 نقطه تکین $\mathbf{v}$ نباشد به‌طوری‌که $\mathbf{v}|_{x_0}\neq 0$، سپس مختصات موضعی اصلاحی $y=(y^1,\dots,y^m)$ در همسایگی x_0 وجود دارد به‌طوری‌که $\mathbf{v}=\partial/\partial y^1$، و فلوی انتقالی $\exp(t\mathbf{v})y=(y^1+t,y^2,\dots,y^m)$ را تولید می‌کند.*

برهان. به [۱۰] رجوع کنید. □

تصور کنید $\mathcal{G}$ جبر لی گروه لی G باشد. نتیجه‌ی بعدی نشان می‌دهد که تناظری یک‌به‌یک بین زیرفضاهای یک-بعدی و زیرگروه‌های یک-پارامتری (همبند) G وجود دارد.

گزاره ۲۸.۲.۱. *فرض می‌کنیم $\mathbf{v}\neq 0$ یک میدان برداری ناوردای راست روی گروه لی G باشد. فلوی تولید شده به‌وسیله‌ی $\mathbf{v}$ از طریق عنصر همانی، یعنی $g_\varepsilon=\exp(\varepsilon\mathbf{v})e$ که برای هر $\varepsilon\in\mathbb{R}$ تعریف می‌شود و تشکیل زیرگروه یک-پارامتری از G می‌دهد را با*

$$g_{\varepsilon+\delta}=g_\varepsilon\cdot g_\delta,\qquad g_0=e,\qquad g_\varepsilon^{-1}=g_{-\varepsilon},$$

نشان می‌دهند که با $\mathbb{R}$ یا با گروه دایره‌ای $\mathrm{SO}(2)$ ایزومورف است. برعکس هر زیرگروه یک-بعدی همبند از G به‌وسیله‌ی یک میدان برداری ناوردای راست به شیوه بالا تولید می‌شود.

برهان. به [۱۷] رجوع کنید. □

تعریف ۲۹.۲.۱. **نگاشت نمایی** $\exp:\mathcal{G}\to G$ با قرار دادن $\varepsilon=1$ در زیرگروه یک-پارامتری تولید شده به‌وسیله‌ی $\mathbf{v}$ به‌دست می‌آید:

$$\exp(\mathbf{v})\equiv\exp(\mathbf{v})e.$$

تعریف ۳۰.۲.۱. فرض می‌کنیم G گروهی موضعی از تبدیلات باشد که با $g \cdot x = \Psi(g,x)$ برای هر $(g,x) \in \mathcal{U} \subset G \times M$ روی منیفلد M عمل می‌کند. عملی بی‌نهایت کوچک متناظر با جبر لی $\mathcal{G}$ از G روی M وجود دارد. به این معنی که اگر $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ باشد $\psi(\mathbf{v})$ یک میدان برداری روی M است و فلوی آن با عمل زیرگروه یک-پارامتری $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ از G روی M منطبق است. برای هر $x \in M$ و با فرض $\Psi_x(g) = \Psi(g,x)$ داریم:

$$\psi(\mathbf{v})|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \Psi(\exp(\varepsilon\mathbf{v}), x) = d\Psi_x(\mathbf{v}|_e).$$

بعلاوه برای $g \in G_x$ که $G_x = \{g \in G;\ (g,x) \in \mathcal{U}\}$ چون $\Psi_x \circ R_g(h) = \Psi_{g \cdot x}(h)$ داریم:

$$d\Psi_x(\mathbf{v}|_g) = d\Psi_{g \cdot x}(\mathbf{v}|_e) = \psi(\mathbf{v})|_{g \cdot x}.$$

میدان برداری $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ مولد بی‌نهایت کوچک از عمل گروه G نامیده می‌شود و داریم:

$$\mathbf{v}|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon\mathbf{v})x, \qquad \mathbf{v} \in g.$$

مثال ۳۱.۲.۱. لی ثابت کرد دقیقا سه جبر لی متناهی بعد دیفیومورفیسم از میدان‌های برداری روی خط حقیقی $M = \mathbb{R}$ وجود دارند:

- جبر تولید شده به‌وسیله ∂_x، عملی از $\mathbb{R}$ روی M به‌عنوان گروه یک-پارامتری از انتقالات $x \mapsto x + \varepsilon$ را تولید می‌کند.

- جبر لی دو-بعدی تولید شده به‌وسیله‌ی ∂_x و $x\partial_x$، میدان برداری دوم گروه تجانس $x \mapsto \lambda x$ را تولید می‌کند. توجه کنید که

$$[\partial_x, x\partial_x] = \partial_x.$$

این جبر لی با جبر لی ماتریسی ۲ × ۲ تولید شده به‌وسیله‌ی

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{۱۱.۱}$$

ایزومورف است. این میدان‌های برداری، یک گروه لی از تمام ماتریس‌های بالامثلثی از فرم

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha > 0,$$

تولید می‌کنند. عمل متناظر روی $\mathbb{R}$، $x \mapsto \alpha x + \beta$ می‌باشد.

- جبر سه-بعدی تولیدشده به‌وسیله‌ی

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = x\partial_x, \quad \mathbf{v}_3 = x^2\partial_x,$$

که میدان برداری سوم گروه موضعی وارونه‌سازی

$$x \mapsto \frac{x}{1-\varepsilon x}, \qquad |\varepsilon| < \frac{1}{x}.$$

را تولید می‌کند. که کروشه‌ی لی هر دو میدان برداری دوباره مضربی از همین میدان‌های برداری است. اگر $\mathbf{v}_3$ را با $-\mathbf{v}_3 = -x^2\partial_x$ جایگزین کنیم، سپس جبر لی $\mathcal{SL}(2)$ را با پایه‌های

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

می‌یابیم. بنابراین عملی موضعی از گروه خطی ویژه‌ی $\mathrm{SL}(2)$ روی خط حقیقی با مولدهای بی‌نهایت کوچک ∂_x، $x\partial_x$ و $-x^2\partial_x$ وجود دارد. این عمل گروه، گروه تصویری

$$x \mapsto \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2),$$

می‌باشد.

قضیه ۳۲.۲.۱. *فرض می‌کنیم G گروه لی متناهی بعد همبند باشد که به‌طور موضعا موثر روی منیفلد مختلط یا حقیقی یک- بعدی، بدون نقاط ثابت عمل می‌کند. سپس به‌طور موضعی، G هم‌ارز با یکی از عمل گروه‌های زیر می‌باشد:*

	Action	Group	Generatores
انتقالات:	$x \mapsto x+\beta$	$\mathbb{R}$	∂_x
آفین:	$x \mapsto \alpha x+\beta$	$\mathrm{A}(1)$	$\partial_x, x\partial_x$
تصویری:	$x \mapsto (\alpha x+\beta)/(\gamma x+\delta)$	$\mathrm{SL}(2)$	$\partial_x, x\partial_x, x^2\partial_x$

برهان. تنها مورد مختلط را اثبات می‌کنیم، مورد حقیقی مشابه ولی اندکی پیچیده‌تر است. چون G نقطه‌ی ثابتی ندارد باعث می‌شود که میدان‌های برداری در جبر لی $\mathcal{G}$ به‌طور همزمان در یک نقطه صفر نشوند. نقطه‌ی ثابت x_0 را در نظر می‌گیریم و $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{G}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\mathbf{v}_1|_{x_0} \neq 0$. مطابق قضیه‌ی (۲۷.۲.۱)، می‌توانیم مختصات موضعی x را در همسایگی x_0 تعریف کنیم که در آن $\mathbf{v}_1 = \partial_x$ می‌باشد. هر مولد بی‌نهایت کوچک $\mathcal{G}$ دارای فرم $\mathbf{v}_f = f(x)\partial_x$ برای توابع $f(x)$ می‌باشد، فرض می‌کنیم $\mathcal{F} = \{f(x)\}$ فضای برداری متناهی-بعد تولید شده به‌وسیله‌ی این توابع باشد. چون $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_f] = f'(x)\partial_x$ بایستی یک مولد بی‌نهایت کوچک باشد، بنابراین هرگاه $f \in \mathcal{F}$ باشد سپس $f' \in \mathcal{F}$ است. همواری دلالت می‌کند که $\mathcal{F}$ فضای ناوردای انتقالی متناهی-بعد از توابع است: بنابراین اگر $f(x) \in \mathcal{F}$ و $c \in \mathbb{R}$ سپس $f(x+c) \in \mathcal{F}$. □

تعریف ۳۳.۲.۱. فرض می‌کنیم $\zeta^1(x), \ldots, \zeta^k(x)$ توابع حقیقی مقدار و هموار روی منیفلد M باشند:

- $\zeta^1, \dots, \zeta^K$ **وابسته‌ی تابعی** نامیده می‌شوند اگر برای هر $x \in M$ همسایگی U از x و یک تابع حقیقی مقدار و هموار $F(z^1, \dots, z^k)$ که روی هر زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^k$ مخالف صفر است وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\forall x \in U \qquad F(\zeta^1(x), \dots, \zeta^k(x)) = 0.$$

- $\zeta^1, \dots, \zeta^K$ **مستقل تابعی** نامیده می‌شوند اگر به هر زیرمجموعه‌ی باز $U \subset M$ تحدید شوند وابسته تابعی نباشند. به‌عبارت دیگر اگر برای هر $x \in U \subset M$ داشته باشیم:

$$F(\zeta^1(x), \dots, \zeta^k(x)) = 0,$$

سپس برای هر z در زیرمجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^k$ (که حاوی تصویر U است) $F(z^1, \dots, z^k) \equiv 0$ باشد.

فصل ۲

ناورداهای دیفرانسیلی

در این فصل ابتدا مفهوم امتداد، امتداد عمل گروه‌ها و امتداد میدان‌های برداری را همراه با مثال می‌آوریم. در ادامه ناورداها و ناورداهای دیفرانسیلی را به‌علاوه‌ی روش محاسبه‌ی آن‌ها با استفاده از مثال توضیح می‌دهیم، هم‌چنین در انتهای فصل در مورد تعداد ناورداهای دیفرانسیلی و نحوه‌ی استفاده از عملگرها مطالبی را بیان می‌کنیم.

۱.۲ امتداد

تعریف ۱.۱.۲. تابع حقیقی مقدار و هموار $f : X \simeq \mathbb{R}^p \longrightarrow U \simeq \mathbb{R}^q$ از p-متغیر مستقل و q-متغیر وابسته را در نظر می‌گیریم، تعداد$p_k \equiv \binom{p+k-1}{k}$ امکان مختلف برای مشتقات جزئی متمایز مرتبه k-ام از تابع f وجود دارد. قرار می‌دهیم $U_k \equiv \mathbb{R}^{qp_k}$ با مختصات $u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$ که $J = (j_1, \cdots, j_k)$، $1 \leq j_k \leq p$ و $\alpha = 1, \ldots, q$ می‌باشد. هم‌چنین قرار می‌دهیم $U^{(n)} = U \times U_1 \times \cdots \times U_n$ که شامل تمام مشتقات تابع از مرتبه ۰ تا n و یک فضای اقلیدسی از بعد $q + qp_1 + \cdots + qp_n = q\binom{p+n}{n} = qp^{(n)}$ می‌باشد. حال هر عضو $U^{(n)}$ را با $u^{(n)} = pr^{(n)}f(x)$ نشان می‌دهیم و آن را **امتداد مرتبه n-ام** f می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۲. فضای $X \times U^{(n)}$ که شامل همه‌ی متغیرهای مستقل ، متغیرهای وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته تا مرتبه n-ام می‌باشد را **فضای جت مرتبه n-ام** فضای کامل $X \times U$ می‌گوییم.

اگر $u = f(x)$ یک تابع باشد که گراف آن در $M \subset X \times U$ قرار می‌گیرد آنگاه امتداد مرتبه‌ی n-ام آن، $pr^{(n)}f(x)$، یک تابع است که گراف آن در فضای جت مرتبه n-ام $M^{(n)} \equiv M \times U_1 \times \cdots \times U_n$ قرار می‌گیرد.

مثال ۳.۱.۲. فرض می‌کنیم $f : X \simeq \mathbb{R}^2 \longrightarrow U \simeq \mathbb{R}^1$ تابعی هموار از ۲ متغیر مستقل و ۱ متغیر وابسته باشد، قرا می‌دهیم $u = f(x, y)$. هر عضو $U^{(2)}$ را با $u^{(2)} = pr^{(2)}f(x, y)$ نشان می‌دهیم و آن‌را امتداد مرتبه‌ی دوم تابع f می‌نامیم که به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} pr^{(2)}f(x,y) &= (u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \\ &= \left(f; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right). \end{aligned}$$

هم‌چنین فضای $\mathbb{R}^8 \simeq \left\{(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})\right\}$ را فضای جت مرتبه‌ی دوم فضای کامل $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ می‌گوئیم.

۱.۱.۲ امتداد عمل گروه

فرض می‌کنیم G گروهی موضعی از تبدیلات باشد که روی زیرمجموعه باز $M \subset X \times U$ از فضای متغیرهای مستقل و وابسته عمل می‌کند. عمل موضعی القایی از G روی فضای جت مرتبه‌ی n-ام $M^{(n)}$

وجود دارد که امتداد مرتبه n-ام G (یا به‌طور صحیح‌تر امتداد مرتبه‌ی n-ام G روی M) نامیده می‌شود و به صورت $pr^{(n)}G$ نمایش داده می‌شود. این امتداد مشتقات تابع $u = f(x)$ را به مشتقات متناظر تابع تبدیلی $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ تبدیل می‌کند.

مثال ۴.۱.۲. فرض می‌کنیم $p = q = ۱$ به‌طوری‌که $X \times U \simeq \mathbb{R}^۲$ و عمل گروه دوران‌های $\mathrm{SO}(۲)$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم امتداد اول $pr^{(۱)}\mathrm{SO}(۲)$ را محاسبه کنیم. می‌دانیم که $X \times U^{(۱)} \simeq \mathbb{R}^۳$ با مختصات (x, u, u_x) می‌باشد. با توجه به (۵.۱) برای محاسبه‌ی $\tilde{u}_{\tilde{x}}$ به طریق زیر می‌توانیم عمل کنیم:

$$\tilde{u}_{\tilde{x}} = \frac{\tilde{u}_x}{\tilde{x}_x} = \frac{(x\sin\theta + u\cos\theta)_x}{(x\cos\theta - u\sin\theta)_x} = \frac{\sin\theta + u_x\cos\theta}{\cos\theta - u_x\sin\theta}.$$

بنابراین عمل امتداد داده شده‌ی $pr^{(۱)}\mathrm{SO}(۲)$ در $X \times U^{(۱)}$ عبارت‌است از:

$$pr^{(۱)}\theta.(x, u, u_x) = \left(x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta, \frac{\sin\theta + u_x\cos\theta}{\cos\theta - u_x\sin\theta}\right),$$

که $|\theta| < |\mathrm{arccot} u_x|$.

۲.۱.۲ امتداد میدان‌های برداری

در اینجا فرمول صریحی برای محاسبه‌ی امتداد میدان‌های برداری ارایه می‌شود، که به راحتی قابل استفاده است. و به‌طور مثال برای محاسبه‌ی گروه تقارن در فصل‌های بعدی به کار می‌رود.

قضیه ۵.۱.۲. *فرض می‌کنیم*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=۱}^{p} \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=۱}^{q} \phi_\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{۱.۲}$$

میدانی برداری روی زیر مجموعه باز $M \subset X \times U$ باشد. امتداد مرتبه n-ام $\mathbf{v}$ میدان برداری

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=۱}^{q}\sum_{J} \phi_\alpha^J(x, u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{۲.۲}$$

روی فضای جت متناظر $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$ می‌باشد. که در آن $J = (j_۱, \ldots, j_k)$، $۱ \leq j_k \leq p$ و $۰ \leq k \leq n$ می‌باشد. هم‌چنین داریم:

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J\Big(\phi_\alpha - \sum_{i=۱}^{p} \xi^i u_i^\alpha\Big) + \sum_{i=۱}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha, \tag{۳.۲}$$

که در آن

$$u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \quad u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i},$$

$$D_J = D_{j_۱}D_{j_۲}\cdots D_{j_k},$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J u_{J,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}.$$

به‌علاوه D_i مشتق کامل نسبت به مولفه‌ی i-ام می‌باشد.

برهان. ابتدا فرمول را برای مشتقات مرتبه‌ی اول محاسبه می‌کنیم از این‌رو قرار می‌دهیم $n = 1$. فرض می‌کنیم $g_\varepsilon = \exp(\varepsilon \mathbf{v})$ گروه یک-پارامتری متناظر و فرمول تبدیلات آن به صورت زیر باشد:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g_\varepsilon \cdot (x, u) = (\Xi_\varepsilon(x, u), \Phi_\varepsilon(x, u)).$$

توجه کنید

$$\xi^i(x,u) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \Xi_\varepsilon^i(x,u), \qquad i = 1, \cdots, p, \tag{۴.۲}$$

$$\phi_\alpha(x,u) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \Phi_\varepsilon^\alpha(x,u), \qquad \alpha = 1, \cdots, q, \tag{۵.۲}$$

که Ξ_ε^i و Φ_ε^α مولفه‌های Ξ_ε و Φ_ε می‌باشند. فرض می‌کنیم $(x, u^{(1)}) \in \mathbf{M}^{(1)}$ و $u = f(x)$ یک تابع باشد به‌طوری‌که $u^{(1)} = pr^{(1)} f(x)$ یا به‌طور صریح داشته باشیم:

$$u^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(x), \qquad u_i^{(\alpha)} = \partial f^{(\alpha)}(x)/\partial x^i.$$

برای ε های به اندازه‌ی کافی کوچک، تبدیل f به‌وسیله‌ی عنصر گروهی g_ε خوش‌تعریف است (حداقل اگر حوزه‌ی تعریف f همسایگی مناسب کوچکی از x باشد) و به‌وسیله‌ی

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = (g_\varepsilon \cdot f)(\tilde{x}) = [\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)] \circ [\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-1}(\tilde{x}),$$

داده می‌شود. با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای، ماتریس ژاکوبین، $\mathcal{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = (\partial \tilde{f}_\varepsilon^\alpha / \partial \tilde{x}^i)$ می‌باشد سپس

$$\mathcal{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = \mathcal{J}[\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)](x) \cdot \{\mathcal{J}[\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)](x)\}^{-1}, \tag{۶.۲}$$

(درصورتیکه معکوس آن تعریف شده باشد) چون

$$x = [\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-1}(\tilde{x}),$$

ورودی‌های ماتریس $\mathcal{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x})$ می‌باشد، بنابراین فرمول واضحی برای امتداد اول $pr^{(1)} g_\varepsilon$ فراهم می‌شود.

برای پیدا کردن مولد بی‌نهایت کوچک $pr^{(1)}\mathbf{v}$ بایستی از (۶.۲) نسبت به ε با در نظر گرفتن $\varepsilon = 0$ مشتق بگیریم. ابتدا به یاد بیاورید که اگر $\mathbf{M}(\varepsilon)$ ماتریس مربعی وارون‌پذیر از توابع ε باشد سپس

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\mathbf{M}(\varepsilon)^{-1}] = -\mathbf{M}(\varepsilon)^{-1} \frac{d\mathbf{M}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \mathbf{M}(\varepsilon)^{-1}.$$

هم‌چنین توجه کنید که چون $\varepsilon = 0$ متناظر با تبدیلات همانی است،

$$\Xi_0(x, f(x)) = x, \qquad \Phi_0(x, f(x)) = f(x), \tag{۷.۲}$$

به‌طوری‌که اگر I ماتریس همانی $p \times p$ باشد

$$\mathcal{J}[\Xi_\circ \circ (\mathbb{I} \times f)](x) = I, \qquad \mathcal{J}(\Phi_\circ \circ (\mathbb{I} \times f)](x) = \mathcal{J}f(x).$$

حال، از (۶.۲) مشتق می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\varepsilon = \circ$، با استفاده از قاعده‌ی لیب‌نیز داریم

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\circ} \mathcal{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\circ} \mathcal{J}[\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)](x) - \mathcal{J}f(x) \cdot \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\circ} \mathcal{J}[\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)](x) \\ &= \mathcal{J}[\phi \circ (\mathbb{I} \times f)](x) - \mathcal{J}f(x) \cdot [\xi \circ (\mathbb{I} \times f)](x). \end{aligned}$$

در تساوی دوم $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^p)^T$ و $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_q)^T$ بردارهای ستونی‌اند و از (۴.۲) استفاده کرده‌ایم. ورودی‌های ماتریس فرمول آخر مضرب‌های تابعی ϕ_α^k از $\partial/\partial u_k^\alpha$ در $pr^{(1)}\mathbf{v}$ را می‌دهد. یعنی ورودی (α, k)-ام،

$$\phi_\alpha^k(x, pr^{(1)}f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^k}[\phi_\alpha(x, f(x))] - \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}[\xi^i(x, f(x))],$$

می‌باشد. بنابراین به‌وسیله‌ی تعریف مشتق کامل

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^k(x, u^{(1)}) &= D_k[\phi_\alpha(x, u)] - \sum_{i=1}^{p} D_k[\xi^i(x, u)]u_i^\alpha \\ &= D_k\left[\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha\right] + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{ki}^\alpha, \end{aligned} \tag{۸.۲}$$

می‌باشد که $u_{ki}^\alpha = \partial^2 u^\alpha / \partial x^k \partial x^i$. این حالت (۳.۲) را در $n = 1$ اثبات می‌کند.

برای اینکه قضیه را در حالت کلی اثبات کنیم از استقرا استفاده می‌کنیم. موضوع مورد توجه این است که فضای جت $(n+1)$-ام $\mathbf{M}^{(n+1)}$ می‌تواند به‌عنوان زیرفضای فضای جت اول $(\mathbf{M}^{(n)})^{(1)}$ از فضای جت (n)-ام مشاهده شود. به این دلیل که مشتقات مرتبه‌ی $(n+1)$-ام u_J^α می‌تواند به‌عنوان مشتقات مرتبه‌ی اول از مشتقات مرتبه‌ی n-ام در نظر گرفته شود.(به چندین روش می‌تواند اثبات شود) مثالی را در این مورد بررسی می‌کنیم. برای $p = 2$ و $q = 1$ فضای جت اول $\mathbf{M}^{(1)}$ مختصات $(x, y; u; u_x, u_y)$ را دارد. (u_x, u_y) را به‌عنوان متغیرهای وابسته‌ی جدید در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $v = u_x$ و $w = u_y$، سپس $\mathbf{M}^{(1)}$ تنها زیرمجموعه‌ی بازی از $X \times \tilde{U}$ می‌باشد، هنوز X دو-بعدی است اما $\tilde{U}$ سه متغیر وابسته‌ی u، v و w را دارد. بنابراین فضای جت اول $\mathbf{M}^{(1)}$، یعنی $(\mathbf{M}^{(1)})^{(1)}$، زیرمجموعه‌ی بازی از $X \times \tilde{U}^{(1)}$ با مختصات $(x, y; u; v, w; u_x, u_y, v_x, v_y, w_x, w_y)$ می‌باشد. حال چون قرار دادیم $v = u_x$ و $w = u_y$، بنابراین$(\mathbf{M}^{(1)})^{(1)} \supset \mathbf{M}^{(2)}$ زیرفضایی است که به‌وسیله‌ی روابط

$$v = u_x, \qquad w = u_y, \qquad v_y = w_x,$$

در $X \times \tilde{U}^{(1)}$ تعریف می‌شود و به‌وسیله‌ی متغیرهای غیرضروری u_x و u_y در $(\mathbf{M}^{(1)})^{(1)}$ و برابری مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم مختلط از u مشخص می‌شود.

