





دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

رنگ فازی و رنگ آمیزی فازی

دانشجو: حمید جوربنیان

استاد راهنما:

آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف

پایان نامه جهت اخذ کارشناسی ارشد

مهر ۱۳۹۱

پدرم عطر گل یاس بقا است	مادرم شبنم گلبرگ حیات
پدرم ساحل زیبای لقاست	مادرم وسعت دریای گذشت
پدرم جلوه ایمان و رضاست	مادرم آینه حجب و حیا
پدرم حاکم پیمان است و وفا	مادرم شهر امید است و هنر
پدرم نقش همه خاطره باست	مادرم موی سپید کرده ز حزن

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش کسانی که در سردترین روزگار ان بهترین پشتیبان و یاری دهنده هستند

« تقدیم به پدر و مادر عزیزم »

و تقدیم به برادر خوب و خواهر مهربانم

الهی

بسا زکار من و منکر به کردار من ولی ده، که طاعت افزون کند طاعتی ده که بهشت را بسنمون کند

علمی ده که در آن آتش هوانبود علمی ده که در او زرق وریانبود

حمد و سپاس مخصوص خدای عالمیان، که با لطف و رحمت بی پایانش به بنده شکاک کرد تا این پایان نامه را به اتمام رسانم. او یکتاست و

مهربان و زندگی بی یاد و نام و رحمت او سراسر بی مثل نیست و سپاس از او در هر علمی واجب است. اکنون که این پایان نامه بایاری

خداوند بزرگ و حکیم به پایان رسیده است، بر خود لازم می دانم که از زحمات استاد محترم و گران قدرم جناب آقای دکتر رحیمی که با

راهنمایی های دلسوزانه و صبور و حوصله فراوان در انجام این تحقیق نقش مهمی را ایفا کردند تشکر و قدرانی کنم. همچنین از پدر و مادر و

خانواده دوست داشتنی ام که بنده را در این مدت یاری رسانند سپاس گذاری می کنم. در پایان از تمامی دوستان مخصوصاً آقای محسن

همیدان که به بنده در انجام این تحقیق کمک کردند سپاس گزارم.

حمید جوهر بنیان

چکیده

در این پایان نامه ابتدا مفهوم رنگ و فضای رنگی تشریح و سپس به توصیف مدل رنگ فازی پرداخته شده است. روش پیشنهادی یک مجموعه از رنگ‌های فازی مبتنی بر فضای رنگ HSL تعریف می‌کند. سپس یک اندازه تشابه فازی برای تخمین تشابه رنگ‌های فازی ایجاد شده است. همچنین یک الگوریتم خوشه بندی فازی رنگ مبتنی بر اندازه تشابه جدید، ارائه شده است. این اندازه تشابه رنگ مبتنی بر فضای ادراکی HSL است. در این پایان نامه رنگ آمیزی از گراف‌ها با استفاده از مفهوم رنگ فازی نشان داده شده و نیز مجموع رنگ فازی و نیرومندی از یک گراف فازی مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: فضاهاى رنگى، رنگ فازی، خوشه‌بندی فازی، تشابه فازی، گراف فازی، α -برش، عدد رنگی فازی، عدد رنگی مجموع فازی

مقالات مستخرج از پایان نامه

بررسی مدل‌های فضای رنگی و تعیین چند تابع تعلق برای فضای رنگ فازی، دوازدهمین کنفرانس سیستم‌های فازی ایران، دانشگاه مازندران - بابلسر، ۴-۲ آبان، ۱۳۹۱

فهرست مطالب

۱-.....	فصل اول: کلیات تحقیق
۲-.....	۱-۱ مقدمه
۲-.....	۲-۱ تاریخچه و شرح مختصری از مفهوم گراف و رنگ آمیزی گراف
۵-.....	۳-۱ مجموعه‌های فازی
۸-.....	۴-۱ تاریخچه و تعاریف اولیه گراف‌های فازی و رنگ آمیزی آن‌ها
۱۱-.....	۵-۱ ساختار تحقیق
۱۲-.....	فصل دوم: معرفی رنگ و فضاهاى رنگی
۱۳-.....	۱-۲ رنگ چیست؟
۱۸-.....	۲-۲ تصویر
۲۰-.....	۳-۲ مدل‌های فضای رنگی
۲۱-.....	۱-۳-۲ فضای رنگی RGB
۲۴-.....	۲-۳-۲ فضای رنگی CIEXyZ و CIEXYZ
۲۷-.....	۳-۳-۲ مدل‌های رنگی CMY,CMYK (رنگ تفاضلی)
۲۹-.....	۴-۳-۲ فضاهاى رنگی HSL، HSI و HSV
۳۴-.....	۵-۳-۲ فضای رنگ Ycber
۳۵-.....	فصل سوم: توصیف مدل رنگ فازی

- ۱-۳ ارتباط رنگ و منطق فازی ۳۶
- ۲-۳ رنگ فازی بر مبنای زبان شناختی ۳۷
- ۳-۳ مدل رنگ فازی بر مبنای فضای رنگی HSL و تبدیل آن از فضای رنگی RGB ۳۹
- ۴-۳ توصیف کننده رنگ فازی ۴۵
- ۵-۳ اندازه گیری تشابه رنگ فازی ۵۱
- ۱-۵-۳ یک مثال ۵۱
- ۲-۵-۳ نمونه ای کاربردی رنگ فازی بر مبنای تشابه فازی ۵۵
- فصل چهارم: استفاده از خوشه بندی و دسته بندی فازی در رنگ فازی ۵۸
- ۱-۴ خوشه بندی ۵۹
- ۲-۴ خوشه بندی فازی ۶۲
- ۱-۲-۴ الگوریتم خوشه بندی c- میانگین ۶۴
- ۳-۴ خوشه بندی رنگ فازی بر مبنای تشابه hsl ۶۸
- ۱-۳-۴ فواصل و تشابه برای مقادیر HSL ۶۹
- ۲-۳-۴ تشابه رنگ HSL ۷۰
- ۳-۳-۴ الگوریتم خوشه بندی فازی رنگ ۷۳
- ۴-۴ دسته بندی و نام گذاری رنگ فازی ۷۵

۱-۴-۴ دسته بندی فضای رنگ به مجموعه فازی ۷۶

فصل پنجم: رنگ آمیزی فازی ۷۹

۱-۵ رنگ آمیزی فازی گراف با رنگ های فازی ۸۰

۲-۵ رنگ آمیزی رأسی از گراف های فازی با استفاده از α -برش ۸۴

۳-۵ مجموع رنگی فازی ۸۹

نتیجه گیری و چشم انداز آینده ۱۰۰

واژه نامه ۱۰۱

مراجع ۱۰۵

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱: تابع عضویت دوزنقه ای با پارامترهای α, a, b, β ۶
- شکل ۲-۱: تابع عضویت مثلثی با پارامترهای α, a, β ۶
- شکل ۱-۲: طیف الکترومغناطیسی ۱۵
- شکل ۲-۲: برگ طول موج سبز را روی سطح برای مشاهده کردن منعکس می‌کند ۱۶
- شکل ۳-۲: نمودار طرح کلی از چشم انسان و مقطع عرضی از شبکیه ۱۶
- شکل ۴-۲: این نمودار مبنی بر طول موج و پاسخ نسبی گیرنده های بینایی انسان است ۱۷
- شکل ۵-۲: توزیع توان طیفی در طول روز ۱۷
- شکل ۶-۲: پیکسل تصویر. هر پیکسل دارای یک شماره رقمی می‌باشد که بیانگر میزان روشنایی آن پیکسل است ۱۸
- شکل ۷-۲: تصویر از یک ماتریس که دارای ۲۸۸ سطر و ۲۶۵ ستون است برای نمایش استفاده می‌کند ۱۹
- شکل ۸-۲: نمودار مکعب رنگی RGB. از سه محور R، G، B با قطری که از سیاه به سفید امتداد دارد، تشکیل شده است ۲۳
- شکل ۹-۲: (a) رنگ‌های تجمعی و (b) رنگ‌های تفاضلی را نشان می‌دهد ۲۴
- شکل ۱۰-۲: دیاگرام رنگی CIE در فضای دو بعدی ۲۷
- شکل ۱۱-۲: در شکل تفاوت بیت دو فضای CMY و RGB دیده می‌شود ۲۹
- شکل ۱۲-۲: فضای رنگی HSI(HSL) ۳۰
- شکل ۱۳-۲: نمودار فضای رنگ HSL و دایره‌ی فام ۳۱
- شکل ۱۴-۲: مدل رنگی HSV ۳۳

