دانشکده: علوم ریاضی

گروه: ریاضی کاربردی

پایان نامه تحصیلی جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

عنوان پایان نامه ارشد

مجموعه‌های احاطه‌گر ۱– متحرک

دانشجو :

فاطمه شهمرادی

استاد راهنما :

دکتر جعفری راد

۱۱ دی ۱۹۳۱

قدردانی

اکنون که به یاری خداوند متعال این دوره از تحصیلم را به پایان می‌رسانم، بر خود واجب می‌دانم، از زحمات فراوان استاد فرهیخته و توانمندم جناب آقای دکتر جعفری‌راد که راهنمایی‌ها و نظرات ارزنده، صبر و حوصله فراوان ایشان نقش مهمی در به ثمر رساندن این پایان نامه داشت، صمیمانه تشکر می‌کنم.
همچنین لازم می‌دانم تلاش‌های خستگی ناپذیر پدر و مادر دلسوزم و همسر عزیزم، را که همواره ره‌گشای مشکلاتم در تمام مراحل زندگی بوده، ارج نهاده و مراتب قدردانی و تشکر قلبی خویش را از الطاف و مهربانی‌های آنها ابراز دارم.

چکیده

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است. فصل اول شامل تعاریف اولیه گراف است. در فصل دوم مجموعه احاطه‌گر ۱ - متحرک روی گراف‌ها را تعریف می‌کنیم و چند مثال برای آن بیان می‌کنیم و کران‌هایی برای آن ارائه می‌دهیم. در فصل سوم نیز مجموعه غیرافزونه را تعریف می‌کنیم و کران‌هایی برای عدد غیرافزونه و عدد احاطه‌گری امن روی درخت‌ها بیان می‌کنیم. فصل چهارم شامل الگوریتم‌هایی برای محاسبه عدد احاطه‌گری ۱ - متحرک روی درخت‌ها می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: مجموعه احاطه‌گر ۱ - متحرک، عدد احاطه‌گر ۱ - متحرک، مجموعه غیرافزونه، احاطه‌گر امن.

فهرست مطالب

فهرست مطالب ت

لیست تصاویر ث

جدول نمادها چ

۱ مقدمه و مفاهیم اولیه ۱
۱.۱ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی ۱

۲ مجموعه احاطه‌گر ۱ - متحرک ۱۰
۱.۲ تعاریف و نتایج اولیه ۱۰
۲.۲ کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری ۱ - متحرک گراف‌ها ۱۶

۳ احاطه‌گری امن، غیرافزونگی و ماکزیمم درجه در درخت‌ها ۲۴
۱.۳ مقدمه ۲۴
۲.۳ غیرافزونه پایین ۲۸
۳.۳ احاطه‌گر امن ۳۴

۴ احاطه‌گری ۱ - متحرک روی درخت‌ها ۳۸
۱.۴ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی ۳۸
۲.۴ الگوریتم برای درخت‌ها ۴۰
۳.۴ الگوریتم‌های جزئی ۴۲
۴.۴ یک مثال ۴۷
۵.۴ تذکر پایانی ۴۸

مراجع ۵۳

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۵۵

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۵۷

لیست تصاویر

۱.۱ گراف ۱

۲.۱ گراف کامل $K_۵$ ۴

۳.۱ گراف G و مکمل آن ۴

۴.۱ چرخ ۵

۵.۱ گراف کامل $K_{۲,۳}$ ۶

۶.۱ ستاره ۶

۷.۱ گراف G با $\gamma(G) = ۲$ و $\gamma_s(G) = ۴$ ۸

۱.۲ گراف G با $\gamma_m^۱(G) = ۶$ و $\gamma(G) = ۲$ ۱۱

۲.۲ $cor(K_۵)$ با $\gamma_m^۱(K_۵) = \gamma(K_۵)$ ۱۴

۳.۲ گراف G با $n = ۹$ و $\gamma_m^۱(G) = ۲$ ۱۶

۴.۲ گراف G با $n = ۸, k = ۴$ و $\gamma_m^۱(G) = ۴$ ۱۸

۵.۲ گراف G با $n = ۱۰, k = ۵$ و $\gamma_m^۱(G) = ۵$ ۲۱

۱.۳ گراف $P_۷$و $ir(P_۷) = ۳$ ۲۵

۲.۳ گراف G با $n = ۱۲$ و $ir(P_۷) = ۳$ ۲۷

۳.۳ گراف T ۲۹

۴.۳ جنگل $\Delta = ۴$ و $k = ۳$ ۳۷

۱.۴ گراف G با ۱۰ $= n$ و ۶ $= \gamma_m^{1}(G)$ ۳۹
۲.۴ گراف G با ۱۳ $= n$ و۷ $= \gamma_m^{1}(G)$ ۴۷
۳.۴ گراف $K_{3,m}$ با ۲ $= \gamma_m^{2}(K_{3,m})$ و ۳ $= \gamma_m^{1}(K_{3,m})$ ۵۰
۴.۴ مثال برای $\gamma_m^{1}(G) < \gamma_m^{2}(G)$ ۵۱
۵.۴ گراف $K_{1,8}$ ۵۲

جدول نمادها

مرتبه گراف . . . . . $n(G)$

درجه گراف . . . . . $deg(G)$

ماکسیمم درجه . . . . . $\Delta(G)$

مینیمم درجه . . . . . $\delta(G)$

گریز از مرکز رأس u . . . . . $e(u)$

قطر گراف . . . . . $diam(G)$

شعاع گراف . . . . . $rad(G)$

گراف کامل n رأسی . . . . . K_n

گراف تهی . . . . . N_n

مکمل گراف G . . . . . $\overline{G}$

چرخ . . . . . W_n

همسایگی باز رأس v . . . . . $N(v)$

همسایگی بسته رأس v . . . . . $N[v]$

پوشش رأسی . . . . . $\beta(G)$

عدد احاطه‌گری . . . . . $\gamma(G)$

عدد احاطه‌گری امن . . . . . $\gamma_s(G)$

عدد احاطه‌گری ۱ - متحرک	$\gamma_m^{1}(G)$
عدد احاطه‌گری k - متحرک	$\gamma_m^{k}(G)$
کرونا	$cor(G)$
عدد ۲ - احاطه‌گری	$\gamma_{2}(G)$
عدد خوشه ای	$\overline{\chi}(G)$
عدد غیر افزونگی	$ir(G)$

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

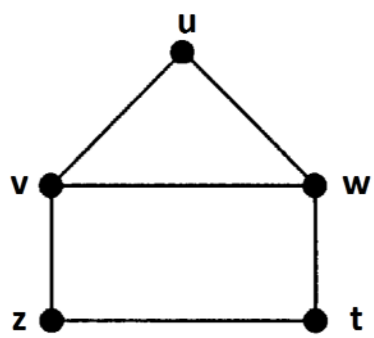
۱.۱ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی

مطالب این فصل براساس منبع [۱] و [۵]نوشته شده اند.

تعریف ۱.۱.۱. (گراف[۱]). یک گراف ساده G با تعداد n رأس[۲] و تعداد m یال [۳] متشکل از مجموعه رأس‌های $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{e_1, ..., e_n\}$ است که در آن هر یال، یک جفت نامرتب از رأس‌ها است و به جای یال $\{u, v\}$ می‌نویسیم uv. اگر $uv \in E(G)$ آنگاه گوییم u و v مجاور هستند. رأس‌های مشمول در یک یال e نقاط انتهایی آن هستند. از این پس گراف را به صورت دو مؤلفه $(V(G), E(G))$ نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال شکل ۱.۱ گراف ساده G را نشان می‌دهد که مجموعه رئوس آن، $V(G)$ عبارت است از $\{u, v, w, z, t\}$ و مجموعه یال‌های آن، برابر$\{\{u, w\}, \{u, v\}, \{v, z\}, \{w, t\}, \{z, t\}, \{v, w\}\}$ است.

تعریف ۲.۱.۱. (زیرگراف[۴]). یک زیرگراف از گراف G، گرافی است مانند H به طوری که $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. زیرگراف H از G را یک زیر گراف القایی می‌نامیم، هرگاه هر یال G که دو سر آن در $V(H)$ قرار دارد متعلق به $E(H)$ باشد. در صورتی که زیرگراف H از G در شرط $V(H) = V(G)$ صدق کند، آن را زیرگراف فراگیر از G نامیم.

[۱] Graph
[۲] Vertex
[۳] Edge
[۴] Subgraph



شکل ۱.۱: گراف ساده G با $n = ۵$

تعریف ۳.۱.۱. (مسیر[۵]). یک گشت، به طول k یک دنباله‌ی متناوب $v_۰, e_۱, v_۱, e_۲, ..., e_k, v_k$ از رأس‌ها و یال‌هاست که به دنبال یکدیگر می‌آیند و به طوری که به ازای هر i، $e_i = v_{i-۱}v_i$. گشتی که در آن هر رأس بیش از یکبار ظاهر نشود یک مسیر نام دارد. در شکل ۱.۱، v, vz, z, zt, t, tw, w یک راه برای رفتن از v به w است. این را یک گشت به طول ۳ می‌گویند. همچنین $u, uv, v, vz, z, zt, t, tw, w$ یک گشت به طول ۴ است. مثلاً $u, uv, v, vz, z, zt, t, tw, w$ یک مسیر است.

تعریف ۴.۱.۱. (گراف همبند[۶]). گرافی که در بین هر دو رأس مسیری وجود دارد یک گراف همبند نام دارد. در غیر این صورت گراف ناهمبند است. بدیهی است که هر گراف ناهمبند را می‌توان به صورت اجتماع تعداد متناهی از گراف‌های همبند در نظر گرفت، در این صورت هر یک از زیرگراف‌های همبند را یک مؤلفه گراف G می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱. (جنگل). یک گراف بدون دور را جنگل گویند.

تعریف ۶.۱.۱. (درخت[۷]). گراف همبندی که در آن بین هر دو رأس فقط یک مسیر وجود دارد را درخت نامند. درخت فراگیر یک زیرگراف فراگیری است که درخت باشد.

[۵] Path
[۶] Connected graph
[۷] Tree

تعریف ۷.۱.۱. (مرتبه[۸]). مرتبه گراف G، که با $n(G)$ نشان داده می‌شود تعداد رأس‌های گراف G است.

تعریف ۸.۱.۱. (درجه[۹] رأس). تعداد یال‌هایی که از رأس v می گذرند را درجه آن رأس گویند و آن را با $deg(v)$ یا $d(v)$ نشان می‌دهند. ماکسیمم و مینیمم درجه در بین درجات رأس‌های G را به ترتیب با $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۹.۱.۱. (برگ[۱۰]). یک برگ (یا رأس آویخته) رأسی از درجه یک می‌باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. (فاصله[۱۱]). اگر G دارای یک مسیر $u-v$ باشد، آنگاه فاصله u تا v، که آن را با $d_G(u,v)$ و به سادگی $d(u,v)$ می‌نویسند کوچکترین طول یک $u-v$ مسیر است. اگر G دارای چنین مسیری نباشد، آنگاه تعریف می کنند $d(u,v)=\infty$.

تعریف ۱۱.۱.۱. (گریز از مرکز[۱۲]). گریز از مرکز یک رأس u که آن را به صورت $e(u)$ می‌نویسند عبارت است از $max\{d(u,v) : v \in V(G)\}$.

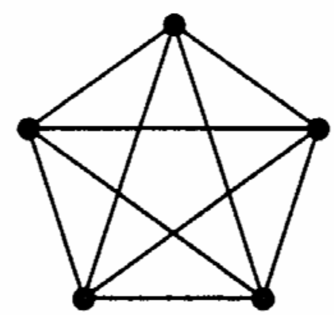
تعریف ۱۲.۱.۱. (قطر[۱۳]). قطر یک گراف G عبارت است از $max\{e(u) : u \in V(G)\}$ و آن را با $diam(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۳.۱.۱. (شعاع[۱۴]). شعاع یک گراف G عبارت است از $min\{e(u) : u \in V(G)\}$ و آن را با $rad(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۴.۱.۱. (گراف کامل[۱۵]). یک گراف ساده که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند، را یک گراف کامل می‌نامند. گراف کامل با n رأس را معمولاً به صورت K_n، نشان می‌دهند. (شکل ۲.۱ گراف کامل K_5 را

[۸] Order
[۹] Degree
[۱۰] Leaf
[۱۱] Distance
[۱۲] Eccentricity
[۱۳] Diameter
[۱۴] Radius
[۱۵] Complete

نشان می‌دهد). به راحتی می‌توان دید که K_n دارای $\frac{1}{۲}n(n-۱)$ یال است.



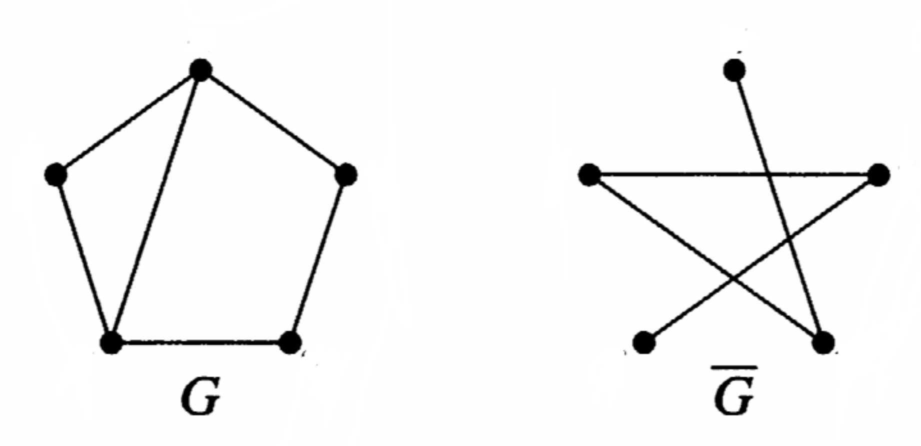
شکل ۲.۱: گراف کامل $K_۵$

تعریف ۱۵.۱.۱. (گراف تهی). گرافی را که مجموعه یال آن تهی است یک گراف تهی می‌نامند. گراف تهی با n رأس را با N_n نشان می‌دهند.

تعریف ۱۶.۱.۱. (گراف منتظم). گراف G را منتظم نامند هرگاه درجه تمام رئوس آن با هم برابر باشند. اگر درجه هر رأس r باشد آن گراف را r-منتظم می‌نامند.

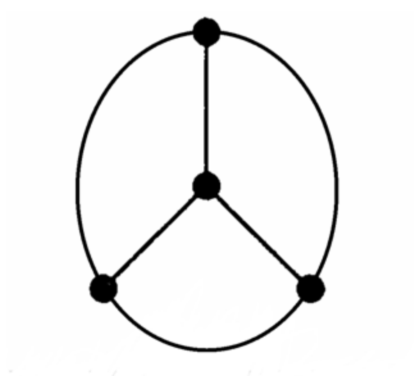
گراف تهی گرافی منتظم از درجه صفر و گراف کامل K_n، گرافی منتظم از درجه $n-۱$ است. همچنین می‌توان دید که اگر G، n رأس داشته باشد و منتظم از درجه r باشد، آنگاه G دارای $\frac{1}{۲}rn$ یال است.

تعریف ۱۷.۱.۱. (مکمل یک گراف ساده). فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه رأس‌های $V(G)$ است. مکمل G با نماد $\overline{G}$ نشان داده می‌شود، گراف ساده‌ای است که مجموعه رأس‌های آن $V(G)$ است و در آن هر دو رأسی که در G مجاور نیستند، مجاور هستند. در نتیجه اگر G، n رأس داشته باشد، آنگاه $\overline{G}$ را می‌توان با حذف یال های G، از K_n به دست آورد. توجه کنید که مکمل یک گراف کامل، یک گراف تهی است و مکمل یک گراف دو بخشی کامل عبارت است از اجتماع دو گراف کامل. (شکل ۳.۱ گراف G و مکمل آن را نشان می‌دهد).



شکل ۳.۱: گراف G و مکمل آن

تعریف ۱۸.۱.۱. (چرخ [۱۶]). گرافی که از اتصال هر یک از رئوس یک دور $C_{n-۱}$ به یک رأس جدید v به دست می‌آید را یک چرخ n رأسی می‌نامند و با W_n نشان می‌دهند. (شکل ۴.۱ گراف $W_۴$ را نشان می دهد).