مراحل استقرا برای تعیین $pr^{(n)}\mathbf{v}$ از $pr^{(n-1)}\mathbf{v}$ در ادامه می‌آید؛ ما $pr^{(n-1)}\mathbf{v}$ را به‌عنوان میدان برداری روی $\mathbf{M}^{(n-1)}$ در نظر می‌گیریم و بنابراین به‌وسیله‌ی فرمول امتداد مرتبه‌ی اول می‌توانیم آن‌را به $(\mathbf{M}^{(n-1)})^{(1)}$ امتداد دهیم، سپس میدان‌های برداری نتیجه را به زیرفضای $\mathbf{M}^{(n)}$ محدود می‌کنیم در نتیجه امتداد n-ام $pr^{(n)}\mathbf{v}$ مشخص خواهد شد. (بایستی بررسی کنیم که امکان این محدود کردن وجود داشته باشد، البته، با توجه به فرمول مشخص است.) حال مختصات مرتبه‌ی n-ام جدید در $(\mathbf{M}^{(n-1)})^{(1)}$ به‌وسیله‌ی $u^\alpha_{J,k} = \partial u^\alpha_J/\partial x^k$ که $J = (j_1, \ldots, j_{n-1})$، $1 \le k \le p$ و $1 \le \alpha \le q$ است، داده می‌شود. مطابق (۸.۲)، ضرایب $\partial/\partial u^\alpha_{J,k}$ در امتداد اول $pr^{(n-1)}\mathbf{v}$، بصورت

$$\phi^{J,k}_\alpha = D_k\phi^J_\alpha - \sum_{i=1}^p D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i}, \tag{۹.۲}$$

می‌باشد. (همان طور که خواهیم دید، (۹.۲) رابطه‌ی بازگشتی مفیدی برای ضرایب تابعی $pr^{(n)}\mathbf{v}$ فراهم می‌کند.) حال کافی است بررسی کنیم که فرمول (۳.۲) رابطه‌ی بازگشتی (۹.۲) را حل می‌کند. به‌وسیله‌ی استقرا داریم،

$$\begin{aligned}
\phi^{J,k}_\alpha &= D_k\left\{D_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_i\right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_{J,i}\right\} - \sum_{i=1}^p D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i} \\
&= D_kD_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_i\right) + \sum_{i=1}^p (D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i} + \xi^i u^\alpha_{J,ik}) - \sum_{i=1}^p D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i} \\
&= D_kD_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_i\right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_{J,ik},
\end{aligned}$$

که $u^\alpha_{J,ik} = \partial^2 u^\alpha_J/\partial x^i\partial x^k$. بنابراین $\phi^{J,k}_\alpha$ دارای شکل (۳.۲) می‌باشد و مراحل استقرا تکمیل می‌شود. □

مثال ۶.۱.۲. گروه دوران $\mathrm{SO}(2)$ را که روی $X \times U \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u},$$

عمل می‌کند را در نظر می‌گیریم. در اینجا $\phi = x$، $\xi = -u$ و امتداد مرتبه‌ی اول

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x},$$

به‌وسیله‌ی

$$\phi^x = D_x(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xx} = D_x(x + uu_x) - uu_{xx} = 1 + u_x^2,$$

داده می‌شود. همچنین مضرب تابعی ϕ^{xx} از $\dfrac{\partial}{\partial u_{xx}}$ در $pr^{(2)}\mathbf{v}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi^{xx} = D_x^2(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xxx} = D_x^2(x + uu_x) - uu_{xxx} = 3u_xu_{xx}.$$

بنابراین مولد بی‌نهایت کوچک امتداد دوم $pr^{(2)}\mathrm{SO}(2)$ که روی $X \times U^{(2)}$ عمل می‌کند به صورت زیر داده می‌شود:

$$pr^{(2)}\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x} + 3u_x u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

روش زیر نیز برای محاسبه‌ی امتداد میدان‌های برداری وجود دارد. میدان برداری $\mathbf{v}$ را همانند (۱.۲) در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم:

$$Q_\alpha(x, u^{(1)}) = \phi_\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u)u_i^\alpha, \qquad \alpha = 1, \ldots, q; \tag{۱۰.۲}$$

q-تایی $Q(x, u^{(1)}) = (Q_1, \ldots, Q_q)$ را به‌عنوان مشخصه‌ی میدان برداری $\mathbf{v}$ در نظر می‌گیریم. با این تعریف، (۳.۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$\phi_\alpha^J = D_J Q_\alpha + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha. \tag{۱۱.۲}$$

با جایگزین کردن آن در (۲.۲) و مرتب کردن آن داریم:

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} + \sum_{i=1}^{p} \xi^i \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} u_{J,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \right\},$$

عبارت داخل کروشه، مشتق کامل می‌باشد، از این‌رو

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = pr^{(n)}\mathbf{v}_Q + \sum_{i=1}^{p} \xi^i D_i, \tag{۱۲.۲}$$

که

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha(x, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \qquad pr^{(n)}\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{۱۳.۲}$$

و $0 \leq \sharp J \leq n$.

۲.۲ ناورداها

در اینجا ناوردایی و گروه تقارن زیرمجموعه‌های دلخواه از منیفلد داده شده M را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۲.۲. فرض می‌کنیم G گروهی موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. زیرمجموعه‌ی $\varphi \subset M$، G-**ناوردا** و G را یک **گروه تقارن** از φ می‌نامیم هرگاه اگر $x \in \varphi$ و $g \in G$ به‌طوری‌که $g \cdot x$ تعریف شده باشد، سپس $g \cdot x \in \varphi$.

مثال ۲.۲.۲. اگر G_c یک گروه یک-پارامتری از انتقالات

$$(x, y) \mapsto (x + c\varepsilon, y + \varepsilon), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

برای ثابت c باشد، سپس خطهای $x = cy + d$ ، G_c-ناوردا و G_c یک گروه تقارن برای چنین خطهایی می باشد.

تعریف ۳.۲.۲. فرض می‌کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کنند. تابع $F : M \to N$ که N نیز منیفلد می‌باشد را G**-ناوردا** می‌گوییم هرگاه برای هر $x \in M$ و هر $g \in G$ به‌طوری‌که $g \cdot x$ تعریف شده باشد داشته باشیم $F(g \cdot x) = F(x)$.

مثال ۴.۲.۲. گروه انتقالات در صفحه‌ی مثال (۲.۲.۲) را در نظر می‌گیریم، تابع $F(x, y) = x - cy$ یک تابع G_c-ناورداست.

گزاره ۵.۲.۲. *فرض می‌کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کنند. تابع حقیقی مقدار و هموار $F : M \to \mathbb{R}$ را G -ناوردا می‌نامیم اگر و تنها اگر برای هر مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}$ از G داشته باشیم:*

$$\mathbf{v}(F) = \circ, \qquad \forall x \in M. \tag{۱۴.۲}$$

برهان. اگر $x \in M$،

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(\exp(\varepsilon \mathbf{v})x) = \mathbf{v}(F)[\exp(\varepsilon \mathbf{v})x],$$

هرگاه $\exp(\varepsilon \mathbf{v})x$ تعریف شده باشد. با قرار دادن $\varepsilon = \circ$ ضرورت (۱۴.۲) اثبات می‌شود. برعکس اگر (۱۴.۲) همه جا برقرار باشد، سپس

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(\exp(\varepsilon \mathbf{v})x) = \circ,$$

چون $F(\exp(\varepsilon \mathbf{v})x)$ ثابتی برای همبندی است، زیرگروه یک-پارامتری موضعی $\exp(\varepsilon \mathbf{v})x$ از

$$G_x = \{g \in G : \text{تعریف شده باشد } g.x\}$$

را تعریف می‌کند. اما هر عنصر G_x می‌تواند به‌عنوان ضرب متناهی از توابع نمایی مولدهای بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}_i$ از G نوشته شود، از این‌رو برای هر $g \in G_x$، $F(g.x) = F(x)$ می‌باشد. □

لازم است مفهوم توابع یا زیرمجموعه‌های موضعا-ناوردا تحت گروه تبدیلات را تعریف کنیم. در اینجا، تنها ناوردایی تحت آن دسته از گروه تبدیلاتی که به اندازه‌ی کافی به عنصر همانی نزدیک هستند را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۶.۲.۲. فرض می‌کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. زیرمجموعه‌ی $\varphi \subset M$، G-**ناوردای موضعی** نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in \varphi$ همسایگی $\tilde{G}_x \subset G_x$ از عنصر همانی G وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $g \in \tilde{G}_x$ داشته باشیم: $g.x \in \varphi$.

تابع هموار $F : U \to N$ که U زیرمجموعه‌ی بازی از M می‌باشد، G-**ناوردای موضعی** نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in U$ همسایگی $\tilde{G}_x \subset G_x$ از عنصر همانی e در G وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $g \in \tilde{G}_x$ داشته باشیم: $F(g.x) = F(g)$.

F، G-ناوردای سراسری نامیده می‌شود (حتی اگر فقط روی یک زیرمجموعه باز از M تعریف شده باشد) اگر برای هر $x \in U$ و $g \in G$ به‌طوری‌که $g.x \in U$، داشته باشیم: $F(g.x) = F(g)$.

مثال ۷.۲.۲. فرض می‌کنیم G گروه انتقالات افقی $(x, y) \mapsto (x + \varepsilon, y)$ در $\mathbb{R}^۲$ باشد. قطعه خط

$$\{(x, y) : y = ۰, -۱ < x < ۱\}.$$

G-ناوردای موضعی است اما G- ناوردا نیست. به‌طور مشابه تابع دو ضابطه‌ای

$$F(x, y) = \begin{cases} ۰, & y \leq ۰ \ \vee \ y > ۰ \ \wedge \ x > ۰, \\ e^{-۱/y}, & y > ۰ \ \wedge \ x < ۰. \end{cases}$$

هموار و G-ناوردای موضعی روی $U = \mathbb{R}^۲ \setminus \{(۰, y) : y \geqslant ۰\}$ می‌باشد، چون برای هر $|x| < |\varepsilon|$ داریم: $F(x + \varepsilon, y) = F(x, y)$. واضح است که F، G -ناوردای سراسری نیست.

لم ۸.۲.۲. *فرض می‌کنیم G گروه همبند از تبدیلات روی M با مولدهای بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}_۱, \ldots, \mathbf{v}_s$ باشد. و با توجه به (۱۰.۲)، $Q^۱, \ldots, Q^s$ را مشخصه‌های متناظر این میدان‌های برداری در نظر می‌گیریم. سپس هر تابع G- ناوردای $u = f(x)$ بایستی در سیستم مرتبه‌ی اول از معادلات*

$$Q^{\mu}_{\alpha}(x, u^{(۱)}) = ۰, \qquad \mu = ۱, \ldots, s, \quad \alpha = ۱, \ldots, q, \tag{۱۵.۲}$$

که به‌وسیله‌ی صفر قرار دادن مشخصه‌های G تعیین می‌شوند صدق کند.

قضیه ۹.۲.۲. *فرض می‌کنیم G به‌طور نیم- منظم روی منیفلد m- بعدی M با مدارهای s- بعدی عمل کند. اگر $x_۰ \in M$، سپس دقیقا $(m - s)$ ناوردای موضعی مستقل تابعی $\zeta^۱(x), \ldots, \zeta^{m-s}(x)$ در همسایگی‌ای از $x_۰$ وجود دارند. به‌علاوه هر ناوردای دیگر از عمل گروه که در همسایگی‌ای از $x_۰$ تعریف شده باشد برای تابع هموار F فرم زیر را دارد:*

$$\zeta(x) = F(\zeta^۱(x), \ldots, \zeta^{m-s}(x)).$$

اگر عمل G منظم باشد سپس ناورداهای $\zeta^۱, \ldots, \zeta^{m-s}$ به‌طور سراسری در همسایگی‌ای از $x_۰$ ناوردا هستند.

برهان. با استفاده از قضیه‌ی فروبنیوس ، [۱۷]، می‌توانیم چارت مختصات موضعی تخت $y = \psi(x)$ در همسایگی $x_۰$ برای سیستم میدان‌های برداری $\mathcal{G}$ که به‌وسیله‌ی مولدهای بی‌نهایت کوچک G تولید شده‌اند

را بیابیم، به‌طوری‌که مدارهای G برشهای $\{y^1 = c_1, \dots, y^{m-s} = c_{m-s}\}$ باشند. سپس مختصات جدید $y^1 = \zeta^1(x), \dots, y^{m-s} = \zeta^{m-s}(x)$ ناورداهای موضعی Gاند، و روی هر برش ثابت‌اند. به‌علاوه هر ناوردای دیگر از G بایستی روی این برشها ثابت باشد، بنابراین تنها تابعی از $y^1, \dots, y^{m-s}$ است. سرانجام، اگر G به‌طور منظم عمل کند می‌توانیم چارت مختصاتی تخت را طوری انتخاب کنیم که هر مدار، آن‌را به بیشتر از یک برش تقسیم کند. در این مورد، $y^1, \dots, y^{m-s}$ ناورداهای سراسری می‌باشند. $\square$

روش‌هایی برای ساختن ناورداها

فرض می‌کنیم G یک گروه یک-پارامتری از تبدیلات باشد که با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \xi^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^m(x)\frac{\partial}{\partial x^m}.$$

در مختصات موضعی داده شده روی M عمل می‌کند، یک ناوردای موضعی $\zeta(x)$ از G جوابی از معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول، همگن و خطی زیر است:

$$\mathbf{v}(\zeta) = \xi^1(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x^1} + \cdots + \xi^m(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x^m} = 0. \qquad (۱۶.۲)$$

بنا به قضیه‌ی (۹.۲.۲) اگر $\mathbf{v}|_{x_0} \neq 0$، سپس $m-1$ ناوردای مستقل تابعی وجود دارد. از این‌رو $m-1$ جواب مستقل تابعی برای معادله دیفرانسیل جزیی (۱۶.۲) در همسایگی‌ای از x_0 وجود دارد. قضیه‌ای کلاسیک از چنین معادلاتی نشان می‌دهد که حل عمومی آن‌ها می‌تواند با انتگرال گرفتن از سیستم مشخصه‌ی متناظر زیر از معادلات دیفرانسیل معمولی پیدا شود:

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \cdots = \frac{dx^m}{\xi^m(x)}.$$

که جواب‌های آن فرم زیر را دارند:

$$\zeta^1(x^1, x^2, \dots, x^m) = c_1 \ , \ \dots \ , \ \zeta^{m-1}(x^1, x^2, \dots, x^m) = c_{m-1}.$$

$c_1, \dots, c_{m-1}$ ثابت‌های حاصل از انتگرال‌گیری‌اند، در واقع $\zeta^1, \dots, \zeta^{m-1}$ جواب‌های مستقل تابعی برای (۱۶.۲) می‌باشند. محاسبه‌ی ناورداهای مستقل از گروه r-پارامتری از تبدیلات که $r > 1$ کمی پیچیده‌تر است. اگر $\mathbf{v}_k = \sum \xi_k^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ و $k = 1, \dots, r$ پایه‌ای از مولدهای بی‌نهایت کوچک برای G تشکیل دهند سپس ناورداها به‌وسیله‌ی حل سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی اول، خطی و همگن زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{v}_k(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} \xi_k^i(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x^i} = 0, \qquad k = 1, \dots, r.$$

به‌عبارت دیگر هر ناوردای ζ بایستی ناوردای مشترکی از همه‌ی میدان‌های برداری $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ باشد. لذا ابتدا ناوردای یک میدان برداری را محاسبه می‌کنیم، مثلا $\mathbf{v}_1$. در مرحله‌ی بعد میدان‌های برداری $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ را با استفاده از ناوردای $\mathbf{v}_1$ به‌عنوان مختصات بازنویسی می‌کنیم و سپس ناوردای مشترک این $r-1$ میدان برداری جدید را می‌یابیم. حال با یک مثال مطلب را واضح‌تر بیان می‌کنیم.

مثال ۱۰.۲.۲. میدان‌های برداری
$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{w} = ۲xz\frac{\partial}{\partial x} + ۲yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^۲ + ۱ - x^۲ - y^۲)\frac{\partial}{\partial z}.$$
را روی $\mathbb{R}^۳$ در نظر می‌گیریم که یک گروه آبلی دو پارامتری از تبدیلات روی $\mathbb{R}^۳$ تولید می‌کنند و روی $M = \mathbb{R}^۳ \backslash (\{x = y = ۰\} \cup \{x^۲ + y^۲ = ۱,\ z = ۰\})$ به‌طور منظم عمل می‌کنند. ناوردای $\zeta(x, y, z)$ جوابی از دو معادله‌ی $\mathbf{v}(\zeta) = ۰ = \mathbf{w}(\zeta)$ می‌باشد. ابتدا ناوردای مستقل $\mathbf{v}$ را می‌یابیم. سیستم مشخصه‌ی متناظر $\mathbf{v}$، $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{۰}$ می‌باشد. با انتگرال گرفتن از تساوی‌ها $x^۲ + y^۲ = c$ و $z = c'$، برای ثابت‌های دلخواه c, c' که حاصل از انتگرال‌گیری‌اند، ناورداهای مستقل از $\mathbf{v}$ می‌باشند. قرار می‌دهیم $x^۲ + y^۲ = r^۲$. حال $\mathbf{w}$ را با استفاده از r و z دوباره بیان می‌کنیم.
$$\begin{aligned} x^۲ + y^۲ = r^۲ \quad &\Rightarrow \quad ۲x\frac{\partial}{\partial x} + ۲y\frac{\partial}{\partial y} = ۲r\frac{\partial}{\partial r} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{w} = ۲rz\frac{\partial}{\partial r} + (z^۲ + ۱ - r^۲)\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$
چون ζ بایستی تابعی از ناورداهای r و z از $\mathbf{v}$ باشد بنابراین باید جوابی از معادله دیفرانسیل
$$\mathbf{w}(\zeta) = ۲rz\frac{\partial \zeta}{\partial r} + (z^۲ + ۱ - r^۲)\frac{\partial \zeta}{\partial z} = ۰.$$
باشد. سیستم مشخصه‌ی آن به صورت زیر می‌باشد:
$$\frac{dr}{۲rz} = \frac{dz}{z^۲ + ۱ - r^۲}.$$
با حل این معادله دیفرانسیل معمولی،
$$\zeta = \frac{z^۲ + r^۲ + ۱}{r} = \frac{x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۱}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}.$$
تنها ناوردای مستقل این گروه می‌باشد.

تعریف ۱۱.۲.۲. فرض می‌کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی زیرمجموعه‌ی باز $M \subset X \times U$ عمل می‌کند. یک **ناوردای دیفرانسیلی** مرتبه n-ام از G تابع هموار $\eta : M^{(n)} \to \mathbb{R}$ وابسته به x، u و مشتقات u می‌باشد به‌طوری‌که برای هر $g \in G$ که $pr^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)})$ تعریف شده باشد η یک ناوردا از عمل‌گروه امتداد داده شده‌ی $pr^{(n)}G$ است:
$$\eta(pr^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)})) = \eta(x, u^{(n)}), \qquad (x, u^{(n)}) \in M^{(n)}.$$

مثال ۱۲.۲.۲. گروه دوران‌های $G = \mathrm{SO}(۲)$ که روی $X \times U = \mathbb{R}^۲$ با مولد $\mathbf{v} = -u\partial_x + x\partial_u$ عمل می‌کنند را در نظر می‌گیریم. ناوردای دیفرانسیلی مرتبه‌ی اول در واقع ناوردای معمولی از امتداد اول $pr^{(۱)}\mathrm{SO}(۲)$ با مولد بی‌نهایت کوچک
$$pr^{(۱)}\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (۱ + u_x^۲)\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

می‌باشد. اگر متغیرهای (x, u, u_x) را با (x, y, z) نشان دهیم، داریم:

$$\mathbf{w} = pr^{(1)}\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

توجه کنید که میدان برداری $\mathbf{w}$ روی $\mathbb{R}^3$ هرگز صفر نمی‌شود بنابراین در همسایگی‌ای از هر نقطه در $\mathbb{R}^3$ دو ناوردای مستقل تابعی از گروه یک-پارامتری تولید شده به‌وسیله‌ی $\mathbf{w}$ وجود دارد. سیستم مشخصه در این مورد به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{1 + z^2}.$$

که تساوی اول در مثال (۱۰.۲.۲) محاسبه شد، بنابراین یکی از ناورداها شعاع $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ می‌باشد.
برای پیدا کردن ناوردای دیگر x را با $\sqrt{r^2 - y^2}$ جایگزین می‌کنیم و داریم:

$$\frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{dz}{1 + z^2}.$$

جواب آن $\arcsin\frac{y}{r} = \arctan z + k$ برای ثابت دلخواه k می‌باشد. بنابراین

$$\arctan z - \arcsin\frac{y}{r} = \arctan z - \arctan\frac{y}{x}.$$

ناوردای دیفرانسیلی دوم برای $\mathbf{w}$ می‌باشد. بیان ساده‌تری از این ناوردا با گرفتن تانژانت آن بدست می‌آید: $\frac{xz - y}{yz + x}$، بنابراین با توجه به تغییر متغیر اولیه

$$\sqrt{x^2 + u^2} \quad \text{و} \quad \frac{xu_x - u}{x + uu_x}$$

مجموعه‌ی کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه‌ی اول برای $\mathrm{SO}(2)$ تشکیل می‌دهند.

گزاره ۱۳.۲.۲. *فرض می‌کنیم G یک گروه از تبدیلات باشد که روی منیفلد $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^2$ عمل می‌کند. تصور کنید که $y = \eta(x, u^{(n)})$ و $w = \zeta(x, u^{(n)})$ ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه‌ی n-ام از G باشند. سپس مشتق*

$$\frac{dw}{dy} = \frac{dw/dx}{dy/dx} \equiv \frac{D_x\zeta}{D_x\eta}, \tag{۱۷.۲}$$

یک ناوردای دیفرانسیلی مرتبه‌ی $(n + 1)$-ام برای G می‌باشد.

برهان. برای اثبات به فرمول زیر نیاز داریم. فرض می‌کنیم $\zeta(x, u^{(n)})$ تابعی هموار و $\mathbf{v} = \xi\partial_x + \phi\partial_u$ میدان برداری باشد. سپس

$$pr^{(n+1)}\mathbf{v}(D_x\zeta) = D_x[pr^{(n)}\mathbf{v}(\zeta)] - D_x\xi \cdot D_x\zeta. \tag{۱۸.۲}$$

با استفاده از فرمول (۱۲.۲) برای امتداد می‌بینیم که

$$pr^{(n+1)}\mathbf{v}(D_x\zeta) = pr^{(n+1)}\mathbf{v}_Q(D_x\zeta) + \xi D_x^2\zeta,$$

در حالی‌که

$$D_x[pr^{(n)}\mathbf{v}(\zeta)] = D_x[pr^{(n)}\mathbf{v}_Q(\zeta)] + D_x(\xi D_x\zeta).$$

بنابراین (۱۸.۲) به فرمول ساده‌تر زیر کاهش می‌یابد،

$$pr^{(n+1)}\mathbf{v}_Q(D_x\zeta) = D_x[pr^{(n)}\mathbf{v}_Q(\zeta)].$$

این فرمول، موردی ویژه از قاعده‌ی تبدیل عمومی میدان‌های برداری و مشتقات کامل می‌باشد.
اثبات (۱۷.۲) را ادامه می‌دهیم، فرض می‌کنیم $\mathbf{v}$ مولدی بی‌نهایت کوچک از G باشد. با استفاده از (۱۸.۲)

$$\begin{aligned} pr^{(n+1)}\mathbf{v}\left[\frac{dw}{dy}\right] &= \frac{1}{(D_x\eta)^2}\{pr^{(n+1)}\mathbf{v}(D_x\zeta)\cdot D_x\eta - D_x\zeta\cdot pr^{(n+1)}\mathbf{v}(D_x\eta)\} \\ &= \frac{1}{(D_x\eta)^2}\{D_x[pr^{(n)}\mathbf{v}(\zeta)]\cdot D_x\eta - D_x\xi\cdot D_x\zeta\cdot D_x\eta\} \\ &\quad -\frac{1}{(D_x\eta)^2}\{D_x\zeta\cdot D_x[pr^{(n)}\mathbf{v}(\eta)] + D_x\zeta\cdot D_x\xi\cdot D_x\eta\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

چون با توجه به فرض $pr^{(n)}\mathbf{v}(\zeta) = 0 = pr^{(n)}\mathbf{v}(\eta)$ بنابراین dw/dy ناوردای بی‌نهایت کوچک تحت عمل $pr^{(n+1)}G$ می‌باشد لذا با توجه به گزاره‌ی (۵.۲.۲) ناورداست. □

گزاره ۱۴.۲.۲. *فرض می‌کنیم G گروه یک-پارامتری از تبدیلات باشد که روی $M \subset X\times U \simeq \mathbb{R}^2$ عمل می‌کند. فرض می‌کنیم $y = \eta(x,u)$ و $w = \zeta(x,u,u_x)$ مجموعه‌ی کاملی از ناورداهای مستقل تابعی از امتداد اول $pr^{(1)}G$ باشند. سپس مشتقات*

$$y, w, dw/dy, \ldots, d^{n-1}w/dy^{n-1} \qquad (۱۹.۲)$$

مجموعه‌ی کاملی از ناورداهای مستقل تابعی برای امتداد مرتبه‌ی n-ام $pr^{(n)}G$ برای $n \geq 1$ فراهم می‌کنند.

برهان. با توجه به قضیه‌ی (۱۳.۲.۲) کافیست استقلال (۱۹.۲) را ثابت کنیم. از طرفی چون مشتقات k-ام d^kw/dy^k تنها به $u_{k+1} = d^{k+1}u/dx^{k+1}$ وابسته هستند، لذا از $y, w, \cdots, d^{k-1}/dy^{k-1}$ که تنها به توابع $x, u, \ldots, u_k$ وابسته‌اند، مستقل‌اند. □

تعریف ۱۵.۲.۲. یک-فرم دیفرانسیلی θ روی فضای جت J^n **فرم برخوردی** نامیده می‌شود اگر به وسیله‌ی همه‌ی توابع امتداد داده شده صفر شود. به عبارت دیگر، اگر $u = f(x)$ تابعی هموار با امتداد n-ام $f^{(n)} : X \to J^n$ باشد، سپس بایستی $(f^{(n)})^*\theta = 0$.

قضیه ۱۶.۲.۲. *هر فرم برخوردی روی J^n می‌تواند به‌عنوان ترکیب خطی $\theta = \sum_{J,\alpha} P_J^\alpha \theta_J^\alpha$ با مضرب‌های تابعی هموار $P_J^\alpha(x, u^{(n)})$، از فرم‌های برخوردی اساسی*

$$\theta_J^\alpha = du_J^\alpha - \sum_{i=1}^{p} u_{J,i}^\alpha dx^i, \qquad \alpha = 1, \ldots, q, \;\; 0 \leq \sharp J < n.$$

نوشته شود. (که $\sharp J$ مرتبه فرم برخوردی θ_J^α می‌باشد. توجه کنید اساسا فرم‌های برخوردی روی J^n دارای مرتبه‌ی حداکثر $n-1$ می‌باشند.)