- شکل ۳-۱: درجه عضویت فام فازی برای H تعیین شده ----- ۴۱
- شکل ۳-۲: ساختار مجموعه فازی تن. در این شکل از ترکیب دو مجموعه فازی \tilde{S} و \tilde{L} با توابع عضویت مثلثی مجموعه فازی تن ایجاد شده است ----- ۴۳
- شکل ۳-۳: اعداد فازی دوزنقه ای و مثلثی در بعد H ----- ۴۶
- شکل ۳-۴: توصیفگرهای بنیادی رنگ ----- ۴۸
- شکل ۳-۵: زیر مجموعه فازی سه بعدی دوزنقه ای ----- ۴۸
- شکل ۳-۶: بعد S و L ----- ۴۹
- شکل ۳-۷: نمودار رنگ های آکروماتیک سیاه، خاکستری و سفید ----- ۵۰
- شکل ۳-۸: مثالی از زاویه hue ----- ۵۵
- شکل ۳-۹: توصیف کننده تن ----- ۵۵
- شکل ۳-۱۰: قطعه بندی تصویر بر مبنای تشابه فازی بین دو رنگ فازی ----- ۵۷
- شکل ۴-۱: خوشه بندی نمونه های ورودی ----- ۵۹
- شکل ۴-۲: خوشه بندی وسایل نقلیه ----- ۶۰
- شکل ۴-۳: مجموعه داده پروانه ای ----- ۶۳
- شکل ۴-۴: خوشه بندی فازی داده ----- ۶۴
- شکل ۴-۵: توزیع یک بعدی نمونه ها ----- ۶۵
- شکل ۴-۶: خوشه بندی کلاسیک نمونه های ورودی ----- ۶۶
- شکل ۴-۷: خوشه بندی فازی نمونه ها ----- ۶۶
- شکل ۵-۱: مجموعه فازی گوسی. C_i مرکز و σ_i پهنا را نشان می دهد ----- ۸۲
- شکل ۵-۲: گراف فازی $\tilde{G} = (V, \sigma, \mu)$ مثال ۵-۲-۳ ----- ۸۸
- شکل ۵-۳: گراف به دست آمده از α -برش: $G_{0.5} = (V_{0.5}, E_{0.5})$ ----- ۸۸

شکل ۴-۵: گراف به دست آمده از α -برش: $G_{0.6}=(V_{0.6}, E_{06})$ ۸۹

شکل ۵-۵: درخت T با دو رنگ آمیزی متفاوت ۹۰

شکل ۵-۶: گراف فازی مطابق با مثال ۵-۳-۳ ۹۶

فهرست جداول

- جدول ۱-۲: مقادیر پیکسل و دامنه تغییرات تصاویر ----- ۲۰
- جدول ۱-۳: پارامترهای انتخاب شده برای فام ----- ۵۳
- جدول ۲-۳: پارامترهای انتخاب شده برای توصیفگرهای تن ----- ۵۴
- جدول ۳-۳: پارامترهای روشنایی و اشباع ----- ۵۴
- جدول ۱-۴: معیارهای تشابه بر اساس توابع فاصله مختلف ----- ۶۷
- جدول ۱-۵: مجموعه های فازی در ۷ از مثال ۳-۳-۵ ----- ۹۷

فصل اول

کلیات تحقیق

۱-۱ مقدمه

درک یک رنگ، عکس‌العملی است که مغز به محرک‌های دریافتی از سنسورهای چشم می‌دهد. درک و دریافت رنگ، احساسی شخصی بوده و نسبی می‌باشد. رنگ‌ها به دو دسته اصلی و فرعی تقسیم می‌شوند، که رنگ‌های اصلی از ترکیب هیچ رنگی به دست نیامده‌اند، رنگ‌های فرعی از ترکیب رنگ‌های اصلی به وجود آمده‌اند. یک تصویر یک آرایه، یا یک ماتریس از پیکسل‌های مربعی (عناصر تصویر) مرتب شده در سطرها و ستون‌ها است. هر پیکسل یک مقدار از صفر (سیاه) تا ۲۵۵ (سفید) دارد. یک فضای رنگی یک نمایش ریاضی از مجموعه رنگ‌ها است. در این پایان‌نامه با استفاده از تئوری فازی به تحلیل رنگ از دیدگاه فازی پرداخته می‌شود. همچنین رنگ‌آمیزی فازی گراف نیز مورد بحث این تحقیق خواهد بود. بنابراین در بخش‌های فصل اول معرفی گراف‌ها، گراف‌های فازی، رنگ‌آمیزی آن‌ها و مجموعه‌های فازی مورد بررسی قرار خواهند گرفت و سرانجام بخش ۱-۵ ساختار این پایان‌نامه را مشخص خواهد کرد.

۲-۱ تاریخچه و شرح مختصری از مفهوم گراف و رنگ‌آمیزی گراف

تئوری گراف زمانی که اوایل^۱ ریاضی دان سوئیسی در ۱۷۳۶ میلادی مسأله پل‌های کونیگسبرگ^۲ را با چاپ در مقاله ای مورد توجه قرار داد، مطرح شد. از آن زمان تا قبل از اینکه اولین کتاب در تئوری گراف در سال ۱۹۳۶ توسط کونیک^۳ نوشته شود ۲۰۰ سال به طول انجامید. بعدها به تدریج تئوری گراف توسعه یافت و امروزه در خیلی از رشته‌ها مانند ریاضیات، علوم کامپیوتر، اقتصاد، حمل و نقل و سایر علوم به کار برده می‌شود [۱]. رنگ‌آمیزی گراف برای خیلی از مسائل جهان واقعی مانند زمان بندی، ارتباط از راه دور، داده شناسی زیستی و غیره کاربرد دارد. تاریخچه رنگ‌آمیزی گراف به حداقل ۱۸۵۲ میلادی زمانی که فرانسویس گاتری^۴ با حدس چهار رنگ مطرح شد، برمی‌گردد. پرسش این جا بود که آیا می‌توان کشور های هر نقشه را با حداکثر چهار رنگ‌آمیزی کرد، به طوری که دو

¹ EULER

² Königsberg bridge problem

³ KÖNIG

⁴ Francis Guthrie

کشور با مرز مشترک رنگ یکسانی نگیرند؟. رنگ آمیزی رأسی و یالی گراف دو مسئله مشهور در مطالعه گراف هستند. در این تحقیق بیشتر رنگ آمیزی رأسی مورد توجه است. حال به بیان تعریف گراف و برخی تعاریف وابسته به آن می پردازیم [۲].

تعریف ۱-۲-۱: فرض کنید V مجموعه ای نا تهی باشد و $E \subseteq V \times V$. در این صورت جفت (V, E) را گراف سوء دار (V) می نامند، که در آن V مجموعه رأس ها یا گره ها، E مجموعه یال ها و نمایش آن به صورت $G = (V, E)$ است. برای هر یال برای مثال (b, c) ، گفته می شود این یال از رأس b و c می گذرد و b را مجاور به c یا c را مجاور به b گویند. یال (b, b) مثالی از طوقه است و رأس e را که بر هیچ یالی واقع نیست را رأس تنها گویند. زمانی که سوی یال مطرح نباشد، گراف بی سوء تلقی می شود. در گراف بی سوی یک یال به صورت مثلاً $\{b, c\}$ نوشته می شود، در طول این تحقیق برای مثال یال $\{b, c\}$ را به صورت bc می نویسیم و تمام گراف ها را بی سو در نظر می گیریم [۲].