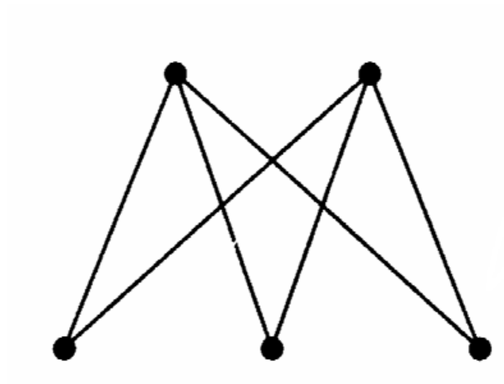


شکل ۴.۱: چرخ

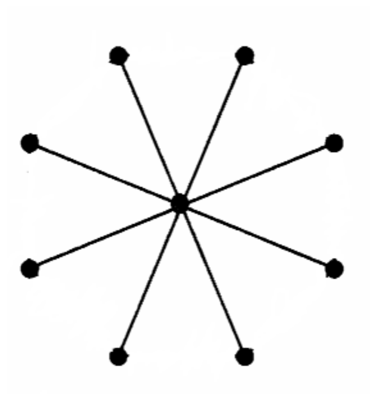
تعریف ۱۹.۱.۱. (گراف دو بخشی). فرض کنید مجموعه رئوس یک گراف را بتوان به دو مجموعه مجزای $V_۱$ و $V_۲$ افراز کرد، به طوری که هر یال G یک رأس از $V_۱$ را به یک رأس از $V_۲$ وصل کند. در این صورت G را یک گراف دو بخشی می‌نامند. در صورتی که بخواهیم دو مجموعه مربوطه را مشخص کنیم آن را به صورت $G(V_۱, V_۲)$

[۱۶] Wheel

نشان می‌دهیم. تأکید می‌شود که در یک گراف دو بخشی، لزوماً هر رأس V_1 به هر رأس V_2 وصل نیست. اما اگر چنین باشد و G ساده باشد، آنگاه G را یک گراف دو بخشی کامل می‌نامند و معمولاً به صورت $K_{r,s}$ نمایش می‌دهند که در آن r, s به ترتیب تعداد رئوس در V_1 و V_2 است. توجه کنید که $K_{r,s}$، $r+s$ رأس و rs یال دارد. (شکل ۱.۵ گراف $K_{2,3}$ را نشان می‌دهد). یک گراف دو بخشی کامل را که به صورت $K_{1,s}$ می‌باشد، ستاره[۱۷] نامیده می‌شود. (شکل ۱.۶ گراف $K_{1,8}$ را نشان می‌دهد).



شکل ۱.۵: گراف کامل $K_{2,3}$



شکل ۱.۶: ستاره

[۱۷] Star

تعریف ۲۰.۱.۱. (مثلث آزاد). گرافی را که هیچ زیرگراف القایی $C_۳$ نداشته باشد مثلث آزاد می گوییم.

تعریف ۲۱.۱.۱. (اصل لانه کبوتری[۱۸]). اگر مجموعه‌ای متشکل از بیش از kn شي به n رده افراز شود، آنگاه رده‌ای بیش از k شي دریافت می کند .

تعریف ۲۲.۱.۱. (عدد خوشه‌ای گراف). عدد خوشه ای گراف G مرتبه بزرگ ترین زیر گراف کامل آن است که با $W(G)$ نمایش داده می‌شود. به عنوان مثال $W(K_n) = n$ و $W(P_n) = ۲$ می‌باشد.

تعریف ۲۳.۱.۱. (اجتماع گراف‌ها). اجتماع گراف‌ها را به صورت $G \cup H$ می‌نویسیم، که گرافی با مجموعه رأس‌های $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ و مجموعه یال‌های $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$ می‌باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. (گراف$G+H$). گراف $G+H$، گرافی با مجموعه رأس‌های $V(G+H) = V(G) \cup V(H)$ که این اجتماع مجزا است و مجموعه یال‌های $E(G+H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv | u \in V(G), v \in V(H)\}$ می‌باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱. (همسایگی[۱۹]). فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف باشد. برای یک رأس $v \in V(G)$، همسایگی باز v مجموعه $N(v) = \{u \in V | uv \in E\}$ و همسایگی بسته v مجموعه $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ می‌باشد. و به طور مشابه برای هر مجموعه $S \subseteq V(G)$ خواهیم داشت $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ و همچنین $N[S] = N(S) \cup S$.

تعریف ۲۶.۱.۱. (همسایه اختصاصی). فرض کنید $G = (V(G), E(G))$ یک گراف ساده است اگر $X \subseteq V$ و $v \in X$ باشد، آنگاه رأس u را همسایه اختصاصی v روی X گوییم هرگاه $N(u) \cap X = \{v\}$.

اگر رأس $u \in X$ باشد آنگاه رأس u یک همسایه اختصاصی داخلی v روی X (یا به طور اختصار $ipn - X$) گوییم. در غیر این صورت اگر رأس$u \in V - X$ باشد آنگاه رأس u را یک همسایه اختصاصی خارجی v روی X

[۱۸] Pigeonhole principle
[۱۹] Neighborhood

(یا به طور اختصار $epn-X$) گوییم. مجموعه همه همسایه‌های اختصاصی خارجی v روی X با $EPN(v,X)$ نمایش داده می‌شود. همچنین قرار می‌دهیم

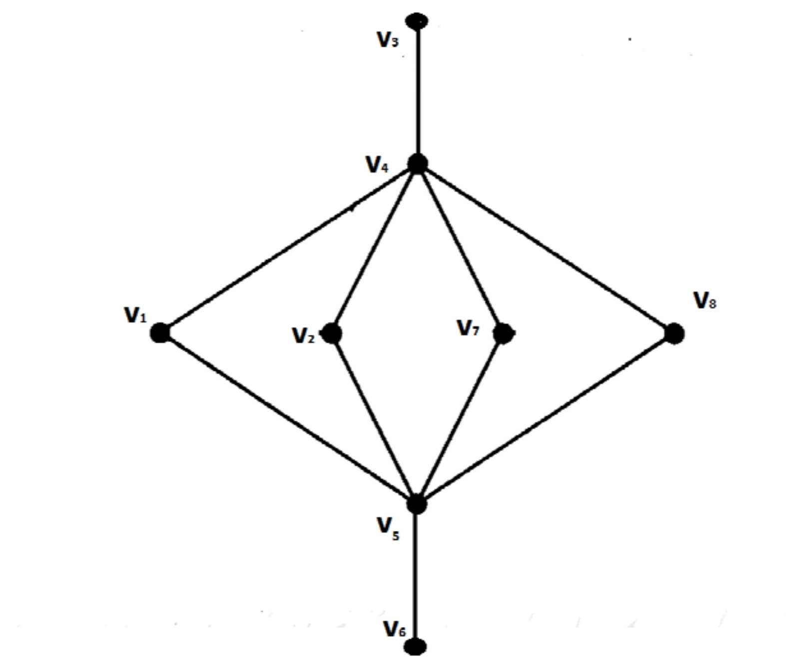
$$PN(v,X)=\begin{cases} EPN(v,X)\cup\{v\} & \text{اگر } v \text{ در } G[X] \text{ یک رأس تنها باشد،} \\ EPN(v,X) & o.w. \end{cases}$$

تعریف ۲۷.۱.۱. (احاطه‌گری[۲۰]). مجموعه $S\subseteq V(G)$ را یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف $G=(V,E)$ می‌گوییم هرگاه $N[S]=V(G)$ باشد. اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر در گراف G را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال در شکل ۷.۱ مجموعه $\{v_۴,v_۵\}$ کوچکترین مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. لذا $\gamma(G)=۲$.

تعریف ۲۸.۱.۱. (احاطه‌گر امن[۲۱]). مجموعه $S\subseteq V(G)$ را مجموعه احاطه‌گر امن برای گراف $G=(V,E)$ می‌گوییم هرگاه به ازای هر $v\in V(G)-S$ یک $u\in N(v)\cap S$ موجود باشد به طوری که $(S-\{u\})\cup\{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر باشد. اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر امن در گراف G را با $\gamma_s(G)$ نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال در شکل ۷.۱ مجموعه $\{v_۳,v_۴,v_۵,v_۶\}$ کوچکترین مجموعه احاطه‌گر امن برای گراف G است. لذا $\gamma_s(G)=۴$.

تعریف ۲۹.۱.۱. (پوشش رأسی). به زیرمجموعه S از $V(G)$ یک پوشش رأسی می گوییم، هرگاه هر یال گراف G حداقل یک سر در آن داشته باشد. عدد پوشش رأسی گراف G برابر با کوچکترین اندازه یک پوشش رأسی است و با $\beta(G)$ نمایش داده می‌شود.

[۲۰] Domination
[۲۱] Secure domination



شکل ۷.۱: گراف G با $n = ۸$ و $\gamma(G) = ۲$ و $\gamma_s(G) = ۴$

فصل ۲

مجموعه احاطه‌گر ۱ - متحرک

۱.۲ تعاریف و نتایج اولیه

کلیه مطالب این فصل براساس مرجع [۱] نوشته شده اند. در این بخش ابتدا به تعریف اولیه مجموعه احاطه‌گر ۱ - متحرک می‌پردازیم و سپس رابطه بین عدد احاطه‌گری ۱ - متحرک و عدد احاطه‌گری را بیان می‌کنیم. در ادامه عدد احاطه‌گری را برای گراف‌ها محاسبه می‌کنیم و گرافی می‌سازیم که عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری ۱ - متحرک آن با هم یکسان باشد. در انتها رابطه بین عدد احاطه‌گری ۱ - متحرک و امن را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. مجموعه احاطه‌گر $S \subseteq V(G)$ در گراف حداقل دو رأسی G را یک مجموعه احاطه‌گر ۱- متحرک[۱] می‌گوییم هر گاه به ازای هر رأس $v \in S$، حداقل یک رأس $u \in N(v)$ وجود داشته باشد به طوری که $(S - \{v\}) \cup \{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G باشد.

در تعریف فوق به ازای رأس $v \in S$، رأس $u \in N(v)$ می‌تواند رأسی از S یا خارج از S باشد. اگر $u \in S$ باشد آن گاه $(S - \{v\}) \cup \{u\} = S - \{v\}$. لذا تعریف معادل زیر را خواهیم داشت.

تعریف ۲.۱.۲. مجموعه احاطه‌گر $S \subseteq V(G)$ در گراف حداقل دو رأسی G را یک مجموعه احاطه‌گر ۱- متحرک گوییم هرگاه به ازای هر رأس $v \in S$ یکی از دو حالت زیر را داشته باشیم:

۱) $S - \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G باشد.

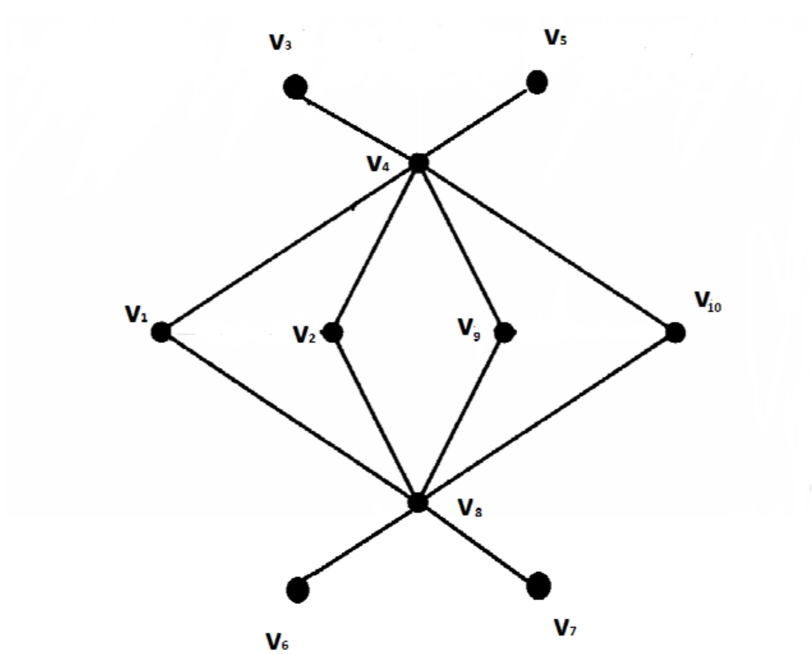
[۱] 1-Movable

یا

۲) رأس $u \in (V(G)-S)\cap N(v)$ چنان موجود باشد به طوری که $(S-\{v\})\cup\{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G باشد.

اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک در گراف G را با $\gamma_m^1(G)$ نمایش می‌دهیم.

مثال. در شکل ۱.۲ گرافی را مشاهده می‌کنیم که در آن مجموعه $S=\{v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک می‌نیمم برای آن می‌باشد یعنی $\gamma_m^1(G)=6$. از طرفی $S=\{v_4,v_8\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف است یعنی $\gamma(G)=2$ می‌باشد.



شکل ۱.۲: گراف G با $n=10$ و $\gamma_m^1(G)=6$ و $\gamma(G)=2$

مشاهده ۱.۱.۲. هر مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد، در نتیجه در هر گراف دلخواه G خواهیم داشت $\gamma(G)\leq\gamma_m^1(G)$.

تذکر ۱.۱.۲. کران فوق می‌تواند اکید باشد. در این خصوص فرض کنید $P_۳$ یک مسیر با سه رأس $v_۱, v_۲, v_۳$ باشد که در آن $v_۲$ با $v_۱$ و $v_۳$ مجاور است. به راحتی می توان دید که $S = \{v_۲\}$ یک مجموعه احاطه‌گر می‌نیمم برای $P_۳$ می‌باشد و همچنین هر مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای $P_۳$ مانند S باید حداقل دارای دو رأس داشته باشد. از طرفی $\{v_۱, v_۳\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک است. لذا $\gamma_m^۱(P_۳) = ۲$ در حالی که $\gamma(P_۳) = ۱$.

در مشاهده بعدی خواهیم دید که کران موجود در قضیه ۱.۱.۲ می‌تواند قابل دسترسی باشد.

مشاهده ۲.۱.۲. برای $n \geq ۲$ خواهیم داشت:

$$\gamma(K_n) = \gamma_m^۱(K_n) = ۱.$$

اثبات. طبق قضیه ۱.۱.۲ داریم $۱ = \gamma(K_n) \leq \gamma_m^۱(K_n)$ می‌باشد. حال باید ثابت کنیم $\gamma_m^۱(K_n) \leq \gamma(K_n)$. فرض می‌کنیم $S = \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر می‌نیمم برای K_n باشد. چون $n \geq ۲$ است لذا $V(G) - S \neq \emptyset$. در این صورت برای هر رأس $u \in (V(G) - S) \cap N(v)$، $(S - \{v\}) \cup \{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G است. یعنی S یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای G است و در نتیجه $\gamma_m^۱(K_n) \leq |S| = ۱$. □

مشاهده ۳.۱.۲. برای $n \geq ۲$ داریم: $\gamma(K_{۱,n}) = ۱$ و $\gamma_m^۱(K_{۱,n}) = n$.

اثبات. برای اثبات قسمت اول می‌دانیم گراف $K_{۱,n}$ از دو بخش تشکیل شده است که یک بخش آن شامل یک رأس تنها و بخش دیگر شامل n رأس است و تک رأس بخش اول با تمام رأس‌های بخش دوم مجاور است. لذا مجموعه تک عضوی رأس بخش اول یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه یک برای گراف $K_{۱,n}$ می‌باشد. در نتیجه داریم $\gamma(K_{۱,n}) = ۱$.

برای اثبات قسمت دوم فرض می‌کنیم $X = \{x\}$ و $Y = \{v_۱, v_۲, ..., v_n\}$ بخش‌های $K_{۱,n}$ باشند. نشان می‌دهیم $S = \{x, v_۱, ..., v_{n-۱}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای $K_{۱,n}$ است. رأس دلخواه $v \in S$ را در نظر می‌گیریم. دو حالت زیر را داریم:

حالت اول : $v \in X$. در این صورت شرایط قسمت ۲ از تعریف ۲.۱.۲ برقرار است زیرا $v_n \in (V(G) - S) \cap N(v)$

است و $(S-\{v\})\cup\{v_n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $K_{1,n}$ است.

حالت دوم : $v\in Y$. در این صورت شرایط قسمت ۱ از تعریف ۲.۱.۲ برقرار است زیرا به ازای هر رأس $v\in\{v_1,...,v_{n-1}\}$ داریم که $S-\{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $K_{1,n}$ است. در نتیجه خواهیم داشت $\gamma_m^1(K_{1,n})\leq n$.