تعریف ۱۷.۲.۲. گروه تبدیلات G را در نظر می‌گیریم. فرم دیفرانسیل ω روی J^n **ناوردای برخوردی** نامیده می‌شود اگر و تنها اگر، برای هر $g \in G$ و هر فرم برخوردی $\theta = \theta_g$، داشته باشیم:

$$(g^{(n)})^* \omega = \omega + \theta.$$

ضابطه‌ی بی‌نهایت کوچک برای بررسی ناوردای برخوردی بودن این است که مشتق لی فرم نسبت به همه‌ی مولدهای بی‌نهایت کوچک امتداد داده شده‌ی $\mathbf{v}^{(n)} \in \mathcal{G}^{(n)}$ صفر باشد: $\mathbf{v}^{(n)}(\omega) = 0$. فرم‌های برخوردی به‌طور بدیهی ناوردای برخوردی‌اند بنابراین تنها فرم‌های ناوردای برخوردی افقی مورد توجه‌اند. هر یک-فرم روی J^n افقی نامیده می‌شود اگر همه‌ی جهت‌های مماس عمودی صفر باشند (یعنی $\theta = 0$).

تعریف ۱۸.۲.۲. تابع حقیقی مقدار و هموار $F : J^n \to \mathbb{R}$ **تابع دیفرانسیلی از مرتبه‌ی** n نامیده می‌شود. توجه کنید هر تابع دیفرانسیلی $F(x, u^{(n)})$ از مرتبه‌ی n، تابعی دیفرانسیلی روی فضای جت مرتبه‌ی بالاتر تعریف می‌کند با این فرض که مختصات $(x, u^{(n)})$ از J^n را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از مختصات $(x, u^{(n+k)})$ از J^{n+k} در نظر بگیریم. به‌علاوه دیفرانسیل معمولی آن

$$dF = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{\sharp I \leq n} \frac{\partial F}{\partial u_I^\alpha} du_I^\alpha,$$

یک-فرمی روی فضای جت مرتبه‌ی بالاتر J^{n+1} می‌باشد، هم‌چنین می‌توانیم dF را به یک-فرمی افقی به‌علاوه‌ی یک فرم برخوردی تجزیه کنیم. که مولفه‌ی افقی، دیفرانسیل کامل F است و به‌وسیله‌ی

$$DF = \sum_{i=1}^{p} D_i F dx^i,$$

داده می‌شود و D_i مشتق کامل نسبت به x^i می‌باشد. هم‌چنین اگر $I(x, u^{(n)})$ هر ناوردای دیفرانسیلی مرتبه‌ی n-ام باشد دیفرانسیل کامل آن، $DI = \sum D_j I dx^j$، یک-فرم ناوردای برخوردی روی J^{n+1} می‌باشد.

تعریف ۱۹.۲.۲. دیفیومورفیسم موضعی $\Psi : J^n \to J^n$ **تبدیل برخوردی** از مرتبه‌ی n می‌باشد اگر فضای همه‌ی فرم‌های برخوردی را حفظ کند، به این معنی که اگر θ فرمی برخوردی روی J^n باشد $\Psi^* \theta$ نیز فرمی برخوردی باشد.

قضیه ۲۰.۲.۲. *اگر تعداد متغیرهای وابسته بیشتر از یکی باشد، $q > 1$، هر تبدیل برخوردی امتداد تبدیل نقطه‌ای $\Phi : M \to M$ می‌باشد. اگر $q = 1$، تبدیلات برخوردی مرتبه‌ی اولی وجود دارند که از تبدیلات*

نقطه‌ای بدست نمی‌آیند، اما هر تبدیل برخوردی مرتبه‌ی n-ام، امتداد $(n-۱)$-ام تبدیل برخوردی مرتبه‌ی اول $\Psi : J^۱ \to J^۱$ می‌باشد.

برهان. به [۳] و [۴] رجوع کنید. □

مجموعه‌ای از ناورداهای دیفرانسیلی روی J^n اکیدا مستقل نامیده می‌شوند اگر تنها به‌عنوان تابعی از مختصات مشتقی مرتبه‌ی n-ام، مستقل تابعی باشند. به‌عبارتی توابع $F_۱, \dots, F_k$ اکیدا مستقل‌اند اگر دیفرانسیل‌های مرتبه‌ی n-ام آن‌ها، که به‌وسیله‌ی

$$d_nF = \sum_{\alpha=۱}^{q} \sum_{\sharp I=n} \frac{\partial F}{\partial u_I^\alpha} du_I^\alpha,$$

داده می‌شوند در هر نقطه مستقل خطی باشند: $d_nF_۱ \wedge d_nF_۲ \wedge \cdots \wedge d_nF_r \neq ۰$.

به‌منظور مطالعه‌ی صحیح ناورداهای دیفرانسیلی از گروه تبدیلات، بایستی هندسه‌ی امتداد آن‌را بفهمیم. فرض می‌کنیم G گروه لی r-بعدی از تبدیلات و s_n بعد ماکسیمال مدار عمل امتداد داده شده‌ی $G^{(n)}$ باشد به‌طوری‌که $G^{(n)}$ به‌طور (نیم)منظم روی زیرمجموعه‌ی باز $V^{(n)} = \{z \in J^{(n)} | \dim \mathcal{G}^{(n)}|_z = s_n\} \subset J^n$، که شامل همه‌ی نقاط مشمول در مدارهای از بعد ماکسیمال است، عمل می‌کند. در حقیقت تصور خواهیم کرد که $G^{(n)}$ به‌طور منظم روی $V^{(n)}$ عمل می‌کند، اگرچه تمام نتایج، با تفسیری مناسب، در موارد نیم-منظم نیز برقرار است. (اگر G به‌طور تحلیلی عمل کند سپس زیرمجموعه‌ی $V^{(n)}$ چگال در J^n است.)

فرض می‌کنیم h_n بعد هر زیرگروه ایزوتروپی $H_z^{(n)} = \{g | g^{(n)} \cdot z = z\}$ برای $z \in V^{(n)}$ باشد. سپس بعد مدار در رابطه‌ی $s_n = r - h_n$ صدق می‌کند. به‌طور موضعی، در همسایگی هر نقطه‌ی $z \in V^{(n)}$ تعداد

$$i_n = p + q^{(n)} - s_n = p + q^{(n)} - r + h_n,$$

ناوردای دیفرانسیلی مستقل تابعی از مرتبه‌ی حداکثر n وجود دارد. چون هر ناوردای دیفرانسیلی از مرتبه‌ی کمتر از n نیز در این شمارش قرار می‌گیرند، اعداد i_n تشکیل دنباله‌ی غیر کاهشی

$$i_۰ \leq i_۱ \leq i_۲ \leq \cdots,$$

را می‌دهند. تفاوت

$$j_n = i_n - i_{n-۱} = q_n - s_n + s_{n-۱} = q_n + h_n - h_{n-۱}, \qquad (۲.۲۰)$$

تعداد ناورداهای دیفرانسیلی اکیدا مستقل مرتبه‌ی n-ام را می‌شمارد، که $q_n = qp_n$. برای گروه‌های تبدیلات نقطه‌ای قرار می‌دهیم $j_۰ = i_۰$ و برای گروه‌های تبدیلات برخوردی ،چون $i_۰$ و $j_۰$ تعریف نشدند قرار می‌دهیم $j_۱ = i_۱$. توجه کنید که j_n نمی‌تواند از q_n، تعداد مختصات مشتقی مستقل از مرتبه‌ی n، تجاوز کند بنابراین

$$i_{n-۱} \leq i_n \leq i_{n-۱} + q_n.$$

اگر $J^n \supset \mathcal{O}^{(n)}$ مداری از $G^{(n)}$ باشد، سپس برای هر $k < n$، تصویر آن $\pi_k^n(\mathcal{O}^{(n)}) \subset J^k$ مداری از امتداد k-ام $G^{(k)}$ است. بنابراین بعد ماکسیمال مدار s_n از $G^{(n)}$ تابعی غیرکاهشی از n است، و به وسیله‌ی $r = \mathrm{dim}G$ کراندار می‌شود:

$$s_\circ \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq r. \qquad (۲۱.۲)$$

از طرفی چون بعد مدار نمی‌تواند بیشتر از بعد فضای جت باشد، داریم:

$$s_{n-1} \leq s_n \leq s_{n-1} + q_n.$$

شرط (۲۱.۲) دلالت می‌کند که بعد ماکسیمال مدار سرانجام ثابت می‌شود، یعنی عدد صحیح s وجود دارد به‌طوری‌که برای m-های به اندازه کافی بزرگ $s_m = s$ است. به‌ویژه اگر برای تعدادی n داشته باشیم $s_n = r$، سپس برای همه‌ی $m \geq n$ داریم $s_m = r$. ما s را **بعد پایایی مدار** و مرتبه‌ی مینیمال n برای $s_n = s$ را **مرتبه‌ی پایایی گروه** می‌نامیم.

قضیه ۲۱.۲.۲. *گروه تبدیل G به‌طور موضعا موثر عمل می‌کند اگر و تنها اگر بعد آن با بعد پایایی مدار یکسان باشد، به‌طوری‌که برای همه‌ی m- های به اندازه‌ی کافی بزرگ داشته باشیم: $s_m = r = \mathrm{dim}G$*

برهان. به [۲۳] رجوع کنید. □

تعریف ۲۲.۲.۲. فرض می‌کنیم G گروه تبدیلی روی فضایی با p متغیر مستقل باشد. یک هم‌کنج ناوردای دیفرانسیلی گردایه‌ای از $p = \mathrm{dim}X$ یک-فرم افقی ناوردای برخوردی مستقل مرتبه‌ی n-ام $\omega^1, \ldots, \omega^p$ می‌باشد که به‌طور موضعی روی فضای جت مرتبه‌ی n-ام J^n تعریف شده‌اند.

اگر $F(x, u^{(m)})$ هر تابع دیفرانسیلی باشد، ما می‌توانیم دیفرانسیل کامل آنرا برحسب هم‌کنج‌ها بنویسیم:

$$DF = \sum_{k=1}^{p} \mathcal{D}_k F \omega^k.$$

در نتیجه **عملگر**های دیفرانسیلی هم‌کنج $\mathcal{D}_k$، عملگرهای دیفرانسیلی G-ناوردایند.

گزاره ۲۳.۲.۲. *فرض می‌کنیم $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_p$ عملگرهای دیفرانسیلی هم‌کنج وابسته به هم‌کنج‌های ناوردای برخوردی روی J^n باشند. اگر $I(x, u^{(m)})$ هر ناوردای دیفرانسیلی از مرتبه‌ی m باشد، سپس $\mathcal{D}_k I$ ناوردای دیفرانسیلی از مرتبه‌ی حداکثر ماکسیمم n و $m + 1$ می‌باشد.*

برهان. به [۲۰] رجوع کنید. □

در مختصات موضعی، اگر داشته باشیم $\omega^i = \sum_k P_k^i(x, u^{(n)}) dx^k$، سپس $\mathcal{D}_k = \sum_i Q_k^i(x, u^{(n)}) D_i$ که $Q = (Q_j^i(x, u^{(n)})) = P^{-T}$ می‌باشد. به‌ویژه، اگر $\omega^i = DI_i$ از ناورداهای دیفرانسیلی مستقل تابعی $I_1, \ldots, I_p$ محاسبه شوند، سپس $P = (D_j I_i(x, u^{(n)})$ ماتریس ژاکوبین آن‌ها می‌باشد.

فرض می‌کنیم $p=1$، یعنی تنها متغیر مستقل x را داشته باشیم. هم‌کنج ناوردای دیفرانسیلی، تنها شامل یک-فرم ناوردای برخوردی غیر صفر $\omega = P(x,u^{(n)})dx$ می‌باشد. عملگر دیفرانسیلی ناوردای وابسته‌ی $\mathcal{D} = (1/P)D_x$ هر ناوردای دیفرانسیلی J را به ناوردای دیفرانسیلی$\mathcal{D}J = D_xJ/P$ نگاشت می‌کند. به‌ویژه اگر $I(x,u^{(n)})$ هر ناوردای دیفرانسیلی (غیر ثابت) باشد، $\mathcal{D} = (D_xI)^{-1}D_x$ عملگر دیفرانسیلی ناوردای متناظر می‌باشد، که J را به $dJ/dI = D_xJ/D_xI$ نگاشت می‌کند. بنابراین با شروع از یک جفت از ناورداهای دیفرانسیلی (یا به‌طور عمومی‌تر، تنها یک ناوردای دیفرانسیلی و یک، یک-فرم افقی ناوردای برخوردی) دنباله‌ای نامتناهی از ناورداهای دیفرانسیلی مراتب بالاتر $\mathcal{D}^kJ \ , \ k = 0,1,2,\dots$ می‌سازیم. استقلال تابعی ناورداهای دیفرانسیلی نتیجه به‌وسیله‌ی لم زیر تضمین می‌شود.

لم ۲.۲.۲۴. *تصور کنید $J_1,\dots,J_r$ ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه‌یn-ام مستقل اکید هستند، و I یا ناوردای دیفرانسیلی از مرتبه‌ی اکیدا کمتر از n باشد، یا ناوردای دیفرانسیلی مرتبه‌ی n-ام باشد که نسبت به J_ν ها مستقل اکید است. فرض کنیم $\mathcal{D} = (D_xI)^{-1}D_x$ عملگر دیفرانسیلی ناوردای وابسته به DI باشد. سپس توابع دیفرانسیلی $\mathcal{D}J_1,\dots,\mathcal{D}J_r$ ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه‌ی $(n+1)$-ام مستقل اکید هستند.*

برهان. به [۲۰] رجوع کنید. □

در مواردی که تنها یک متغیر مستقل و q متغیر وابسته داریم به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. هنوز به تنها یک، یک-فرم ناوردای برخوردی $\omega = P(x,u^{(n)})dx$ که می‌توانیم آن‌را با دیفرانسیل کامل گرفتن از یک ناوردای دیفرانسیلی I بدست آوریم، و q ناوردای دیفرانسیلی دیگر $J_1,\dots,J_q$ نیاز داریم. یک سیستم کامل از ناورداهای دیفرانسیلی با به‌کار بردن متوالی عملگرهای دیفرانسیلی ناوردای $\mathcal{D} = (1/P)D_x$ برای ناورداهای دیفرانسیلی اساسی J_ν ساخته می‌شود.

قضیه ۲.۲.۲۵. *تصور کنید که G گروه تبدیلات برخوردی یا نقطه‌ای روی فضای M دارای یک متغیر مستقل و q متغیر وابسته باشد. سپس، به‌طور موضعی، $q+1$ ناوردای دیفرانسیلی مستقل اساسی $I,J_1,\dots,J_q$ وجود دارد، به‌طوری‌که هر ناوردای دیفرانسیلی می‌تواند به‌عنوان تابعی از این ناورداهای دیفرانسیلی و مشتقات $\mathcal{D}^mJ_\nu$ نوشته شود، که $\mathcal{D} = (D_xI)^{-1}D_x$ عملگر دیفرانسیلی ناوردای وابسته به ناوردای اول I می‌باشد.*

برهان. به [۲۰] رجوع کنید. □

لم (۲.۲.۲۴) نتایج مهمی دارد که بر مرتبه‌ی پایایی عمل‌گروه حکومت می‌کند.

قضیه ۲.۲.۲۶. *تصور کنید که برای $n \geq 0$، بعد ماکسیمال مدارهای عمل‌گروه امتداد داده شده در رابطه‌ی $s_{n-1} < s_n = s_{n+1} \leq q^{(n)}$ صدق کنند. سپس n مرتبه‌ی پایایی G می‌باشد.*

برهان. به [۲۰] رجوع کنید. □

قضیه ۲۷.۲.۲. *تصور کنید که بعد ماکسیمال مدار عمل‌گروه امتداد داده شده‌ی G در رابطه‌ی $s_k = s_{k+1}$ و $s_n = s_{n+1}$ برای $n > k$ صدق کند. سپس برای همه‌ی $m \geq n$ داریم: $s_m = s_n$.*

برهان. به [۲۰] رجوع کنید. □

مثال ۲۸.۲.۲. فرض می‌کنیم $r \geq 3$، $x, u \in \mathbb{C}$ و گروه r-بعدی تولید شده به‌وسیله‌ی میدان‌های برداری $\partial_x, \partial_u, x\partial_u, \ldots, x^{r-3}\partial_u, x\partial_x + (r-2)u\partial_u$ را در نظر می‌گیریم. بعد ماکسیمال مدار به‌وسیله‌ی

$$s_0 = 1, s_1 = 2, \ldots, s_{r-3} = s_{r-2} = r-1, s_{r-1} = s_r = \cdots = r.$$

داده می‌شود. بنابراین، بعد مدار در مرتبه‌ی $r-3$ شبه‌پایا می‌شود، و سرانجام در مرتبه‌ی $r-1$ پایا می‌شود. به‌ویژه می‌بینیم که شبه‌پایایی در مراتب بالا نیز می‌تواند اتفاق بیفتد. از طرف دیگر، این مثال تنها مثال شناخته شده‌ای است که شبه‌پایایی بعد مدار در آن واقعا اتفاق می‌افتد.

با توجه به دو قضیه‌ی قبل اساسا تنها دو امکان برای مرتبه‌ی ناورداهای دیفرانسیلی اساسی، همانطور که در قضیه‌ی (۲۵.۲.۲) توصیف می‌شود، از گروه تبدیلاتی که روی فضایی با فقط یک متغیر مستقل عمل می‌کند وجود دارد. فرض می‌کنیم G گروهی r-بعدی باشد که به‌طور موضعا موثر عمل می‌کند، و n مرتبه‌ی پایایی آن‌را نشان دهد سپس دو حالت اتفاق می‌افتد:

- مرتبه‌ی ناورداهای دیفرانسیلی اساسی حداکثر $n+1$ می‌باشد. دراین مورد، $q+1$ ناوردای دیفرانسیلی وجود دارد که شامل I، از مرتبه‌ی حداکثر n، $J_1, \ldots, J_{q-1}$ از مرتبه‌ی حداکثر $n+1$ و J_q از مرتبه‌ی $n+1$ می‌باشد. اینجا $\dim G = r \leq 1 + (n+1)q$.

- مرتبه‌ی ناورداهای دیفرانسیلی حداکثر $n+2$ می‌باشد. در این مورد $q+1$ ناوردای دیفرانسیلی $I, J_1, \ldots, J_{q-1}$ همه از مرتبه‌ی $n+1$، و J_q از مرتبه‌ی $n+2$ می‌باشند. این مورد زمانی اتفاق می‌افتد که برای بعد G داشته باشیم: $r = 1 + (n+1)q$.

در نتیجه، زمانی که تنها یک متغیر مستقل داریم، مرتبه‌ی پایایی n از عمل‌گروه موضعاموثر r-بعدی G از نامساوی $\frac{r-1}{q} - 1 \leq n \leq r-1$ پیروی می‌کند. فرض می‌کنیم k_n تعداد ناورداهای دیفرانسیلی اساسی، آن دسته از ناورداهای دیفرانسیلی که برحسب ناورداهای دیفرانسیلی از مراتب پایین‌تر بیان نمی‌شوند، اکیدا مستقل از مرتبه‌ی n را نشان دهد، داریم: $k_n = j_n - j_{n-1}$.

قضیه ۲۹.۲.۲. *فرض می‌کنیم G گروه تبدیلی باشد. تعداد k_n از ناورداهای دیفرانسیلی اساسی از مرتبه‌ی n برحسب بعد مینیمال h_n از زیرگروه ایزوتروپی $G^{(n)}$ به شکل زیر داده می‌شود:*

$$k_n = \begin{cases} h_n - 2h_{n-1} + h_{n-2} + 1, & if\ k_0 = \cdots = k_{n-2} = 0,\ \ k_{n-1} > 0, \\ h_n - 2h_{n-1} + h_{n-2}, & \text{other wise.} \end{cases} \tag{۲۲.۲}$$

این رابطه برای همه‌ی $n \geq 0$ درست است به‌شرطی‌که هرگاه عمل $G^{(n)}$ تعریف نشده باشد، یعنی برای $n = -1, -2$ و در مورد گروه تبدیلات برخوردی هرگاه $n = 0$ باشد، قرار دهیم $i_n = 0$ و $h_n = q(n+1) - 1 - r$.

برهان. به‌منظور خلاصه‌نویسی، رابطه را تنها در مورد گروه تبدیلات نقطه‌ای اثبات می‌کنیم. (برای تبدیلات برخوردی تنها در حالتی برقرار است که یک متغیر وابسته داشته باشیم و به‌طور مشابه اثبات می‌شود.) ابتدا تصور کنید $n \geq 2$. مطابق (۲۰.۲)، $j_n = q + h_n - h_{n-1}$. اگر $i_{n-2} > 0$ سپس همان‌طور که می‌خواهیم:

$$k_n = j_n - j_{n-1} = h_n - 2h_{n-1} + h_{n-2}.$$

اگر $i_{n-2} = 0$ و $i_{n-1} \geq 1$ به‌طوری‌که $k_0 = \cdots = k_{n-2} = 0$ و $k_{n-1} > 0$، سپس یکی از ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه‌ی $(n-1)$-ام بایستی برای تعریف عملگرهای دیفرانسیلی ناوردا استفاده شود، از این‌رو تنها $i_{n-1} - 1$ ناوردای دیفرانسیلی مرتبه‌ی n-ام مستقل وجود دارد. بنابراین

$$k_n = j_n - i_{n-1} + 1 = i_n - 2i_{n-1} + 1 = h_n - 2h_{n-1} + h_{n-2} + 1.$$

سرانجام، اگر $i_{n-2} = i_{n-1} = 0$ سپس

$$h_{n-2} = h_{n-1} = r\ ,\ h_n = r - i_n,$$

لذا

$$k_n = i_n = i_n - 2i_{n-1} + i_{n-2} = h_n - 2h_{n-1} + h_{n-2}.$$

حال تصور کنید $n = 1$. اگر $i_0 = 1 + q - r + h_0 \geq 1$ سپس $j_1 = q + h_1 - h_0$ بنابراین

$$k_1 = j_1 - i_0 + 1 = h_1 - 2h_0 + r = h_1 - 2h_0 + h_{-1} + 1,$$

چون $h_{-1} = r - 1$، (۲۲.۲) در این مورد اثبات می‌شود. از طرف دیگر، اگر $i_0 = 0$ سپس $h_0 = r - q - 1$ بنابراین

$$k_1 = i_1 + 1 + 2q - r + h_1 = h_1 - 2h_0 + r - 1 = h_1 - 2h_0 + h_{-1},$$

مجددا (۲۲.۲) را تعیین می‌کند. سرانجام برای $n = 0$، داریم:

$$k_0 = i_0 = 1 + q - r + h_0 = h_0 - 2h_{-1} + h_{-2},$$

چون $h_{-1} = r - 1$ و $h_{-2} = q + r - 1$. بنابراین اثبات (۲۲.۲) در مورد تبدیلات نقطه‌ای کامل می‌شود. □

قضیه ۳۰.۲.۲. *فرض می‌کنیم G گروه لی r-بعدی موضعا موثر از تبدیلات نقطه‌ای باشد که روی $M \simeq \mathbb{R}^2$ عمل می‌کند. سپس G ناورداهای دیفرانسیلی اساسی $I(x, u^{(s)})$ و $J(x, u^{(r)})$ را از مرتبه‌های $s < r$ دارد. به‌علاوه $s = r - 1$ و عمل گروه در مرتبه‌ی $r - 2$ پایا می‌شود، به جز مواردی که یا G به‌طور غیرمتعدی عمل*

کند، که در این مورد $s=0$، یا اینکه بعد مدار امتداد داده شده شبه‌پایا باشد، که در این مورد $s=r-2$، و شبه پایایی در مرتبه‌ی $r-3$ اتفاق می‌افتد، در هر دو مورد مرتبه‌ی پایایی $r-1$ می‌باشد. در حقیقت، ابعاد مدار شبه پایا است اگر و تنها اگر عمل گروه، تحت یک تغییر متغیر، با عمل گروه لی r-بعدی توصیف شده در مثال (۲.۲.۲۸) هم‌ارز باشد.

برهان. به [۱۲] رجوع کنید. □

قضیه ۲.۲.۳۱. *فرض می‌کنیم $M \subset X\times U \simeq \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ و $G \neq \{e\}$ گروه موضعا موثر r-بعدی از تبدیلات نقطه‌ای یا برخوردی باشد. سپس بعد مدارهای امتداد داده شده به‌وسیله‌ی یکی از سه امکان دو به دو ناسازگار زیر داده می‌شود:*

- *موارد منظم، برای $k \leq r-2$ داریم: $s_k = k+2$، در حالیکه برای $m \geq r-2$ داریم: $s_m = r$.*
- *موارد غیرمتعدی، برای $k \leq r-1$ داریم: $s_k = k+1$، در حالیکه برای $m \geq r-1$ داریم: $s_m = r$.*
- *موارد شبه‌پایا، برای $k \leq r-3$ داریم: $s_k = k+1$، $s_{r-2} = r-1$ و برای $m \geq r-1$ داریم: $s_m = r$. در این مورد G ضرورتا هم‌ارز با عمل‌گروه مثال (۲.۲.۲۸) بوده و مورد (۲۰۷) برای $k=\alpha$ در جدول می‌باشد.*

حال تعمیمی از این نتایج را در مورد چند متغیر مستقل بیان می‌کنیم.

لم ۲.۲.۳۲. *فرض می‌کنیم $p \geq 1$ عددی دلخواه باشد. سپس هر عدد $r \in \mathbb{N}$ می‌تواند به‌طور منحصربه‌فردی به شکل زیر نوشته شود:*

$$r = \binom{k_1+p-1}{p} + \binom{k_2+p-2}{p-1} + \cdots + \binom{k_s+p-s}{p-s+1},$$

که $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s \geq 1$ تشکیل دنباله‌ای غیرافزایشی از عددهای مثبت با فرض $1 \leq s \leq p$ می‌دهد.