تعریف ۲-۲-۱: فرض کنید x و y (لزوماً متمایز نیستند) در گراف بی سوی G دو رأس باشند، یک گشت $x-y$ در G ، دنباله متناوب متناهی $x = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, \dots, e_{n-1}, x_{n-1}, e_n, x_n = y$ از رأس ها و یال های G است، که از x شروع شده و با n یال $e_i = x_{i-1}x_i$ ، $0 \leq i \leq n$ به رأس y ختم می شود. گشتی را که یال تکراری نداشته باشد، مدار گویند. مسیر، گشتی است که در آن تکرار رأس و یال مجاز نباشد و مسیری را که در آن رأس ابتدایی و انتهایی آن یکسان باشد، دور نامند. G همبند است، اگر بین هر دو رأس متمایز آن مسیری وجود داشته باشد [۲].

از جمله گراف های خاص می توان به برخی موارد زیر اشاره کرد.

آ) گراف کامل: با K_n نشان داده می شود که طوقه ندارد و در آن به ازای هر $a, b \in V$ ، $a \neq b$ یال ab موجود است.

ب) گراف دو بخشی: با $K_{m,n}$ نشان داده می شود و $V = V_1 \cup V_2$ با $\emptyset = V_1 \cap V_2$ و هر یال G به صورت ab ، یکی از رأس های a و b در V_1 و دیگری در V_2 می باشد. در این گراف $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$ و اگر هر رأس در V_1 به هر رأس در V_2 وصل شود گراف کامل است. از دیگر گراف ها

می‌توان به پترسن، هامنی، P_n ، C_n و غیره که در منابع دروس دانشگاهی از جمله منبع [۳] آمده است، اشاره نمود.

تعریف ۱-۲-۳: در گراف G ، $\deg_G a$ ، درجه رأس a نامیده می‌شود که آن تعداد یال‌هایی از G است که بر رأس a واقع شده است. مینیمم و ماکسیمم درجه رأس‌ها را به ترتیب با δ و Δ نشان می‌دهند. بنا بر قضیه اثبات شده در منبع [۳] داریم: $\sum_{x \in V} \deg_G x = 2|E|$ ، که $|E|$ تعداد یال‌ها است و از آن نتیجه می‌شود برای هر گراف بی‌سوء تعداد رأس‌های درجه فرد باید زوج باشد [۳].

تعریف ۱-۲-۴: گراف $H = (V_1, E_1)$ زیر گراف $G = (V, E)$ است، اگر $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$ و $E_1 \subseteq E$ که در آن هر یال E_1 از رأس‌های V_1 می‌گذرد. اگر $\emptyset \neq U \subseteq V$ ، زیر گراف G که به وسیله U تولید شده، زیر گرافی است با رأس‌هایی در U و تمام یال‌های G . یک زیر گراف G' از گراف G را زیر گراف القایی نامند، اگر زیر گرافی مانند U وجود داشته باشد که در آن $G' = \langle U \rangle$ [۲].

تعریف ۱-۲-۵: فرض کنید $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ دو گراف باشند. تابع $f: V_1 \rightarrow V_2$ را یک یکرختی گرافی نامند اگر:

(i) f یک به یک و پوشا باشد.

(ii) برای $a, b \in V_1$ ، $ab \in E_1$ اگر و تنها اگر $f(a)f(b) \in E_2$ وقتی چنین تابعی وجود داشته باشد، G_1 و G_2 را گراف‌های یکرخت می‌نامند [۲].

تعریف ۱-۲-۶: اگر G یک گراف بی‌طوقه باشد، k را رنگ پذیر نامند، هرگاه بتوان هر یک از k رنگ را به یکی از رئوس اختصاص داد، به طوری که هیچ دو رأس مجاور هم‌رنگ نباشند. در واقع یک رنگ آمیزی مجاز یک نگاشت به صورت $f: V \rightarrow N$ است، به طوری که به ازای هر دو رأس مجاور i و j ، $f(i) \neq f(j)$. عدد رنگی $\chi(G)$ از گراف G ، مینیمم تعداد رنگ برای رنگ آمیزی یک گراف گویند [۳].

۳-۱ مجموعه‌های فازی

منطق فازی برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ میلادی توسط آقای لطفی زاده از دانشگاه کالیفرنیا معرفی شد. مجموعه‌های فازی و سایر مباحثی که به صورت فازی مطرح می‌شوند، بیشتر به بحث در مسائل عدم اطمینان و عدم قطعیت می‌پردازند. مجموعه‌های فازی می‌توانند با مفاهیم نا دقیق مثل «مجموعه افراد قد بلند» و «مجموعه افرادی که نزدیک شهرستان رامسر به سر می‌برند» که قابل بیان به وسیله‌ی مجموعه‌های معمولی نیستند، برخورد کنند. در این صورت، اگر X مجموعه‌ای مرجع باشد که هر عضو آن با x نمایش داده شود، مجموعه فازی \tilde{A} در X به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ تعریف می‌شود، که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت برای مجموعه فازی است. تابع عضویت، هر عضو از X را به یک مقدار عضویت بین ۰ و ۱ می‌نگارد. در واقع $\mu: X \rightarrow I$ که I معمولاً بازه $[0,1]$ است. همچنین می‌توان \tilde{A} را به صورت
$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \dots + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n}$$
 تعریف کرد، به طوری که \sum یک نماد است. فرض کنید \tilde{A} یک مجموعه فازی و X مجموعه مرجع باشد، سپس تعاریف زیر را داریم [۴]:

تعریف ۱-۳-۱: مجموعه فازی \tilde{A} را محدب گوئیم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \in [0,1]$ داشته

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\} \quad \text{باشیم:}$$

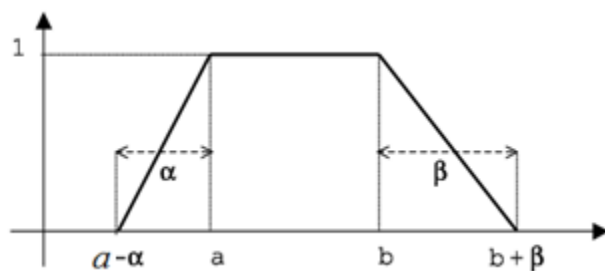
تعریف ۲-۳-۱: یک مجموعه فازی محدب \tilde{A} یک عدد فازی است اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$\text{الف) حداقل یک } x_0 \in X \text{ وجود داشته باشد به طوری که } \mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$$

ب) $\mu_{\tilde{A}}(x)$ قطعه پیوسته باشد.

تعریف ۳-۳-۱: الف) هر عدد فازی با تابع عضویت به صورت زیر یک عدد فازی دوزنقه‌ای است.

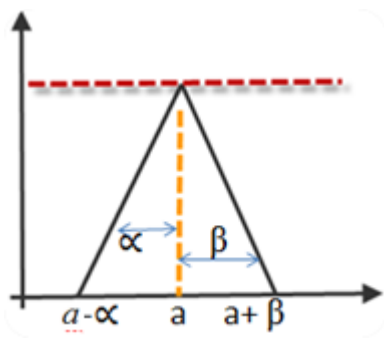
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a-x}{\alpha} & a - \alpha \leq x < a \\ 1 & a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{x-b}{\beta} & b < x \leq b + \beta \\ 0 & \text{ow} \end{cases}$$



شکل ۱-۱: تابع عضویت دوزنقه ای با پارامترهای α, a, b, β

(ب) هر عدد فازی، به شکل زیر عدد فازی مثلثی است.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a-x}{\alpha} & a - \alpha \leq x < a \\ 1 - \frac{x-a}{\beta} & a < x \leq a + \beta \\ 0 & \text{ow} \end{cases}$$



شکل ۲-۱: تابع عضویت مثلثی با پارامترهای α, a, β

تعریف ۱-۳-۴: اگر $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ و $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ مجموعه‌های مرجع باشند، آنگاه رابطه‌ی فازی دوتایی گسسته X و Y به صورت ماتریس ۱-۱ بیان می‌شود:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & & y_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \dots & \mu_R(x_1, y_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_R(x_n, y_1) & \dots & \mu_R(x_n, y_m) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1-1)$$

که در آن $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$

تعریف ۱-۳-۵: اگر \tilde{A} مجموعه فازی بر X و R رابطه فازی بر $X \times Y$ باشد، آنگاه $\tilde{A}OR$ مجموعه فازی بر Y است.

$$\mu_{\tilde{A}OR}(y) = \max_{x \in X} [\min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_R(x, y))]$$

و اگر S یک رابطه فازی بر $Y \times Z$ باشد، آنگاه ROS یک رابطه فازی بر $X \times Z$ است:

$$\mu_{ROS}(x, z) = \max_{y \in Y} [\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))]$$

تعریف ۱-۳-۶: برش‌های مجموعه فازی به صورت روابط زیر است:

α -برش قوی:

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) > \alpha, \alpha \in [0, 1)\}$$

α -برش ضعیف:

$$A_{\bar{\alpha}} = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha, \alpha \in (0, 1]\}$$

α -برش‌های ضعیف گاهی اوقات مجموعه‌های سطح نامیده می‌شود [۴].