حال باید نشان دهیم $\gamma_m^1(K_{1,n})\geq n$. در اینجا به برهان خلف فرض می‌کنیم $\gamma_m^1(K_{1,n})\leq n-1$ باشد. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک می‌نیمم باشد. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $x\in S$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $S=\{x,v_1,...,v_{n-2}\}$. در این صورت برای هر دو رأس $x,y\in Y$، $(S-\{x\})\cup\{y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $K_{1,n}$ نمی‌باشد زیرا $(S-\{x\})\cup\{y\}$، همه رأس‌های Y احاطه نمی‌کند که تناقض است.

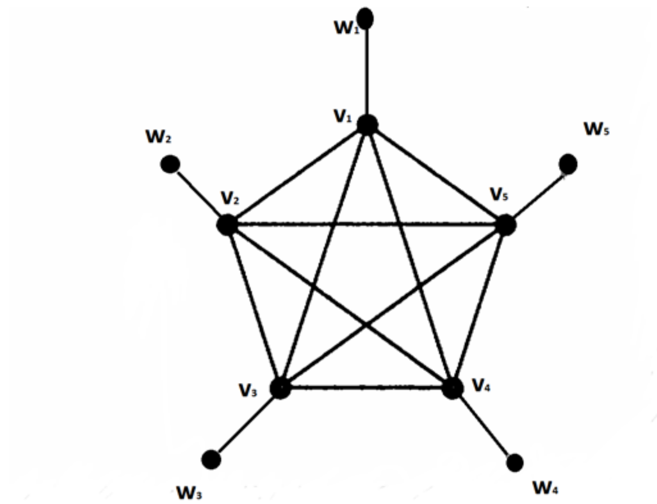
حالت دوم: $x\notin S$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $S=\{v_1,...,v_{n-1}\}$. در این صورت S یک مجموعه احاطه‌گر برای $K_{1,n}$ نمی‌باشد زیرا رأس v_n توسط S احاطه نمی‌شود این نیز تناقض است. □

از مشاهده بالا می‌توان نتیجه گرفت که $\gamma_m^1(G)-\gamma(G)$ در گراف G می‌تواند به طور دلخواه خیلی بزرگ شود.

اینک دسته دیگری از گراف‌ها را معرفی می‌کنیم که $\gamma(G)=\gamma_m^1(G)$. منظور از کرونا[۲] روی گراف G که با $cor(G)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که از گراف n رأسی G به همراه n رأس جدید تشکیل شده است، به طوری که هر یک از رأس‌های جدید به دقیقاً یک رأس از گراف G متصلند و هیچ دو رأس جدید همسایه مشترک ندارند. در نتیجه $cor(G)$ دارای $2n$ رأس و $E(G)+n$ یال است.

مثال. در شکل ۲.۲، $cor(K_5)$ را مشاهده می کنیم که رأس‌های v_5,v_4,v_3,v_2,v_1 رأس‌های گراف K_5 و رأس‌های w_5,w_4,w_3,w_2,w_1 رأس‌های جدید می‌باشند.

[۲] Corona



شکل ۲.۲: گراف $cor(K_۵)$ با $\gamma_m^۱(K_۵)=\gamma(K_۵)$

لم ۲.۱.۱. اگر G یک گراف دلخواه n رأسی باشد آنگاه $\gamma_m^۱(cor(G))=\gamma(cor(G))=n$.

اثبات. فرض می‌کنیم که $v_۱,v_۲,...,v_n$ رأس های گراف G و $w_۱,w_۲,...,w_n$ رأس‌های جدید هستند به طوری که به ازای هر $۱\leq i\leq n$، v_i با w_i همسایه است. ادعا می‌کنیم $\gamma(cor(G))=n$ می‌باشد. واضح است که $\gamma(cor(G))\geq n$. باید نشان دهیم $\gamma(cor(G))\leq n$. برای این منظور $V(G)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G است، لذا $\gamma(cor(G))\leq n$.

طبق قضیه ۲.۱.۱ می‌دانیم $n=\gamma(cor(G))\leq\gamma_m^۱(cor(G))$. نشان دهیم $n=\gamma(cor(G))\geq\gamma_m^۱(cor(G))$. فرض می‌کنیم که این طور نباشد، پس حداقل به ازای یک i رأس های v_i و w_i در مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک موجود نیستند در نتیجه w_i توسط مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک احاطه نمی‌شود. نتیجه می‌گیریم که $\gamma_m^۱(cor(G))=n$. □

مشاهده ۲.۱.۴. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک باشد و S^+ مجموعه‌ای شامل S باشد در این صورت S^+ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای G است.

اثبات. به ازای $v\in S^+$ دو حالت اتفاق می‌افتد:

حالت اول: $v \in S$. چون S یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای G است لذا یا $S-\{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G است و یا رأسی مانند $u \in V(G)-S$ موجود است که $(S-\{v\})\cup\{u\}$ مجموعه‌ای احاطه‌گر برای G باشد. اگر $S-\{v\}$ مجموعه‌ای احاطه‌گر برای G باشد آنگاه $S^+-\{v\}$ نیز مجموعه‌ای احاطه‌گر برای G است. لذا فرض می‌کنیم رأسی مانند $u \in V(G)-S$ موجود باشد که $(S-\{v\})\cup\{u\}$ مجموعه‌ای احاطه‌گر برای G باشد. اگر $u \in S^+-S$ آنگاه $S^+-\{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G است. لذا فرض می‌کنیم $u \notin S^+-S$، آنگاه $(S^+-\{v\})\cup\{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G است. در نتیجه بنا به تعریف، S^+ مجموعه‌ای احاطه‌گر ۱-متحرک برای G است.

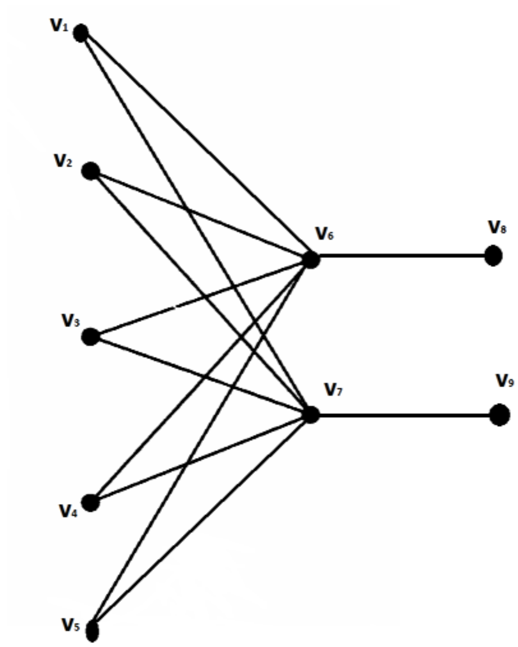
حالت دوم: $v \notin S$. چون $S \subseteq S^+-\{v\}$، لذا $S^+-\{v\}$ مجموعه‌ای احاطه‌گر برای G است. در نتیجه S^+ مجموعه‌ای احاطه‌گر ۱-متحرک برای G است. $\square$

در قضیه ۶.۲.۲ خواهیم دید که در هر گراف دلخواه G، هر مجموعه احاطه‌گر امن یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک می‌باشد.

حائز اهمیت است که در گراف دلخواه G، یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک لزوماً مجموعه احاطه‌گر امن نمی‌باشد.

مثال. در شکل ۳.۲، $S=\{v_۶,v_۷\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک است، زیرا رأس $v_۶$ همسایه‌ای مانند رأس $v_۸$ دارد به طوری که $(S-\{v_۶\})\cup\{v_۸\}=\{v_۷,v_۸\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G می‌باشد و همچنین رأس $v_۷$ همسایه‌ای مانند رأس $v_۹$ دارد به طوری که $(S-\{v_۷\})\cup\{v_۹\}=\{v_۶,v_۹\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G می‌باشد. درحالی که مجموعه $S=\{v_۶,v_۷\}$ یک مجموعه احاطه‌گر امن نیست. برای مثال رأس $v_۵$ همسایه‌ای مانند رأس v در $S=\{v_۷,v_۶\}$ ندارد به طوری که $(S-\{v\})\cup\{v_۵\}$ یک مجموعه احاطه‌گر باشد.

لازم به ذکر است که احاطه‌گری امن و احاطه‌گری ۱-متحرک می‌توانند به عنوان بازی دو نفره در نظر گرفته شوند. برای احاطه‌گری ۱-متحرک بازیکن شماره ۱ مجموعه $S \subseteq V(G)$ را انتخاب می‌کند و بازیکن شماره ۲ رأس $v \in S$ را انتخاب می‌کند، اگر مجموعه $S-\{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر باشد آنگاه بازیکن شماره



شکل ۳.۲: گراف G با ۹ $= n$ و ۲ $= \gamma_m^1(G)$

۱ برنده است در غیر این صورت بازیکن شماره ۱ رأس $u \in (V(G)-S)\cap N(v)$ را انتخاب می کند. اگر $S-\{v\}\cup\{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر باشد بازیکن شماره ۱ برنده است درغیر این صورت بازیکن شماره ۲ برنده است.

برای مجموعه احاطه‌گر امن بازیکن شماره ۱ مجموعه $S\subseteq V(G)$ را انتخاب می‌کند و بازیکن شماره ۲ رأس $x \in V(G)-S$ را انتخاب می‌کند بازیکن شماره ۲ سپس رأس $y \in N(x)\cap S$ را انتخاب می‌کند اگر $S-\{x\}\cup\{y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر باشد آنگاه بازیکن شماره ۱ برنده است در غیر این صورت بازیکن شماره ۲ برنده است.

۲.۲ کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری ۱-متحرک گراف‌ها

دراین بخش به بیان کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری ۱-متحرک می‌پردازیم. در ابتدا عدد احاطه‌گری ۱-متحرک را در گراف‌های ناهمبند بررسی می‌کنیم.

مشاهده ۱.۲.۲. فرض کنید G یک گراف ناهمبند و فاقد رأس تنها با مؤلفه‌های $G_1, G_2, ..., G_k$ باشد. در این صورت

$$\gamma_m^1(G) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_m^1(G_i).$$

اثبات. فرض کنیم $S_1, ..., S_m$ به ترتیب مؤلفه‌های احاطه‌گر ۱-متحرک می‌نیمال برای مجموعه‌های $G_1, ..., G_m$ باشند و $|S_i| = \gamma_m^1(G_i)$. در این صورت $S_1 \cup ... \cup S_m$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای G می‌باشد. در نتیجه $\gamma_m^1(G) \leq |S_1 \cup ... \cup S_m| = \sum_{i=1}^{m} \gamma_m^1(G_i)$.

از طرفی فرض می‌کنیم S یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک می‌نیمال برای G باشد و $|S| = \gamma_m^1(G)$. در این صورت S یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای $G_1 \cup ... \cup G_m$ است. در نتیجه $\sum_{i=1}^{m} \gamma_m^1(G_i) \leq |S|$ می‌باشد. از طرفی می‌دانیم $|S| = \gamma_m^1(G)$ بنابراین $\gamma_m^1(G) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_m^1(G_i)$. □

لذا از این پس گراف‌های همبند را بررسی می‌کنیم.

مشاهده ۲.۲.۲. اگر G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq 2$ باشد آنگاه

$$1 \leq \gamma_m^1(G) \leq n - 1.$$

اثبات. کران پایین واضح می‌باشد. برای به دست آوردن کران بالا فرض کنید $S = V(G) - \{x\}$ که در آن x یک رأس دلخواه از G است. نشان می‌دهیم که S یک مجموعه احاطه ۱-متحرک می‌باشد. فرض کنید $v \notin S$، دو حالت زیر را دار یم:

حالت اول: $v \in N(x)$. در این صورت با استفاده از قسمت ۱ تعریف ۲.۱.۲، $S - \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G می‌باشد.

حالت دوم: $v \in N(x)$. در این صورت مجموعه $(S - \{v\}) \cup \{x\}$، G را احاطه می‌کند. بنابراین مجموعه S با شرط $|S| = n - 1$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای G می‌باشد. □

درقضیه ۱.۲.۲ خواهیم دید که کران پایین مشاهده ۲.۲.۲ می‌تواند قابل دسترسی باشد.

قضیه ۱.۲.۲. اگر G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq ۲$ باشد آنگاه $\gamma_m^{۱}(G) = ۱$ اگر و تنها اگر دو رأس با درجه $n - ۱$ داشته باشد.

اثبات. $(\Leftarrow)$:

فرض می‌کنیم G دو رأس با درجه $n - ۱$ داشته باشد که آنها را x و y می‌نامیم. می‌دانیم $xy \in E(G)$. نشان می‌دهیم $S = \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای G است. چون $(S - \{x\}) \cup \{y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G است، در نتیجه S یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای G است.

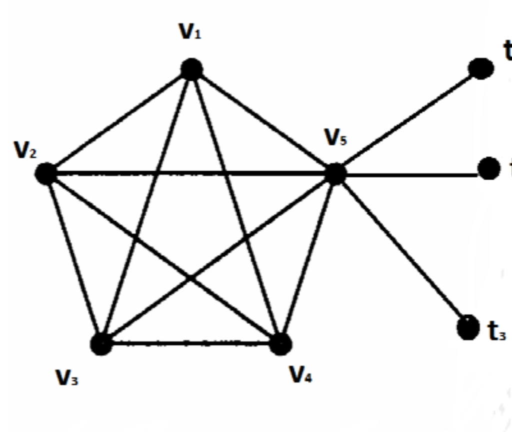
$(\Rightarrow)$:

فرض کنید $\gamma_m^{۱}(G) = ۱$ و $S = \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای G باشد. اما S مجموعه‌ای احاطه‌گر است. لذا $deg(x) = n - ۱$. بنا به تعریف یک رأس $y \in (V(G) - S) \cap N(x)$ موجود است که $(S - \{x\}) \cup \{y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G می‌باشد. امّا $\{y\} = (S - \{x\}) \cup \{y\}$. لذا خواهیم داشت $deg(y) = n - ۱$. □

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید دو عدد k, n را داریم به طوری که $۱ \leq k \leq n$. در این صورت یک گراف همبند از مرتبه n وجود دارد که عدد احاطه‌گری ۱-متحرک آن k می‌باشد.

اثبات. فرض کنید اعداد k, n با شرط $۱ \leq k \leq n$ داده شده باشند. فرض کنید u رأس دلخواهی از گراف $K_{n-k-۱}$ باشد و فرض کنید G گراف حاصل از $K_{n-k-۱}$ و $\overline{K_{k-۱}}$ با وصل کردن u به تمام رأس‌های $\overline{K_{k-۱}}$ باشد. در این صورت $V(\overline{K_{k-۱}}) \cup \{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک می‌نیمم است. زیرا $K_{n-k-۱}$ یک گراف کامل است و عدد احاطه‌گری ۱-متحرک آن برابر یک می‌باشد. لذا مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک آن یک مجموعه تک عضوی می‌باشد. □

مثال. شکل ۴.۲ گرافی برای $n = ۸$ و $k = ۴$ را نمایش می‌دهد. در این شکل مجموعه $S = \{v_۵, t_۱, t_۲, t_۳\}$ کوچکترین مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای گراف می‌باشد. لذا $\gamma_m^{۱}(G) = ۴$.



شکل ۴.۲: گراف G برای $n=۸, k=۴$ و $\gamma_m^۱(G)=۴$ مثال برای قضیه ۲.۲.۲

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq ۲$ باشد. در این صورت $\gamma_m^۱(G)=n-۱$ اگر و تنها اگر $G=K_{۱,n-۱}$.

اثبات. $(\Rightarrow)$:

از مشاهده ۳.۱.۲نتیجه می شود.