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

برای دنباله‌ی صحیح وابسته به $r \in \mathbb{N}$ می‌نویسیم: $k_p(r) = (k_1, \ldots, k_s)$. تابع $\mu_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را به این صورت که عدد r را، که به‌وسیله‌ی دنباله‌ی $k_p(r) = (k_1, \ldots, k_s)$ نمایش داده می‌شود، به عدد $\mu_p(r)$ ببرد و در رابطه‌ی $k_p(\mu_p(r)) = (k_1+1, k_2+1, \ldots, k_s+1)$ صدق کند، تعریف می‌کنیم.

قضیه ۲.۲.۳۳. *فرض می‌کنیم $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_p]$ ایده آل چندجمله‌ای همگن از p متغیر باشد. فرض می‌کنیم $d_n = \dim\mathcal{I}^{(n)}$ بعد مجموعه‌ی $\mathcal{I}^{(n)} = \{P \in \mathcal{I} | P(\lambda x) = \lambda^n P(x)\}$ از چندجمله‌ایهایی از درجه‌ی n در $\mathcal{I}$ باشد. (توجه کنید که $\mathcal{I} = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{I}^{(n)}$.) سپس $d_{n+1} \geq \mu_p(d_n)$.*

با فرض $q \geq ۱$، تعریف می‌کنیم $\mu^n_{p,q} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ و برای $r \in \mathbb{N}$ می‌نویسیم $r = sp_n + t$، که s خارج قسمت، و t باقیمانده می‌باشد و r بر $p_n = \binom{p+n-۱}{n}$ تقسیم می‌شود. سپس $\mu^n_{p,q}(r) = sp_{n+۱} + \mu_p(t)$. توجه کنید به‌ویژه $\mu^n_{p,q}(q_n) = q_{n+۱}$ می‌باشد.

قضیه ۳۴.۲.۲. *فرض می‌کنیم G گروه تبدیلاتی باشد که روی فضایی با p متغیر مستقل و q متغیر وابسته عمل می‌کند. تصور کنید $\mathcal{D}_۱, \ldots, \mathcal{D}_p$ مجموعه‌ی کاملی از عملگرهای دیفرانسیلی تشکیل می‌دهند که از هم‌کنج‌های دیفرانسیلی ناوردا از مرتبه‌ی n یا کمتر ناشی می‌شوند. تصور کنید که $J_۱, \ldots, J_r$ ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه‌ی n-ام اکیدا مستقل باشند. سپس مجموعه‌ی ناورداهای مشتق گرفته شده‌ی*

$$\mathcal{D}_i J_\nu \ , \ i = ۱, \ldots, p, \ \nu = ۱, \ldots, r,$$

شامل حداقل $\mu^n_{p,q}(r)$ ناوردای دیفرانسیلی مرتبه‌ی $(n+۱)$-ام اکیدا مستقل می‌باشند. به‌ویژه، اگر تعداد ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه‌ی n-ام اکیدا مستقل ماکسیمال باشد، $J_۱, \ldots, J_{q_n}$ ، سپس مجموعه‌ی ناورداهای مشتقی

$$\mathcal{D}_i J_\nu \ , \ i = ۱, \ldots, p, \ \nu = ۱, \cdots, q_n,$$

حاوی مجموعه‌ی کاملی از $q_{n+۱}$ ناوردای دیفرانسیلی مرتبه‌ی $(n+۱)$-ام اکیدا مستقل می‌باشد.

برهان. به [۲۰] رجوع کنید. □

قضیه ۳۵.۲.۲. *اگر G گروه تبدیلات برخوردی یا نقطه‌ای و n مرتبه‌ی پایایی عمل گروه باشد. سپس هم‌کنج ناوردای دیفرانسیلی $\omega^۱, \ldots, \omega^p$ روی $J^{n+۲}$ با عملگرهای دیفرانسیلی ناوردای متناظر $\mathcal{D}_۱, \ldots, \mathcal{D}_p$، و ناورداهای دیفرانسیلی $J_۱, \ldots, J_m$ ، از مرتبه‌ی حداکثر $n+۲$ وجود دارند به‌طوری‌که، موضعا، هر ناوردای دیفرانسیلی می‌تواند به‌عنوان تابعی از این ناورداهای دیفرانسیلی و مشتقات*

$$\mathcal{D}_{j_۱} \cdots \mathcal{D}_{j_\kappa} J_\nu, \kappa \geq ۰, \nu = ۱, \ldots, m,$$

نوشته شود.

فصل ۳

تقارن‌های معادلات دیفرانسیل

در این فصل در مورد اساس و کاربردهای تئوری لی در گروه‌های تقارن معادلات دیفرانسیل بحث می‌کنیم. روش‌های بی‌نهایت کوچک برای محاسبه‌ی گروه تقارن را ارایه و برای مشخص کردن گروه تقارن معادلات دیفرانسیل داده شده استفاده می‌کنیم.

۱.۳ معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۱.۳. یک دستگاه Δ از معادلات دیفرانسیل مرتبه n-ام با p متغیر مستقل و q متغیر وابسته با دستگاه معادلاتی $\Delta_\nu(x,u^{(n)})=0,\ \nu=1,\ldots,\ell$ شامل $x=(x^1,\ldots,x^p)$، $u=(u^1,\ldots,u^q)$ و مشتقات u نسبت به x تا مرتبه n داده می‌شود. توابع $\Delta(x,u^{(n)})=(\Delta_1(x,u^{(n)}),\ldots,\Delta_\ell(x,u^{(n)}))$ هموار فرض می‌شوند به‌طوری‌که Δ می‌تواند به‌عنوان نگاشتی هموار از فضای جت $X\times U^{(n)}$ به فضای اقلیدسی ℓ-بعدی دیده شود، $\Delta:X\times U^{(n)}\to\mathbb{R}^\ell$.

مجموعه جواب دستگاه را با

$$\mathcal{S}_\Delta=\{(x,u^{(n)})\mid\Delta_\nu(x,u^{(n)})=0,\qquad \nu=1,\cdots,m\},\tag{۱.۳}$$

نشان می‌دهیم که زیرمجموعه‌ای از فضای جت مرتبه‌ی n-ام، و شامل تمام نقاط $(x,u^{(n)})\in J^n$ است که در دستگاه صدق می‌کند.

تعریف ۲.۱.۳. فرض می‌کنیم $\Delta_\nu(x,u^{(n)})=0,\ \nu=0,\ldots,\ell$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد. آن‌را دارای **رتبه‌ی ماکسیمال** گوییم اگر ماتریس ژاکوبین $\ell\times(p+qp^{(n)})$

$$\mathbb{J}_\Delta(x,u^{(n)})=\left(\frac{\partial\Delta_\nu}{\partial x^i},\frac{\partial\Delta_\nu}{\partial u^\alpha_J}\right),$$

از Δ نسبت به همه‌ی متغیرهای $(x,u^{(n)})$ از رتبه‌ی ℓ باشد هرگاه داشته باشیم: $\Delta_\nu(x,u^{(n)})=0$.

۲.۳ تقارن‌ها

تعریف ۱.۲.۳. فرض می‌کنیم Δ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد. یک **گروه تقارن** برای Δ یک گروه موضعی از تبدیلات G است که روی زیرمجموعه‌ی باز M از فضای متغیرهای مستقل و وابسته دستگاه عمل می‌کند با این شرایط که هرگاه $u=f(x)$ یک جواب از Δ باشد و برای هر $g\in G$، $g\cdot f$ تعریف شده باشد، آنگاه $u=g\cdot f(x)$ نیز یک جواب از دستگاه باشد.

قضیه ۲.۲.۳. *تصور کنید G گروه لی موضعی همبند از تبدیلات باشد که روی منیفلد m-بعدی M عمل می‌کند. فرض کنید $F:M\to\mathbb{R}^\ell,\ \ell\le m$ یک دستگاه معادلات جبری*

$$F_\nu(x)=0,\qquad \nu=1,\ldots,\ell,$$

با رتبه‌ی ماکسیمال باشد، به این معنی که ماتریس ژاکوبین $(\partial F_\nu/\partial x^k)$ در نقطه‌ی x از جواب دستگاه دارای رتبه‌ی ℓ باشد. سپس G گروه تقارن دستگاه است اگر و تنها اگر برای هر مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}$ از G داشته باشیم:

$$\mathbf{v}[F_\nu(x)] = \circ, \qquad \nu = \text{۱}, \dots, \ell, \tag{۲.۳}$$

هرگاه $F(x) = \circ$.

برهان. به [۱۷] رجوع کنید. □

قضیه ۳.۲.۳. *فرض کنیم M زیرمجموعه‌ی بازی از $X \times U$ و $\Delta(x, u^{(n)}) = \circ$ دستگاه مرتبه‌ی n-ام از معادلات دیفرانسیل باشد که روی M با مجموعه‌ی جواب متناظر $\mathcal{S}_\Delta \subset M^{(n)}$ تعریف شده است. اگر G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کند و امتداد آن $\mathcal{S}_\Delta$ را ناوردا می‌گذارد به این معنی که هرگاه $(x, u^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$ و برای هر $g \in G$ در صورت تعریف $pr^{(n)} g \cdot (x, u^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$ باشد، سپس G یک گروه تقارن از دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشد.*

برهان. به [۱۷] رجوع کنید. □

با ترکیب دو قضیه‌ی (۲.۲.۳) و (۳.۲.۳) بلافاصله شرایط بی‌نهایت کوچک و مهمی را برای گروه G می‌یابیم که به وسیله‌ی آن، G گروه تقارن دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشد.

قضیه ۴.۲.۳. *فرض کنید $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = \circ,\ \nu = \circ, \dots, \ell$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با رتبه‌ی ماکسیمال روی $M \subset X \times U$ باشد. اگر G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کند و برای هر مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}$ از G داشته باشیم:*

$$pr^{(n)} \mathbf{v}[\Delta_\nu(x, u^{(n)})] = \circ,\ \nu = \text{۱}, \dots, \ell,$$

هرگاه $\Delta(x, u^{(n)}) = \circ$. آنگاه G یک گروه تقارن برای این دستگاه می‌باشد.

برهان. با توجه به دو قضیه‌ی (۲.۲.۳) و (۳.۲.۳) اثبات می‌شود. □

قضیه ۵.۲.۳. *فرض می‌کنیم G گروه تبدیلی باشد، و فرض می‌کنیم $I_\text{۱}, \dots, I_\kappa$ با $\kappa = i_n$، مجموعه‌ی کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه‌ی n-ام مستقل تابعی روی زیرمجموعه‌ی باز $V^{(n)} \subset J^{(n)}$ باشند. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، G را به عنوان گروه تقارن می‌پذیرد اگر و تنها اگر، هرگاه به زیرمجموعه‌ی $V^{(n)}$ تحدید شود، بتوان آن‌را برحسب ناورداهای دیفرانسیلی نوشت:*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = F_\nu(I_\text{۱}(x, u^{(n)}), \dots, I_\kappa(x, u^{(n)})) = \circ, \qquad \nu = \text{۱}, \dots, \ell.$$

تنها دستگاه‌های ناوردا از معالات دیفرانسیل از مرتبه‌ی n که به‌وسیله‌ی ناورداهای دیفرانسیلی توصیف نمی‌شوند در زیرنمایش تکین زیر قرار می‌گیرند:

$$S^n = J^n/V^n = \{z \in J^n | \ \dim \mathcal{G}^{(n)}|_z < s_n\},$$

که در آن مدارهای عمل امتداد داده شده ماکسیمال نیستند. به‌ویژه، اگر G به‌طور موضعا موثر عمل کند و n حداقل مرتبه‌ی پایایی G باشد، سپس S^n تنها زیرمجموعه‌ای از J^n می‌باشد که روی آن مولدهای بی‌نهایت کوچک امتداد داده شده‌ی G وابسته‌ی خطی هستند. هر دستگاه G-ناوردا از معادلات دیفرانسیل می‌تواند به اجتماعی از الف) یک مولفه‌ی منظم، که زیرمجموعه‌ای از V^n است و می‌تواند (موضعا) به‌وسیله‌ی صفر قراردادن دستگاه ناورداهای دیفرانسیلی مشخص شود، همانند قضیه‌ی (۵.۲.۳)، و ب) یک مولفه‌ی تکین، که زیرمجموعه‌ای از S^n است و از این‌رو به‌وسیله‌ی وابستگی خطی مولدهای بی‌نهایت کوچک مشخص می‌شود، با شرایط ممکن دیگر تجزیه شود.

در موارد اسکالر، زیرنمایش تکین می‌تواند با استفاده از روش **دترمینان لی** مشخص شود. فرض می‌کنیم

$$\mathbf{v}_\mu^{(r-2)} = \xi_\mu \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{r-2} \varphi_\mu^k \frac{\partial}{\partial u_k}, \qquad \mu = 1, \dots, r,$$

که $u_k = D_x^k u$، مولدهای بی‌نهایت کوچک امتداد داده شده از گروه تبدیلی r-بعدی باشند. مطابق قضیه‌ی (۳۱.۲.۲)، در موارد استاندارد مرتبه‌ی پایایی $r - 2$ می‌باشد، از اینرو زیرنمایش تکین به‌وسیله‌ی صفر قراردادن دترمینان لی داده می‌شود:

$$\det \begin{vmatrix} \xi_1 & \varphi_1 & \varphi_1^1 & \dots & \varphi_1^{r-1} \\ \xi_2 & \varphi_2 & \varphi_2^1 & \dots & \varphi_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_r & \varphi_r & \varphi_r^1 & \dots & \varphi_r^{r-1} \end{vmatrix} = 0, \tag{۳.۳}$$

که معادلات دیفرانسیل معمولی برای u به‌عنوان تابعی از x تعریف می‌کند. معادله‌ی (۳.۳) تنها معادله دیفرانسیل G-ناوردا از مرتبه‌ی حداکثر $r - 2$ می‌باشد. در موارد غیرعادی (غیرمتعدی یا شبه‌پایا)، چون مرتبه‌ی پایایی $r - 1$ است، زیرنمایش تکین به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از J^{r-1} داده می‌شود. اینجا مولدهای بی‌نهایت کوچک امتداد داده شده‌ی $\mathbf{v}_1^{(r-1)}, \dots, \mathbf{v}_r^{(r-1)}$ وابسته‌ی خطی‌اند، که می‌توانند به‌وسیله‌ی تشکیل‌دادن ماتریس $r \times (r+1)$ دارای فرم (۳.۳) بررسی شوند. با اینکه ستون‌ها تا مرتبه‌ی $r - 1$ می‌باشند ما محاسبه‌ی دترمینان ماتریس کوچکتر $r \times r$ را انجام می‌دهیم. ما این ماکسیمال کوچک‌شده را دترمینان لی می‌نامیم.

قضیه ۶.۲.۳. *تصور کنید G گروه تبدیلات r-بعدی باشد که روی $M \subset X \times U \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ عمل می‌کند. سپس هر معادله‌ی دیفرانسیلی ناوردا می‌تواند یا برحسب ناورداهای دیفرانسیلی اساسی یا به‌وسیله‌ی صفر قراردادن دترمینان لی وابسته نوشته شود.*

مثال ۷.۲.۳. گروه چهار پارامتری تولید شده به‌وسیله‌ی $\partial_x, x\partial_x, \partial_u, u\partial_u$ را در نظر می‌گیریم که همان مورد (۲۰۹) برای $k=۱$ در جدول است. امتدادهای دوم این میدان‌های برداری به صورت

$$\partial_x\ ,\ x\partial_x - u_x\partial_{u_x} - ۲u_{xx}\partial_{u_{xx}}\ ,\ \partial_u\ ,\ u\partial_u + u_x\partial_{u_x} + u_{xx}\partial_{u_{xx}},$$

و لذا دترمینان لی آن به صورت مقابل می‌باشد:

$$\det\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ x & ۰ & -u_x & -۲u_{xx} \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & u & u_x & u_{xx} \end{vmatrix} = -u_x u_{xx}. \qquad (۴.۳)$$

بنابراین، معادلات دیفرانسیلی ناوردای تکین، $u_x=۰$ و $u_{xx}=۰$ هستند. هر معادله‌ی دیفرانسیلی ناوردای دیگر می‌تواند برحسب ناوردای دیفرانسیلی اساسی $I=u_xu_{xxx}/u_{xx}^۲$ و مشتقات ناوردای آن $\mathcal{D}^mI$، که $\mathcal{D}=(u_x/u_{xx})D_x$، نوشته شود. برای مثال، معادلات مرتبه‌ی سوم ناوردا همه از فرم $u_xu_{xxx}=cu_{xx}^۲$ هستند.

لیست کاملی از دترمینان‌های لی برای همه‌ی گروه‌های لی از تبدیلات برخوردی و نقطه‌ای در صفحه مختلط را می‌توانید در جدول ۵ بیابید. در این جدول، هر عامل ثابت غیرضروری حذف شده است.

قضیه ۸.۲.۳. *گروه تقارن تبدیل نقطه‌ای یک دستگاه نرمال از معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه‌ی $n\geq ۲$ متناهی بعد است. گروه تقارن تبدیل برخوردی از معادلات دیفرانسیلی معمولی نرمال از مرتبه‌ی $n\geq ۳$ متناهی بعد است.*

برهان. به [۱۲]، [۷] و [۶] رجوع کنید. □

قضیه ۹.۲.۳. *فرض کنیم $\Delta(x,u^{(n)})=۰$ معادله‌ی دیفرانسیل معمولی اسکالر مرتبه‌ی n-ام باشد.*

- *اگر $n=۲$، سپس $\Delta=۰$ یک گروه تقارن حداکثر هشت-پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای می‌پذیرد. به‌علاوه، گروه تقارن هشت-بعدی است اگر و تنها اگر $\Delta=۰$ هم‌ارز معادله‌ی خطی $u_{xx}=۰$ با گروه تقارن از نوع (۱۰۳) باشد.*

- *اگر $n\geq ۳$، سپس $\Delta=۰$ یک گروه تقارن حداکثر $(n+۴)$-پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای می‌پذیرد. به‌علاوه، گروه تقارن $(n+۴)$-بعدی است اگر و تنها اگر $\Delta=۰$ هم‌ارز معادله‌ی خطی $u_n=۰$ با گروه تقارن از نوع (۲۰۱۱) برای $k=n$ باشد.*

- *اگر $n=۳$، سپس $\Delta=۰$ یک گروه تقارن حداکثر ده-پارامتری از تبدیلات برخوردی می‌پذیرد. به‌علاوه، گروه تقارن ده-بعدی است اگر و تنها اگر $\Delta=۰$ هم‌ارز معادله‌ی خطی $u_{xxx}=۰$ با گروه تقارن از نوع (۴۰۳) باشد.*

- *اگر $n \geq ۴$، سپس $\Delta = ۰$ گروه تقارن حداکثر $(n+۴)$-پارامتری از تبدیلات برخوردی می‌پذیرد. به‌علاوه گروه تقارن $(n+۴)$-بعدی است اگر و تنها اگر $\Delta = ۰$ هم‌ارز معادله‌ی خطی $u_n = ۰$ باشد.*

برهان. به [۱۲] و [۷] رجوع کنید. □

گزاره ۱۰.۲.۳. *فرض کنیم G گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی $M \subset X \times U$ عمل می‌کند و $\eta^۱(x, u^{(n)}), \ldots, \eta^k(x, u^{(n)})$ مجموعه‌ی کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه‌ی n-ام مستقل تابعی از $pr^{(n)}G$ باشند. معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی n-ام $\Delta(x, u^{(n)}) = ۰$، G را به عنوان گروه تقارن می‌پذیرد اگر و تنها اگر معادله‌ی هم‌ارز*

$$\tilde{\Delta}(\eta^۱(x, u^{(n)}), \ldots, \eta^k(x, u^{(n)})) = ۰,$$

شامل تنها ناورداهای دیفرانسیلی G وجود داشته باشد. به‌ویژه اگر G گروه یک-پارامتری از تبدیلات باشد، هر معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی n-ام که G را به‌عنوان گروه تقارن بپذیرد هم‌ارز معادله‌ی مرتبه‌ی $(n-۱)$-ام زیر که شامل ناورداهای $y = \eta(x, u),\ w = \zeta(x, u, u_x)$ از $pr^{(۱)}G$ و مشتقات آن‌هاست می‌باشد:

$$\tilde{\Delta}(y, w, dw/dy, \ldots, d^{n-۱}w/dy^{n-۱}) = ۰. \tag{۵.۳}$$

برهان. به [۱۷] رجوع کنید. □

این گزاره همچنین روش دیگری را برای کاهش دادن مرتبه‌ی معادله دیفرانسیل که تحت یک گروه یک-پارامتری از تبدیلات ناورداینـد را با استفاده از ناورداهای دیفرانسیلی گروه نشان می‌دهد که در فصل بعد شرح داده می‌شود. یعنی معادله‌ی دیفرانسیل $\Delta(x, u^{(n)}) = ۰$ بایستی با معادله‌ی (۵.۳) شامل تنها ناورداهای $y, w, dw/dy, \ldots, d^{n-۱}w/dy^{n-۱}$ از امتداد n-ام G هم‌ارز باشد. اما (۵.۳) بطور خودبه‌خود یک معادله مرتبه‌ی $(n-۱)$-ام برای w به عنوان تابعی از y است. به‌طوری‌که تنها به‌وسیله‌ی بیان دوباره‌ی معادله‌ی اصلی برحسب لیست ناورداهای دیفرانسیلی داده شده ، ما به‌طور خودکار مرتبه‌ی آن را تا یکی کاهش می‌دهیم. بعلاوه وقتی جواب $w = h(y)$ از معادله‌ی کاهش یافته (۵.۳) را می‌دانیم، جواب معادله‌ی اصلی به‌وسیله‌ی انتگرال گرفتن از معادله‌ی مرتبه‌ی اول کمکی

$$\zeta(x, u, u_x) = h[\eta(x, u)], \tag{۶.۳}$$

و به‌وسیله‌ی جایگذاری بیان y و w برحسب متغیرهای اصلی x و u پیدا می‌شود. چون (۶.۳) تنها به ناورداهای y و w از $pr^{(۱)}G$ وابسته است، بوضوح G را به عنوان گروه تقارن یک-پارامتری دارد و از اینرو می‌تواند به‌وسیله‌ی روش معادلات مرتبه‌ی اول که بعدا بحث خواهد شد انتگرال گرفته شود.

مثال ۱۱.۲.۳. معادله‌ی مرتبه‌ی دوم

$$x^۲ u_{xx} + x u_x^۲ = u u_x. \tag{۷.۳}$$

را در نظر می‌گیریم، که تحت گروه مقیاسی $(x, u) \mapsto (\lambda x, \lambda u)$ ناورداست. برای انتگرال گرفتن از (۷.۳) از روش ناورداهای دیفرانسیلی استفاده می‌کنیم. ناورداهای امتداد دوم عمل گروه را می‌یابیم، داریم:

$$y = \frac{u}{x}, \qquad w = u_x, \qquad \frac{dw}{dy} = \frac{x^2 u_{xx}}{x u_x - u}.$$

با جایگذاری آن‌ها در (۷.۳)، معادله‌ی جدید شامل y و w می‌باشد:

$$(w - y)\frac{dw}{dy} + w^2 = yw.$$

دو خانواده از جواب‌ها را برای این معادله داریم؛ یا $w = y$ یا $\frac{dw}{dy} = -w$، انتگرال دومی برای ثابت c، $w = ce^{-y}$ می‌باشد. با برگشتن به متغیرهای اصلی، ما دو معادله‌ی مرتبه اول همگن می‌یابیم، همان طور که به وسیله‌ی فرم (۶.۳) ضمانت شد.

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}, \quad \text{یا} \quad \frac{du}{dx} = ce^{-u/x}.$$

جواب اولی $u = kx$؛ و معادله‌ی دوم جواب‌های ضمنی

$$\int \frac{dy}{ce^{-y} - y} = \log x + k, \tag{۸.۳}$$

که $y = u/x$ است را دارد. (۸.۳) جواب عمومی (۷.۳) می‌باشد.

در زیر، فرآیند محاسبه‌ی گروه تقارن معادلات دیفرانسیل را با مثال‌هایی واضح‌تر بیان می‌کنیم.

در مثال زیر، گروه تقارن متریک شوارتز چیلد که گروه تقارنی ۶-بعدی است را با توجه به مطالب گفته شده می‌یابیم، با استفاده از مولدهای گروه تقارن بدست آمده می‌توانیم ژئودزیکهای متریک شوارتزچیلد را با محاسبه‌ی عمل گروه‌های وابسته طبقه‌بندی کنیم. برای مطالعه‌ی روش محاسبه‌ی معادلات ژئودزیک [۱۱] را ببینید.