تعریف ۱-۳-۷: اگر \tilde{A}_1 و \tilde{A}_2 دو مجموعه فازی باشند، رابطه زیر برقرار است:

$$\tilde{A}_1 \subseteq \tilde{A}_2 \Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_{\tilde{A}_1}(x) \leq \mu_{\tilde{A}_2}(x)$$

تعریف ۱-۳-۸: یک مجموعه فازی \tilde{A} نرمال نامیده می‌شود، اگر حداقل درجه عضویت یک عضو از

آن برابر یک باشد. به عبارتی دیگر اگر ارتفاع یک مجموعه فازی یک باشد، آن مجموعه، مجموعه

فازی نرمال نامیده می‌شود. باید به این نکته اشاره کرد که ارتفاع یک مجموعه فازی \tilde{A} به صورت

$$Hgt(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$
 تعریف می‌شود.

۴-۱ تاریخچه و تعاریف اولیه گراف‌های فازی و رنگ آمیزی آن‌ها

تعریف اولیه یک گراف فازی به وسیله کافمن^۵ در سال ۱۹۷۳ بر مبنای روابط فازی زاده بود. ازرائیل

رزنفلد^۶، در سال ۱۹۷۵ روابط فازی را در مجموعه‌های فازی و تئوری گراف‌های فازی مورد توجه قرار

داد. او همچنین تعریفی شامل رئوس فازی و یال‌های فازی را نیز بیان نمود. در طول همان سال‌ها

افرادی چون آر. تی. یه^۷ و اس. وای. بنگ^۸ مفاهیمی از گراف‌های فازی ارائه دادند. نظریه گراف‌های

فازی هم اکنون کاربردهای بی شماری را در علوم مدرن از جمله: شبکه‌های عصبی، سیستم‌های

هوشمند، تشخیص پزشکی و غیره ایفا می‌کند [۵]. اما رنگ آمیزی گراف فازی موضوع جدیدی است.

اولین بار توسط نویسندگانی چون اصلاحچی^۹ و اونق^{۱۰} در سال ۲۰۰۴ تحت عنوان رنگ آمیزی فازی

گراف فازی مطرح گردید [۸] و این موضوع به طور خاص تر تحت عنوان رنگ آمیزی گراف‌های فازی

توسط نویسندگانی چون مونز^{۱۱}، اورتینو^{۱۲}، رامیرز^{۱۳} و یانز^{۱۴} ارائه شد و تاکنون این رنگ آمیزی از

جنبه‌های گوناگون مورد توجه واقع شده است [۷].

⁵ Kaufmann

⁶ Azriel Rosenfeld

⁷ R.T.Yeh

⁸ S.Y. Bang

⁹ Eslahchi

¹⁰ Onagh

¹¹ Munez

¹² Ortuno

یک نوع از گراف فازی به این صورت است که مجموعه یال‌ها و رئوس آن فازی باشند. فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی باشد، سه تایی $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ را یک گراف فازی در X جایی که σ و μ به ترتیب مجموعه های فازی در X و E هستند به طوری که $\mu(xy) \leq \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ ، برای تمام $x, y \in X$ ، گویند [۸].

گراف فازی $\tilde{G}' = (X, \sigma', \mu')$ را زیر گراف \tilde{G} نامیم، هرگاه برای هر دو عنصر $x, y \in X$ ، داشته باشیم $\mu'(xy) \leq \mu(xy)$ و $\sigma'(x) \leq \sigma(x)$ [۸].

گراف فازی $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ را همبند نامیم هرگاه برای هر دو عنصر $x, y \in X$ ، یک دنباله از عناصر x_0, x_1, \dots, x_m وجود داشته باشند به طوری که $x_m = y, x_0 = x$ و $0 \leq i \leq m-1, \mu(x_i, x_{i+1}) > 0$ [۸].

یک گراف فازی $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ را کامل نامند، هرگاه برای تمام $x, y \in X$ ، $\mu(xy) = \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ [۸].

نوع دیگر از گراف‌های فازی به این صورت است که مجموعه یال‌های آن فازی و رئوس آن غیر فازی باشند. نمایش این گراف به صورت $\tilde{G} = (X, \tilde{E})$ است، که در آن X مجموعه رئوس قطعی و \tilde{E} مجموعه یال‌های فازی است و به وسیله‌ی ماتریس $\mu = (\mu_{ij})_{i, j \in X}$ در زیر مشخص می‌شود:

$$\mu_{ij} = \mu_{\tilde{E}}(ij) \quad \forall i, j \in X \quad i \neq j$$

$\mu_{\tilde{E}} : X \times X \rightarrow [0, 1]$ یک تابع عضویت یال‌های فازی گراف است، هر عضو $\mu_{ij} \in [0, 1]$ تابع عضویت یال xy برای هر $i, j \in X$ را نشان می‌دهد که $i \neq j$. این نوع گراف فازی را به صورت $\tilde{G} = (X, \mu)$ هم نشان می‌دهند. در این گراف‌ها درجه عضویت رئوس قطعی صفر یا ۱ است و ارزش تمام رئوس یکسان است. بنابراین آخرین نوع از گراف‌های فازی را می‌توان گراف رأس فازی نامید که

¹³ Ramirez

¹⁴ Yanez

یال‌های آن قطعی است. در حالت کلی باید به این مهم توجه کرد گراف فازی تعمیمی از گراف قطعی است [۹].

تعریف ۱-۴-۱: برای هر گراف فازی $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ فرض کنید $A = \{\sigma(x) > 0 | x \in X\} \cup \{\mu(xy) > 0 | x \neq y, x, y \in X\}$ با k عنصر باشد. حال فرض کنید $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ دنباله $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ و مجموعه A به ترتیب دنباله پایه ای و مجموعه پایه ای گفته می‌شوند [۸].

تعریف ۲-۴-۱: فرض کنید $\alpha \in (0, 1]$ داده شده، α -برش از \tilde{G} ، به صورت گراف $G^\alpha = (X^\alpha, U^\alpha)$ است، جایی که $X^\alpha = \{x \in X | \sigma(x) \geq \alpha\}$ و $U^\alpha = \{xy \in E | \mu(xy) \geq \alpha\}$ واضح است که یک گراف فازی یک تعداد متناهی متفاوت از α برش‌ها را خواهد داشت. در حقیقت، α -برش‌ها در طول بازه‌های $(0, \alpha_1], \dots, (\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ تغییر نمی‌کنند [۱۰].

تعریف ۳-۴-۱: فرض کنید $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ یک خانواده متناهی از مجموعه‌های فازی تعریف شده در X باشد. مجموعه α برش‌ها از γ_i ها به وسیله $\Gamma^\alpha = \{\gamma_1^\alpha, \dots, \gamma_k^\alpha\}$ تعریف شده است و مجموعه فازی $\vee \Gamma$ در X به وسیله $\vee \Gamma(x) = \max_i \gamma_i(x)$ تعریف شده است. برای گراف فازی $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ عناصر X و E را به ترتیب رأس‌ها و یال‌های آن نامیم [۸].