$(\Leftarrow)$:

می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $G \neq K_{۱,n-۱}$ باشد آنگاه $\gamma_m^۱(G) \neq n-۱$. یعنی یا $\gamma_m^۱(G) < n-۱$ و یا $\gamma_m^۱(G)=n$. از طرفی طبق مشاهده ۲.۲.۲ داریم $\gamma_m^۱(G) \leq n-۱$ است. پس $\gamma_m^۱(G) \neq n$. حال نشان می‌دهیم که اگر $G \neq K_{۱,n-۱}$ باشد آنگاه $\gamma_m^۱(G) < n-۱$. اگر $n=۲$ و $\gamma_m^۱(G)=۲-۱=۱$ آنگاه $G=K_{۱,n-۱}=K_{۱,۱}$ پس تناقض است. لذا $n \geq ۳$. فرض کنید $n=۳$، چون G همبند است لذا $G=K_۳$ یا $G=P_۳$ است. چون $P_۳=K_{۱,۲}$ لذا $G \neq P_۳$ و در نتیجه $G=K_۳$. حال بنا به مشاهده ۲.۱.۲ داریم $\gamma_m^۱(G) \leq n-۱$. حال فرض می‌کنیم $n \geq ۴$. چون G همبند است لذا مسیری همانند $x_۱, x_۲, ..., x_t$ می‌توان پیدا کرد که $t \geq ۴$ در این صورت $S=V(G)-\{x_۱, x_t\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک از اندازه $n-۲$ می‌باشد . □

قضیه ۴.۲.۲. اگر G یک گراف دو بخشی همبند از مرتبه $n \geq ۳$ باشد آنگاه

$$۲ \leq \gamma_m^۱(G) \leq n - ۱.$$

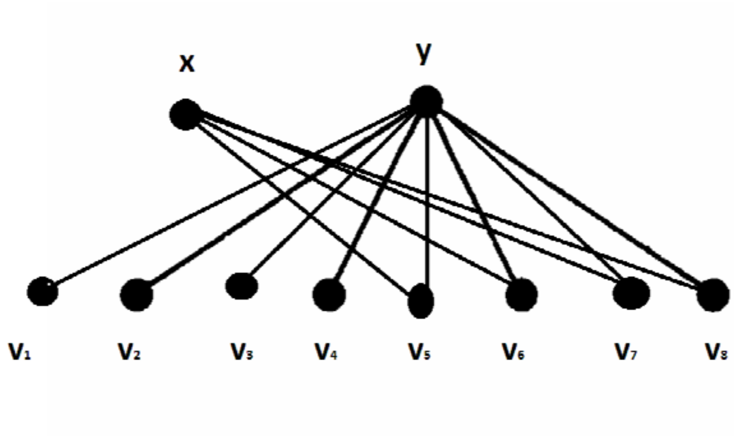
اثبات. به وضوح $\gamma_m^۱(G) \geq ۱$. اگر $\gamma_m^۱(G) = ۱$ باشد آنگاه بنا به قضیه ۱.۲.۲، G دارای دو رأس از درجه $n - ۱$ است زیرا $n \geq ۳$. لذا G دارای یک مثلث است که مغایر با دو بخشی بودن G است. در نتیجه $\gamma_m^۱(G) \geq ۲$. همچنین نامساوی $\gamma_m^۱(G) \leq n - ۱$ از قضیه ۲.۲.۲ نتیجه می شود . □

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید k و n دو عدد باشند که $۲ \leq k \leq n$. در این صورت یک گراف همبند چند بخشی ازمرتبه n و عدد احاطه‌گری ۱-متحرک k وجود دارد.

اثبات. اگر $k = n - ۱$ باشد آنگاه طبق قضیه ۳.۲.۲، گراف $G = K_{۱,n-۱}$ و حکم برقرار است. لذا فرض می‌کنیم $۲ \leq k \leq n - ۲$. فرض کنید G حاصل از $K_{۲,n-۲}$ با رأس های $\{x, y, v_۱, ..., v_{n-۲}\}$ باشد که x, y در یک بخش و $v_۱, ..., v_{n-۲}$ در بخش دیگر قرار داشته باشند به طوری که یال‌های xv_i به ازای هر $۱ \leq i \leq k - ۱$ حذف شده باشد. (شکل ۵.۲ گراف G را برای $n = ۱۰$ و $k = ۵$ نمایش می‌دهد). دراین صورت G یک گراف همبند است. نشان می‌دهیم که $\gamma_m^۱(G) = k$ است. در ابتدا ثابت می‌کنیم که $\gamma_m^۱(G) \leq k$ می‌باشد. برای این منظور ثابت می‌کنیم مجموعه $S = \{x, y, v_۱, ..., v_{k-۲}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای گراف G می‌باشد. به ازای هر $v_i \in S$ از بخش ۱ از تعریف ۲.۱.۲ استفاده می‌شود. زیرا y همسایه هر v_i می‌باشد. همچنین چون x همسایه هر v_i به ازای $i \geq k$ می‌باشد و y نیز با تمام v_i ها همسایه است بنابراین از بخش ۲ از تعریف ۲.۱.۲ برای x و y استفاده می‌کنیم. در نتیجه S یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک با اندازه k می‌باشد. پس $\gamma_m^۱(G) \leq k$.

در پایان باید نشان دهیم که $\gamma_m^۱(G) \geq k$ است. با استفاده از مشاهده ۳.۱.۲ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای G باید شامل $k - ۱$ رأس از $\{y, v_۱, ..., v_{k-۲}\}$ باشد. از طرفی x با هیچ رأس در $\{y, v_۱, ..., v_{k-۱}\}$ مجاور نمی‌باشند. لذا مجموعه‌های احاطه‌گر ۱-متحرک بیشتر از $k - ۱$ رأس داشته باشد. پس $\gamma_m^۱(G) \geq k$.

□



شکل ۵.۲: گراف G برای $n = ۱۰, k = ۵$ و $\gamma_m^۱(G) = ۵$ مثال برای قضیه ۵.۲.۲

قضیه ۶.۲.۲. فرض کنید G گرافی از مرتبه $n \geq ۲$ باشد. در این صورت

$$\gamma(G) \leq \gamma_m^۱(G) \leq \gamma_s(G).$$

اثبات. طبق تعریف هر مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک یک مجموعه احاطه‌گر است. پس کران پایین سریعاً نتیجه می‌شود. برای کران بالا نشان می‌دهیم که هر مجموعه احاطه‌گر امن یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک نیز می‌باشد. فرض می‌کنیم که $S \subseteq V(G)$ یک مجموعه احاطه‌گر امن باشد و $v \in S$ را در نظر می‌گیریم. در نتیجه دو حالت به وجود می‌آید:

حالت اول: $(V(G) - S) \cap N(v) = \emptyset$. چون G همبند است و v همسایه‌ای در $S - \{v\}$ دارد لذا $S - \{v\}$ طبق بخش ۱ از تعریف ۲.۱.۲ یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد.

حالت دوم: $N(v) \cap (V(G)) - S) \neq \emptyset$. قرار می‌دهیم $Q = N(v) \cap (V(G)) - S)$. چون S یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا به ازای هر $q_i \in Q$ یک همسایه مانند s_i در S موجود است به طوری که $(S - \{s_i\}) \cup \{q_i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد. اگر $v = s_i$ برای بعضی از iها، آنگاه $(S - \{v\}) \cup \{q_i\}$ بنا بر قسمت ۲ از تعریف ۲.۱.۲ یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد. در غیر این صورت هر q_i با رأس‌های دیگر در $S - \{v\}$ مجاور است و مجموعه $(S - \{v\}) \cup \{q_i\}$ که $q_i \in Q$، بنا بر قسمت از تعریف ۲.۱.۲ یک مجموعه احاطه‌گر است.

بنابراین S یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای G می‌باشد.

□

در اینجا کران را برای قضیه ۶.۲.۲ توسعه دهیم و کران بالاتری برای $\gamma_s(G)$ پیدا کنیم.

تعریف ۱.۲.۲. مجموعه S از رأس‌های G را یک مجموعه ۲-احاطه‌گر گوییم هرگاه به ازای هر $v \in V(G) - S$ داشته باشیم $|N(v) \cap S| \geq ۲$، یعنی هر رأسی که درمجموعه S نیست باید با حداقل دو رأس از مجموعه S مجاور باشد.

اندازه کوچکترین مجموعه ۲-احاطه‌گر در گراف G را با $\gamma_۲(S)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq ۲$ باشد. در این صورت

$$\gamma_s(G) \leq \gamma_۲(G).$$

اثبات. برای اثبات این کران باید نشان دهیم که یک مجموعه ۲-احاطه‌گر مجموعه ای احاطه‌گر امن است. فرض کنید مجموعه S یک مجموعه ۲-احاطه‌گر در گراف G باشد. فرض می‌کنیم $v \in V(G) - S$ باشد. چون S یک مجموعه ۲-احاطه‌گر است لذا دو رأس $x, y \in N(v) \cap S$ موجود می‌باشند. باید نشان دهیم که مجموعه $(S - \{x\}) \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G می‌باشد. اولاً x توسط v احاطه می‌شود و ثانیاً هر رأس در $N(v)$ یا توسط مجموعه $(S - \{x\}) \cup \{v\}$ احاطه می‌شود و یا اینکه در $S - \{v\}$ قرار دارد. بنابراین S یک مجموعه احاطه‌گر امن می‌باشد. □

تعریف ۲.۲.۲. افراز خوشه ای گراف G افرازی از $V(G)$ به مجموعه‌های $V_۱, V_۲, ..., V_k$ می‌باشد. به طوری که زیر گراف‌های القا شده توسط هر یک از V_i ها یک خوشه $|V_i|$ عضو باشد.

عدد خوشه‌ای گراف G کمترین تعداد خوشه‌ها روی G است که G می‌تواند به آنها افراز خوشه‌ای شود و با $\overline{\chi}(G)$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۸.۲.۲. فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq ۲$ باشد. در این صورت

$$\gamma_m^1(G) \leq \overline{\chi}(G)$$

اثبات. گراف G را به مجموعه‌های $V_1, V_2, ..., V_k$ افراز می‌کنیم به طوری که $\overline{\chi}(G) = k$. از هر V_i یک رأس دلخواه x_i را انتخاب می‌کنیم. نشان می‌دهیم $S = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای G است. برای هر $x_i = v$ دو حالت زیر را داریم:

حالت اول: $|V_i| = ۱$. در این حالت x_i یا همسایه‌ای مانند v در $V(G) - S$ دارد که در این صورت طبق بخش ۲ از تعریف ۲.۱.۲ داریم $S - \{x_i\} \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است و یا اگر $N(x_i) \cap (V(G) - S) = \emptyset$ آنگاه طبق بخش ۱ از تعریف ۲.۱.۲ داریم $S - \{x_i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، در این صورت حکم برقرار است.

حالت دوم: $|V_i| \geq ۲$. در این حالت x_i همسایه‌ای مانند v در V_i دارد. لذا در این صورت طبق بخش ۲ از تعریف ۲.۱.۲ داریم $S - \{x_i\} \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، در این صورت حکم برقرار است. □

قضیه ۹.۲.۲. اگر P_n یک مسیر روی n رأس باشد آنگاه

$$\gamma_m^1(P_n) = \lceil \frac{۲n}{۵} \rceil$$

اثبات. فرض کنید $V(P_n) = \{v_1, ..., v_n\}$ که در آن برای $i = ۱, ..., n-۱$، رأس v_i مجاور با رأس v_{i+1} باشد. ابتدا به راحتی می توان دید که $S = \{v_i | i \equiv ۲(mod ۵), i \equiv ۴(mod ۵)\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای P_n است. در نتیجه $\gamma_m^1(P_n) \leq |S| = \frac{۲n}{۵}$. حال به برهان خلف فرض کنید $\gamma_m^1(G) < \frac{۲n}{۵}$. طبق اصل لانه کبوتری، زیر گرافی القایی همریخت با P_5 وجود دارد به طوری که یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک مانند S دارد. فرض کنید رأس‌های این زیر گراف به صورت $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ باشد. اگر $v_3 \in S$ باشد و یکی از رأس‌های v_2 یا v_4 به دلخواه در این مجموعه قرار داشته باشد آنگاه تعریف ۲.۱.۲ توسط v_3 نقض می‌شود. در این صورت فرض باطل است و حکم برقرار است. □

فصل ۳

احاطه‌گری امن، غیرافزونگی و ماکزیمم درجه در درخت‌ها

۱.۳ مقدمه

کلیه مطالب این فصل براساس منبع [۵] نوشته شده‌اند. در این بخش ابتدا به تعریف مجموعه غیر افزونه[۱] می‌پردازیم و سپس کران‌هایی برای عدد غیرافزونه ارائه می‌کنیم. در ادامه یکی از روش‌های حفاظت[۲] از یک گراف را مطرح می‌کنیم و سپس یک کران نیز برای عدد آن بیان می‌کنیم.

در ابتدا دو تعریف از فصل اول که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند یادآوری می‌کنیم.

یاد آوری ۱. فرض کنید $G = (V(G), E(G))$ یک گراف ساده باشد و همچنین $X \subseteq V$ و $v \in X$ باشد. رأس $u \in V - X$ یک همسایه اختصاصی خارجی v روی X (یا به طور اختصار $epn - X$) است هرگاه $N(u) \cap X = \{v\}$.

یاد آوری ۲. مجموعه همه همسایه‌های اختصاصی خارجی v روی X با $EPN(v, X)$ نمایش داده می‌شود.

همچنین قرار می‌دهیم

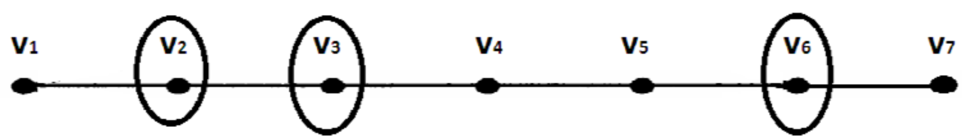
$$PN(v,X) = \begin{cases} EPN(v,X) \cup \{v\} & \text{اگر } v \text{ در } G[X] \text{ یک رأس تنها باشد،} \\ EPN(v,X) & o.w. \end{cases}.$$

[۱] Irredundant
[۲] Protection

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنید $G=(V(G),E(G))$ یک گراف ساده باشد. در این صورت زیر مجموعه $X\subseteq V$ را مجموعه غیرافزونه گوییم هرگاه برای هر $v\in X$ داشته باشیم $PN(v,X)\neq\emptyset$.

برای هر گراف G از مرتبه n و ماکزیمم درجه $\Delta\geq ۲$ کمترین عدد غیرافزونه با $ir(G)$ نمایش می‌دهند.

مثال. در شکل ۱.۳ مشاهده می کنیم که مجموعه $S=\{v_۲,v_۳,v_۶\}$ کوچکترین مجموعه غیرافزونه برای گراف G می‌باشد. در نتیجه $ir(P_۷)=۳$ می‌باشد.



شکل ۱.۳: گراف $P_۷$ با $ir(P_۷)=۳$

مشاهده ۱.۱.۳. برای $n\geq ۲$ خواهیم داشت:

$$ir(K_n)=۱.$$

اثبات. فرض می‌کنیم x یک رأس دلخواه از گراف K_n باشد. نشان می‌دهیم مجموعه $S=\{x\}$ یک مجموعه غیرافزونه برای K_n است. برای $x\in S$ داریم $PN(x,S)\neq\emptyset$. بنابراین S یک مجموعه غیر افزونه برای K_n است. درنتیجه خواهیم داشت $ir(K_n)\leq|S|=۱$.

حال باید نشان دهیم $ir(K_n)\geq ۱$. فرض می‌کنیم S یک مجموعه غیرافزونه مینیمال برای گراف K_n باشد و $ir(K_n)=|S|$. رأس دلخواه $v\in S$ را در نظر می‌گیریم، چون در K_n تمام رئوس با یکدیگر همسایه هستند، پس S فاقد رأس تنها می‌باشد در نتیجه طبق تعریف داریم $PN(v,S)=EPN(v,S)$. در اینجا دو حالت به وجود می‌آید:

حالت اول: $|S| > 1$. چون همه رئوس K_n با هم همسایه هستند، بنابراین

$$PN(v,S) = EPN(v,S) = \emptyset$$

لذا S یک مجموعه غیرافزونه نمی‌باشد.

حالت دوم: $|S| = 1$. بنابراین

$$PN(v,S) = EPN(v,S) = V(K_n) - \{x\} \neq \emptyset$$

لذا $ir(K_n) = |S| = 1$ در نتیجه خواهیم داشت $ir(K_n) \geq 1$.