مثال ۱۲.۲.۳. در مختصات فضا-زمان، متریک شوارتز چیلد فرم زیر را دارد:

$$ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2.$$

که در آن r، θ و ϕ مربوط به مختصات قطبی، M جرم سیاهچاله، G ثابت گرانش جهانی و c سرعت نور می‌باشند. برای ساده‌تر شدن محاسبات در متریک شوارتزچیلد قرار می‌دهیم $c = G = M = 1$، داریم :

$$ds^2 = \left(\frac{2 - r}{r}\right)dt^2 + \left(\frac{r}{r - 2}\right)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

معادلات ژئودزیک متریک شوارتز چیلد عبارتند از:

$$\begin{cases}\ddot{t}+\dfrac{2}{r^2-2r}\dot{t}\dot{r}=0,\\ \ddot{r}+\dfrac{r-2}{r^3}\dot{t}^2-\dfrac{1}{r^2-2r}\dot{r}^2+(2-r)\dot{\theta}^2-(r-2)\sin^2\theta(\dot{\phi}^2)=0,\\ \ddot{\theta}+\dfrac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}-\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2=0,\\ \ddot{\phi}+\dfrac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi}+2\cot(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi}=0.\end{cases}$$

میدان برداری $\mathbf{v}$ روی این فضا را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{v}=\xi\partial_s+\eta_1\partial_t+\eta_2\partial_r+\eta_3\partial_\theta+\eta_4\partial_\phi,$$

که $\xi,\eta_i; i=1,2,3,4$ توابعی از (s,t,r,θ,ϕ) می‌باشند، با توجه به (۵.۱.۲) داریم:

$$\begin{aligned} pr^{(2)}\mathbf{v} &= \xi\partial_s+\eta_1\partial_t+\eta_2\partial_r+\eta_3\partial_\theta+\eta_4\partial_\phi+\eta_1^s\partial_{t_s}+\eta_2^s\partial_{r_s}\\ &\quad+\eta_3^s\partial_{\theta_s}+\eta_4^s\partial_{\phi_s}+\eta_1^{ss}\partial_{t_{ss}}+\eta_2^{ss}\partial_{r_{ss}}+\eta_3^{ss}\partial_{\theta_{ss}}+\eta_4^{ss}\partial_{\phi_{ss}}.\end{aligned}$$

$pr^{(2)}\mathbf{v}$ را روی دستگاه معادلات ژئودزیک اثر می‌دهیم، به طور نمونه برای معادله‌ی اول این دستگاه داریم :

$$\eta_1^{ss}+\frac{4-4r}{(r^2-2r)^2}t_sr_s\eta_2+\frac{2}{r(r-2)}r_s\eta_1^s+\frac{2}{r(r-2)}t_s\eta_2^s=0,$$

که در آن توابع η_1^s و η_1^{ss} با توجه به (۵.۱.۲) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\eta_1^s &= D_s(\eta_1-\xi t_s)+\xi t_{ss}\\ &= \eta_{1_s}+\eta_{1_t}t_s-\xi_{1_s}t_s-\xi_{1_t}t_s^2-\xi_1t_{ss}+\xi t_{ss}\\ &= \eta_{1_s}+(\eta_{1_t}-\xi_{1_s})t_s-\xi_{1_t}t_s^2,\\ \eta_1^{ss} &= D_s^2(\eta_1-\xi t_s)+\xi t_{sss}\\ &= \eta_{1_{ss}}+\eta_{1_{st}}t_s+\eta_{1_{ts}}t_s+\eta_{1_{tt}}t_s^2+\eta_{1_t}t_{ss}-\xi_{1_{ss}}t_s-\xi_{1_{st}}t_s^2-\xi_{1_s}t_{ss}\\ &\quad-\xi_{1_{ts}}t_s^2-\xi_{1_{tt}}t_s^3-2\xi_tt_st_{ss}-\xi_stss-\xi_tt_st_{ss}-\xi t_{sss}+\xi t_{sss}\\ &= \eta_{1_{ss}}+(2\eta_{1_{st}}-\xi_{1_{ss}})t_s+(\eta_{1_t}-2\xi_{1_s})t_{ss}+(\eta_{1_{tt}}-2\xi_{1_{ts}})t_s^2-\xi_{1_{tt}}t_s^3\\ &\quad-3\xi_tt_st_{ss}.\end{aligned}$$

برای بقیه معادلات و مشتقات تا مرتبه دوم توابع $\xi,\eta_i\ ;\ i=2,3,4$، به همین طریق عمل می‌کنیم. مشتقات توابع به دست آمده را در معادله‌ها جایگذاری می‌کنیم، به یک دستگاه جدید می‌رسیم که با حل آن توابع $\xi,\eta_i\ ;\ i=1,2,3,4$ و با جایگذاری آن‌ها در میدان برداری $\mathbf{v}$ مولدهای بی‌نهایت کوچک گروه تقارن

(ضرایب c_i ها که ثابت‌های حاصل از انتگرال‌گیری‌اند را مولدهای بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}_i$ در نظر می‌گیریم) بدست می‌آیند، که یک گروه تقارن ۶ بعدی است:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{v}_1 = s\partial_s, & \mathbf{v}_2 = \partial_s, & \mathbf{v}_3 = \partial_t, \\ \mathbf{v}_4 = \partial_\phi, & \mathbf{v}_5 = \sin\phi\partial_\theta + \cos\phi\cot\theta\partial_\phi, & \mathbf{v}_6 = -\cos\phi\partial_\theta + \sin\phi\cot\theta\partial_\phi. \end{array}$$

این میدان‌های برداری تشکیل یک جبر لی می‌دهند و $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ دوباره عضوی از گروه می‌باشد. عمل گروه ۱-پارامتری متناظر با $\mathbf{v}_i$ ها را G_i می‌نامیم و به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{array}{ll} G_1: & (e^\varepsilon s, t, r, \theta, \phi), \\ G_2: & (s+\varepsilon, t, r, \theta, \phi), \\ G_3: & (s, t+\varepsilon, r, \theta, \phi), \\ G_4: & (s, t, r, \theta, \phi+\varepsilon), \\ G_5: & (s, t, r, \sin(\phi)\varepsilon+\theta, \phi+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon(\cos(-\theta+\phi)+\cos(\theta+\phi))}{\sin\theta}), \\ G_6: & (s, t, r, -\cos(\phi)\varepsilon+\theta, \phi+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon(\sin(-\theta+\phi)+\sin(\theta+\phi))}{\sin\theta}). \end{array}$$

چون هر گروه G_i یک تقارن است و می‌دانیم گروه تقارن در واقع جواب‌های یک معادله یا دستگاه را به جواب‌های دیگر آن می‌برد بنابراین اگر $\alpha(s) = (t(s), r(s), \theta(s), \phi(s))$ یک جواب از دستگاه (۱۲.۲.۳) یا به عبارتی یک ژئودزیک برای متریک شوارتزچیلد باشد آنگاه فرم کلی ژئودزیک‌های متریک شوارتزچیلد با توجه به (۱۴.۳) بدست می‌آیند.

بطور مثال، تحت گروه یک-پارامتری G_1 جواب $\alpha(s) = (t(e^{-\varepsilon}s), r(e^{-\varepsilon}s), \theta(e^{-\varepsilon}s), \phi(e^{-\varepsilon}s))$ و همچنین تحت گروه یک-پارامتری G_3 جواب $\alpha(s) = (t(s)-\varepsilon, r(s), \theta(s), \phi(s))$ ژئودزیک‌های دیگری برای متریک شوارتزچیلد می‌باشند.

در واقع با یافتن مولدهای بی‌نهایت کوچک گروه تقارن دستگاه معادلات ژئودزیک می‌توانیم ژئودزیک‌های متریک شوارتزچیلد را طبقه‌بندی کنیم.

مثال ۱۳.۲.۳. معادله‌ی گرمای

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\partial_x + \tau(x,t,u)\partial_t + \phi(x,t,u)\partial_u,$$

مولد بی‌نهایت کوچک آن باشد. امتداد دوم آن بصورت

$$pr^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x\partial_{u_x} + \phi^t\partial_{u_t} + \phi^{xx}\partial_{u_{xx}} + \phi^{xt}\partial_{u_{xt}} + \phi^{tt}\partial_{u_{tt}},$$

می‌باشد. طبق ضابطه‌ی بی‌نهایت کوچک ناوردایی بایستی

$$\circ = pr^{(۲)}\mathbf{v}(u_t - u_{xx})|_{u_t - u_{xx}=\circ} = (\phi^t - \phi^{xx})|_{u_t - u_{xx}=\circ}, \quad (۹.۳)$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} \phi^t &= D_t\phi - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau \\ &= \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^۲, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^x &= D_x\phi - u_x D_x\xi - u_t D_x\tau \\ &= \phi_x + (\phi_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^۲ - \tau_u u_x u_t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^{xx} &= D_x\phi^x - u_{xx}D_x\xi - u_{xt}D_x\tau \\ &= \phi_{xx} + (۲\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - ۲\xi_{xu})u_x^۲ - ۲\tau_{xu}u_x u_t \\ &\quad -\xi_{uu}u_x^۳ - \tau_{uu}u_x^۲ u_t + (\phi_u - ۲\xi_x)u_{xx} - ۲\tau_x u_{xt} - ۳\xi_u u_x u_{xx} \\ &\quad -\tau_u u_t u_{xx} - ۲\tau_u u_x u_{xt}. \end{aligned}$$

طبق (۹.۳)، و رابطه‌ی محاسبه شده برای ϕ^t و ϕ^{xx} بایستی

$$\begin{aligned} \circ = \quad & \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^۲ - \phi_{xx} - (۲\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x \\ & +\tau_{xx}u_t - (\phi_{uu} + ۲\xi_{xu})u_x^۲ + ۲\tau_{xu}u_x u_t + \xi_{uu}u_x^۳ + \tau_{uu}u_x^۲ u_t \\ & -(\phi_u - ۲\xi_x)u_{xx} + ۲\tau_x u_{xt} + ۳\xi_u u_x u_{xx} + \tau_u u_t u_{xx} + ۲\tau_u u_x u_{xt}. \end{aligned}$$

که در آن با جایگزین کردن u_t با u_{xx} (چون $u_t = u_{xx}$) داریم:

$$\begin{aligned} \circ = \quad & \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_{xx} - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^۲ - \phi_{xx} - (۲\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x \\ & +\tau_{xx}u_{xx} - (\phi_{uu} + ۲\xi_{xu})u_x^۲ + ۲\tau_{xu}u_x u_{xx} + \xi_{uu}u_x^۳ + \tau_{uu}u_x^۲ u_{xx} \\ & -(\phi_u - ۲\xi_x)u_{xx} + ۲\tau_x u_{xt} + ۳\xi_u u_x u_{xx} + \tau_u u_{xx}^۲ + ۲\tau_u u_x u_{xt}. \end{aligned}$$

در آن ضرایب یک‌جمله‌ایهای متشابه را با هم برابر قرار می‌دهیم،

$$
\begin{array}{rl}
u_x u_{xt} & \circ = ۲\tau_u \\
u_{xt} & \circ = ۲\tau_x \\
u_{xx}^{۲} & \circ = \tau - \tau \\
u_x^{۲} u_{xx} & \circ = \tau_{uu} \\
u_x u_{xx} & \circ = -\xi_u + ۲\tau_{xu} + ۳\xi_u \\
u_{xx} & \circ = -\tau_t + \tau_{xx} + ۲\xi_x \\
u_x^{۳} & \circ = \xi_{uu} \\
u_x^{۲} & \circ = ۲\xi_{xu} - \phi_{uu} \\
u_x & \circ = \xi_{xx} - \xi_t - ۲\phi_{xu} \\
۱ & \circ = \phi_t - \phi_{xx}
\end{array}
$$

با حل دستگاه خطی معادلات دیفرانسیل جزئی قبلی داریم:

$$
\begin{aligned}
&\xi = c_۱ + c_۴ x + ۲c_۵ t + ۴c_۶ xt, \\
&\tau = c_۲ + ۲c_۴ t + ۴c_۶ t^{۲}, \\
&\phi = (c_۳ - c_۵ x - ۲c_۶ t - c_۶ x^{۲})u + \alpha(x,t),
\end{aligned}
$$

که $\alpha_t = \alpha_{xx}$. جبر لی تقارن‌های بی‌نهایت کوچک به‌وسیله‌ی میدان‌های برداری زیر تولید می‌شود:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{v}_۱ & = & \partial_x, \\
\mathbf{v}_۲ & = & \partial_t, \\
\mathbf{v}_۳ & = & u\partial_u, \\
\mathbf{v}_۴ & = & x\partial_x + ۲t\partial_t, \\
\mathbf{v}_۵ & = & ۲t\partial_x - xu\partial_u, \\
\mathbf{v}_۶ & = & ۴tx\partial_x + ۴t^{۲}\partial_t - (x^{۲} + ۲t)\partial_u, \\
\mathbf{v}_\alpha & = & \alpha(x,u)\partial_u.
\end{array}
$$

هر مولد بی‌نهایت کوچک گروه یک-پارامتری از تبدیلات تولید می‌کند،

$$\begin{aligned}
G_۱ &: (x+\varepsilon, t, u),\\
G_۲ &: (x, t+\varepsilon, u),\\
G_۳ &: (x, t, e^{\varepsilon}, u),\\
G_۴ &: (e^{\varepsilon}x, e^{۲\varepsilon}t, u),\\
G_۵ &: (x+۲\varepsilon t, t, u\cdot\exp(-\varepsilon x-\varepsilon^۲ t)),\\
G_۶ &: (\frac{x}{۱-۴\varepsilon t}, \frac{t}{۱-۴\varepsilon t}, u\sqrt{۱-۴\varepsilon t}\exp\left[\frac{-\varepsilon x^۲}{۱-۴\varepsilon t}\right]),\\
G_\alpha &: (x, t, u+\varepsilon\alpha(x,t)).
\end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم $u(x,t)$ جوابی از معادله‌ی گرما باشد، سپس $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})$ جواب جدیدی از آن می‌باشد. گروه یک-پارامتری

$$G_۶ : (\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u}) = (\frac{x}{۱-۴\varepsilon t}, \frac{t}{۱-۴\varepsilon t}, u\sqrt{۱-۴\varepsilon t}\exp\left[\frac{-\varepsilon x^۲}{۱-۴\varepsilon t}\right]),$$

را در نظر می‌گیریم. سپس

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t}) &= u(x,t)\sqrt{۱-۴\varepsilon t}\exp\left[\frac{-\varepsilon x^۲}{۱-۴\varepsilon t}\right]\\
&= u\left(\frac{\tilde{x}}{۱+۴\varepsilon\tilde{t}}, \frac{\tilde{t}}{۱+۴\varepsilon\tilde{t}}\right)\frac{\exp\left[\frac{-\varepsilon\tilde{x}^۲}{۱+۴\varepsilon\tilde{t}}\right]}{\sqrt{۱+۴\varepsilon\tilde{t}}},
\end{aligned}$$

نیز جوابی از معادله‌ی گرما می‌باشد. قرار می‌دهیم $u=\sqrt{\varepsilon/\pi}$، داریم:

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t}) = \frac{\sqrt{\varepsilon}\exp\left[\frac{-\varepsilon\tilde{x}^۲}{۱+۴\varepsilon\tilde{t}}\right]}{\sqrt{\pi}\sqrt{۱+۴\varepsilon\tilde{t}}}.$$

$\tilde{t}$ را با $-۱/۴\varepsilon$ (با استفاده از $G_۲$) جایگزین می‌کنیم، بنابراین

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t}) = \frac{۱}{\sqrt{۴\pi\tilde{t}}}\exp\left[\frac{-\tilde{x}^۲}{۴\tilde{t}}\right], \qquad t\geq ۰,$$

که جواب اساسی معادله‌ی گرما می‌باشد.

مثال ۱۴.۲.۳. معادله‌ی کورتج-دوریس را به عنوان معادله‌ی مرتبه‌ی بالاتر در نظر می‌گیریم،

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = ۰. \tag{۱۰.۳}$$

میدان برداری $\mathbf{v} = \xi\partial_x + \tau\partial_t + \phi\partial_u$ گروه تقارن یک-پارامتری تولید می‌کند اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned} & pr^{(۳)}\mathbf{v}(u_t + u_{xxx} + uu_x) = ۰ \\ \Rightarrow \quad & \phi^t + \phi^{xxx} + u\phi^x + u_x\phi = ۰, \end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

باشد که u در (۱۰.۳) صدق می‌کند. اینجا ϕ^t و ϕ^x، ضرایب امتداد اول $\mathbf{v}$ می‌باشند که به‌وسیله‌ی فرمول امتداد عمومی (۹.۲) مشخص می‌شوند؛ همچنین ضریب $\partial/\partial u_{xxx}$ در $pr^{(۳)}\mathbf{v}$ بصورت

$$\phi^{xxx} = D_x^۳\phi - u_x D_x^۳\xi - u_t D_t^۳\tau - ۳u_{xx}D_x^۲\xi - ۳u_{xt}D_x^۲\tau - ۳u_{xxx}D_x\xi - ۳u_{xxt}D_x\tau.$$

است که با جایگزین آن در (۱۱.۳) و قرار دادن u_t به جای $-u_{xxx} - uu_x$ معادله‌ی مشخصه‌ی گروه تقارن را بدست می‌آوریم. به منظور تحلیل این معادله و محاسبه‌ی گروه تقارن، روی مرتبه‌ی مشتقاتی که ظاهر می‌شوند کار می‌کنیم. ضریب u_{xxt}، $D_x\tau = ۰$ می‌باشد از اینرو τ تنها به t وابسته است. ضریب $u_{xx}^۲$ نشان می‌دهد که $\xi_u = ۰$. از ضریب u_{xxx} به $\tau_t = ۳\xi_x$ می‌رسیم، از این‌رو $\xi = \frac{۱}{۳}\tau_t x + \sigma(t)$. حال ضریب u_{xx} مشخص می‌کند که $\phi_{xu} = ۰ = \phi_{uu}$، بنابراین ϕ نسبت به u خطی است و ضریب u تنها تابعی از t است. عبارت مانده در (۱۱.۳) شامل u_x می‌باشد و

$$-\xi_t - u(\phi_u - \tau_t) + u(\phi_u - \xi_x) + \phi = ۰,$$

را نتیجه می‌دهد و با توجه به آن‌هایی که مشتقات u در آن‌ها ظاهر نمی‌شوند، داریم:

$$\phi_t + \phi_{xxx} + u\phi_x = ۰,$$

در نهایت به جواب‌های عمومی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \xi &= c_۱ + c_۳ t + c_۴ x, \\ \tau &= c_۲ + ۳c_۴ t, \\ \phi &= c_۳ - ۲c_۴ u, \end{aligned}$$

که $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$ و $c_۴$ ثابت‌های دلخواه حاصل از انتگرال‌گیری‌اند. بنابراین جبر تقارن معادله به‌وسیله‌ی چهار میدان برداری

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_۱ &= \partial_x, && \text{انتقال فضا}, \\ \mathbf{v}_۲ &= \partial_t, && \text{انتقال زمان}, \\ \mathbf{v}_۳ &= t\partial_x + \partial_u, && \text{جلوبرنده‌ی گالیله‌ای}, \\ \mathbf{v}_۴ &= x\partial_x + ۳t\partial_t - ۲u\partial_u, && \text{تجانس}, \end{aligned}$$

تولید می‌شود.

گروه یک-پارامتری تولید شده به‌وسیله‌ی $\mathbf{v}$ را G_i می‌نامیم، داریم:

$$\begin{aligned} G_1 &: (x+\varepsilon, t, u), \\ G_2 &: (x, t+\varepsilon, u), \\ G_3 &: (x+\varepsilon t, t, u+\varepsilon), \\ G_4 &: (e^{\varepsilon}x, e^{3\varepsilon}t, e^{-2\varepsilon}u). \end{aligned}$$

چون هر G_i گروه تقارن است بنابراین اگر $u=f(x,t)$ جوابی از معادله‌ی (۱۰.۳) باشد سپس جواب‌های دیگر آن به صورت زیر است که در آن‌ها $\varepsilon \in \mathbb{R}$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= f(x-\varepsilon, t), \\ u^{(2)} &= f(x, t-\varepsilon), \\ u^{(3)} &= f(x-\varepsilon t, t)+\varepsilon, \\ u^{(4)} &= e^{-2\varepsilon} f(e^{-\varepsilon}x, e^{(-3\varepsilon}t). \end{aligned}$$

معادلات دیفرانسیل معمولی با گروه تقارن‌های زیرماکسیمال، یعنی بعد آن‌ها بدون اینکه ماکسیمال باشد تا حد امکان بزرگ است، هم قابل توجه‌اند. در موارد مرتبه‌ی دوم، بعد گروه تقارن نقطه‌ای زیرماکسیمال حداکثر ۳ می‌باشد؛ معادلات دیفرانسیلی معمولی ناوردا در این‌حالت به صورت زیرند:

$$\begin{aligned} &u_{xx} = \frac{3u_x^2}{2u} + cu^3, && u_{xx} = 6uu_x - 4u^3 + c(u_x - u^2)^{3/2}, \\ &u_{xx} = cu_x^{(\alpha-2)/(\alpha-2)}, && u_{xx} = ce^{-u_x}, \end{aligned}$$

که c ثابت است؛ گروه‌های تقارن مربوطه به ترتیب از نوع (۲۰۱)، (۲۰۲)، (۲۰۷) با $k=1$، $\alpha \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ و (۲۰۸) با $k=1$ از [۹] می‌باشند. برای $n=3$ گروه تقارن نقطه‌ای زیرماکسیمال بعد ۶ دارد؛ معادلات دیفرانسیلی ناوردا عبارتند از :

$$2u_x u_{xxx} - 3u_{xx}^2 = 0, \tag{۱۲.۳}$$

که گروه تقارن آنها $\mathrm{SL}(2)\times\mathrm{SL}(2)$ از نوع (۲۰۴) می‌باشد. برای $n=5$ گروه تقارن برخوردی یا نقطه‌ای دارای بعد ۶ می‌باشد؛ معادلات دیفرانسیلی ناوردا عبارتند از:

$$9u_{xx}^2 u_{xxxxx} - 45u_{xx}u_{xxx}u_{xxxx} + 40u_{xxx}^3 = 0, \tag{۱۳.۳}$$

که گروه تقارن آنها $\mathrm{SL}(۳)$ از نوع (۳ ۰ ۱) است. جواب‌های $u = f(x)$ از (۱۳.۳)، گرافهای برشهای مخروطی‌اند. برای $n = ۷$ گروه تقارن برخوردی زیرماکسیمال دارای بعد ۱۰ می‌باشد؛ معادلات

$$۱۰u_۴^۳u_۷ - ۷۰u_۴^۲u_۴u_۶ - ۴۹u_۴^۲u_۵^۲ + ۲۸۰u_۳u_۴^۲u_۵ - ۱۷۵u_۴^۴ = ۰, \tag{۱۴.۳}$$

معادلات دیفرانسیلی ناوردایند که گروه $\mathrm{SO}(۵)$ از نوع (۳ ۰ ۴) را به عنوان گروه تقارن برخوردی می‌پذیرند. در تمام موارد دیگر، گروه تقارن زیرماکسیمال دارای بعد $n + ۲$ می‌باشد. معادلات یا با معادله‌ی خطی (که هم‌ارز با $u_n = ۰$ نیستند)، یا با

$$۳u_{xx}u_{xxxxx} - ۵u_{xxx}^۲ = ۰, \qquad \text{یا} \qquad (n-۱)u_{n-۲}u_n - nu_{n-۱}^۲,$$

که به‌ترتیب گروه تقارن از نوع (۲۰۶)، (۲۰۱) یا (۲۰۱۱) برای $k = n - ۲$ می‌پذیرند، هم‌ارزند.

تعریف ۱۵.۲.۳. فضای اقلیدسی $X = \mathbb{R}^p$ را با مختصات $x = (x^۱, \ldots, x^p)$ به‌عنوان متغیرهای مستقل و $U = \mathbb{R}^q$ با مختصات $u = (u^۱, \ldots, u^q)$ به‌عنوان متغیرهای وابسته در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $\Omega \subset X$ زیرمجموعه‌ای همبند و باز با مرز هموار $\partial\Omega$ باشد. یک **مسئله‌ی تغییراتی** شامل پیدا کردن مینیمم یا ماکزیمم تابعک

$$\phi[u] = \int_\Omega L(x, u^{(n)})dx, \tag{۱۵.۳}$$

در مورد تابع $u = f(x)$ تعریف شده روی Ω می‌باشد. تابع زیر انتگرال $L(x, u^{(n)})$ **لاگرانژی** مسئله‌ی تغییراتی ϕ نامیده می‌شود که تابعی هموار از x، u و مشتقات u می‌باشد.

تعریف ۱۶.۲.۳. فرض می‌کنیم $\phi[u]$ مسئله‌ای تغییراتی باشد. **مشتق تغییراتی** ϕ، q-تایی منحصربه‌فرد

$$\delta\phi[u] = (\delta_۱\phi[u], \ldots, \delta_q\phi[u]),$$

با خاصیت

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=۰} \phi[f + \varepsilon\eta] = \int_\Omega \delta\phi[f(x)] \cdot \eta(x)\, dx,$$

می‌باشد که $u = f(x)$ تابعی هموار روی Ω و $\eta(x) = (\eta^۱(x), \ldots, \eta^q(x))$ تابعی هموار با پایه‌ی فشرده در Ω است. مولفه‌های $\delta_\alpha\phi = \delta\phi/\delta u^\alpha$ مشتق تغییراتی ϕ نسبت به u^α هستند.

تعریف ۱۷.۲.۳. برای $۱ \leq \alpha \leq q$، **عملگر اویلری** α-ام به‌وسیله‌ی

$$E_\alpha = \sum_J (-D)_J \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha},$$

داده می‌شود که $J = (j_۱, \ldots, j_k)$ با $۱ \leq j_k \leq p$ و $k \geq ۰$ می‌باشد. توجه کنید که E_α برای هر تابع داده شده $L(x, u^{(n)})$ از u و مشتقات آن به‌کار می‌رود.