تعریف ۴-۴-۱: دو رأس x و y در \tilde{G} مجاورند اگر $\frac{1}{2} \min\{\sigma(x), \sigma(y)\} \leq \mu(xy)$. یال xy قوی نامیده می‌شود اگر x و y مجاور باشند و در غیر این صورت ضعیف نامیده می‌شود. درجه رأس x در \tilde{G} که با $\deg_{\tilde{G}} x$ نشان داده می‌شود، تعداد رأس‌های مجاور به x است. در این صورت ماکسیمم درجه $\Delta(\tilde{G})$ و مینیمم درجه $\delta(\tilde{G})$ به ترتیب، $\Delta(\tilde{G}) = \max\{\deg_{\tilde{G}} x | x \in X\}$ و $\delta(\tilde{G}) = \min\{\deg_{\tilde{G}} x | x \in X\}$ تعریف می‌شوند [۸].

تعریف ۱-۴-۵: یک گراف فازی همبند \tilde{G} را دور نامیده می‌شود، هرگاه هر رأس X از درجه ۲ باشد [۸].

۱-۵ ساختار تحقیق

در فصل‌های اول تا سوم از این پایان نامه تحلیل رنگ فازی مورد توجه است. بنابراین این فصل‌ها به معرفی و تحلیل رنگ‌های فازی بر مبنای فضاهای رنگی و همچنین تشابه فازی و خوشه بندی فازی رنگ‌ها می‌پردازند و نگاهی ریاضی‌وار به مسائل رنگ فازی دارند. واضح است که شرح توصیف کاربرد رنگ‌های فازی در علوم غیر از ریاضی بر عهده متخصصان آن رشته‌ها می‌باشد. فصل دوم به معرفی رنگ و فضاهای رنگی‌ای که یک نمایش ریاضی از مجموعه رنگ‌ها است، می‌پردازد. در فصل سوم با کمک منطق فازی و چند تعریف از مجموعه‌های فازی، رنگ فازی تشریح می‌شود. فصل چهارم با تعریف الگوریتم فازی C-میانگین و تعریف جدیدی از تشابه رنگ‌ها در فضای HSL، خوشه بندی فازی رنگ‌ها و سپس نام‌گذاری فازی آن‌ها را توصیف می‌کند. با شروع فصل پنجم وارد رنگ آمیزی فازی شده و رنگ آمیزی فازی گراف‌ها و گراف‌های فازی مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این فصل در بخش ۱-۵ با روش‌های پیشنهادی، روش‌هایی برای رنگ کردن گراف با رنگ فازی پیشنهاد می‌شود، علت این کار این است که اولاً هنوز روش مشخصی برای رنگ کردن یک گراف با رنگ فازی تا آنجایی که بنده تحقیق کردم، ممکن است وجود نداشته باشد. بخش ۲-۵ را به مفهوم رنگ آمیزی رأسی از گراف‌های فازی با استفاده از α -برش اختصاص داده و در نهایت بخش ۳-۵ مفهوم رنگ آمیزی فازی مجموع را شرح می‌دهد.

فصل دوم

معرفی رنگ و فضاهاى رنگى

۱-۲ رنگ چیست؟

رنگ‌ها را می‌توان در لباسی که افراد یک جامعه می‌پوشند تا درک لذت زیبایی در غروب آفتاب حس کرد. بنابراین رنگ تاریخچه‌ای به وسعت خلقت بشری دارد. استفاده از آن در نقاشی روی سنگ‌ها توسط انسان‌های اولیه تا به کار بردن در مراسم مذهبی در ادیان باستانی، از جمله آن‌ها است. امروزه رنگ در علوم وابسته به رایانه یا صنعت و داروهای پزشکی تا هنر و مواد آرایشی بهداشتی و بسیاری دیگر به کار می‌رود. دریافت انسان از رنگ اشیا به وسیله‌ی ماهیت نور منعکس شده از آن‌ها معین می‌شود. نور مرئی نوار نسبتاً باریکی در طیف انرژی الکترومغناطیسی است. بسته به اینکه یک شیء در کدام محدوده از طیف نوری، انعکاس خوبی داشته باشد، برای چشم ناظر به آن رنگ به نظر می‌رسد. این تعبیر، تعبیر فیزیکی رنگ می‌باشد، اما پدیده‌ی تشخیص رنگ در انسان یک پدیده‌ی جسمی-روانی بوده و ماهیت آن بر افراد پوشیده است. در اصل درک یک رنگ، عکس‌العملی است که مغز به محرک‌های دریافتی از سنسورهای چشم می‌دهد. درک و دریافت رنگ، احساسی شخصی بوده و نسبی می‌باشد. افراد مختلف در مواجهه با رنگ‌های متفاوت و تلاش برای بیان تفاوت آن‌ها، احساس‌های مختلفی از این تفاوت‌ها را بیان کرده‌اند. مجمع جهانی استانداردسازی روشنایی^{۱۵} تعاریف مشخص زیر را برای این احساس‌ها ارائه داده است:

(۱) درخشندگی^{۱۶}: میزان نور دریافتی توسط چشم انسان از اشیاء، که توسط آن، انسان، درخشنده تر بودن یک شیء از دیگری را تشخیص می‌دهد.

(۲) ته رنگ (فام)^{۱۷}: احساس انسان از شباهت بین دو ناحیه، توسط این پارامتر تعیین می‌گردد. در اصل، ته رنگ، بیانگر رنگ غالبی است که بیننده دریافت می‌کند.

(۳) پررنگی^{۱۸}: میزان کمتر یا بیشتر به چشم آمدن دو ناحیه با ته رنگ یکسان را نشان می‌دهد.

¹⁵ CIE (International Commission on Illumination)

¹⁶ Brightness

¹⁷ Hue

۴) روشنایی^{۱۹}: میزان احساس درخشندگی یک ناحیه توسط چشم انسان نسبت به رنگ سفید مرجع.

۵) رنگینی^{۲۰}: میزان پررنگی یک ناحیه نسبت به درخشندگی رنگ سفید مرجع.

۶) اشباع^{۲۱}: میزان پررنگی یک ناحیه نسبت به درخشندگی آن ناحیه یا به عبارتی دیگر خلوص نسبی ته رنگ آن [۱۱].

رنگ را به عنوان یک پدیده قابل مشاهده و نه یک بعد فیزیکی مانند طول یا دما تعریف می‌کنند. هر چند طیف الکترومغناطیسی از رنگ‌های مرئی به عنوان یک کمیت فیزیکی اندازه پذیر هستند. در موج الکترومغناطیسی طول موج مشخص کننده رنگ موج است. طول موج از نسبت سرعت بر

فرکانس حاصل می‌شود، یعنی داریم: $\lambda = \frac{v}{f}$ ، با تعیین رنگ، انرژی و طول موج می‌توان یک موج را

نسبت به دیگر موج‌ها سنجید. به عنوان مثال طول موج‌های کوتاه در طیف مرئی در ناحیه بین آبی و فوق بنفش قرار می‌گیرد در حالی که رنگ قرمز دارای طول موج‌های بلندتری می‌باشد. فاصله بین این قله‌های موج آن چنان کوچک است که واحد آن را نانومتر (ده به توان منفی نه) یا میکرون (ده به توان منفی شش) قرار داده‌اند. تابش الکترومغناطیسی طیف طولانی از طول موج‌های بلند رادیویی تا طول موج‌های کوتاه پرتو ایکس را شامل می‌شود. چون شکل موج با سرعت ثابت c پیش می‌رود، فاصله یک طول موج را در زمان یک دوره تناوب طی می‌کند. هر موج علاوه بر طول موج دارای یک فرکانس می‌باشد که با واحدهایی مثل (hz, mhz, ghz, khz, thz) اندازه گیری می‌شود.