□

قضیه ۳.۱.۱. ([۱۳]) هر مجموعه احاطه‌گر در گراف دلخواه G یک مجموعه غیرافزونه می‌باشد. به عبارت دیگر در گراف دلخواه G داریم

$$ir(G) \leq \gamma(G).$$

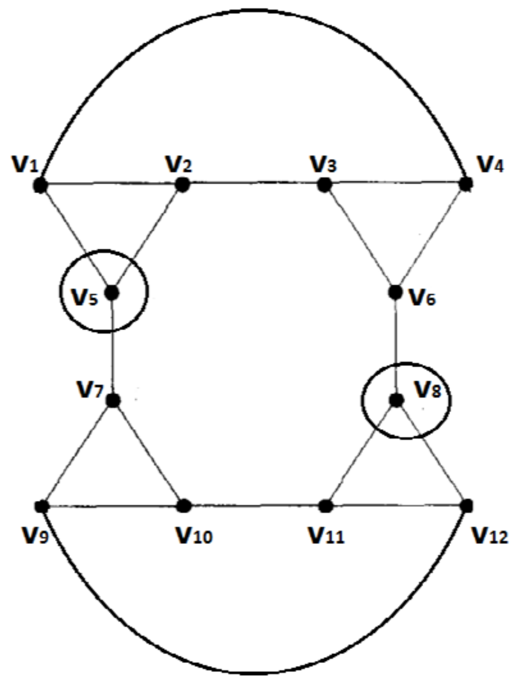
قضیه ۳.۱.۱ این نکته را بیان می‌کند غیرافزونه یک خاصیت است که مجموعه احاطه‌گر مینیمال می‌سازد. به عنوان مثال در گراف K_5 چون تمامی رئوس با یکدیگر همسایه هستند در نتیجه مجموعه شامل یک رأس، یک مجموعه احاطه‌گر برای K_5 می‌باشد و همچنین یک مجموعه غیرافزونه نیز برای K_5 می‌باشد.

توجه به این نکته حائز اهمیت است که عکس قضیه ۳.۱.۱ برقرار نیست.

مثال. در شکل ۳.۲ مشاهده می کنیم که مجموعه $S = \{v_5, v_8\}$ یک مجموعه غیرافزونه برای گراف G می‌باشد. در صورتی که مجموعه احاطه‌گر برای گراف G نمی‌باشد.

قضیه ۳.۱.۲. ([۹]) فرض کنید $G = (V(G), E(G))$ یک گراف از مرتبه n و ماکزیمم درجه $\Delta \geq 2$ باشد. در این صورت داریم

$$ir(G) \leq \frac{2n}{3\Delta}.$$



شکل ۲.۳: گراف G با ۱۲ $= n$ و۲ $= ir(G)$

در ادامه خواهیم دید که کران قضیه ۲.۱.۳ قابل دسترسی می‌باشد. درخت‌هایی که در تساوی فوق صدق می‌کنند، مسیرهایی از مرتبه مضارب ۳ می‌باشند. در قسمت‌های بعد ما این کران را برای درخت‌های دیگر بهبود می‌بخشیم.

در([۷]) برای حفاظت از یک گراف چهار استراتژی با در نظر گرفتن نگهبانانی[۳] در رأس‌ها مطرح شده است. یکی از انواع آنها احاطه‌گری امن خواهد بود.

قضیه ۳.۱.۳. ([۷]) فرض کنید $G = (V(G), E(G))$ یک گراف مثلث آزاد از مرتبه n و ماکزیمم درجه $\Delta \geq ۳$ باشد. در این صورت داریم

$$\gamma_s(G) \geq \frac{n(۲\Delta - ۱)}{\Delta^۲ + ۲\Delta - ۱}.$$

[۳] Guard

۲.۳ غیرافزونه پایین

در این بخش در ابتدا به تعریف مجموعه غیرافزونه ماکسیمال می‌پردازیم، سپس دو لم برای اثبات قضیه مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان می‌کنیم و در انتها کرانی برای عدد غیرافزونه روی درخت‌ها ارائه می‌دهیم.

در ذیل مجموعه رأس‌های گراف $G = (V(G), E(G))$ را به مجموعه‌های مجزا تجزیه می‌کنیم که در آن X مجموعه از رأس‌هاست.

$$V = X \cup B \cup C \cup R \quad \text{(اجتماع مجزا)}$$

که در آن

$$B = \{u \in V - X \,|\, |N(u) \cap X| = ۱\}$$

$$C = \{u \in V - X \,|\, |N(u) \cap X| \geq ۲\}$$

$$R = V - N[X]$$

و همچنین $c = |C|$ ، $b = |B|$ و $r = |R|$ می باشد.

قضیه ۱.۲.۳. ([۸]) مجموعه غیرافزونه X ماکسیمال است اگر و تنها اگر به ازای هر $u \in N[R]$ یک $v \in X$ موجود باشد به طوری که

$$.PN(v, X) \subseteq N[u]$$

در ضمن اگر رابطه $PN(v, X) \subseteq N(u)$ برقرار باشد آنگاه می‌گوییم رأس u رأس v را پوچ[۴] می‌کند.

در ادامه فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای غیرافزونه ماکسیمال برای جنگل G می‌باشد. در اینجا مجموعه X را به مجموعه‌های مجزا تجزیه می‌کنیم

$$Z = \{v \in X | \text{باشد } G[X] \text{ رأس تنها در } v\},$$

[۴] Annihilate

$$Y = X - Z,$$

$$Y_1 = \{v \in Y || EPN(v, X)| = 1\}$$

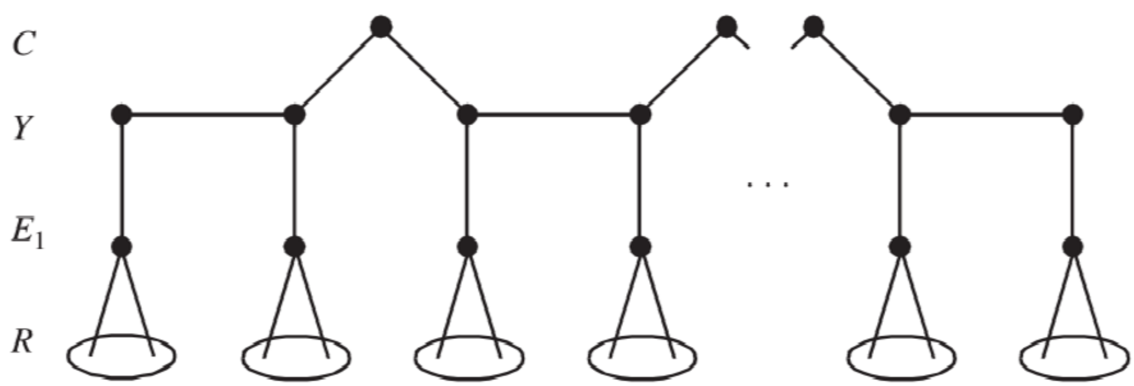
و

$$Y_2 = \{v \in Y || EPN(v, X)| \geq 2\}.$$

مشاهده می‌کنیم که (اجتماع مجزا) $X = Z \cup Y_1 \cup Y_2$ می‌باشد و تعریف می‌کنیم

$$E_1 = B \cap N(Y_1).$$

مثال. در شکل ۳.۳ درخت T را مشاهده می کنیم که در آن C، Y، E_1 و R نشان داده شده‌اند.



شکل ۳.۳: گراف T

لم‌های زیر را که برای اثبات قضیه ۲.۲.۳ مورد استفاده قرار می‌گیرند، ارائه می‌دهیم.

لم ۱.۲.۳. برای هر رأس $u \in R$، رأسی مانند $v \in Y_1$ موجود است که رأس u رأس v را پوچ می کند.

اثبات. فرض کنید $u \in R$ باشد. دو حالت داریم:

حالت اول: رأس u رأسی مانند $v \in Z$ را پوچ کند. در این صورت چون Z مجموعه رأس‌های تنها در $G[X]$ می‌باشد. در نتیجه به ازای هر $v \in Z$ داریم $PN(v, X) = EPN(v, X) \cup \{v\}$ می باشد. بنابراین چون رأس v، در $PN(v, X)$ قرار دارد لذا نمی‌تواند زیر مجموعه‌ای از $N[u]$ باشد. در نتیجه $u \in R$ نمی‌تواند هیچ رأسی از Z را پوچ کند.

حالت دوم: رأس u رأسی مانند $v \in Y$ را پوچ کند. که در اینجا نیز دو حالت به وجود می‌آید:

حالت اول: u رأسی مانند $v \in Y_۲$ را پوچ کند. آنگاه $G[N(u) \cup N(v)]$ دارای یک دور چهار رأسی خواهد بود که متناقض با جنگل بودن G است. چون جنگل فاقد دور است. در نتیجه $u \in R$ نمی‌تواند هیچ رأسی از $Y_۲$ را پوچ کند.

حالت دوم: u رأسی مانند $v \in Y_۱$ را پوچ کند. بنا به قضیه ۱.۲.۳ چون X مجموعه ای غیر افزونه ماکسیمال است. در نتیجه هر $u \in R$ رأسی مانند $v \in Y_۱$ را پوچ می‌کند و نتیجه حاصل می‌شود.

□

فرض کنید $F(x, \Delta)$ مجموعه جنگل‌های از مرتبه ماکزیمم و ماکزیمم درجه Δ و X یک مجموعه غیرافزونه از اندازه x باشد.

لم ۲.۲.۳. فرض کنید که X یک مجموعه غیرافزونه ماکسیمال از اندازه x روی جنگل $G \in F(x, \Delta)$ باشد. در این صورت

۱) هر $u \in E_۱$ از درجه Δ می‌باشد.

۲) به ازای هر $u \in R$ داریم $N(u) \cap (B \cup C) = \{w\}$ که در آن $w \in E_۱$.

۳) هر $u \in E_۱$ با $\Delta - ۱$ رأس در R همسایه است.

۴) $Y_۲ = \emptyset$ (لذا $Y = Y_۱$).

اثبات. ۱) به برهان فرض می‌کنیم در جنگل G داشته باشیم $u \in E_1$ و $deg(u) < \Delta$ باشد. حال برگ جدیدی را به رأس u اضافه می‌کنیم. در این صورت جنگل G_1 حاصل می‌شود که تعداد رأس‌های آن از تعداد رأس‌های G بیشتر است که متناقض با ماکزیمم مرتبه بودن G در $F(x,\Delta)$ است.

۲) طبق لم ۱.۲.۳ هر رأس $u \in R$ رأسی از Y_1 را پوچ می‌کند. در نتیجه هر $u \in R$ با رأسی مانند $w \in E_1$ مجاور است. به برهان خلف فرض می‌کنیم $\{w, w'\} \subseteq N(u) \cap (B \cup C)$. یال uw' را حذف کرده و رأس جدیدی را اضافه می‌کنیم و یک یال جدید از w' به آن رأس جدید وصل می‌کنیم. در این صورت جنگل جدید G_1 حاصل می‌شود که تعداد رأس‌های آن از تعداد رأس‌های جنگل G بیشتر است که متناقض با ماکزیمم مرتبه بودن G در $F(x,\Delta)$ است.

۳) با استفاده از قسمت دوم قضیه به تنهایی رأس‌های از $B \cup C$ که رأس‌هایی از X را از پوچ می‌کنند، متعلق به $N(R) \cap E_1$ می‌باشند و طبق لم ۱.۲.۳ هر رأس همسایه‌اش را در Y_1 پوچ می‌کند. به برهان خلف فرض می‌کنیم $u \in E_1$ و $w \in N(u) \cap (B \cup C)$. با استفاده از استدلال بالا لازم نیست رأس w رأس u را پوچ کند. یال uw را حذف کرده و رأس جدیدی را اضافه می‌کنیم و آن را به u وصل می‌کنیم. در این صورت جنگل G_1 حاصل می‌شود که تعداد رأس‌های آن از تعداد رأس‌های G بیشتر است که متناقض با ماکزیمم مرتبه بودن G در $F(x,\Delta)$ است.

۴) به برهان خلف فرض می‌کنیم $v \in Y_2$ و $EPN(v,X) = B_v$ باشد. طبق قسمت دوم قضیه هیچ رأسی در B_v با هیچ رأسی R مجاور نمی‌باشد. در نتیجه v و B_v یک ستاره تشکیل می‌دهند. پس جنگل G_1 را با یکی گرفتن یک رأس از مرتبه ۱ در $K_{1,\Delta}$ و رأسی مانند v در $G - B_v$ تشکیل می‌دهیم. □

قضیه ۲.۲.۳. اگر $T(\neq K_{1,\Delta})$ یک درخت با n رأس و ماکزیمم درجه $\Delta \geq 3$ باشد آنگاه

$$ir(T) \geq \frac{2(n+1)}{2\Delta + 3}.$$

اثبات. فرض کنید $T \neq K_{1,\Delta}$ درختی n رأسی با ماکزیمم درجه $\Delta \geq 3$ باشد. بنا به قضیه ۲ $ir(T) \geq$ می‌باشد.

در اینجا برای اثبات کران بالاتر، قضیه را روی عدد رأس‌های درخت $G \in F(x, \Delta)$ با مجموعه غیرافزونه X از اندازه $x(\geq ۲)$ تعیین می‌کنیم. بنابراین دو حالت $Y = ۰$ و $Y \geq ۲$ به وجود می‌آید. ($Y = ۱$ برقرار می باشد).

حالت اول: $Y = ۰$. طبق لم ۱.۲.۳ داریم $R = \emptyset$. همچنین چون $Y = ۰$ لذا Z یک مجموعه احاطه‌گر مستقل برای G می‌باشد، پس هر رأس Z حداکثر Δ رأس از G را احاطه می‌کند. در نتیجه حداکثر تعداد رأس‌های G، $|Z|(\Delta + ۱)$ می‌باشد. اما با توجه به اینکه $x = |Z|$ لذا

$$n \leq (\Delta + ۱)z = (\Delta + ۱)x. \tag{۱.۳}$$

حالت دوم: $Y \geq ۲$. فرض می‌کنیم c_y, c_z, b_z به ترتیب تعداد یال‌های G بین Bتا Z ، C تا Z و C تا $Y = Y_۱$ باشند. از آنجا که تعداد یال‌های خروجی از Z حداکثر برابر Δz است لذا

$$b_z + c_z \leq \Delta z \tag{۲.۳}$$

از طرفی $G[C \cup Y]$ درخت است و فاقد دور می‌باشد، در نتیجه حداکثر $c + y - ۱$ یال دارد. همچنین داریم $\sum_۱^y deg(y_i) = ۲e$. در نتیجه $y \leq ۲e$. پس $\frac{y}{۲} \leq e$ است. در این صورت $G[Y]$ حداقل $\lceil \frac{y}{۲} \rceil$ یال دارد و در نتیجه

$$\lceil \frac{y}{۲} \rceil + c_y \leq c + y - ۱. \tag{۳.۳}$$

چون هر رأس C حداقل با دو رأس $Y \cup Z$ مجاور می‌باشد. از این رو

$$\begin{aligned} ۲c &\leq c_y + c_z \\ &\leq c + y - \lceil \frac{y}{۲} \rceil - ۱ + c_z. \end{aligned}$$

بنابراین

$$c \leq c_z + y - \lceil \frac{y}{۲} \rceil - ۱ \tag{۴.۳}$$

از طرفی می‌دانیم $G = X \cup B \cup C \cup R$ که این اجتماع مجزا می‌باشد در نتیجه $n = x + b + c + r$. با توجه به قسمت‌های قبل خواهیم داشت

$$\begin{aligned} n &= x + b + c + r \\ &\leq (y+z) + (b_z + y) + (c_z + y - \lceil \frac{y}{۲} \rceil - ۱) \\ &+ (\Delta - ۱)y. \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

پس با توجه به قسمت‌های قبلی داریم

$$\begin{aligned} n &\leq (\Delta + ۱)z + (\Delta + ۲)y - \lceil \frac{y}{۲} \rceil - ۱ \\ &\leq (\Delta + ۱)z + (\Delta + \frac{۳}{۲})y - ۱ \\ &\leq (\Delta + \frac{۳}{۲})x - ۱. \end{aligned} \tag{۶.۳}$$

و چون $y + z = x$ پس داریم

$$n \leq (\Delta + \frac{۳}{۲})x - ۱. \tag{۷.۳}$$

قابل توجه است که برای $x \geq ۲$ مقدار سمت راست معادله ۷.۳ از بیشترین مقدار معادله ۱.۳ کمتر می‌باشد و تساوی زمانی که $x = ۲$ است حاصل می‌شود. به هر حال از معادله ۷.۳ نتیجه می‌گیریم، اگر جنگل $G \neq K_{۱,\Delta}$ از مرتبه n و ماکسیمم درجه Δ داشته باشیم آنگاه

$$ir(G) \geq \frac{۲(n+۱)}{۲\Delta + ۳}.$$

□

کران این قضیه قابل دسترسی است.

۳.۳ احاطه‌گر امن

فرض می‌کنیم $X \subseteq V(G)$ باشد. اگر $u \in V - X$ و $v \in X$ موجود باشند به طوری که تعریف ۲۸.۱.۱ برقرار باشد آنگاه می‌گوییم رأس v محافظ رأس u روی X می‌باشد.