بنابراین مشتق تغییراتی

$$\phi[u] = \int_\Omega L(x, u^{(n)}) dx,$$

با به‌کار بردن عملگر اویلری برای لاگرانژی $\delta\phi[u] = E(L)$ بدست می‌آید که $E(L) = (E_1(L), \ldots, E_q(L))$ می‌باشد.

قضیه ۱۸.۲.۳. *اگر $u = f(x)$ تابعی هموار از مسئله‌ی تغییراتی $\phi[u] = \int_\Omega L(x, u^{(n)}) dx$ باشد سپس بایستی جوابی از معادلات اویلر-لاگرانژی آن باشد،*

$$E_\nu(L) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, q.$$

تعریف ۱۹.۲.۳. گروه موضعی G از تبدیلات که روی $M \subset \Omega \times U$ عمل می‌کند را **گروه تقارن تغییراتی** از تابعک (۱۵.۳) می‌نامیم، اگر هرگاه Ω_0 زیرحوزه‌ای با $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ باشد و $u = f(x)$ تابعی هموار روی Ω_0 بوده که گراف آن در M قرار می‌گیرد، و $g \in G$ به‌طوری‌که $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = g \cdot f(\tilde{x})$ تابعی روی $\bar{\Omega}_0$ باشد، سپس داشته باشیم:

$$\int_{\bar{\Omega}_0} L(\tilde{x}, pr^{(n)} \tilde{f}(\tilde{x}))\, d\tilde{x} = \int_{\Omega_0} L(x, pr^{(n)} f(x))\, dx.$$

ناورداهای دیفرانسیلی هم‌چنین برای مشخص کردن تمام مسائل تغییراتی ناوردای وابسته به گروه تبدیلی داده شده نیز به‌کار می‌روند. اینجا به‌وسیله‌ی تقارن مسئله‌ی تغییراتی، تقارن تغییراتی استاندارد را بیان می‌کنیم. نتیجه‌ی زیر از [۱۳] عنوان شده است.

قضیه ۲۰.۲.۳. *گروه تبدیلات G را در نظر بگیرید و هم‌چنین تصور کنید که p-فرم افقی ناوردای برخوردی $\Omega_0 = L_0(x, u^{(n)})$ روی J^n وجود داشته باشد. هر مسئله‌ی تغییراتی، G را به عنوان گروه تقارن تغییراتی می‌پذیرد اگر و تنها اگر دارای فرم $\int I\Omega_0 = \int IL_0 dx$ باشد که I ناوردای دیفرانسیلی دلخواهی از G می‌باشد.*

هر هم‌کنج ناوردای برخوردی $w^1, \ldots, w^p$ یک p-فرم ناوردای برخوردی $\Omega = w^1 \wedge \cdots \wedge w^p$ را تولید می‌کند. بنابراین هر مسئله‌ی تغییراتی G-ناوردا دارای فرم

$$\mathcal{L}[u] = \int L(x, u^{(n)}) dx = \int F(I_1(x, u^{(n)}), \ldots, I_k(x, u^{(n)})) w^1 \wedge, \ldots, w^p, \qquad (۱۶.۳)$$

است که $I_1, \cdots, I_k$ مجموعه‌ی کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی مستقل تابعی‌اند. در موارد اسکالر، عمومی‌ترین مسئله‌ی تغییراتی ناوردا دارای فرم $\int I\Omega = \int ILdx$ است که I ناوردای دیفرانسیلی دلخواه و $w = Ldx$ یک-فرمی ناورداست. در بیان هندسی، $w = ds$ عنصری G-ناوردا از طول قوس و I تابع دلخواهی از خمیدگی و مشتقات آن نسبت به طول قوس است.

جدول ۵ طبقه‌بندی تقارن‌های مسائل تغییری اسکالر فراهم را می‌کند. در موارد اسکالر، $L(x, u^{(n)})$ لاگرانژی مرتبه‌ی n-ام غیرتکین نامیده می‌شود اگر در شرایط غیرمنحط $\partial^۲ L(\partial u_n)^۲ \neq ۰$ صدق کند.

قضیه ۲۱.۲.۳. *هر لاگرانژی مرتبه‌ی اول غیرتکین، گروه تقارنی از بعد حداکثر ۳ می‌پذیرد. هر لاگرانژی مرتبه‌ی n-ام غیرتکین که $n \geq ۲$ باشد گروه تقارنی از بعد حداکثر $n+۳$ می‌پذیرد.*

همه‌ی لاگرانژی‌های مرتبه‌ی اول متقارن ماکسیمال تحت تبدیلات مقدار مختلط با مضرب ثابتی از یکی از توابع زیر هم‌ارزند:

$$u_x^\alpha, \qquad \sqrt{u_x - u^۲}, \qquad e^{-u_x}, \tag{۱۷.۳}$$

که گروه تقارن آنها به‌ترتیب از نوع (۲۰۷) با $k = ۱$، (۲۰۲) و (۲۰۸) می‌باشد. برای $n \geq ۲$ خانواده‌ی لاگرانژی‌های متقارن ماکسیمال که به‌وسیله‌ی $L = u_n^{(۲/(n+۱))}$ داده می‌شوند دارای گروه تقارن از نوع (۲۰۱۰) با $k = n$ می‌باشند. به‌علاوه، پنج لاگرانژی متقارن ماکسیمال غیرعادی داریم:

$$\sqrt[۳]{u_{xx}}, \qquad \frac{\sqrt{۲u_x u_{xxx} - ۳u_{xx}^۲}}{u_x}, \qquad \sqrt[۳]{u_{xxx}},$$

$$\frac{\sqrt[۳]{۹u_{xx}^۲ u_{xxxxx} - ۴۵u_{xx}u_{xxx}u_{xxxx} + ۴۰u_{xxx}^۳}}{u_{xx}},$$

$$\frac{\sqrt[۴]{۱۰u_۳^۳u_۷ - ۷۰u_۳^۲u_۴u_۶ - ۴۹u_۳^۲u_۵^۲ + ۲۸۰u_۳u_۴^۲u_۵ - ۱۷۵u_۴^۴}}{u_۳},$$

که گروه تقارن آن‌ها موارد (۱۰۱)، (۲۰۴)، (۴۰۱)، (۱۰۳) و (۴۰۳) می‌باشد.

سرانجام کاربردهای اخیر را در طبقه‌بندی تقارن معادلات تکاملی بیان می‌کنیم. فرض می‌کنیم G گروه تبدیلاتی باشد که روی $M \subset X \times U$ عمل می‌کند و معادله‌ی تکاملی اسکالر

$$u_t = K(x, u^{(n)}), \tag{۱۸.۳}$$

را در نظر می‌گیریم. که t (زمان) متغیر مستقلی دیگر و سمت راست تنها به مشتقات فاصله‌ای u وابسته است. عمل گروه را به $M \times \mathbb{C}$ با عمل بدیهی G روی $t \in \mathbb{C}$ توسعه می‌دهیم. معادله‌ی تکاملی (۱۸.۳)، G را به عنوان گروه تقارن می‌پذیرد اگر و تنها اگر فرم برخوردی

$$\frac{\theta}{k} = \frac{۱}{K(x, u^{(n)})}du - \sum_{i=۱}^{p} u_i dx^i, \tag{۱۹.۳}$$

یک-فرمی G-ناوردا روی J^n باشد. نتایج زیر توصیف کاملی را از تمام معادلات تکاملی G-ناوردا فراهم می‌کند، [۲۲] .

قضیه ۲۲.۲.۳. *تصور کنید $L(x, u^{(n)})$ لاگرانژی G-ناوردا با بیان اویلر-لاگرانژی غیرصفر $E(L) \neq 0$ باشد. سپس هر معادله‌ی تکاملی G-ناوردا دارای فرم*

$$u_t = \frac{L}{E(L)} I, \tag{۲۰.۳}$$

می‌باشد که I ناوردای دیفرانسیلی دلخواهی از G است.

این قضیه می‌تواند به حالتی با چندین متغیر وابسته نیز توسعه یابد، تعداد متغیرهای وابسته را q و لاگرانژی‌های G-ناوردای مجزای $L_1, \cdots, L_q$ با این خاصیت که ماتریس اویلر-لاگرانژی $\mathbf{E} = (E_\alpha(L_\beta))$ وارون‌پذیر باشد، را در نظر می‌گیریم. عمومی‌ترین معادله‌ی تکاملی G-ناوردا دارای فرم

$$u_t = L_1 \mathbf{E}^{-1} \mathbf{I}, \tag{۲۱.۳}$$

می‌باشد که $\mathbf{I}$ برداری ستونی از ناورداهای دیفرانسیلی است. (توجه کنید که هر $L_\beta = I_\beta L_1$ برای ناوردای دیفرانسیلی I_β، به‌طوری‌که L_1 در (۲۱.۳) می‌تواند به‌وسیله‌ی هر L_β دیگر با تغییر مناسب بردار ناوردای $\mathbf{I}$ جایگزین شود، می‌باشد.)

معادله تکاملی (۲۰.۳) عمومی‌ترین معادله‌ی تکاملی ناوردا را فراهم می‌کند؛ با این وجود اگر $\mathbf{I}$ را ثابت در نظر بگیریم ضرورتی ندارد که بسادگی چنین معادله‌ی تکاملی‌ای را نتیجه دهد. روش دیگری نیز برای تعیین معادلات تکاملی ناوردا وجود دارد.

قضیه ۲۳.۲.۳. *فرض کنید G زیرگروهی از گروه تصویری $SL(3)$ و $ds = Ldx$ یک-فرم G-ناوردا از مرتبه‌ی پائین و $I = \kappa$ ناوردای دیفرانسیلی اساسی آن باشد. سپس هر معادله‌ی تکاملی G-ناوردا دارای فرم*

$$u_t = \frac{u_{xx}}{L^2} J, \tag{۲۲.۳}$$

می‌باشد که J ناوردای دیفرانسیلی دلخواهی از G است و بنابراین تابعی از κ و مشتقات طول قوسی آن $d^k\kappa/ds^k$ می‌باشد.

فصل ۴

معادلات دیفرانسیل و جواب‌های گروه-ناوردا

در این فصل شیوه‌ی کاهش مرتبه‌ی معادلات مرتبه‌ی اول و بالاتر را با استفاده از گروه تقارن یک-پارامتری و بالاتر و مطالب گفته شده در فصل‌های قبل بیان می‌کنیم.

۱.۴ معادلات مرتبه‌ی اول

با معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول

$$\frac{du}{dx} = F(x, u), \tag{۱.۴}$$

شروع می‌کنیم. نشان خواهیم داد که اگر این معادله تحت یک گروه یک-پارامتری از تبدیلات ناوردا باشد، سپس می‌تواند به‌وسیله‌ی کوادراتورها حل بشود. فرض می‌کنیم G گروهی یک-پارامتری از تبدیلات باشد که روی زیرمجموعه‌ی باز $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^۲$ عمل می‌کند و

$$\mathbf{v} = \xi(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \phi(x, u)\frac{\partial}{\partial u},$$

مولد بی‌نهایت کوچک آن باشد. اگر

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \phi\frac{\partial}{\partial u} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x},$$

امتداد اول میدان برداری باشد طبق (۵.۱.۲) در آن داریم:

$$\phi^x = D_x(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xx} = \phi_x + (\phi_u - \xi_x)u_x - \xi_u u_x^۲.$$

بنابراین شرایط بی‌نهایت کوچکی که G تحت آن گروه تقارن برای معادله‌ی (۱.۴) می‌باشد به شکل زیر است:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)F - \frac{\partial \xi}{\partial u}F^۲ = \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \phi\frac{\partial F}{\partial u}, \tag{۲.۴}$$

و هر جواب $\xi(x, u)$ و $\phi(x, u)$ از معادله دیفرانسیل جزیی (۲.۴) گروه تقارنی یک-پارامتری از معادلات دیفرانسیل معمولی ما تولید می‌کند.

تصور کنید $\mathbf{v}$ مولد بی‌نهایت کوچک از گروه تقارن باشد، و $\mathbf{v}|_{(x_۰, u_۰)} \neq ۰$. بنابراین ما می‌توانیم مختصات اصلاحی

$$y = \eta(x, u), \qquad w = \zeta(x, u), \tag{۳.۴}$$

را در همسایگی‌ای از $(x_۰, u_۰)$ معرفی کنیم. در مختصات (y, w)، میدان برداری شکل ساده انتقالی $\mathbf{v} = \dfrac{\partial}{\partial w}$ را با امتداد اول $pr^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ دارد. بنابراین در سیستم مختصاتی جدید، برای اینکه ناوردا بمانند، معادله‌ی دیفرانسیل بایستی مستقل از w باشد به‌طوری‌که (۱.۴) برای تابع H با معادله‌ی ابتدایی زیر هم ارز است.

$$\frac{dw}{dy} = H(y),$$

این معادله به‌طور بدیهی به‌وسیله‌ی انتگرال‌گیری برای ثابت اختیاری c حل می‌شود:

$$w = \int H(y)dy + c.$$

با جای‌گذاری w و y جواب $u = f(x)$ را برای سیستم اصلی می‌یابیم.

از طرفی میدان برداری $\mathbf{v}$ به فرم $\frac{\partial}{\partial w}$ تبدیل می‌شود و η و ζ در معادله‌های دیفرانسیل جزیی خطی زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\eta) &= \xi\frac{\partial\eta}{\partial x} + \phi\frac{\partial\eta}{\partial u} = ۰, \\ \mathbf{v}(\zeta) &= \xi\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \phi\frac{\partial\zeta}{\partial u} = ۱. \end{aligned} \tag{۴.۴}$$

معادله‌ی اول بیان می‌کند که $\eta(x,u)$ تحت گروه تولید شده به‌وسیله‌ی $\mathbf{v}$ ناوردا است. بنابراین می‌توانیم η را به‌وسیله‌ی حل معادله دیفرانسیل معمولی مشخصه‌ی وابسته

$$\frac{dx}{\xi(x,u)} = \frac{du}{\phi(x,u)}. \tag{۵.۴}$$

حل کنیم. اغلب پیدا کردن ζ از معادله‌ی (۴.۴) با استفاده از متغیر کمکی v با حل سیستم زیر انجام می‌گیرد:

$$\frac{dx}{\xi(x,u)} = \frac{du}{\phi(x,u)} = \frac{dv}{۱}. \tag{۶.۴}$$

مثال ۱.۱.۴. معادله‌ی همگن

$$\frac{du}{dx} = F(\frac{u}{x}),$$

که تنها به نسبت u به x وابسته است را در نظر می‌گیریم. این معادله گروه تبدیلات تجانس

$$G : (x,u) \mapsto (\lambda x, \lambda u), \qquad \lambda > ۰,$$

را به‌عنوان گروه تقارن می‌پذیرد. که امتداد اول

$$pr^{(۱)}G : (x,u,u_x) \mapsto (\lambda x, \lambda u, u_x),$$

نیز معادله را ناوردا باقی می‌گذارد. مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u},$$

را در نظر می‌گیریم که $pr^{(۱)}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ و از شرایط بی‌نهایت کوچک ناوردایی استفاده می‌کنیم. مختصات جدید y و w که در (۴.۴) صدق می‌کند به‌وسیله‌ی

$$y = \frac{u}{x}, \qquad w = \log x,$$

داده می‌شود. با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{du}{dx}=\frac{du/dy}{dx/dy}=\frac{x(۱+yw_y)}{xw_y}=\frac{۱+yw_y}{w_y},$$

در نتیجه معادله به صورت

$$\frac{dw}{dy}=\frac{۱}{F(y)-y},$$

در می‌آید و جواب آن به صورت

$$w=\int\frac{dy}{F(y)-y}+c,$$

می‌باشد، که با توجه به $y=\frac{u}{x}$ و $w=\log x$، u را به‌طور ضمنی به‌عنوان تابعی از x بیان می‌کند.

برای مثال اگر

$$\frac{du}{dx}=\frac{u^۲+۲ux}{x^۲}=(\frac{u}{x})^۲+۲\frac{u}{x},$$

که در آن $F(y)=y^۲+۲y$، سپس در مختصات $y=\frac{u}{x}$ و $w=\log x$ داریم:

$$\frac{dw}{dy}=\frac{۱}{y^۲+y},$$

و جواب آن

$$w=-\log(۱+y^{-۱})+c,$$

می‌باشد که بر حسب متغیرهای اصلی داریم:

$$\log x=-\log(۱+\frac{x}{u})+c.$$

جواب می‌تواند به‌طور ضمنی برای u به عنوان تابعی از x بیان شود:

$$u=\frac{x^۲}{\tilde{c}-x},$$

که در آن $\tilde{c}=e^c$ می‌باشد.

مثال ۲.۱.۴. فرض کنیم G گروه دوران $\mathrm{SO}(۲)$ با مولد بی‌نهایت کوچک

$$Pr^{(۱)}\mathbf{v}=-u\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial u}+(۱+u_x^۲)\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

باشد، هر معادله از فرم

$$\frac{du}{dx}=\frac{u+xH(r)}{x-uH(r)},\tag{۷.۴}$$

که $H(r)=H(\sqrt{x^۲+u^۲})$ تابعی از شعاع است، $\mathrm{SO}(۲)$ را به‌عنوان گروه تقارن می‌پذیرد. مختصات قطبی (r,θ) با مختصات جدید $x=r\cos\theta$ و $u=r\sin\theta$ که در (۴.۴) صدق می‌کند را در نظر می‌گیریم از این‌رو در این مختصات $\mathbf{v}=\partial/\partial\theta$، به‌علاوه

$$\frac{du}{dx}=\frac{du/dr}{dx/dr}=\frac{\sin\theta+r\theta_r\cos\theta}{\cos\theta-r\theta_r\sin\theta}.$$

با جای‌گذاری آن در (۷.۴) و حل آن برای $d\theta/dr$ داریم:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r}H(r),$$

و جواب عمومی آن به صورت زیر است:

$$\theta = \int \frac{H(r)}{r}dr + c.$$

روشی دیگر برای حل معادلات مرتبه‌ی اول که تحت گروه یک-پارامتری از تبدیلات ناوردا هستند ساختن عامل انتگرال‌گیری است. معادله‌ی (۱.۴) را به‌عنوان معادله‌ی دیفرانسیل کامل در نظر می‌گیریم،

$$P(x,u)dx + Q(x,u)du = 0, \tag{۸.۴}$$

که $F = -P/Q$. معادله در صورتی دقیق است که $\partial P/\partial u = \partial Q/\partial x$، و در این مورد جواب را به شکل ضمنی $T(x,u) = c$ با فرض

$$\frac{\partial T}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial T}{\partial u} = Q.$$

می‌یابیم. (حوزه‌ی M را همبند ساده فرض کرده‌ایم.) اگر (۸.۴) دقیق نباشد بایستی دنبال یافتن عامل انتگرال‌گیری $R(x,u)$ باشیم به‌طوری‌که با ضرب عامل R در معادله، تبدیل به معادله‌ای دقیق می‌شود.

قضیه ۳.۱.۴. *تصور کنید معادله‌ی $Pdx + Qdu = 0$ گروه تقارن یک-پارامتری با مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v} = \xi\partial_x + \phi\partial_u$ بپذیرد. سپس تابع*

$$R(x,u) = \frac{1}{\xi(x,u)P(x,u) + \phi(x,u)Q(x,u)}. \tag{۹.۴}$$

عامل انتگرال‌گیری آن می‌باشد.

برهان. با استفاده از ملاک بی‌نهایت کوچک ناوردایی (۲.۴) می‌بینیم که $\mathbf{v}$ یک تقارن از (۸.۴) می‌باشد اگر و تنها اگر

$$\left(\xi\frac{\partial P}{\partial x} + \phi\frac{\partial P}{\partial u}\right)Q - \left(\xi\frac{\partial Q}{\partial x} + \phi\frac{\partial Q}{\partial u}\right)P + \frac{\partial \phi}{\partial x}Q^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial u}\right)PQ - \frac{\partial \xi}{\partial u}P^2 = 0. \tag{۱۰.۴}$$

برای اینکه R عامل انتگرال‌گیری باشد بایستی داشته باشیم:

$$\frac{\partial}{\partial u}(RP) = \frac{\partial}{\partial x}(RQ).$$

با جای‌گذاری R داریم:

$$\begin{aligned} R^2\left\{\phi\left(Q\frac{\partial P}{\partial u} \quad - \quad P\frac{\partial Q}{\partial u}\right) - \frac{\partial \xi}{\partial u}P^2 - \frac{\partial \phi}{\partial u}PQ\right\} \\ = \quad R^2\left\{\xi\left(P\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial P}{\partial x}\right) - \frac{\partial \xi}{\partial x}PQ - \frac{\partial \phi}{\partial x}Q^2\right\}. \end{aligned}$$

با توجه به (۱۰.۴) قضیه اثبات می‌شود. □

۲.۴ معادلات مرتبه‌ی بالاتر

اگر چه روش عامل انتگرال‌گیری خیلی قابل اجرا نیست، روش استفاده از ناورداها در حقیقت ادغام معادلات دیفرانسیلی مرتبه‌ی بالاتر را توسعه می‌دهد. فرض می‌کنیم

$$\Delta(x, u^{(n)}) = \Delta(x, u, u_x, \ldots, u_n) = \circ, \qquad (۱۱.۴)$$

که $u_n \equiv d^n u/dx^n$، معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی n-ام شامل تنها متغیر وابسته‌ی u باشد. نتیجه‌ی اساسی در اینجا این است که اگر ما گروه تقارن یک پارامتری از این معادله را تشخیص دهیم، می توانیم مرتبه‌ی معادله را به اندازه‌ی یک واحد کاهش دهیم. بدین منظور ابتدا مختصات $y = \eta(x,u)$ و $w = \zeta(x,u)$ را همان‌طور که در (۴.۴) بیان شد انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که گروه را به گروه انتقالات با مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v} = \partial/\partial w$ تبدیل کند. با به‌کار بردن قاعده‌ی زنجیره‌ای، می‌توانیم مشتقات u نسبت به x را برحسب y، w و مشتقات w نسبت به y برای تابع معین δ_k بیان کنیم،

$$\frac{d^k u}{dx^k} = \delta_k\left(y, w, \frac{dw}{dy}, \frac{d^k w}{dx^k}\right), \qquad (۱۲.۴)$$

با جای‌گذاری آن در معادله، معادله‌ی مرتبه‌ی n-ام هم‌ارز

$$\tilde{\Delta}(y, w^{(n)}) = \tilde{\Delta}(y, w, w_y, \ldots, w_n) = \circ, \qquad (۱۳.۴)$$

را بر حسب مختصات جدید y و w می‌یابیم. به‌علاوه در سیستم اصلی (۱۱.۴) گروه ناوردای G تبدیل سیستم را انجام می‌دهد و بر حسب مختصات (y,w)، مولد بی‌نهایت کوچک امتداد بدیهی $pr^{(n)}\mathbf{v} = \mathbf{v} = \partial/\partial w$ را دارد. طبق ضابطه بی‌نهایت کوچک ناوردایی هرگاه داشته باشیم $\tilde{\Delta}(y, w^{(n)}) = \circ$ سپس

$$pr^{(n)}\mathbf{v}(\tilde{\Delta}) = \partial\tilde{\Delta}/\partial w = \circ,$$

می‌باشد. بنابراین معادله‌ی هم‌ارز زیر را می‌یابیم که مستقل از w است:

$$\hat{\Delta}\left(y, \frac{dw}{dy}, \cdots, \frac{d^n w}{dy^n}\right) = \circ.$$

به این معنی که $\tilde{\Delta}(y, w^{(n)}) = \circ$ اگر و تنها اگر $\hat{\Delta}(y, w^{(n)}) = \circ$. با تنظیم $z = w_y$ معادله‌ی مرتبه‌ی $(n-۱)$-ام زیر را برای z داریم:

$$\hat{\Delta}(y, z, \ldots, d^{n-۱}z/dy^{n-۱}) = \hat{\Delta}(y, z^{(n-۱)}) = \circ, \qquad (۱۴.۴)$$

که جواب‌های آن جواب‌های عمومی معادله‌ی اصلی را فراهم می‌کند. یعنی اگر $z = h(y)$ جوابی از (۱۴.۴) باشد، سپس $w = \int h(y)dy + c$ جوابی از (۱۳.۴) است، بنابراین با جایگزین کردن w و y برحسب x و u، به‌طور ضمنی به جوابی از معادله‌ی اصلی می‌رسیم.

مثال ۱.۲.۴. به‌عنوان مثالی ابتدایی، معادله‌ی مرتبه‌ی دوم $\Delta(u, u_x, u_{xx}) = 0$ که x در آن ظاهر نمی‌شود را در نظر می‌گیریم. معادله به‌وضوح تحت گروه تبدیلات در جهت x با مولد بی‌نهایت کوچک $\partial/\partial x$ ناورداست. به منظور تغییر این به میدان برداری متناظر با انتقالات متغیرهای وابسته، کافیست نقش متغیرهای مستقل و وابسته را تعویض کنیم، بنابراین قرار می‌دهیم $y = u$ و $w = x$. سپس داریم:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{w_y}, \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{w_{yy}}{w_y^3},$$

به‌طوری‌که معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$\Delta\left(y, \frac{1}{w_y}, -\frac{w_{yy}}{w_y^3}\right) = 0,$$

که معادله‌ای مرتبه‌ی اول برای $z = w_y$ است:

$$\hat{\Delta}(y, z, z_y) \equiv \Delta(y, z^{-1}, -z^{-3}z_y) = 0.$$

برای مثال، برای حل $u_{xx} - 2uu_x = 0$ معادله‌ی مرتبه‌ی اول متناظر $-z^{-3}z_y - 2yz^{-1} = 0$ را برای $z = dw/dy = (du/dx)^{-1}$ داریم. معادله به‌وسیله‌ی جداکردن دارای جواب $z = (y^2 + c)^{-1}$ می‌باشد. بنابراین اگر قرار دهیم $c = c'^2 > 0$،

$$w = \int z dy = \frac{1}{c'} \arctan \frac{y}{c'} + \tilde{c},$$

یا بر حسب x و u،

$$u = c' \tan(c'x + d), \ d = -\tilde{c}c',$$

می‌باشد.