طیف مرئی^{۲۲} نام بخشی از طیف الکترومغناطیسی است که با چشم انسان قابل رویت و تشخیص است. طول موج طیف مرئی بین ۳۸۰ تا ۷۵۰ نانومتر است. رنگ‌های مرئی در سال ۱۶۶۶ میلادی، زمانی که نیوتن فهمید یک منشور شیشه ای می‌تواند یک پرتو نور خورشید را به توی طیف پیوسته ای از

¹⁸ Colorfulness

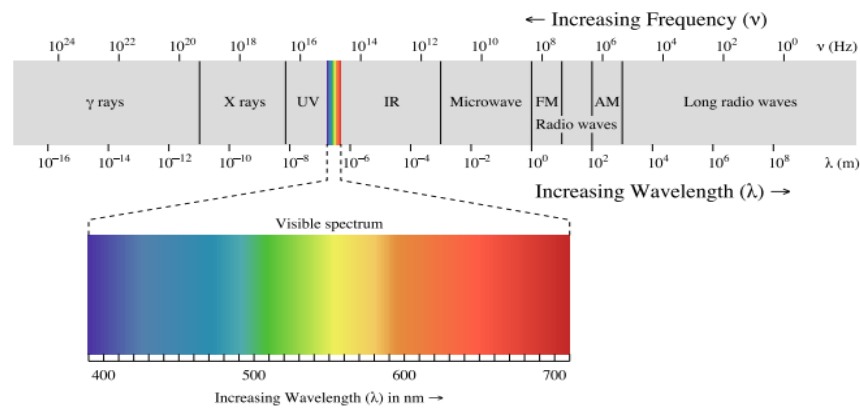
¹⁹ Lightness

²⁰ Chroma

²¹ Saturation

²² Visible spectrum

رنگ‌های محدود شده‌ی بنفش تا آبی تجزیه کند، پیدا شد. شکل ۱-۲ نشان می‌دهد که طیف نوری بین ماوراءبنفش و فرورسرخ قرار دارد [۱۲].



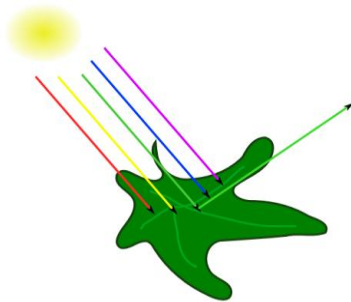
شکل ۱-۲: طیف الکترومغناطیسی

نور یک موج الکترومغناطیسی است که رنگ آن به وسیله طول موج نور مشخص می‌شود. تمامی طول موج‌ها مشخص نیستند. طول موج‌های کوتاه آبی و طول موج‌های بلند قرمز به نظر می‌رسند. اساساً رنگ‌ها از یک شیء مشاهده می‌شوند، زیرا یک شیء نور را از مرکز طول موج منعکس می‌کند و باقیمانده طول موج‌های دیگر را در طیف مرئی جذب می‌کند. این مشخصه انعکاس طیفی نامیده می‌شود. اگر نور تابشی سفید نباشد، رنگ ممکن است حتی برای همان شیء متفاوت به نظر آید.

چشم مانند یک دوربین عمل می‌کند، با لنزها یا عدسی‌هایی که یک تصویر را به شبکیه‌ی چشم منعکس می‌کنند (بالا به پایین و چپ به راست معکوس شده). شبکیه از مجموعه‌ای از سلول‌های میله‌ای^{۲۳} و سه نوع سلول مخروطی^{۲۴} تشکیل شده است. میله‌ها به روشنایی حساس‌تر هستند، در صورتی که مخروط‌ها حساسیت‌های متنوعی برای طول موج‌های کوتاه، متوسط و بلند که دقیقاً برای آبی، سبز و قرمز برابر است، دارند. شکل ۲-۲ نشان می‌دهد که چطور رنگ به ادراک انسان رسیده است [۱۲].

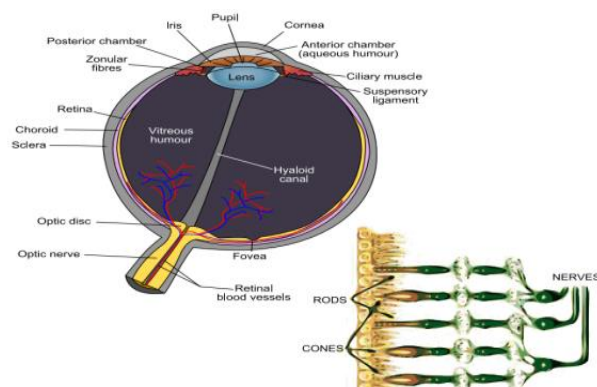
²³ Rod

²⁴ Cone



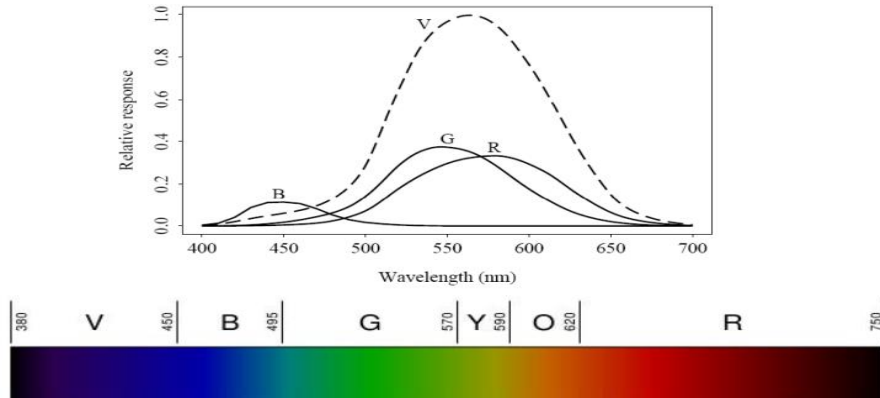
شکل ۲-۲: برگ طول موج سبز را روی سطح برای مشاهده کردن منعکس می‌کند.

زمانی که یک نور به برگ می‌رسد همان طول موج در سطح منعکس می‌شود. ادراک رنگ در عدسی انجام نشده است اما در مغز نتیجه می‌گیرد. پایداری رنگ مثال خوبی است که سیستم بینایی انسان قادر است تا رنگ را از اشیاء صرف نظر از نور استفاده شده برای روشن ساختن آن‌ها تشخیص دهد. هر چند ثبات رنگ انسان را قادر می‌سازد تا کاغذ سفید را زیر نور لامپ تنگستان مایل به قرمز، سایه روشن نور مهتابی (فلوئور سنت) یا متمایل به آبی نور معمولی، تشخیص دهد. این در صورتی است که موارد خطای دیداری همان وهم رنگی (کور رنگی) نامیده می‌شود. شکل ۲-۳ نموداری از چشم انسان و عبور بخش دید از شبکیه، جایی که رنگ در ابتدا مشاهده شده است را نشان می‌دهد [۱۲].



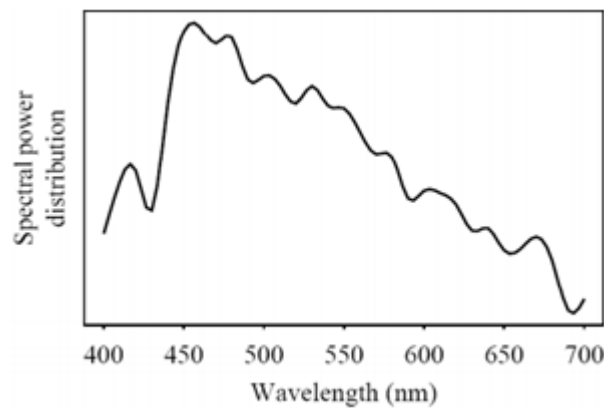
شکل ۲-۳: نمودار طرح کلی از چشم انسان و مقطع عرضی از شبکیه

چشم انسان، به نور میانه‌ی طیف مرئی، حساس‌تر است. حساسیت گیرنده‌های بینایی انسان، تابعی از طول موج است.



شکل ۲-۴: این نمودار مبنی بر طول موج و پاسخ نسبی گیرنده‌های بینایی انسان است [۱۳].

منحنی شکل ۲-۵ توان نسبی در هر دوره طول موج برای نور در یک روز آفتابی است. این نوع منحنی توزیع توان طیفی یا طیف نامیده می‌شود. λ نمادی برای طول موج است. این منحنی $E(\lambda)$ نامیده می‌شود [۱۳].