گزاره ۱.۳.۳. ([۷]) گراف دلخواه $G = (V(G), E(G))$ را در نظر می‌گیریم. فرض می کنیم $X \subseteq V(G)$ باشد و رأس $v \in X$ و رأس $u \in V - X$ را در نظر می‌گیریم در این صورت رأس v را محافظ رأس u روی X است اگر و تنها اگر u مجاور با هر رأس $\{v\} \cup (EPN(v, X) - \{u\})$ باشد.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید $T = (V(T), E(T))$ یک درخت از مرتبه n و ماکزیمم درجه $\Delta \geq ۳$ باشد. در این صورت داریم

$$\gamma_s(T) \geq \frac{(\Delta n + \Delta - ۱)}{۳\Delta - ۱}.$$

اثبات. فرض می‌کنیم $X \subseteq V(T)$ یک SDS برای درخت T باشد. فرض می‌کنیم رأس $v \in X$ را داشته باشیم به طوری که $\{u, w\} \subseteq (EPN(v, X))$ باشد. از طرفی v تنها u را می‌تواند روی X محافظت کند زیرا در غیر این صورت طبق گزاره ۱.۳.۳ مجموعه $\{u, v, w\}$ تشکیل یک $K_۳$ می‌دهند که متناقض با درخت بودن T است. لذا می‌توانیم X را به صورت اجتماع مجزای $X_۰$ و $X_۱$ بنویسیم ($X = X_۰ \cup X_۱$) به طوری که هر $v \in X_۰$ هیچ محافظی روی X ندارد و هر $v \in X_۱$ یک محافظ روی X دارد.

مجموعه $X \subseteq V(T)$ را طبق بخش مقدمه تقسیم بندی می‌کنیم. از طرفی چون X یک مجموعه احاطه‌گر امن برای T می‌باشد در نتیجه X یک مجموعه احاطه‌گر خواهد بود. لذا $R = \emptyset$.

طبق تعریف تعداد یال‌های از X به C حداقل $۲c$ می‌باشد و همچنین بیشترین تعداد یال‌ها از X به C برابر $x_۰ + x_۱ + c - ۱$ می‌باشد زیرا $T[X \cup C]$ درخت است و فاقد دور می‌باشد. بنابراین

$$۲c \leq x_۰ + x_۱ + c - ۱. \qquad (۸.۳)$$

از طرفی چون X یک مجموعه احاطه‌گر برای T است لذا تعداد رأس‌های T برابر است با مجموع رأس‌های موجود در مجموعه $X_۰$ و مجموعه $X_۱$ و رأس‌هایی که $v \in X_۱$ را محافظت می‌کنند چون هر $v \in X_۱$ یک محافظ روی X دارد لذا که اندازه آن برابر مجموعه $X_۱$ است و رأس‌های موجود در مجموعه C می‌باشد. لذا

$$n = x_۰ + ۲x_۱ + c$$

بنابراین با استفاده از معادله ۸.۳ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} n &= x_۰ + ۲x_۱ + c \\ &\leq x_۰ + ۲x_۱ + (x_۰ + x_۱ - ۱). \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

در نتیجه

$$۲x_۰ + ۳x_۱ \geq n + ۱. \tag{۱۰.۳}$$

پس هیچ $u \in C$ به وسیله$X_۱$ $v \in$ محافظت نمی‌شود زیرا در غیر این صورت طبق گزاره ۱.۳.۳ یک $K_۳$ موجود است که تناقض می‌باشد. به هر حال هر $u \in C$ مجاور با یک رأس در $X_۰$ می‌باشد و بنابراین

$$c \leq \Delta x_۰. \tag{۱۱.۳}$$

با استفاده از معادله‌های ۱۰.۳ و ۱۱.۳ داریم

$$(\Delta + ۱)x_۰ + ۲x_۱ \geq n. \tag{۱۲.۳}$$

کمترین مقدار $x = x_۰ + x_۱$ با توجه به دو محدودیت $(\Delta + ۱)x_۰ + ۲x_۱ \geq n$ و $c \leq \Delta x_۰$ و حل آن به روش سیمپلکس به صورت زیر می‌باشد.

$$x = \frac{(\Delta n + \Delta - ۱)}{(۳\Delta - ۱)}.$$

که در آن $x_۰ = \frac{(n-۲)}{(۳\Delta-۱)}$ و $x_۱ = \frac{\Delta n - n + \Delta + ۱}{۳\Delta - ۱}$ می‌باشد. $\square$

در قسمت ذیل مثالی برای قضیه ۱.۳.۳ ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد کران این قضیه قابل دسترسی است.

مثال. برای $\Delta \geq 3$ و $k \geq 1$ درخت های $T_1, ..., T_k$ را به صورت زیر می‌سازیم. ابتدا قرار می‌دهیم

$$V(T_i) = \{u_i\} \cup Q_i \cup C_i \cup B_i \quad \text{(اجتماع مجزا)}$$

و همچنین $|Q_i| = q_i$ ، $|C_i| = c_i$ و $|B_i| = b_i$ به طوری که $q_i = b_i = \Delta - 1$ و $c_i = \Delta$ باشد.

رأس u_i را به همه رأس‌های C_i متصل می‌کنیم. $\Delta - 1$ رأس از C_i را به Q_i وصل می‌کنیم به طوری که هر رأس از C_i دقیقاً با یک رأس از Q_i همسایه باشد و $\Delta - 1$ رأس از Q_i را به رأس‌های B_i وصل می‌کنیم به طوری که هر رأس از Q_i دقیقاً با یک رأس از B_i همسایه باشد. همچنین فرض می‌کنیم v_{i_j} یک رأس از C_i باشد به طوری که با هیچ یک از رأس‌های Q_i مجاور نیست و همچنین w_{i_j} را به طور دلخواه از Q_i انتخاب می‌کنیم. سپس رأس v_{i_j} از C_i را به رأس $w_{(i-1)_j}$ از Q_{i-1} وصل می‌کنیم.

در نتیجه داریم

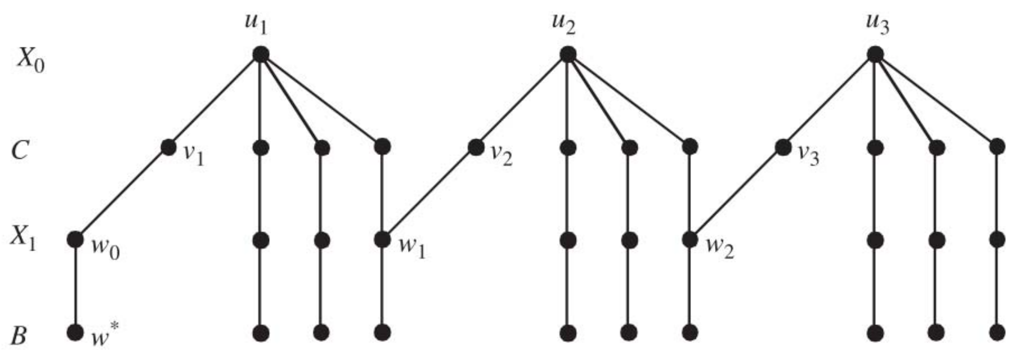
$$V(T) = \bigcup_{i=1}^{k} V(T_i) \cup \{w_0, w^*\}$$

و

$$E(T) = \bigcup_{i=1}^{k} E(T_i) \cup \{w_i v_i | i = 0, ..., k-1\} \cup \{w_i w^*\}$$

به راحتی می‌توان دید که T یک مجموعه احاطه‌گر امن روی $X = X_0 \cup X_1$ به طوری که $X_0 = \{u_1, ..., u_k\}$ و $X_1 = \{w_0\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} (Q_i\}$ می‌باشد.

در شکل ۴.۳ ما این گراف را برای $\Delta = 4$ و $k = 3$ نمایش می‌دهیم.



شکل ۴.۳: جنگل دلخواه T با ۴ $= \Delta$ و ۳ $= k$

فصل ۴

احاطه‌گری ۱ - متحرک روی درخت‌ها

۱.۴ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی

کلیه مطالب این فصل براساس منبع [۱] نوشته شده‌اند. در این بخش ابتدا قضیه‌ای برای تعیین مجموعه احاطه‌گر ۱ -متحرک روی درخت‌ها بیان می کنیم و سپس الگوریتم برنامه احاطه‌گر ۱ -متحرک را روی درخت دلخواه T که به محاسبه $\gamma_m^1(T)$ می‌پردازد، ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۴. اگر T یک درخت از مرتبه $n \geq 2$ و S یک مجموعه احاطه‌گر برای T باشد آنگاه S یک مجموعه احاطه‌گر ۱ -متحرک برای T است اگر و تنها اگر به ازای هر رأس $v \in S$، $|EPN(v, S)| \leq 1$.

اثبات. $(\Rightarrow)$:

فرض کنید $v \in S$ باشد. رأس‌هایی در T که توسط $S - \{v\}$ احاطه نمی‌شوند به تنهایی در $EPN(v, S)$ قرار دارند. از طرفی چون $|EPN(v, S)| \leq 1$ دو حالت به وجود می‌آید:

حالت اول: $|EPN(v, S)| = 1$. در این حالت v تنها یک همسایه اختصاصی خارجی دارد. لذا مجموعه $(S - \{v\}) \cup EPN(v, S)$، T را احاطه می کند. بنابراین طبق قسمت ۲ از تعریف ۲.۱.۲ مجموعه S، یک مجموعه احاطه گر ۱ -متحرک برای T است.

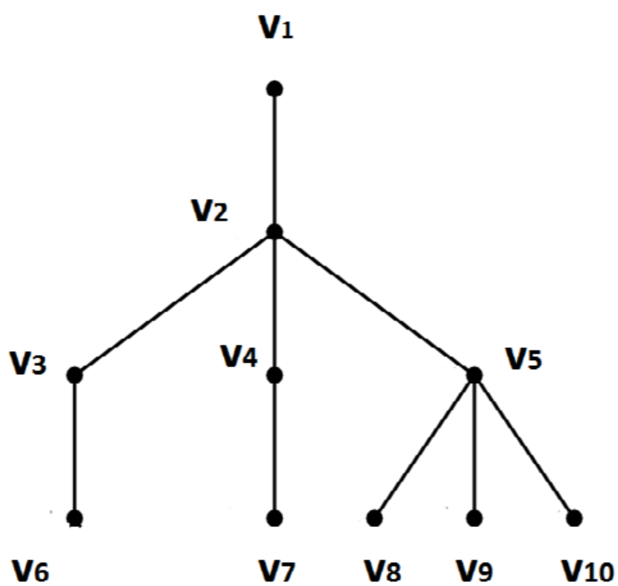
حالت دوم: $|EPN(v, S)| = 0$. در این حالت v هیچ همسایه اختصاصی خارجی ندارد، بنابراین طبق قسمت ۱

از تعریف ۲.۱.۲ مجموعه $S-\{v\}$، یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای T است.

$(\Leftarrow)$:

فرض می‌کنیم برای رأس $v \in S$، داشته باشیم $|EPN(v,S)| > ۱$. رأس‌های x و y را که در $EPN(v,S)$ قرار دارند در نظر می‌گیریم. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم $x \in (V(G)-S)\cap N(v)$ باشد. در این حالت $(S-\{v\})\cup\{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G نمی‌باشد، زیرا xv و yv یال‌هایی در T هستند در صورتی xy نمی‌تواند یال باشد زیرا T یک درخت است و فاقد دور می‌باشد. بنابراین S نمی‌تواند یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک باشد. □

مثال. در شکل ۱.۴ گرافی را مشاهده می کنیم که در آن مجموعه $S=\{v_۲,v_۳,v_۴,v_۵,v_۸,v_۹\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک می‌نیمم برای آن می‌باشد، یعنی $\gamma_m^۱(G)=۶$. در این گراف به ازای هر رأس $v \in S$، $|EPN(v,S)| \leq ۱$.



شکل ۱.۴: گراف G با $n=۱۰$ و $\gamma_m^۱(G)=۶$

قضیه ۱.۱.۴ در گراف‌های دلخواه برقرار نمی‌باشد. به عنوان مثال گراف K_3 یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک تک رأسی دارد، در صورتی که آن تک رأس دو همسایه اختصاصی خارجی دارد.

در ادامه الگوریتم برنامه احاطه‌گر ۱-متحرک را روی درخت دلخواه T برای محاسبه $\gamma_m^1(T)$ ارائه می‌دهیم.

۲.۴ الگوریتم برای درخت‌ها

در این بخش الگوریتم $Bottom-up$ را که درخت دلخواه T را پردازش می‌کند ارائه می‌دهیم. در این الگوریتم از دو الگوریتم جزئی $process$ و $Best-At-Root$ که در بخش بعدی بیان شده‌اند استفاده می‌کنیم. در این الگوریتم رأس r را به عنوان ریشه درخت T در نظر می‌گیریم، سپس T_v را زیر درخت از T که شامل رأس دلخواه v و فرزندانش است قرار می‌دهیم و $f(v)$ را برای رأس v بدست می‌آوریم و در انتها $f(r)$ را با استفاده از $f(v)$ که از قبل به دست آورده شده‌است به طوری که هر v فرزند r است محاسبه می‌کنیم.

در اینجا الگوریتم $Bottom-up$ را با ورودی یک درخت دلخواه T با تعداد $n \geq 2$ رأس ارائه می‌دهیم.

الگوریتم **Buttom up**

ورودی: یک درخت $T=(V(T),E(T))$ با $n \geq 2$.

خروجی: مقدار بهینه کلی برای درخت T.

۰-شروع

۱- ریشه درخت T را رأس دلخواه r در نظر بگیرید؛

۲-مجموعه $leaves$ را برابر $\{v \in V | (deg(v)=1) \text{و} (v \neq r)\}$ قرار بدهید؛

۳-$Child-Count(r)$ را برابر با $deg(r)$ قرار بدهید ؛

۴-برای هر $v \in V(T)-r$، $Child-Count(v)$ را برابر با $deg(v)-1$ قرار بدهید ؛

۵- $Ready = leaves$ ؛

۶-تا زمانیکه $Ready \neq \emptyset$ انجام بدهید؛

۷- رأس دلخواه v را از $Ready$ بردارید؛

۸- $x \in Children(v)$ برای هر $(v, Children(v), f(x))$ به الگوریتم $Process$ بفرست ؛

۹-$Child - Count(Parent(v))$ را برابر $Child - Count(Parent(v)) - ۱$ قراربدهید ؛

۱۰-اگر $Child - Count(Parent(v)) = ۰$ سپس

۱۱-$Ready = Ready + Parent(v)$؛

۱۲-مقدار $Best - At - Root(T, r, f(r))$ را چاپ کنید؛

۱۳-پایان

$f(v)$ می‌تواند پنج مقدار داشته باشد که در جدول ۱.۴ نمایش داده شده است. هر یک از این پنج مقدار، $f(v)[z]$، اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک S_v در T_v با خاصیت z می‌باشد، یا در حالت $OUTUD$ و $OUTUU$ ، برابر با اندازه کوچکترین مجموعه که در تعریف ۲.۱.۲ روی همه رأس‌های T_v به جز در رأس v صدق کند، می‌باشد.