مثال ۲.۲.۴. معادله‌ی خطی مرتبه‌ی دوم همگن

$$u_{xx} + p(x)u_x + q(x)u = 0. \qquad (۱۵.۴)$$

را در نظر می‌گیریم. این معادله به‌وضوح تحت گروه تبدیلات مقیاسی $(x, u) \mapsto (x, \lambda u)$ با مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v} = u\partial_u$ ناورداست. مختصات (y, w) به‌طور مستقیم از $\mathbf{v}$ (درصورتی‌که $u \neq 0$) به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{dx}{0} = \frac{du}{u} \Rightarrow dx = 0 \Rightarrow x = c \Rightarrow y = x,$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{du}{u} = \frac{dw}{1} \Rightarrow \log u = w + k \Rightarrow w = \log u.$$

در این مختصات قرار می‌دهیم $\mathbf{v} = \partial_w$ و داریم:

$$u = e^w, \qquad u_x = w_x e^w, \qquad u_{xx} = (w_{xx} + w_x^2)e^w,$$

معادله در این مختصات به شکل زیر در می‌آید که مستقل از w است:

$$w_{xx} + w_x^2 + p(x)w_x + q(x) = 0,$$

بنابراین ما تبدیلی خوش تعریف بین معادله‌ی مرتبه‌ی دوم خطی و معادله‌ی ریکاتی مرتبه‌ی اول به‌دست آوردیم؛ یعنی $z = w_x = u_x/u$ معادله‌ی (۱۵.۴) را به معادله‌ی ریکاتی

$$z_x = -z^2 - p(x)z - q(x).$$

تغییر می‌دهد.

مثال ۳.۲.۴. برای یافتن جواب‌های گروه-ناوردای معادلات گرما، $u_t - u_{xx} = 0$، تحت گروه انتقالات

$$(x, t, u) \mapsto (x + c\varepsilon, t + \varepsilon, u), \qquad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

که به‌وسیله‌ی

$$\mathbf{v} = c\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = c\partial_x + \partial_t,$$

تولید شده است، چون این عمل دو ناوردای

$$y = x - ct, \qquad v = u,$$

را دارد بایستی برای یافتن جواب‌های ناوردای آن به‌دنبال جواب‌هایی از فرم $v = h(y)$ یعنی $u = h(x - ct)$ باشیم. بدین منظور معادله‌ی گرما را برحسب مشتقات v نسبت به y بیان می‌کنیم،

$$u_t = -cv_y, \qquad u_x = v_y, \qquad u_{xx} = v_{yy},$$

بنابراین داریم:

$$u_t = u_{xx} \qquad \Rightarrow \qquad -cv_y = cv_{yy}.$$

جواب معادله‌ی

$$-cv_y = v_{yy},$$

به‌صورت

$$v(y) = ke^{-cy} + l,$$

که k و l ثابت‌اند، می‌باشد. بنابراین

$$u(x,t) = ke^{-c(x-ct)} + l,$$

جوابی از معادله‌ی گرماست.

مثال ۴.۲.۴. گروه تقارن معادله‌ی کورتج-دوریس

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0,$$

در مثال (۹.۲) محاسبه شد. اینجا جواب‌های گروه-ناوردا را به‌طور ویژه بررسی می‌کنیم.

- جواب‌های موجی متحرک: در این مثال، گروه انتقالات

$$(x,t,u) \mapsto (x + c\varepsilon, t + \varepsilon, u), \qquad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

به‌وسیله‌ی $\partial_t + c\partial_x$ با ثابت c تولید می‌شوند. ناورداهای سراسری این گروه

$$y = x - ct, \qquad v = u,$$

می‌باشند و برحسب آن‌ها معادله‌ی کاهش‌یافته به‌صورت

$$v_{yyy} + vv_y - cv_y = 0,$$

است. با یک‌بار انتگرال گرفتن از آن داریم:

$$v_{yy} + \frac{1}{2}v^2 - cv = k,$$

و انتگرال دوم را بعد از ضرب v_y انجام می‌دهیم:

$$\frac{1}{2}v_y^2 = -\frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{2}cv^2 + kv + l, \tag{۱۶.۴}$$

که k و l ثابت‌های دلخواه‌اند. جواب عمومی می‌تواند برحسب توابع بیضوی، $u = \mathcal{P}(x - ct + \delta)$، که δ تغییر فاز دلخواه است، باشد. اگر $u \to 0$ با سرعت کافی همانطور که $|x| \to \infty$ می‌رود میل کند، سپس در (۱۶.۴)، $k = l = 0$ می‌باشد. این معادله، درصورتی‌که سرعت موج c مثبت باشد، جواب‌های حقیقی

$$v = 3c\,\mathrm{sech}^2[\frac{1}{2}\sqrt{c}y + \delta],$$

را دارد. بنابراین جواب‌های

$$u(x,t) = ۳c\,\mathrm{sech}^۲[\frac{۱}{۲}\sqrt{c}(x-ct)+\delta],$$

را برای معادله‌ی کورتج-دوریس تولید می‌کند. (اگر $c = ۰$، جواب‌های تکین ساکن

$$u = -۱۲(x+\delta)^{-۲},$$

را بدست می‌آوریم.) به‌طور عمومی، اگر تنها به کراندار بودن u نیاز داشته باشیم، جواب‌های دوره‌ای

$$u(x,t) = a\,\mathrm{cn}^۲[\lambda(x-ct)+\delta]+m,$$

را می‌یابیم، که cn تابع بیضوی ژاکوبی از پیمانه‌ی $k = \sqrt{(r_۳-r_۲)/(r_۳-r_۱)}$، $a = r_۳ - r_۲$، $\lambda = \sqrt{(r_۳/r_۱)/۶}$، $m = r_۲$، و $r_۱ < r_۲ < r_۳$ می‌باشد که ریشه‌ی چندجمله‌ایهای مکعبی سمت راست (۱۶.۴) هستند.

- جواب‌های ناوردای گالیله‌ای: گروه یک-پارامتری جلوبرنده‌ی گالیله‌ای تولید شده به‌وسیله‌ی $t\partial_x + \partial_u$ را در نظر می‌گیریم. برای $t > ۰$، $y = t$ و $v = tu - x$ ناورداهای مستقل‌اند، داریم:

$$u = y^{-۱}(x+v), \qquad u_x = y^{-۱}, \qquad u_{xxx} = ۰, \qquad u_t = y^{-۲}(yv_y - v - x),$$

که x متغیر پارامتری است.

معادله‌ی کاهش‌یافته به صورت ساده‌ی $dv/dy = ۰$ است، بنابراین $u = (x+\delta)/t$ جواب‌های عمومی ناوردای گالیله‌ای برای ثابت دلخواه δ می‌باشد. جواب‌های دیگر مورد توجه با ناوردایی شبه‌گالیله‌ای با مولفه‌ی انتقال زمان از این گروه بدست می‌آید. مولد $t\partial_x + a\partial_t + \partial_u$ با $a \neq ۰$ ناورداهای سراسری

$$y = x - \frac{۱}{۲}bt^۲, \qquad v = u - bt,$$

را با $b = ۱/a$ دارد. داریم:

$$u = v + bt, \qquad u_x = v_y, \qquad u_{xxx} = v_{yyy}, \qquad u_t = -btv_y + b,$$

به‌طوری‌که معادله‌ی کاهش‌یافته به صورت

$$v_{yyy} + vv_y + b = ۰,$$

می‌باشد. با یک انتگرال‌گیری، به معادله‌ی مرتبه‌ی دوم

$$v_{yy} + \frac{۱}{۲}v^۲ + by + c = ۰,$$

می‌رسیم. جواب‌های متناظر معادله‌ی کورتج-دوریس دارای فرم

$$u(x,t) = h(x - \frac{۱}{۲}bt^{۲}) + bt,$$

می‌باشند.

- جواب‌های ناوردای مقیاسی: سرانجام گروه تقارن‌های مقیاسی را مشاهده می‌کنیم

$$(x,t,u) \mapsto (\lambda x, \lambda^{۳} t, \lambda^{-۲} u).$$

ناورداهای روی نیم‌صفحه‌ی $\{t > ۰\}$ به‌صورت

$$y = t^{-۱/۳}x, \qquad v = t^{۲/۳}u,$$

می‌باشند و بنابراین داریم:

$$u_x = t^{-۱}v_y, \qquad u_{xxx} = t^{-۵/۳}v_{yyy}, \qquad u_t = -\frac{۱}{۳}t^{-۵/۳}(yv_y + ۲v),$$

به‌طوری‌که معادله‌ی کاهش‌یافته به صورت

$$v_{yyy} + vv_y - \frac{۱}{۳}yv_y - \frac{۲}{۳}v = ۰,$$

است. هیچ روش مستقیمی برای حل این معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی سوم وجود ندارد. با این وجود، با توجه به [۱]، برای معادله‌ی کورتج-دوریس قرار می‌دهیم:

$$v = \frac{dw}{dy} - \frac{۱}{۶}w^{۲}.$$

معادله برای w به صورت

$$\begin{aligned} ۰ &= w_{yyyy} - \frac{۱}{۳}ww_{yyy} - \frac{۱}{۳}ww_y^{۲} - \frac{۱}{۶}w^{۲}w_{yy} + \frac{۱}{۱۸}w^{۳}w_y - \frac{۱}{۳}yw_{yy} + \frac{۱}{۹}yww_y - \frac{۲}{۳}w_y + \frac{۱}{۹}w^{۲} \\ &= (D_y - \frac{۱}{۳}w)(w_{yyy} - \frac{۱}{۶}w^{۲}w_y - \frac{۱}{۳}yw_y - \frac{۱}{۳}w), \end{aligned}$$

می‌باشد. بنابراین هر جواب معادله‌ی مرتبه‌ی سوم تغییریافته

$$w_{yyy} - \frac{۱}{۶}w^{۲}w_y - \frac{۱}{۳}yw_y - \frac{۱}{۳}w = ۰,$$

منجر به جواب‌های ناوردای مقیاسی از معادله‌ی کورتج-دوریس به‌وسیله‌ی تبدیلات بالا می‌شود. معادله‌ی بالا با یک بار انتگرال‌گیری برای ثابت k، به صورت زیر است.

$$w_{yy} = \frac{۱}{۱۸}w^{۳} + \frac{۱}{۳}yw + k.$$

[۱] را برای بررسی بیشتر این معادله ببینید.

۳.۴ گروه تقارن چند پارامتری

اگر معادله‌ی دیفرانسیل معمولی $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ تحت گروه r-پارامتری ناوردا باشد، سپس می‌توانیم مرتبه‌ی معادله را تا $(n-r)$ کاهش دهیم. گروه r-پارامتری از تبدیلات G که روی $M \subset X \times U$ عمل می‌کنند را در نظر می‌گیریم. برای سادگی، تصور کنید که امتداد مرتبه‌ی r-ام $pr^{(r)}G$ که روی $M^{(r)}$ عمل می‌کند مدارهای r-بعدی دارد. چون $M^{(r)}$، $(r+2)$-بعدی است به‌طور موضعی دقیقا دو ناوردای دیفرانسیلی مرتبه‌ی r-ام مستقل تابعی از G وجود دارد:

$$y = \eta(x, u^{(r)}), \qquad w = \zeta(x, u^{(r)}). \tag{۱۷.۴}$$

توجه کنید که هر امتداد بالاتری از $pr^{(r)}G$ نیز مدارهای r-بعدی دارد. بنابراین $pr^{(n)}G$، $n-r+2$ ناوردای دیفرانسیلی مستقل دارد، که با توجه به قضیه‌ی (۱۳.۲.۲) می‌توانیم آن‌ها را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$y, w, dw/dy, \ldots, d^{n-r}w/dy^{n-r}. \tag{۱۸.۴}$$

اگر $\Delta(x, u^{(n)})$ تحت تمام گروه تقارن G-ناوردا باشد، سپس معادله‌ی هم‌ارز

$$\tilde{\Delta}(y, w, dw/dy, \ldots, d^{n-r}w/dy^{n-r}) = 0, \tag{۱۹.۴}$$

شامل تنها ناورداهای $pr^{(n)}G$ وجود دارد. در اینجا می‌توانیم سیستم مرتبه‌ی n-ام برای u به‌عنوان تابعی از x را به سیستم مرتبه‌ی $(n-r)$-ام برای w به‌عنوان تابعی از y کاهش مرتبه دهیم.

مشکل اصلی در اینجا این است که روش تعیین جواب $u = f(x)$ از سیستم اصلی با استفاده از جواب عمومی $w = h(y)$ از سیستم کاهش‌یافته (۱۹.۴) واضح نیست. با استفاده از (۱۷.۴) برای ناورداهای y و w بایستی معادله‌ی مرتبه‌ی r-ام کمکی

$$\zeta(x, u^{(r)}) = h[\eta(x, u^{(r)})], \tag{۲۰.۴}$$

را برای تعیین u حل کنیم. این معادله‌ی کمکی بر حسب ناورداهای دیفرانسیلی بیان می‌شود و G را به‌عنوان گروه تقارن r-پارامتری باقی می‌گذارد. با این وجود در مقایسه با موقعیت‌های یک-پارامتری، هیچ اطمینانی وجود ندارد که حتما بتوانیم از (۲۰.۴) به‌طور کامل به‌وسیله‌ی کوادراتورها انتگرال بگیریم، و با توجه به آن به‌وضوح جواب‌های معادله‌ی اصلی را تعیین کنیم.

قضیه ۱.۳.۴. *فرض می‌کنیم $H \subset G$ زیرگروه نرمال s-پارامتری از گروه لی از تبدیلات باشد که روی زیرمجموعه‌ی $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^2$ عمل می‌کند به‌طوری‌که $pr^{(s)}H$ مدارهای s-بعدی در $M^{(s)}$ دارد. فرض کنیم $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی n-ام با معادله‌ی کاهش‌یافته‌ی متناظر $\tilde{\Delta}(y, w^{(n-s)}) = 0$ برای ناورداهای $y = \eta(x, u^{(s)})$ و $w = \zeta(x, u^{(s)})$ از H باشد که H را به‌عنوان گروه*

تقارن می‌پذیرد. عمل القایی گروه خارج قسمتی G/H روی $\tilde{M} \subset Y \times W$ وجود دارد و Δ تمام G را به‌عنوان گروه تقارن می‌پذیرد اگر و تنها اگر معادله‌ی کاهش‌یافته به‌وسیله‌ی H گروه خارج قسمتی G/H را به‌عنوان گروه تقارن بپذیرد.

به‌ویژه در مورد گروه تقارن دو-پارامتری می‌توانیم مرتبه‌ی معادله را به‌وسیله‌ی کوادراتورها تا دو مرتبه کاهش دهیم.

قضیه ۲.۳.۴. *فرض کنیم $\Delta(x, u^{(n)}) = ۰$ معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی n-ام باشد که تحت گروه تقارن دو-پارامتری از تبدیلات G ناورداست. سپس معادله‌ی مرتبه‌ی $(n-۲)$-ام $\hat{\Delta}(z, v^{(n-۲)}) = ۰$ وجود دارد با این خاصیت که جواب عمومی Δ به‌وسیله‌ی یک جفت از کوادراتورها از حل عمومی $\hat{\Delta}$ بدست می‌آید.*

برهان. به [۱۷] رجوع کنید. □

مثال ۳.۳.۴. معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم

$$x^{۲} u_{xx} = H(x u_x - u), \tag{۲۱.۴}$$

را با تابع H در نظر می‌گیریم. این معادله گروه تقارن دو-پارامتری

$$(x, u) \mapsto (\lambda x, u + \varepsilon x), \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{+},$$

را با مولدهای بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v} = x\partial_u$ و $\mathbf{w} = x\partial_x$ می‌پذیرد. توجه کنید که $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -\mathbf{v}$. طبق روال همیشگی بایستی ابتدا ناورداهای $\mathbf{v}$ را مشخص کنیم که x و $w = x u_x - u$ می‌باشند که (۲۱.۴) برحسب آن‌ها به معادله‌ی مرتبه‌ی اول

$$x \frac{dw}{dx} = H(w),$$

کاهش مرتبه می‌یابد. معادله جدایی‌پذیر و لذا دارای حل زیر می‌باشد:

$$\int \frac{dw}{H(w)} = \log x + c,$$

و این حقیقت را به ما انتقال می‌دهد که تحت گروه کاهش‌یافته‌ی $(x, w) \mapsto (\lambda x, w)$ که به‌وسیله‌ی $\tilde{\mathbf{w}} = x\partial_x$ مشخص می‌شود ناوردا می‌مانند. جواب را به فرم $w = h(x)$ بازنویسی می‌کنیم. مجددا به‌وسیله‌ی حل معادله خطی

$$x u_x - u = h(x),$$

جواب عمومی (۲۱.۴) را می‌سازیم. عامل انتگرال‌گیری معادله $۱/x^{۲}$ می‌باشد، که می‌تواند به‌طور مستقیم با استفاده از گروه تقارن تولید شده به‌وسیله‌ی $\mathbf{v}$ مشخص شود، از این‌رو جواب عمومی به صورت زیر است:

$$u = x\left(\int x^{-۲} h(x) dx + k\right).$$

گروه لی r-پارامتری G را با جبر لی $\mathcal{G}$ در نظر می‌گیریم. سپس G را حل‌پذیر می‌نامیم اگر زنجیری از زیرگروه‌های لی

$$\{e\} = G^{(0)} \subset G^{(1)} \subset G^{(2)} \subset \cdots \subset G^{(r-1)} \subset G^{(r)} = G,$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $k = 1, \ldots, r$، $G^{(k)}$ زیرگروه k-بعدی از G و $G^{(k-1)}$ زیرگروه نرمال از $G^{(k)}$ باشد. به‌طور معادل، زنجیری از زیرجبرهای

$$\{0\} = \mathcal{G}^{(0)} \subset \mathcal{G}^{(1)} \subset \mathcal{G}^{(2)} \subset \cdots \subset \mathcal{G}^{(r-1)} \subset \mathcal{G}^{(r)} = \mathcal{G}, \qquad (۲۲.۴)$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر k، $\dim \mathcal{G}^{(k)} = k$ و $\mathcal{G}^{(k-1)}$ زیرجبر نرمالی از $\mathcal{G}^{(k)}$ باشد:

$$[\mathcal{G}^{(k-1)}, \mathcal{G}^{(k)}] \subset \mathcal{G}^{(k-1)}.$$

لازمه‌ی حل‌پذیربودن، وجود پایه‌ی $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ از $\mathcal{G}$ می‌باشد به‌طوری‌که هرگاه $i < j$ داشته باشیم:

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = \sum_{k=1}^{j-1} c_{ij}^k \mathbf{v}_k \quad \text{هرگاه} \quad i < j.$$

توجه کنید که هر جبر لی آبلی، چون کروشه‌ی لی آن‌ها همیشه صفر است، به‌طور بدیهی حل‌پذیر است. و هر جبر لی دو-بعدی نیز حل‌پذیر است زیرا می‌توانیم پایه‌ی $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ را برای آن با خاصیت $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = k\mathbf{v}$ بیابیم، هم‌چنین می‌توانیم $\mathcal{G}^{(1)}$ را زیرجبر یک-بعدی تولید شده به‌وسیله‌ی $\mathbf{v}$ در نظر بگیریم که زنجیر

$$\{0\} = \mathcal{G}^{(0)} \subset \mathcal{G}^{(1)} \subset \mathcal{G}^{(2)} = \mathcal{G},$$

را تولید می‌کند. مثال ساده‌ای از جبر لی حل‌ناپذیر، جبر سه-بعدی $\mathcal{SL}(2)$ می‌باشد.

قضیه ۴.۳.۴. *لی-بیانچی.* *فرض می‌کنیم $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی n-ام باشد. اگر Δ گروه r-پارامتری حل‌پذیر از تقارن‌های G بپذیرد به‌طوری‌که برای $1 \leq k \leq r$ مدارهای $pr^{(k)}G^{(k)}$ دارای بعد k باشند، سپس جواب عمومی Δ می‌تواند به‌وسیله‌ی کوادراتورها از جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی $(n-r)$-ام $\tilde{\Delta}(y, w^{(n-r)}) = 0$ بدست آید. به‌ویژه، اگر Δ گروه حل‌پذیر n-پارامتری از تقارن‌ها بپذیرد سپس با فرض شرایط قبلی جواب عمومی Δ به‌وسیله‌ی تنها کوادراتورها محاسبه می‌شود.*

برهان. با استفاده از استقرا، زنجیری از زیرجبرهای (۲۲.۴) با حل‌پذیری G ضمانت می‌شود. در مرتبه‌ی k-ام از ناوردایی Δ تحت زیرجبرهای k-بعدی $\mathcal{G}^{(k)}$ برای کاهش مرتبه‌ی آن به معادله‌ی مرتبه‌ی $(n-k)$-ام

$$\tilde{\Delta}^{(k)}(y, w^{(n-k)}) = 0,$$

استفاده می‌کنیم که $y, w, dw/dy, \ldots d^{n-k}w/dy^{n-k}$ مجموعه‌ی کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی مستقل تابعی از امتداد n-ام $pr^{(n)}G^{(k)}$ می‌باشد. به‌ویژه $y = \eta(x, u^{(k)})$ و $w = \zeta(x, u^{(k)})$ مجموعه‌ی کاملی از

ناورداهای امتداد k-ام $G^{(k)}$ می‌باشند. همچنین می‌توانیم جواب‌های عمومی $u = f(x)$ را از جواب‌های عمومی $w = h(y)$ از $\tilde{\Delta}^{(k)}$ به‌وسیله‌ی یک دنباله از کوادراتورها بسازیم.

حال مورد $(k+1)$-ام را بررسی می‌کنیم، مولد $\mathbf{v}_{k+1}$ از $\mathcal{G}^{k+1}$ که در $\mathcal{G}^{(k)}$ قرار نمی‌گیرد را در نظر می‌گیریم. چون $\mathcal{G}^{(k)}$ زیرجبر نرمالی از $\mathcal{G}^{(k+1)}$ می‌باشد، برای $pr^{(k)}\mathbf{v}_{k+1}$ داریم:

$$\begin{aligned} pr^{(k)}\mathbf{v}_{k+1} &= pr^{(k-2)}\mathbf{v}_{k+1} + \alpha(y,w)\frac{\partial}{\partial y} + \psi(y,w)\frac{\partial}{\partial w} \\ &\equiv pr^{(k-2)}\mathbf{v}_{k+1} + \tilde{\mathbf{v}}_{k+1}, \end{aligned}$$

که $pr^{(k-2)}\mathbf{v}_{k+1}$ به مختصات غیر ناوردای $x, u, \ldots, u_{k-2}$ وابسته است و به y و w برای کامل کردن سیستم مختصاتی روی $M^{(k)}$ نیاز داریم.