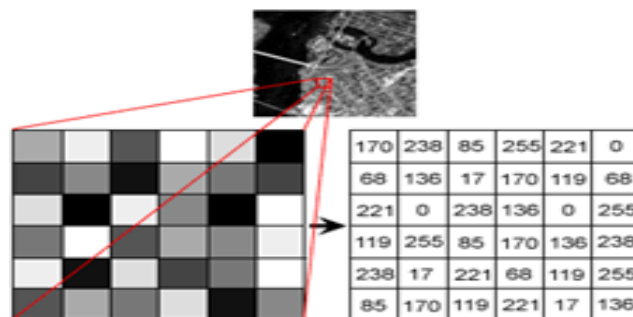
شکل ۲-۵: توزیع توان طیفی در طول روز

سلول‌های میله‌ای وقتی میزان نور پایین است نقش بازی می‌کنند و یک تصویری در سایه‌هایی از خاکستری تولید می‌کنند (همه گره‌ها در شب خاکستری هستند). در سطوح نوری بالاتر، سلول‌ها، هر کدام یک سیگنال تولید می‌کنند. سه نوع مخروط به نور آبی، قرمز و سبز خیلی حساس هستند.

مغز از تفاوت R-G ، G-B و B-R برای تولید سیگنال رنگ استفاده می‌کند. سطوح، مقادیر متفاوتی از نور را در طول موج‌های مختلف منعکس می‌کنند. سطوح تیره، انرژی کمتری را نسبت به سطوح روشن منعکس می‌کنند.

۲-۲ تصویر

یک تصویر آرایه، یا یک ماتریس از پیکسل‌های مربعی (عناصر تصویر) مرتب شده در سطرها و ستون‌ها است (شکل ۲-۶).



شکل ۲-۶: پیکسل تصویر. هر پیکسل دارای یک شماره رقمی می‌باشد که بیانگر میزان روشنایی آن پیکسل است [۱۴].

هر پیکسل یک مقدار از صفر (سیاه) تا ۲۵۵ (سفید) دارد. فاصله احتمالی از مقادیر پیکسل به عمق رنگ تصویر بستگی دارد، در اینجا ۸ بیت = ۲۵۶ مقیاس خاکستری یا تن^{۲۵} است. یک مقیاس خاکستری آن چیزی است که مردم به طور معمولی تصویر سیاه و سفید می‌گویند، اما نام آن این را تایید می‌کند که تصویر شامل سایه‌های خاکستری زیادی خواهد بود. دقت تصویر بستگی به عدد پیکسل‌ها دارد. با یک تصویر ۲ بیتی، حداکثر دامنه روشنایی ۲^۲ یعنی ۴ می‌باشد که دامنه آن از ۰ تا ۳ تغییر می‌کند. در این حالت تصویر دقت لازم را ندارد. تصویر ۸ بیتی حداکثر دامنه ۲۵۶ دارد و تغییرات آن بین ۰ تا ۲۵۵ است، که دقت بالاتری دارد. هر پیکسل دارای یک شماره رقمی^{۲۶} می‌باشد که بیانگر میزان روشنایی آن پیکسل است. به این نوع تصاویر، تصاویر رستری هم می‌گویند. تصاویر

²⁵ Tone

²⁶ Digital Number

رستری دارای سطر و ستون می‌باشند. یک تصویر را می‌توان توسط تابع دوبعدی $f(x,y)$ که در آن x و y را مختصات مکانی و مقدار f در هر نقطه را شدت روشنایی تصویر در آن نقطه می‌نامند، نشان داد. اصطلاح سطح خاکستری نیز به شدت روشنایی تصاویر تک رنگ اطلاق می‌شود. تصاویر رنگی نیز از تعدادی تصویر دوبعدی تشکیل می‌شود. زمانی که مقادیر x و y و مقدار $f(x,y)$ با مقادیر گسسته و محدود بیان شوند، تصویر را یک تصویر دیجیتالی می‌نامند. دیجیتال کردن مقادیر x و y را نمونه برداری^{۲۷} و دیجیتال کردن مقدار $f(x,y)$ را کوانتومی^{۲۸} گویند. برای نمایش یک تصویر $M * N$ از یک آرایه دو بعدی (ماتریس) که M سطر و N ستون دارد استفاده می‌شود. مقدار هر عنصر از آرایه نشان دهنده شدت روشنایی تصویر در آن نقطه است. هر عنصر آرایه یک مقدار ۸ بیتی است که می‌تواند مقداری بین ۰ و ۲۵۵ داشته باشد. به عنوان مثال تصویر شکل ۲-۷ که سایز آن 288×265 است، از ماتریسی دارای ۲۸۸ سطر و ۲۶۵ ستون، برای نمایش استفاده می‌کند [۱۴].



شکل ۲-۷: تصویر از یک ماتریس که دارای ۲۸۸ سطر و ۲۶۵ ستون است، برای نمایش استفاده می‌کند.

نقاط روشن مقادیری نزدیک به ۲۵۵ و نقاط تیره مقادیر نزدیک به ۰ دارد. در واقع مقدار انرژی مغناطیسی که یک تصویر رقومی به هنگام تصویر برداری کسب می‌کند، رقم‌های دودویی^{۲۹} یا بیت‌ها^{۳۰} را تشکیل می‌دهند که از قوه صفر تا ۲ ارزش گذاری شده است. هر بیت، یک به توان دو (یک بیت = 2^1) می‌باشد، بنابراین حداکثر تعداد روشنایی بستگی به تعداد بیت‌ها دارد جدول ۲-۱ را ببینید [۱۴].

²⁷ Sampling
²⁸ Quantization
²⁹ Digit binary
³⁰ Bits

جدول ۲-۱: مقادیر پیکسل و دامنه تغییرات تصاویر

نوع تصویر	مقدار پیکسل	دامنه تغییرات رنگ
8-bit image	$2^8 = 256$	0-255
16-bit image	$2^{16} = 65536$	0-65535
24-bit image	$2^{24} = 16777216$	0-16777215

۲-۳ مدل‌های فضای رنگی

نور رنگی قابل مشاهده، شامل رنگ‌هایی است که بر روی طیف انرژی الکترومغناطیسی از ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر قرار دارند. تعداد این رنگ‌ها بسیار زیاد بوده و هم از لحاظ کارایی و هم از لحاظ پیچیدگی به کارگیری، کار کردن با مشخصه‌ی طول طیف رنگ‌ها، کاری بسیار مشکل است. از طرفی این تعریف از رنگ، جنبه‌ی فیزیکی داشته و هیچ سنخیتی با سیستم بینایی و ادراک انسان ندارد. در نتیجه نیاز پیدا کردن به فضایی چند بعدی و تعریف مجدد رنگ‌ها در فضایی با ابعاد به مراتب کوچک‌تر و استفاده از حداکثر ابعاد قابل درک (یعنی ۳ بعد)، نیازی بدیهی بود. ابعادی که در این فضاها ارائه می‌شوند، اصولی است، نشانگر ویژگی‌هایی از رنگ، که برای سیستم بینایی انسان قابل لمس باشد. این کار، پردازش جهت دار و مفهومی را بر روی تصاویر رنگی امکان پذیر می‌سازد. تمامی فضاهای رنگی برای رفع این نیاز به وجود آمده‌اند. تفاوت آن‌ها با همدیگر نیز، ناشی از تعاریف متفاوتی است که برای هر کدام از ابعاد و مراکز این ابعاد، در هر کدام از این فضاها ارائه شده است. بسته به ماهیت ابعادی که در هر کدام از فضاها ارائه شده است، آن فضا برای کاربردهای مشخصی مناسب گردیده است.