خاصیت‌های $IN۰$ ، $IN۱$ و $OUTC$ درخت T_v با ریشه v را به مجموعه‌های احاطه‌گر ۱-متحرک افراز می‌کنند. اگر S_v یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای T_v باشد طبق قضیه ۱.۱.۴ دو حالت به وجود می‌آید که یا $v \in S$ و یا $v \notin S$. در حالت اول v یا هیچ همسایه اختصاصی خارجی نسبت به S_v ندارد ($IN۰$) و یا یک همسایه اختصاصی خارجی دارد ($IN۱$). در حالتی که $v \notin S_v$ هر v یک همسایه مانند $w \in S_v$ دارد. بنابراین یا $EPN[w, S_v] = \{v\}$، و یا v دو همسایه در S_v دارد (که هر دو در $OUTC$ قرار می‌گیرند). خاصیت‌های $OUTUD$ و $OUTUU$ حالتی را توصیف می‌کنند که $S_v \subseteq V(T_v)$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای T_v نمی‌باشد، اما چون v توسط والدش $P(v)$ احاطه شود، پس مجموعه $S_v \cup \{P(v)\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای $T_{P(v)}$ می‌باشد. خاصیت $OUTUU$ حالتی را نشان می‌دهد که در T_v، $|S_v \cap N(v)| = ۰$. بنابراین برای هر مجموعه $S_v \subset S_{P(v)}$ خواهیم داشت $EPN[P(v), S_{P(v)}] = \{v\}$. به طور مشابه خاصیت $OUTUD$ حالتی را نشان می‌دهد، که در T_v، $|S_v \cap N(v)| = ۱$. بنابراین برای هر مجموعه $S_v \subset S_{P(v)}$

Component	Properties
$f(v)[IN0]$	$v \in S_v \, and \, \lvert EPN[v, S_v] \rvert = 0$
$f(v)[IN1]$	$v \in S_v \, and \, \lvert EPN[v, S_v] \rvert = 1$
$f(v)[OUTC]$	$v \in S_v \, and \, \exists w \in N(v) \cap S_v : EPN[w, S_v] = \{v\} \, or \, \lvert N(v) \cap S_v \rvert \geq 2$
$f(v)[OUTUD]$	$v \in S_v \, and \, \nexists w \in N(v) \cap S_v : EPN[w, S_v] = \{v\} \, and \, \lvert N(v) \cap S_v \rvert = 1$
$f(v)[OUTUU]$	$v \in S_v \, and \, N(v) \cap S_v = \emptyset$

جدول ۱.۴: جدول خاصیت‌های پنج مقدار $f(v)$

خواهیم داشت $v \notin EPN[P(v), S_{P(v)}]$.

در ادامه $f(v)$ را در درخت T_v با ریشه v محاسبه می‌کنیم. خاصیت‌های $IN0$، $IN1$ و $OUTC$ مجموعه‌های احاطه‌گر ۱-متحرک را برای درخت T نشان می‌دهند درحالی که خاصیت‌های $OUTUD$ و $OUTUU$ اینگونه نیستند. سرانجام $f(r)$ را در ریشه r در درخت پایانی T محاسبه می‌کنیم. قسمت‌های $f(r)$ که برای محاسبه $\gamma_m^1(T)$ مورد استفاده قرار می‌گیرند به صورت $f(r)[IN0]$، $f(r)[IN1]$ و $f(r)[OUTC]$ می‌باشند. الگوریتم $Best - At - Root$ از این ایده پیروی می‌کند.

۳.۴ الگوریتم‌های جزئی

در این بخش الگوریتم‌های جزئی که در الگوریتم $Bottom - up$ مورد استفاده قرار گرفته‌اند را بیان می‌کنیم. سپس به توضیح جزئیات هر یک از این الگوریتم‌ها می‌پردازیم. در این الگوریتم‌ها درخت T_v زیر گرافی از درخت T می‌باشد که شامل ریشه v و فرزندان آن $C(v)$ می‌باشد. نخستین الگوریتمی ما ارائه می‌دهیم الگورتیم $process$ می‌باشد. در این الگوریتم ابتدا f(برگ) را محاسبه می‌کنیم. سپس به محاسبه $f(v)$ که در آن v برگ نمی‌باشد با استفاده از $f(x)$ که در آن x فرزند v می‌باشد می‌پردازیم.

در این الگوریتم در هر برگ، f(برگ) به صورت $< 0, \infty, \infty, \infty, 1 > \longleftarrow$ f(برگ) می‌باشد. به عنوان مثال f(برگ)$[IN0] = 1$ زیرا مقداری (عدد احاطه‌گری ۱-متحرک) که برای هر برگ قرار می‌دهیم برابر ۱ می‌باشد. به

وضوح $f(\text{برگ})[IN۱] = f(\text{برگ})[OUTC] = f(\text{برگ})[OUTUD] = \infty$ زیرا هر برگ هیچ فرزندی ندارد. سرانجام $f(\text{برگ})[OUTUU] = ۰$ زیرا در این حالت S_v یک مجموعه احاطه‌گر برای T_v نمی‌باشد. هنگامی که درخت T به طور کامل در الگوریتم $process$ پردازش شد، با استفاده از الگوریتم $Best - At - Root$ تعیین می‌کنیم که $\gamma_m^۱(T_r) = \gamma_m^۱(T)$.

در شکل ذیل الگوریتم $process$ را با ورودی یک رأس دلخواه v و فرزندان آن $C(v)$ و $f(x)$ برای هر x متعلق به $C(v)$ ارائه می‌دهیم.

الگوریتم Process

ورودی: یک رأس v، مجموعه فرزندان آن $C(v)$،$f(x)$ برای هر $x \in C(v)$.

خروجی: $f(v)$.

۰-شروع

۱-اگر $v \in Leaves$ آنگاه $f(v) =< ۱, \infty, \infty, \infty, ۰ >$؛

در غیر اینصورت

۲- $f(v)[IN۰] = ۱ + \sum_{x\in C(v)} min\{f(x)[IN۰], f(x)[IN۱], f(x)[OUTC], f(x)[OUTUD]\}$؛

$$f(v)[IN۱] = ۱ + min_{x\in C(v)} \left\{ f(x)[OUTUU] + \sum_{y\neq x, y\in C(v)} min \left\{ \begin{array}{l} f(y)[IN۰] \\ f(y)[IN۱] \\ f(y)[OUTC] \\ f(y)[OUTUD] \end{array} \right\} \right\}$$ -۳؛

-۴ $; f(v)[OUTC] =$

$$min \begin{cases} min_{x\in C(v)} & \left\{ f(x)[IN0] + \sum_{y\in C(v) y\neq x} min \begin{Bmatrix} f(y)[IN0] \\ f(y)[IN1] \\ f(y)[OUTC] \end{Bmatrix} \right\} \\ min_{x,y\in C(v), y\neq x} & \left\{ f(x)[IN1] + f(y)[IN1] + \sum_{z\in C(v), z\neq x\neq y} min \begin{Bmatrix} f(y)[IN0] \\ f(y)[IN1] \\ f(y)[OUTC] \end{Bmatrix} \right\} \end{cases}$$

۵- $f(v)[OUTUD] = min_{x\in C(v)} \left\{ f(x)[IN1] + \sum_{y\in C(v), y\neq x} f(y)[OUTC] \right\}$;

۶- $f(v)[OUTUU] = \sum_{x\in C(v)} f(x)[OUTC]$;

۷-پایان

الگوریتم $process$ به محاسبه ۵ جزء $f(v)[z]$ می‌پردازد. در اینجا تعریفی از هر یک از این ۵ جزء ارائه می‌دهیم، سپس چگونگی محاسبه آنها را شرح می‌دهیم:

۱) $f(v)[IN0]$:

نخستین جزء $f(v)$، $f(v)[IN0]$ ، اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک S_v در T_v به طوری که $v \in S_v$ باشد و v هیچ همسایه اختصاصی خارجی در T_v نسبت به S_v نداشته باشد را نشان می‌دهد. منظور از $IN0$ آن است که " v متعلق به S_v می‌باشد و هیچ همسایه اختصاصی خارجی نسبت به S_v ندارد"می‌باشد. برای بدست آوردن مقدار $f(v)[IN0]$ چون $v \in S_v$ در ابتدا مقدار ۱ را به آن اختصاص می‌دهیم و به ازای هر فرزند v اندازه کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-متحرک را که حالت $|EPN[v, S_v]| = 0$ را در برداشته باشد به دست می‌آوریم، سپس آنها را با هم جمع می‌بندیم، و در انتها به آن اضافه می کنیم. در اینجا $f(x)[OUTUU]$ برای هر $x \in C(v)$ یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای T تولید نمی کند به همین دلیل ما از مینیمم چهار قسمت دیگر برای محاسبه آن استفاده می کنیم.

۲) $f(v)[IN1]$:

دومین جزء $f(v)$، $f(v)[IN1]$ ، اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک S_v از T_v هنگامی که $v \in S$ می‌باشد و v یک همسایه اختصاصی خارجی در T_v نسبت به S_v داشته باشد. منظور از $IN1$ آن است که " v متعلق به S_v می‌باشد و یک همسایه اختصاصی خارجی نسبت به S_v دارد" می‌باشد. برای بدست آوردن $f(v)[IN1]$ چون $v \in S_v$ در ابتدا مقدار ۱ را به آن اختصاص می‌دهیم و به ازای هر فرزند v اندازه کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-متحرک را که حالت $|EPN[v, S_v]| = 1$ را در بر داشته باشد به دست می‌آوریم، سپس آنها را با هم جمع می‌بندیم، و در انتها به آن اضافه می کنیم. در اینجا یک فرزند v برای ایجاد همسایه اختصاصی باید در $OUTUU$ باشد و برای فرزندان دیگر از مینیمم چهار قسمت دیگر به غیر $OUTUU$ استفاده می کنیم.

۳) $f(v)[OUTC]$:

سومین جزء $f(v)$، $f(v)[OUTC]$، حالتی را نشان می‌دهد که $v \notin S_v$. این حالت را به دو قسمت افراز می کنیم.
حالت اول: $|N(v) \cap S_v| \geq 2$. در این صورت چون v حداقل دو همسایه در S_v دارد، بنابراین طبق قسمت ۱ از تعریف ۲.۱.۲ مجموعه S_v یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای T_v خواهد بود. در این صورت v خارج از S_v می‌باشد اما توسط فرزندانش در یک مجموعه احاطه گر ۱-متحرک پوشانده می‌شود.

حالت دوم: اگر $|N(v) \cap S_v| = 1$ آنگاه w متعلق به $N(v) \cap S_v$ موجود باشد به طوری که $EPN[w, S_v] = \{v\}$. در این صورت v به تنهایی همسایه اختصاصی خارجی یک عضو از S_v می‌باشد، بنابراین طبق قسمت ۱ از تعریف ۲.۱.۲ مجموعه S_v یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای T_v خواهد بود. در این صورت v خارج از S_v می‌باشد اما توسط فرزندش در یک مجموعه احاطه گر ۱-متحرک پوشانده می‌شود.

بنابراین $f(v)[OUTC]$، اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک S_v از T_v وقتی $v \notin S_v$ می‌باشد. منظور از عبارت $f(v)[OUTC]$ آن است که " v خارج از S_v، اما به وسیله فرزندانش در یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک پوشانده می‌شود " می‌باشد.

برای محاسبه $f(v)[OUTC]$ از مینیمم دو طرح کلی که در بالا ارائه شده استفاده می کنیم.

۴) $f(v)[OUTUD]$:

چهارمین جزء $f(v)$، $f(v)[OUTUD]$، حالتی را نشان می‌دهد که ۱ $= |N(v)\cap S_v|$ و w متعلق به $N(v)\cap S_v$ وجود ندارد به طوری که $EPN[w,S_v]=\{v\}$. رأس v دقیقاً یک همسایه در S_v دارد. فرض می کنیم z همسایه رأس v در مجموعه S_v می‌باشد. از آنجا که w متعلق به $N(v)\cap S_v$ وجود ندارد به طوری که $EPN[w,S_v]=\{v\}$، در نتیجه خواهیم داشت ۲ $\geq |EPN[z,S_v]|$. از طرفی چون ۲ $\geq |EPN[z,S_v]|$ پس S_v یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای T_v نمی باشد.

عبارت $f(v)[OUTUD]$ اندازه کوچکترین مجموعه S_v که یک مجموعه احاطه‌گر ۱- متحرک برای $T_v-\{v\}$ می‌باشد را نشان می‌دهد به طوری که ۱ $= |N(v)\cap S_v|$. منظور از عبارت عبارت $OUTUD$ "v خارج از S_v می‌باشد و توسط فرزندانش در یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک پوشانده نمی‌شود اما مجموعه S_v یک مجموعه احاطه‌گر در T_v است " می‌باشد.

برای محاسبه آن از فرزندان v که در $IN1$ و $OUTC$ می‌باشند استفاده می کنیم.

۵) $f(v)[OUTUD]$:

پنجمین جزء، $f(v)$، $f(v)[OUTUD]$، حالتی را نشان می‌دهده $= |N(v)\cap S_v|$. مقدار $f(v)[OUTUU]$ برابر اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر S_v که یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای $T_v-\{v\}$ است می‌باشد به طوری که ۰ $= |N(v)\cap S_v|$. منظور از عبارت $OUTUU$ " v خارج S_v می‌باشد و توسط فرزندانش در یک مجموعه احاطه گر۱-متحرک S_v پوشانده نمی‌شود و مجموعه S_v یک مجموعه احاطه‌گر در T_v نیست " می‌باشد. محاسبه $f(v)[OUTUU]$ به سادگی امکان پذیر است. برای محاسبه آن هر فرزند v که در S_v نیست و همچنین از قبل پوشیده می‌شود. بنابراین مجموع $f(x)[OUTC]$ برای هر $x\in C(v)$ محاسبه می‌شود.

الگوریتم جزئی دیگری که در الگوریتم $Bottom-up$ مورد استفاده قرار می گیرد الگوریتم $Best-At-Root$ می‌باشد. در شکل اینجا الگوریتم $Best-At-Root$ را با ورودی یک درخت دلخواه T با ریشه r و $f(r)$ که در الگوریتم $process$ بدست آورده شده است ارائه می‌دهیم.

الگوریتم **Best-At-Root**

ورودی: یک درخت دلخواه T،ریشه درخت رأس r، $f(v)$ که توسط الگوریتم$process$ محاسبه می‌شود.

خروجی: $\gamma_m^1(T)$.

۰-شروع

۱-$\gamma_m^1(T) = min\{f(r)[IN0], f(r)[IN1], f(r)[OUTC]\}$;

۲-پایان

در اینجا یک مثال ساده بیان برای این الگوریتم بیان می کنیم.

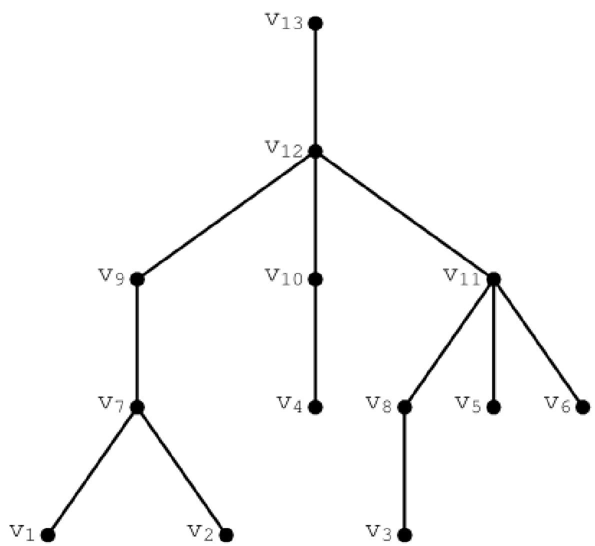
۴.۴ یک مثال

مثال. در شکل ۲.۴ درختی را مشاهده می کنیم که در آن رأس های $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ برگ‌هایی از آن هستند. بنابراین خواهیم داشت که $f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = f(v_4) = f(v_5) = f(v_6) =< 1, \infty, \infty, \infty, 0 >$.

در این مثال $f(v_{11})$ را محاسبه می کنیم. فرزندان v_{11} در درخت T رأس های v_5, v_6 وv_8 می‌باشد. بنابراین $C(v_{11}) = \{v_5, v_6, v_8\}$. از طرفی $f(v_5) = f(v_6) =< 1, \infty, \infty, \infty, 0 >$ و $f(v_8) =< 2, 1, 1, \infty, \infty >$ می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} f(v_{11})[IN0] &= 1 + \sum_{x \in C(v)} min\{f(x)[IN0], f(x)[IN1], f(x)[OUTC], f(x)[OUTUD]\} \\ &= 1 + f(v_5)[IN0] + f(v_6)[IN0] + f(v_8)[OUTC] \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \end{aligned}$$

بعد از اینکه $f(r)$ در ریشه محاسبه شد (در اینجا ریشه v_{13} می‌باشد)، الگوریتم $Best-At-Root$ مقدار $\gamma_m^1(T)$ را محاسبه می کند. در این مثال $\gamma_m^1(T) = f(v_{13})[OUTC] = 7$. در این حالت ما از $f(v_{13})[OUTC]$ استفاده می کنیم، از طرفی می‌دانیم $v_{13} \notin S$. همچنین $f(v_{13})[OUTC] = 7$ زیرا $f(v_{12})[OUTC] = 7$،



شکل ۲.۴: گراف G با ۱۳ $= n$ و ۷ $= \gamma_m^1(G)$

بنابراین نتیجه می‌گیریم $v_{12} \in S$. حال می‌بینیم که ۷ $= f(v_{12})[IN0]$. با این روش می‌توانیم مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک S از T را تعیین کنیم به طوری که $|S| = \gamma_m^1(T)$. بنابراین $S = \{v_1, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$.
در جدول ۲.۴ مقدار $f(v)$ برای هر v به طوری که هر v یک رأس از آن می‌باشد نشان داده شده است.