قضیه‌ی (۱.۳.۴) بیان می‌کند که معادله‌ی اصلی Δ تحت تمام $\mathcal{G}^{(k+1)}$ ناورداست اگر و تنها اگر معادله‌ی کاهش‌یافته‌ی $\tilde{\Delta}^{(k)}$ تحت میدان برداری کاهش‌یافته‌ی $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$ ناوردا باشد و به ما اجازه می‌دهد که فرآیند کاهش مرتبه $\tilde{\Delta}^{(k)}$ را با استفاده از میدان برداری $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$ انجام دهیم. فرض می‌کنیم

$$\hat{y} = \eta(y,w), \qquad \hat{w} = \hat{\zeta}(y,w,w_y),$$

ناورداهای مستقل امتداد اول $pr^{(1)}\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$ باشند. سپس

$$\hat{y}, \hat{w}, d\hat{w}/d\hat{y}, \ldots, d^{n-k-1}\hat{w}/d\hat{y}^{(n-k-1)},$$

مجموعه‌ی کاملی از ناورداهای امتداد مرتبه‌ی $(n-k)$-ام $pr^{(n-k)}\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$ تشکیل می‌دهند. چون $\tilde{\Delta}^{(k)}$ مجموعه جواب ناوردای این گروه را مشخص می‌کند، معادله هم‌ارز

$$\tilde{\Delta}^{(k+1)}(\hat{y}, \hat{w}^{(n-k-1)}) = 0,$$

تنها به ناورداهای $pr^{(n-k)}\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$ وابسته است. به‌علاوه، برای ساختن جواب‌های $\tilde{\Delta}^{(k)}$، $\hat{w} = \hat{h}(\hat{y})$، برای $\hat{\Delta}^{(k+1)}$ تنها به حل معادله‌ی مرتبه‌ی اول

$$\hat{\zeta}(y,w,w_y) = \hat{h}[\hat{\eta}(y,w)],$$

نیاز داریم که تحت گروه یک-پارامتری تولید شده به‌وسیله‌ی $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$ ناورداست و از این‌رو به‌وسیله‌ی کوادراتورها انتگرال گرفته می‌شود. سرانجام، گام‌های استقرا تکمیل و قضیه اثبات می‌شود. □

قضیه ۵.۳.۴. *فرض می‌کنیم*

$$\frac{du^\nu}{dx} = F_\nu(x,u), \qquad \nu = 1, \ldots, q, \tag{۲۳.۴}$$

سیستم مرتبه‌ی اول از q معادله‌ی دیفرانسیل معمولی و G گروه یک-پارامتری از تقارن‌های سیستم باشد. سپس تغییر متغیر $(y,w)=\psi(x,u)$ وجود دارد که تحت آن سیستم به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{dw^\nu}{dy}=H_\nu(y,w^1,\cdots,w^{q-1}),\qquad \nu=1,\ldots,q. \tag{۲۴.۴}$$

بنابراین سیستم به سیستمی با $q-1$ معادله دیفرانسیل معمولی برای $w^1,\ldots,w^{q-1}$ به‌وسیله‌ی کوادراتورها کاهش مرتبه می‌یابد و داریم:

$$w^q(y)=\int H_q(y,w^1(y),\cdots,w^{q-1}(y))dy+c. \tag{۲۵.۴}$$

برهان. به [۱۷] رجوع کنید. □

مثال ۶.۳.۴. سیستم مستقل از دو معادله‌ی

$$\frac{du}{dx}=F(u,v),\qquad \frac{dv}{dx}=H(u,v),$$

را در نظر می‌گیریم. به‌وضوح $\mathbf{v}=\partial/\partial x$ گروه تقارن یک-پارامتری تولید می‌کند، به‌طوری‌که می‌توانیم با یک کوادراتور آن‌را به یک معادله‌ی مرتبه‌ی اول کاهش دهیم. مختصات جدید $y=u$، $w=v$ و $z=x$ می‌باشند که ما w و z را به‌عنوان تابعی از y در نظر می‌گیریم. سپس

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{dz/dy},\qquad \frac{dv}{dx}=\frac{dw/dy}{dz/dy},$$

و سیستم هم‌ارز زیر را داریم:

$$\frac{dw}{dy}=\frac{H(y,w)}{F(y,w)},\qquad \frac{dz}{dy}=\frac{1}{F(y,w)}.$$

بنابراین یک معادله‌ی مرتبه‌ی اول برای $w=w(y)$ می‌ماند و مقدار متناظر $z=z(y)$ به‌وسیله‌ی کوادراتورها مشخص می‌شود:

$$z=\int\frac{1}{F(y,w)}dy+c.$$

اگر به متغیرهای اصلی x، u و v برگردیم می‌بینیم که تنها معادله‌ی

$$\frac{dv}{du}=\frac{H(u,v)}{F(u,v)},$$

را داریم و به‌وسیله‌ی کوادراتورها به

$$x=\int\frac{du}{F(u,v(u))}+c.$$

می‌رسیم.

قضیه ۷.۳.۴. *تصور کنید $du/dx=F(x,u)$ سیستمی از q معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول با گروه حل‌پذیر r-پارامتری G از تقارن‌ها، که به‌طور منظم با مدارهای r-بعدی عمل می‌کند، باشد. سپس جواب‌های $u=f(x)$ می‌تواند به‌وسیله‌ی کوادراتورها از جواب‌های سیستم کاهش‌یافته‌ی $dw/dy=H(y,w)$ از $q-r$*

معادله‌ی مرتبه‌ی اول بدست آید. به‌ویژه، اگر سیستم اصلی تحت گروه حل‌پذیر q-پارامتری ناوردا باشد جواب‌های عمومی آن می‌تواند تنها به‌وسیله‌ی کوادراتورها بدست آید.

مثال ۸.۳.۴. هر سیستم دو بعدی خطی

$$u_t = \alpha(t)u + \beta(t)v,$$

$$v_t = \gamma(t)u + \delta(t)v,$$

تحت گروه یک-پارامتری از تبدیلات مقیاسی

$$(t, u, v) \mapsto (t, \lambda u, \lambda v),$$

با مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v} = u\partial_u + v\partial_v$ ناورداست، از این‌رو می‌تواند به تنها یک معادله‌ی مرتبه‌ی اول به‌وسیله روش قضیه‌ی (۵.۳.۴) کاهش یابد. قرار می‌دهیم $w = \log u$ و $z = v/u$ که مستقیما $\mathbf{v} = \partial_w$ را نتیجه می‌گیریم. با توجه به متغیرهای جدید، سیستم تبدیلی زیر را داریم:

$$w_t = \alpha(t) + \beta(t)z,$$

$$z_t = \gamma(t) + (\delta(t) - \alpha(t))z - \beta(t)z^2,$$

به‌طوری‌که اگر معادله‌ی ریکاتی را برای z حل کنیم، می‌توانیم w (و از این‌رو u و v) را به‌وسیله‌ی کوادراتورها بیابیم.

با توجه به مطالب گفته شده، برای حل هر معادله دیفرانسیل بایستی متغیرهای مستقل و وابسته‌ی معادله را مشخص کنیم و با توجه به آن‌ها شکل کلی میدان برداری را بیابیم و امتداد آنرا تا مرتبه‌ی معادله محاسبه کنیم و روی معادله اثر دهیم، که در نتیجه‌ی آن معادله‌ی مشخصه‌ی گروه تقارن را بدست می‌آوریم. با حل معادله‌ی حاصل به ضرایب تابعی میدان برداری می‌رسیم که با جای‌گذاری آن‌ها در میدان برداری، مولدهای بی‌نهایت کوچک گروه تقارن معادله را می‌یابیم. حال بایستی تغییر متغیرهای استاندارد یا ناورداهای یکی از مولدهای بی‌نهایت کوچک را بیابیم و در معادله جای‌گذاری کنیم مرتبه‌ی معادله‌ی حاصل کاهش می‌یابد که در صورت نیاز می‌توانیم مجددا این مراحل را تکرار کنیم. در نهایت به معادله‌ای می‌رسیم که جواب آن به راحتی محاسبه می‌شود. تغییر متغیر مورد نیاز را اعمال می‌کنیم تا به جواب معادله‌ی اصلی برسیم. در مورد دستگاه معادلات دیفرانسیل نیز به‌همین طریق عمل می‌کنیم که با جای‌گذاری تغییر متغیرهای محاسبه شده تحت مولدهای گروه تقارن، جواب یکی از معادله‌ها بدست می‌آید که برای حل بقیه‌ی معادلات دوباره همین مسیر را طی می‌کنیم.

پیوست آ

جدول ۱

جبرهای لی اولیه از میدان‌های برداری در $\mathbb{C}^۲$

	مولدها	بعد	ساختار
1.1.	$\partial_x, \partial_u, x\partial_x - u\partial_u, u\partial_x, x\partial_u$	5	$\mathfrak{sa}(2)$
1.2.	$\partial_x, \partial_u, x\partial_x, u\partial_x, x\partial_u, u\partial_u$	6	$\mathfrak{a}(2)$
1.3.	$\partial_x, \partial_u, x\partial_x, u\partial_x, x\partial_u, u\partial_u, x^2\partial_x + xu\partial_u, xu\partial_x + u^2\partial_u$	8	$\mathfrak{sl}(3)$

جدول ۲

جبرهای لی غیراولیه و متعددی از میدان‌های برداری در $\mathbb{C}^۲$

	مولدها	بعد	ساختار
2.1.	$\partial_x, x\partial_x - u\partial_u, x^2\partial_x - 2xu\partial_u$	3	$\mathfrak{sl}(2)$
2.2.	$\partial_x, x\partial_x - u\partial_u, x^2\partial_x - (2xu+1)\partial_u$	3	$\mathfrak{sl}(2)$
2.3.	$\partial_x, x\partial_x, u\partial_u, x^2\partial_x - xu\partial_u$	4	$\mathfrak{gl}(2)$
2.4.	$\partial_x, x\partial_x, x^2\partial_x, \partial_u, u\partial_u, u^2\partial_u$	6	$\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$
2.5.	$\partial_x, \eta_1(x)\partial_u, \dots, \eta_k(x)\partial_u$	$k+1$	$\mathbb{C}\ltimes\mathbb{C}^k$
2.6.	$\partial_x, u\partial_u, \eta_1(x)\partial_u, \dots, \eta_k(x)\partial_u$	$k+2$	$\mathbb{C}^2\ltimes\mathbb{C}^k$
2.7.	$\partial_x, x\partial_x + \alpha u\partial_u, \partial_u, x\partial_u, \dots, x^{k-1}\partial_u$	$k+2$	$\mathfrak{a}(1)\ltimes\mathbb{C}^k$
2.8.	$\partial_x, x\partial_x + (ku + x^k)\partial_u, \partial_u, x\partial_u, \dots, x^{k-1}\partial_u$	$k+2$	$\mathfrak{a}(1)\ltimes\mathbb{C}^k$
2.9.	$\partial_x, x\partial_x, u\partial_u, \partial_u, x\partial_u, x^2\partial_u, \dots, x^{k-1}\partial_u$	$k+3$	$(\mathfrak{a}(1)\oplus\mathbb{C})\ltimes\mathbb{C}^k$
2.10.	$\partial_x, 2x\partial_x + (k-1)u\partial_u, x^2\partial_x + (k-1)xu\partial_u,$ $\partial_u, x\partial_u, x^2\partial_u, \dots, x^{k-1}\partial_u$	$k+3$	$\mathfrak{sl}(2)\ltimes\mathbb{C}^k$
2.11.	$\partial_x, x\partial_x, x^2\partial_x + (k-1)xu\partial_u, u\partial_u,$ $\partial_u, x\partial_u, x^2\partial_u, \dots, x^{k-1}\partial_u$	$k+4$	$\mathfrak{gl}(2)\ltimes\mathbb{C}^k$

در مورد (۲۰۵) و (۲۰۶) توابع $\eta_1(x), \dots, \eta_k(x)$ در معادله‌ی دیفرانسیل معمولی خطی همگن با ضرایب ثابت مرتبه‌ی k-ام $D[u] = ۰$ صدق می‌کنند.

در مورد (۲۰۵)-(۲۰۱۱) داریم: $k \geq ۱$. توجه کنید که اگر در مورد (۲۰۱۰) قرار دهیم $k = ۰$ و u را با $u^۲$ جایگزین کنیم به مورد (۲۰۱) می‌رسیم. به‌طور مشابه اگر در مورد (۲۰۱۱) قرار دهیم $k = ۰$ به مورد (۲۰۳) می‌رسیم. موارد (۲۰۷) و (۲۰۸) برای $k = ۰$ با جبر لی $\{\partial_x, e^x\partial_u\}$ از نوع (۲۰۵) هم‌ارزند. مورد (۲۰۹) برای $k = ۰$ با جبر لی $\{\partial_x, \partial_u, u\partial_u\}$ از نوع (۲۰۶) هم‌ارز است.

جدول ۳

جبرهای لی غیرمتعددی از میدان‌های برداری در $\mathbb{C}^2$

	مولدها	بعد	ساختار
3.1.	$\eta_1(x)\partial_u, \ldots, \eta_k(x)\partial_u$	k	$\mathbb{C}^k$
3.2.	$\eta_1(x)\partial_u, \ldots, \eta_k(x), u\partial_u$	$k+1$	$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^k$
3.3.	$\partial_u, u\partial_u, u^2\partial_u$	3	$\mathfrak{sl}(2)$

جدول ۴

جبرهای لی تبدیلات برخوردی در $\mathbb{C}^2$

	مولدها	بعد	ساختار
3.1.	$\eta_1(x)\partial_u, \ldots, \eta_k(x)\partial_u$	k	$\mathbb{C}^k$
3.2.	$\eta_1(x)\partial_u, \ldots, \eta_k(x), u\partial_u$	$k+1$	$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^k$
3.3.	$\partial_u, u\partial_u, u^2\partial_u$	3	$\mathfrak{sl}(2)$

جدول ۵

ناورداهای دیفرانسیلی گروه تبدیلات در $\mathbb{C}^۲$

	ناوردا(های) دیفرانسیلی اساسی	یک-فرم ناوردا	دترمینان لی
1.1.	$u_2^{-8/3} R_4$	$u_2^{1/3}\, dx$	u_2^3
1.2.	$R_4^{-3/2} S_5$	$u_2^{-1}\sqrt{R_4}\, dx$	$u_2^2 R_4$
1.3.	$S_5^{-8/3} V_7$	$u_2^{-1} S_5^{1/3}\, dx$	$u_2 S_5^2$
2.1.	$u^{-4}(2uu_2 - 3u_1^2)$	$u\, dx$	u^2
2.2.	$(u_1 - u^2)^{-3/2}(u_2 - 6uu_1 + 4u^3)$	$\sqrt{u_1 - u^2}\, dx$	$u_1 - u^2$
2.3.	$Q_2^{-3/2} S_3$	$u^{-1}\sqrt{Q_2}\, dx$	$u\, Q_2$
2.4.	$Q_3^{-3} U_5$	$u_1^{-1}\sqrt{Q_3}\, dx$	$u_1 Q_3^2$
2.5.	$W(x)^{-1}\mathcal{D}[u]$	dx	$W(x)$
2.6.	$D_x \log \mathcal{D}[u]$	dx	$W(x)\mathcal{D}[u]$
2.7a.	$u_k^{(\alpha-k)^{-1}-1} u_{k+1} \qquad k \neq \alpha$	$u_k^{-(\alpha-k)^{-1}}\, dx$	u_k
2.7b.	$u_k, \quad u_{k+1}^{-2} u_{k+2} \qquad k = \alpha$	$u_{k+1}\, dx$	u_{k+1}
2.8.	$u_{k+1} e^{u_k/k!}$	$e^{-u_k/k!}\, dx$	1
2.9.	$u_{k+1}^{-2} u_k u_{k+2}$	$u_k^{-1} u_{k+1}\, dx$	$u_k u_{k+1}$
2.10.	$u_k^{-2(k+3)/(k+1)} Q_{k+2}$	$u_k^{2/(k+1)}\, dx$	u_k^2
2.11.	$Q_{k+2}^{-3/2} S_{k+3}$	$u_k^{-1}\sqrt{Q_{k+2}}\, dx$	$u_k Q_{k+2}$
3.1.	$x, \quad \mathcal{D}[u]$	dx	$W(x)$
3.2.	$x, \quad D_x \log \mathcal{D}[u]$	dx	$W(x)\mathcal{D}[u]$
3.3.	$x, \quad u_1^{-2} Q_3$	dx	u_1^3
4.1	$u_3^{-8/3} \widetilde{R}_5$	$u_3^{1/3}\, dx$	u_3^3
4.2	$\widetilde{R}_5^{-3/2} \widetilde{S}_6$	$u_3^{-1}\sqrt{\widetilde{R}_5}\, dx$	$u_3^2 \widetilde{R}_5$
4.3	$T_7^{-5/2} Z_9$	$u_3^{-1} T_7^{1/4}\, dx$	$u_3 T_7^2$

$W(x)$ دترمینان رانسکین از $\eta_۱(x), \ldots, \eta_k(x)$ را نشان می‌دهد و $\mathcal{D}$ عملگر دیفرانسیلی معمولی خطی مرتبه‌ی k-ام می‌باشد که هسته‌ی آن بوسیله‌ی $\eta_۱(x), \ldots, \eta_k(x)$ تولید می‌شود. بعلاوه داریم:

$$
\begin{aligned}
Q_{k+2} &= (k+1)u_k u_{k+2} - (k+2)u_{k+1}^2, \quad R_4 = 3u_2u_4 - 5u_3^2, \\
S_{k+3} &= (k+1)^2 u_k^2 u_{k+3} - 3(k+1)(k+3)u_k u_{k+1} u_{k+2} + 2(k+2)(k+3)u_{k+1}^3, \\
\widetilde{R}_5 &= 3u_3u_5 - 5u_4^2, \quad \widetilde{S}_6 = 9u_3^2u_6 - 45u_3u_4u_5 + 40u_4^3, \\
T_7 &= 10u_3^3u_7 - 70u_3^2u_4u_6 - 49u_3^2u_5^2 + 280u_3u_4^2u_5 - 175u_4^4, \\
U_5 &= u_1^2\big[Q_3D_x^2Q_3 - \tfrac{5}{4}(D_xQ_3)^2\big] + u_1u_2Q_3D_xQ_3 - (2u_1u_3 - u_2^2)Q_3^2, \\
V_7 &= u_2^2\big[S_5D_x^2S_5 - -\tfrac{7}{6}(D_xS_5)^2\big] + u_2u_3S_5D_xS_5 - \tfrac{1}{2}(9u_2u_4 - 7u_3^2)S_5^2, \\
Z_9 &= u_3^2\big[T_7D_x^2T_7 - \tfrac{9}{8}(D_xT_7)^2\big] + u_3u_4T_7D_xT_7 - \tfrac{4}{5}(7u_3u_5 - 5u_4^2)T_7^2.
\end{aligned}
$$

مراجع

[1] Ablowitz, M.J., and Kodama, Y., *Note on asymptotic solutions of the Korteweg-de Veries equation with solitons*, Stud. Appl. Math. 66 (1982), 159-170.

[2] Anderson, I.M., *Variational Bicomplex*, Academic Press, to appear.

[3] Anderson, R.L., and Ibragimov, N.H., *Lie-Backlund Transformations in Aplications*, SIAM, Philadelphia, 1978.

[4] Backlund, A.V., *Ueber Flachentransformation*, Math. Ann. 9 (1876), 297-320.

[5] Bianchi, L. *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazione*; Enrico Spoerri Editore: Pisa, Italy, 1918.

[6] Dickson, L.E., *Differential equations from the group standpoint*, Ann. Math. 25 (1924), 287-378.

[7] Gonzalez-Gascon, F., and Gonzalez-Lopez, A. *Symmetries of differential equations.* IV , J. Math. Phys. 24 (1938), 2006-2021.

[8] Gonzalez-Lopez, A., *Symmetry bounds of variational problems*, J. Phys. A 27 (1994), 1205-1232.

[9] Ibragimov, N.H., *Group analysis of ordinary differential equation and the invariance principle in mathematical physics* (for the 150th anniversary of Sophus Lie), Russian Math. Surveys 47:4 (1992), 89-156.

[10] Lee, John M., *Introduction to smooth manifolds*, Springer, Washington, 2002.

[11] Lee, John M., *Riemannian Manifolds*, in: an introduction to curvature, Graduate Texts in Mathematics, vol. 176, Springer-Verlag, New York, 1997.

[12] Lie, S., and Engel, F., *Vorlesungen uber Differentialgleichungen mit Bekannten Infinitesimalen Transformationen*, B.G. Teubner, Leipzig, 1891.

[13] Lie, S., *Uber Integralinvarianten und ihre Verwertung fur die Theorie der Differentialgleichungen*, Leipz. Berichte 4 (1897), 369-410; also Gesammelte Abhandlungen, vol. 6, B.G. Teubner, Leipzig, 1927, pp. 664-701.

[14] Macaulay, F.S., *Some properties of enumeration in the theory of modular systems*, Proc. London Math. Soc. 26 (2) (1927), 531-555.

[15] Misner, Charles W., Thorne, Kip S., Wheeler, John Archibald, *Gravitation*, Second Edition, San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1973.

[16] Oliveri, F., *Lie Symmetries of Differential Equations: Classical Results and Recent Contributions*, Department of Mathematics, University of Messina, Contrada Papardo, Viale Ferdinando Stagnod'Alcontres 31, I–98166 Messina, Italy, 2010.

[17] Olver, P.J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1986.

[18] Olver, P.J., *Differential Invariants and Invariant Differential Equations Paper*, U.S.A., 1994.

[19] Olver, P.J., *Differential Invariants Paper*, U.S.A., 1993.

[20] Olver, P.J., *Equivalence, Invariants, and Symmetry*, University of Minnesota, 1995.

[21] Olver, P.J., Rosenau, p., *Group-Invariant Solutions of Differential Equations*, Siam J. Appl. Math. Vol. 47, No. 2, April 1987.

[22] Olver, P.J., Sapiro, G., and Tannenbaum, A., *Invariant geometric evolutions of surfaces and volumetric smoothing*, preprint, University of Minnesota, 1994.

[23] Ovsiannikov, L.V., *Group Analysis of Differential*, Academic Press, New Yourk, 1982.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اساسی	Fundamental
افقی	Horizontal
اکیدا	Strictly
امتداد	Prolongation
انتقال	Translation
بعد	Dimension
پایا	Stable
پایدارساز	Isotropy
پس‌کشنده	Pull Back
پیش‌برنده	Push Forward
تبدیل	Transformation
تبدیلات مقیاسی	Transformations Scale
تکاملی	Evolution
حقیقی مقدار	Real-Valued
خمیدگی	Curvature
دترمینان لی	Lie Determinant
معادله‌ی کورتج-دوریس	Korteveg-de Vries Equation

دیفرانسیل کامل .... Total Differential

دیفیومورفیسم .... Diffeomorphism

زیرنمایش، مجموعه جواب .... Subvariety

ژئودزیک .... Geodesic

سازگار .... Compatible

شبه‌پایا .... Pseudo-Stable

عملگر .... Operator

فرم برخوردی .... Contact Form

فشرده .... Compact

فضا-زمان .... Space-Time

فضای جت، فضای افشانه .... Jet Space

فلو .... Flow

کانکشن، التصاق .... Connection

کاهش .... Reduction

کروشه‌ی لی .... Lie Bracket

کلاف مماس .... Tangent Bundle

گروه تقارن .... Symmetry Group

لاگرانژی .... lagrangian

متریک شوارتزچیلد .... Schwarzschild Metric

متعددی .... Transitive

مدار .... Orbit

مستقل .... Independent

مسئله‌ی تغییراتی .... Variational Problem

مشتق تغییراتی .... Variational Derivative

مشتق کامل .... Total Derivative

مشتق لی .... Lie Derivative

مشخصه .... Characteristic

معادله دیفرانسیل .... Differential Equation

منحنی انتگرال .... Integral Curve

موثر .... Effective

موضعی .... Local

مولد بی‌نهایت کوچک .... Infinitesimal Generator

میدان برداری .... Vector Field

نیم-منظم .... Semi-Regular

ناوردای برخوردی .... Contact-Invariant

ناوردای دیفرانسیلی .... Differential Invariant

نگاشت نمایی .... Exponential Map

همبند .... Connect

هم‌کنج .... Coframe

وابسته .... Dependent

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

کلاف .... Bundle
مشخصه .... Characteristic
هم‌کنج .... Coframe
فشرده .... Compact
سازگار .... Compatible
کانکشن، التصاق .... Connection
فرم برخوردی .... Contact Form
ناوردای برخوردی .... Contact-Invariant
همبند .... Connect
خمیدگی .... Curvature
وابسته .... Dependent
دیفیومورفیسم .... Diffeomorphism
معادله دیفرانسیل .... Differential Equation
ناوردای دیفرانسیلی .... Differential Invariant
بعد .... Dimension
موثر .... Effective
تکاملی .... Evolution

Exponential Map .... نگاشت نمایی

Flow .... فلو

Fundamental .... اساسی

Geodesic .... ژئودزیک

Horizontal .... افقی

Independent .... مستقل

Infinitesimal Generator .... مولد بی‌نهایت کوچک

Isotropy .... پایدارساز

Integral Curve .... منحنی انتگرال

Jet Space .... فضای جت، فضای افشانه

Korteveg-de Vries Equation .... معادله‌ی کورتج-دوریس

Lagrangian .... لاگرانژی

Lie Bracket .... کروشه‌ی لی

Lie Derivative .... مشتق لی

Lie Determinant .... دترمینان لی

Local .... موضعی

Operator .... عملگر

Prolongation .... امتداد

Pseudo-Stable .... شبه‌پایا

Push Forward .... پیش‌برنده

Real-Valued .... حقیقی-مقدار

Reduction .... کاهش

Schwarzschild Metric .... متریک شوارتزچیلد

نیم-منظم .... Semi-Regular

پایا .... Stable

فضا-زمان .... Space-Time

اکیدا .... Strictly

زیرنمایش، مجموعه جواب .... Subvariety

گروه تقارن .... Symmetry Group

کلاف مماس .... Tangent Bundle

مشتق کامل .... Total Derivative

دیفرانسیل کامل .... Total Differential

تبدیل .... Transformation

تبدیلات مقیاسی .... Transformations Scale

انتقال .... Translation

متعددی .... Transitive

مشتق تغییراتی .... Variational Derivative

مسئله‌ی تغییراتی .... Variational Problem

Surname: Badpeima Name: Zeinab

Title: Differential Invariants and Its Applications to Differential Equations.

Supervisor: Dr. Ahmad Zireh
Advisor: Dr. Reza Hejazi

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics
Field: Differential Geometry

Technology University of Shahrood Faculty Of Mathematical Sciences
Date: 91/10/03 Number of pages: 88

Keywords: Symmetry Group, Prolongation, Jet Sapce, Differential Invariants, Differential Equations

Abstract

This thesis try that expresses a public method for finding the solution of differential equation by using differential invariants and their usage in differential equation. Chapter 1, explain concepts and basic definitions that are needed.

In chapter 2, at first define prolongation afterwards describe the prolongation of vector fields and group action with examples of them. Other section of this chapter including differential invariants with examples and the calculation method of them. As well as in chapter 3 placed differential equation and symmetry group along the method of calculating them.

In chapter 4, differential equation system and symmetry group invariants are calculating by using symmetry group. In addition, reduce the order and finding the solution of differential equation order 1 and upper by integrate. At the end of chapter equation order reduction method by using Multi – parametric symmetry group are explained.

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

Differential Invariants and Its Applications to Differential Equations.

Supervisor

Dr. Ahmad Zireh

Advisor

Dr. Reza Hejazi

by

Zeinab Badpeima

91/10/03