۵.۴ تذکر پایانی

تعریف‌های ۱.۱.۲ و ۲.۱.۲ تعریف‌های احاطه‌گری ۱-متحرک هستند. در اینجا حالت کلی‌تری از آنها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۴. فرض کنید $k \leq n$ موجود باشد. مجموعه احاطه‌گر $S \subseteq V(G)$ را یک مجموعه احاطه‌گر

$$f(v_i), i \in \{۱, ۲, ..., ۶\} =< ۱, \infty, \infty, \infty, ۰ >$$
$$f(v_۷) =< ۳, ۲, ۲, \infty, \infty >$$
$$f(v_۸) = f(v_{۱۰}) =< ۲, ۱, ۱, \infty, \infty >$$
$$f(v_۹) =< ۳, \infty, ۳, ۲, ۲ >$$
$$f(v_{۱۱}) =< ۴, ۳, ۳, \infty, \infty >$$
$$f(v_{۱۲}) =< ۷, ۷, ۷, ۷, ۷ >$$
$$f(v_{۱۳}) =< ۸, ۸, ۷, ۷, ۷ >$$

جدول ۲.۴: مقادیر $f(v)$ برای گراف در شکل ۲.۴

$k-$متحرک می گویند اگر برای هر $S \subseteq X$ به طوری که $X = \{x_۱, x_۲, ..., x_k\}$ مجموعه $Y = \{y_۱, y_۲, ..., y_k\}$ چنان موجود باشد که$(S - X) \cup Y$ یک مجموعه احاطه گر برای G باشد و

۱) y_i به ازای هر $i \in \{۱, ..., k\}$ مخالف تهی باشد و یا

۲) $y_i \in (V(G) - S) \cap N(x_i)$ به ازای هر $i \in \{۱, ..., k\}$.

اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر $k-$متحرک در گراف G را با $\gamma_m^k(G)$ نمایش می‌دهیم.

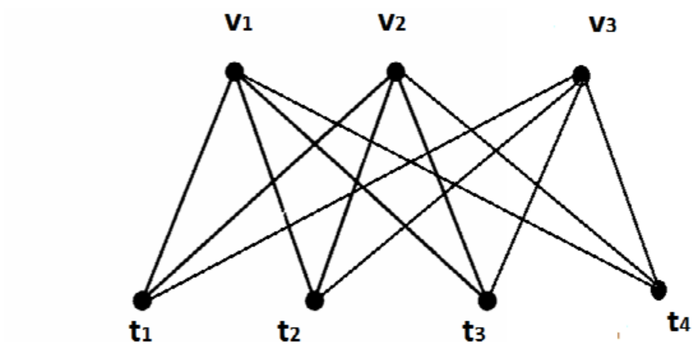
این تعریف بیان می کند که برای هر زیر مجموعه k عضوی $X \subseteq S$ اگر رأس‌هایی از X برداشته شود یا اینکه رأسی خارج از S که در همسایگی آن رأس قرار داشته باشد با آن رأس جایگزین شود مجموعه حاصل یک مجموعه احاطه‌گر شود در نتیجه ما یک مجموعه احاطه‌گر $k-$متحرک برای G داریم. این تعریف مشابه تعریف ۲.۱.۲ می‌باشد.

در این تعریف اگر $k = ۰$ باشد آنگاه مجموعه حاصل یک مجموعه احاطه‌گر می‌شود و $\gamma_m^۰(G) = \gamma(G)$.

این نکته حائز اهمیت است که$\gamma_m^k(G)$ (برای $k > ۱$) و $\gamma_m^۱(G)$ در یک گراف قابل مقایسه نیستند زیرا برای بعضی از گراف‌ها $\gamma_m^k(G) > \gamma_m^۱(G)$ و برای بعضی دیگر $\gamma_m^k(G) < \gamma_m^۱(G)$.

مثال. گراف دو بخشی $K_{۳,m}$ را که در شکل ۳.۴ مشاهده می کنیم به طوری که $m \geq ۳$ را در نظر می گیریم. این

گراف از دو بخش A و B به طوری که $|A| = m$ و $|B| = ۳$ تشکیل شده است. مجموعه S که شامل یک رأس از A و یک رأس از B یک مجموعه احاطه‌گر ۲-متحرک برای این گراف می‌باشد. بنابراین $\gamma_m^۲(K_{۳,m}) = ۲$ درحالی که $\gamma_m^۱(K_{۳,m}) = ۳$ است.



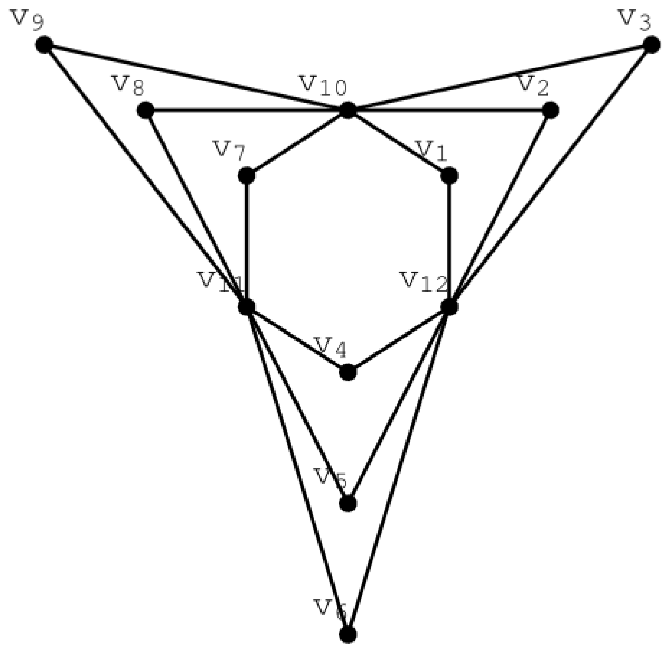
شکل ۳.۴: گراف $K_{۳,m}$ با $\gamma_m^۲(K_{۳,m}) = ۲$ و $\gamma_m^۱(K_{۳,m}) = ۳$

مثال. گراف G را که در شکل ۴.۴ مشاهده می‌کنیم. در این گراف $\gamma(G) = ۳$. لذا $S = \{v_{۱۰}, v_{۱۱}, v_{۱۲}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. از طرفی این مجموعه یک مجموعه احاطه‌گر ۱-متحرک برای G نیز می‌باشد. لذا $\gamma_m^۱(G) = ۳$. با دقت بیشتر می‌توانیم مشاهده کنیم $\gamma_m^۲(G) \geq ۳$.

در ادامه تعریف عمومی‌تری برای تعریف ۱.۵.۴ ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲.۵.۴. فرض کنید $k \leq n$ موجود باشد. مجموعه احاطه‌گر $S \subseteq V(G)$ را یک مجموعه k–متحرک می‌گویند اگر برای هر $X \subseteq S$ به طوری که $X = \{x_۱, x_۲, ..., x_k\}$ مجموعه $Y = \{y_۱, y_۲, ..., y_k\}$ چنان موجود باشد که $(S - X) \cup Y$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G باشد و

۱) y_i به ازای هر $i \in \{۱, ..., k\}$ مخالف تهی باشد و یا



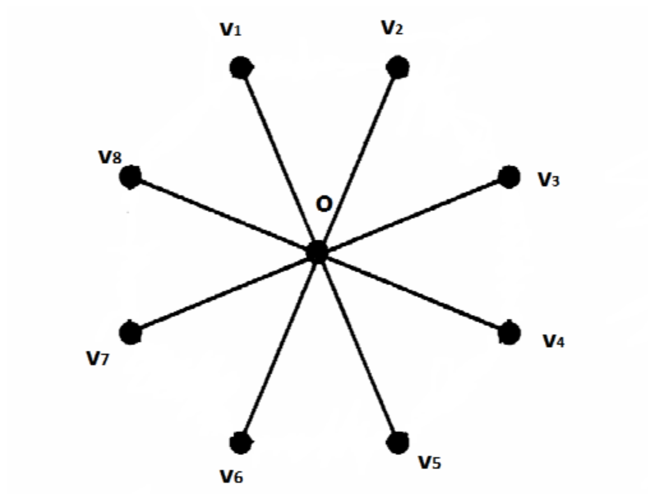
شکل ۴.۴: مثال برای $\gamma_m^{۲}(G) > \gamma_m^{۱}(G)$

۲) $y_i \in (V(G)) \cap N(x_i)$ به ازای هر $i \in \{۱, ..., k\}$.

این تعریف در گراف‌های خاصی می‌تواند برقرار باشد. به عنوان مثال در گراف ستاره $K_{۱,n}$ طبق مشاهده ۳.۱.۲ داریم $\gamma_m^{۱}(K_{۱,n}) = n$. اما با استفاده از تعریف ۲.۵.۴ خواهیم داشت $\gamma_m^{۲}(K_{۱,n}) = ۲$ که در اینجا مجموعه احاطه‌گر ۲-متحرک S از رأس مرکزی در $K_{۱,n}$ و رأس دلخواه دیگر تشکیل شده است. از طرفی با استفاده از تعریف ۱.۵.۴ خواهیم داشت $\gamma_m^{۲}(K_{۱,n}) = n$ که در اینجا S شامل همه برگ‌ها می‌باشد.

مثال. گراف ستاره $K_{۱,۸}$ را که در شکل ۵.۴ مشاهده می‌کنیم. در این گراف بر طبق تعریف ۱.۵.۴مجموعه $S = \{v_۱, ..., v_۸\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۲-متحرک برای $K_{۱,۸}$ است. لذا $\gamma_m^{۲}(K_{۱,۸}) = ۸$. از طرفی مشاهده

می‌کنیم طبق تعریف ۲.۵.۴ مجموعه $S = \{O, v_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۲-متحرک برای $K_{۱,۸}$ است. در نتیجه ۲ $= \gamma_m^۲(K_{۱,۸})$.



شکل ۵.۴: گراف $K_{۱,۸}$ مثال برای مقایسه دو تعریف ۱.۵.۴ و ۲.۵.۴

مراجع

[1] *J. Blair, R. Gera, S. Horton, Movable Dominating sensor sets in Networks,* J. Combin. Math. Combin. Comput. 77*. (2011), pp. 89-101.*

[2] *R. B. Borie, R. G. Parker, C. A. Tovey, Automatic generation of linear-time algorithms from predicate calculus descriptions of problems on recursively constructed graph families,* Algorithmica, 7*. (1992), pp. 555-581. 1, 10, 38*

[3] *A. P. Buger, E. J. Cockayne, W. R. Grundlingh, C. M. Mynhardt, J. H. van Vuuren, W. Winterbach, Finite order domination in graphs,* J. Combin. Math. Combin. Coomput. 49 *(2004), pp. 159-175.*

[4] *A. P. Buger, E. J. Cockayne, W. R. Grundlingh, C. M. Mynhardt, J. H. van Vuuren, W. Winterbach, Infinite order domination in graphs,* J. Combin. Math. Combin. Coomput. 50 *(2004), pp. 179-194.*

[5] *E. Cockayne, Irredundance, secure domination and maximun degree in trees,* Disc. Math., 307*. (2007), pp. 12-17.*

[6] *E. Cockayne, O. Favaron, C. Mynhardt, secure domination, weack roman domination and forbidden subgraphs,* Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applicacations, 39 *(2009), pp. 87-100. 1, 24*

[7] *E. J. Cockayne, P. J. P. Grobler, W. R. Grundlingh, J. Munganga, J. H. van Vuuren, Protection of a graph,* Utilitas Math. 67 *(2005), pp. 19-32.*

[8] *E. J. Cockayne, P. H. P. Grobler, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae, Whate make an irredundant set maximal?,* J. Combin. Math. Combin. Comput. 25 *(1997), pp. 213-224. 27, 34*

[9] *E. J. Cockayne, C. M. Mynhardt, Irredundance, secure domination and maximun degree in graphs,* Combin. Probab. Comput. 6 *(1997), pp. 153-157. 28*

[10] *M. R. Garey, D. S. Johnson, Computers and Intractability,* W. H. Freeman and Co.*, (1975). 26*

[11] *W. Goddard, S. Hedetniemi, S. Hedetniemi, Eternal security in graph,* J. Combin. Math. Combin. Compuse.*, (2005), pp. 169-180.*

[12] *P. J. P. Grobler, Critical concepts in domination and independence,* Ph.D. Thesis, Unniversity of South Africa, *(1998).*

[13] *T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, fundamentals of domination in graph,* Marcel Dekker, New York, *(1998).*

[14] *S. Hedetniemi, Unsolved algorithmic problems on tree,* AKCE J. Graphs. Combin., 3 *(2006), pp. 1-37.* *26*

[15] *C. M. Mynhardt, H. C. Swart, E. Ungerer, Excellent trees and secure domination,* Utilitas Math. *(2005), pp. 255-267.*

[16] *T. Wimer, S. Hedetniemi, AND R. Laskar, A methodology for constructing liner graph algorithms,* Congressus Numeratium, 50 *(1985), pp. 43-60.*

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احاطه‌گری	*domination*
احاطه‌گری امن	*secure domination*
احاطه‌گری ۱-متحرک	*1-movable domination*
اصل لانه کبوتری	*pigeonhole principle*
افراز	*partition*
افراز خوشه‌ای	*clique partition*
برگ	*leaf*
پوچ کردن	*annihilate*
چرخ	*wheel*
درجه	*degree*
درخت	*tree*
دور	*cycle*
رأس	*vertex*
رده	*class*
زیرگراف	*subgraph*
ستاره	*star*
شعاع	*radius*
عدد احاطه‌گری	*domination number*
عدد احاطه‌گری امن	*secure domination number*
عدد احاطه‌گری ۱-متحرک	*1-movable domination number*
غیرافزونگی	*irredundance*
فاصله	*distance*
قطر	*diameter*
کران بالا	*upper bound*
کران پایین	*lower bound*
گراف	*graph*
گراف همبند	*connected graph*
گراف کامل	*complete graph*
گریز از مرکز	*eccentricity*
گشت	*walk*
مجاور	*adjacent*
متمایز	*distinct*

مجموعه احاطه‌گر .... *dominating set*
مرتبه .... *order*
مسیر .... *path*
مکمل .... *complement*
منتظم .... *regular*
همسایگی .... *neighborhood*
همسایگی باز .... *open neighborhood*
همسایگی بسته .... *closed neighborhood*
یال .... *edge*

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

adjacent	مجاور
annihilate	پوچ کردن
class	رده
clique partition	افراز خوشه‌ای
closed neighborhood	همسایگی بسته
complement	مکمل
complete graph	گراف کامل
connected graph	گراف همبند
cycle	دور
degree	درجه
diameter	قطر
distance	فاصله
distinct	متمایز
dominating set	مجموعه احاطه‌گر
domination	احاطه‌گری
domination number	عدد احاطه‌گری
eccentricity	گریز از مرکز
edge	یال
graph	گراف
irredundance	غیرافزونگی
leaf	برگ
lower bound	کران پایین
1-movable domination	احاطه‌گری ۱-متحرک
1-movable domination number	عدد احاطه‌گری ۱-متحرک
neighborhood	همسایگی
open neighborhood	همسایگی باز
order	مرتبه
partition	افراز
path	مسیر
pigeonhole principle	اصل لانه کبوتری
radius	شعاع
regular	منتظم

احاطه‌گری امن .... *secure domination*
عدد احاطه‌گری امن .... *secure domination number*
ستاره .... *star*
زیرگراف .... *subgraph*
درخت .... *tree*
کران بالا .... *upper bound*
رأس .... *vertex*
گشت .... *walk*
چرخ .... *wheel*

Abstract

In this thesis, we study 1-movable dominating in graphs. In chapter 1, we state some elementary concepts which we use for the next chapters. In chapter 2, we study 1-movable domination in graphs and give several examples and bounds. In chapter 3, we study irredundance sets in trees and give several bounds for irredundance number and secure domination number. In chapter 4, we study 1-movable domination in trees.

Keywords: *domination, dominating set, domination number, 1-movable dominating, 1-movable domination number, irredundance, secure domination.*

Shahrood University of Technology

Facualty of Mathematical Science

Department of Mathematics

M.s Thesis

1-Movable Dominating Sets

By:

Fatemeh Shahmoradi

Supervisor:

Dr. Nader Jafari Rad

Date:

31 December 2012