یک فضای رنگی یک نمایش ریاضی از مجموعه رنگ‌ها است. در واقع این یک روش قراردادی برای تعریف رنگ‌ها است، راه‌های زیادی برای تجسم رنگ وجود دارند و تفاوت هر یک از آن‌ها در

سودمندی و زیان است [۱۱]، [۱۵]. فضای رنگی مدلی است که تعیین و تجسم رنگ را آسان می‌کند. مدل‌های فضای رنگی، برای کاربردهای مخصوصی نظیر نمایش و چاپ علایم یا برای بهبود شناخت حدسی رنگ‌ها به کار می‌روند. دو روش برای مشخص کردن یک رنگ در یک فضا وجود دارد. یکی استفاده از ابعاد محرک (پایه) (T_1, T_2, T_3) ، و دیگری با استفاده از کرومینانس (رنگینگی) و لومینانس (درخشندگی) آن (t_1, t_2, Y) ، که در آن:

$$t_1 = \frac{T_1}{T_1 + T_2 + T_3} \quad \text{و} \quad t_2 = \frac{T_2}{T_1 + T_2 + T_3}$$

در این نحوه‌ی نمایش، هر فضای رنگ به دو بخش مجزای اطلاعات رنگی و درخشندگی تقسیم می‌شود، که در آن اطلاعات رنگی (t_1, t_2) در یک فضای دو بعدی قابل نمایش است. این زیر فضای دوبعدی را برای XY در ادامه خواهید دید [۱۱]. شمار زیادی از مدل‌های فضای رنگی وجود دارند که برای آسان کردن احتیاجات خاص، برای دریافت کردن، دوباره ساختن و پردازش تصویر رنگ مانند: RGB شامل «قرمز، سبز، آبی»، CMY شامل «فیروزه‌ای^{۳۱}، ارغوانی^{۳۲}، زرد»، HSL شامل «فام، اشباع، روشنایی» و CIEXYZ و غیره معرفی شده است. در اینجا به چند فضا اشاره می‌شود [۱۲].

۲-۳-۱ فضای رنگی RGB

یکی از اولین استانداردهایی که توسط سازمان CIE تعریف شده است، استاندارد RGB است، که بر پایه‌ی تئوری سه رنگی می‌باشد. در این مدل، هر رنگ، با ترکیب مقادیری از هر کدام از سه رنگ پایه‌ی قرمز، سبز و آبی ایجاد می‌شود. مطابق این استاندارد (CIE RGB) رنگ‌های پایه عبارتند از: قرمز با طول طیف رنگ ۷۰۰ نانومتر، سبز با طول طیف رنگ ۵۴۶/۱ نانومتر و آبی با طول طیف رنگ ۴۳۵ نانومتر. البته باید توجه کرد که معنای پایه، در تعریف فوق این نیست که این سه مؤلفه به تنهایی می‌توانند تمام رنگ‌های طول طیف را تولید کنند [۱۱]. این مدل رنگ، برای ایجاد تصویر در تلویزیون

^{۳۱} Cyan

^{۳۲} Magenta

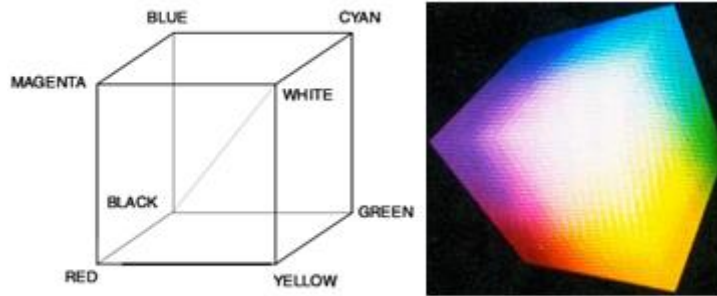
و مانیتورها به کار گرفته می شود که قادر به نمایش ۱۶ میلیون رنگ می باشد. در این مدل، تمام رنگها از ترکیب سه رنگ مذکور تشکیل می شود. با ترکیب رنگهای فوق الذکر که به آنها ابتدایی^{۳۳} می گویند، رنگهای دیگر یا ثانویه^{۳۴} ایجاد می شوند. این رنگها مقادیر گسسته بین ۰ تا ۲۵۵ می گیرند (اگر برای هر رنگ ۸ بیت در نظر گرفته شود)، که همان مقادیر پیکسل است. برای مثال قرمز سه تایی (۲۵۵ و ۲۵۵ و ۲۵۵) و سیاه (۰ و ۰ و ۰) است. در این مدل برای نشان دادن فضا، از یک دستگاه مختصات دکارتی استفاده شده است. زیر فضایی از این دستگاه مختصات که تمام رنگها را در بر می گیرد مکعبی است که در شکل ۲-۸ نشان داده شده است. در مکعب مختصات، سه رنگ قرمز، سبز و آبی در سه گوشه ی مکعب و سه رنگ فیروزه ای، بنفش و زرد در سه گوشه ی دیگر این مکعب جای دارند. در این مدل مقادیر سطوح خاکستری، در امتداد خطی که رنگ سیاه را از یک گوشه به رنگ سفید در گوشه ی دیگر وصل کرده است، قرار دارند و هر رنگ، نقطه ای روی سطح مکعب یا درون آن است که می توان آن را به صورت بردارهایی که از مبدأ سرچشمه گرفته اند، در نظر گرفت. همچنین فضای رنگی RGB را می توان در فاصله [0,1] با رابطه ۲-۱ نرمال کرد.

$$r = \frac{R}{R+G+B}, g = \frac{G}{R+G+B}, b = \frac{B}{R+G+B} \quad (1-2)$$

از آنجایی که فضای رنگی RGB مبنی بر رنگهایی از نور است، معمولاً در وسایل نمایش داده شده که خروجی مبتنی بر انتشار نور باشد، مورد استفاده قرار می گیرد. در این فضا به جای سه رنگ قرمز، سبز و آبی، سه نور رنگی مورد نظر است. اگر بدانید که نمایشگرها چگونه تصویر را نمایش می دهند، خواهید فهمید که غیر از این هم نمی تواند باشد. زیرا در مانیتور، تغییر ولتاژ ارسالی به پیکسلها، باعث ایجاد نور رنگی می شود. این نورها که با هم ترکیب می شوند در نهایت رنگ پیکسل را می سازند. زمانی که به تابش یک نور نیازی نیست، مانند این است که جلوی آن نور یک تلق مشکی قرار داده تا از تابش آن نور جلوگیری شود و اصطلاحاً آن را ببندد.

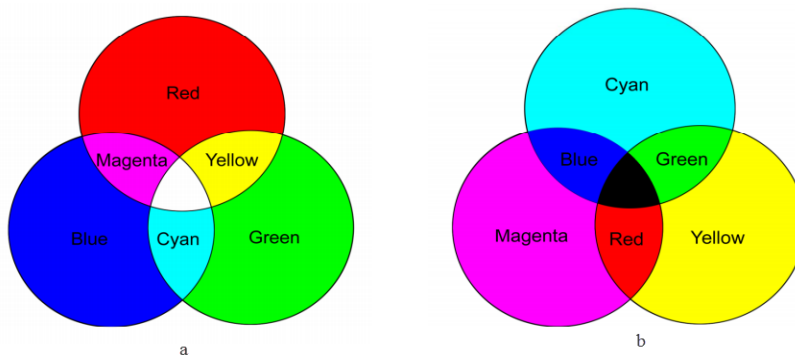
³³ Primary

³⁴ Secondary



شکل ۲-۸: نمودار مکعب رنگی RGB. از سه محور R, G, B با قطری که از سیاه به سفید امتداد دارد، تشکیل شده است.

در واقع مفهوم وجود رنگ با حضور نور معنی پیدا می‌کند. رنگ‌ها به طور کلی، به معنی بازگشت نور از یک شیء یا یک منبع نوری هستند (مانند تجزیه نور مرئی به رنگ در منشور). این سیستم رنگ که به عنوان متداول‌ترین سیستم رنگ شناخته شده است، سیستم رنگی وابسته به وسیله بوده و در وسایل گوناگون به صورت‌های مختلفی ظاهر می‌شود.



شکل ۲-۹: (a) رنگ‌های تجمعی و (b) رنگ‌های تفاضلی را نشان می‌دهد.

با ترکیب قرمز و آبی، رنگ ارغوانی تولید می‌شود. از ترکیب قرمز و سبز رنگ زرد پدید می‌آید و از ادغام دو رنگ آبی و سبز رنگ فیروزه‌ای تولید می‌گردد. اگر سه رنگ به هم اضافه شوند، رنگ سفید به وجود می‌آید، در نتیجه رنگ‌های تجمعی ایجاد می‌شوند (شکل a (۲-۹)) و در مقابل زمانی که هیچ رنگی وجود ندارد، پیکسل با رنگ سیاه پر می‌شود، در واقع در این مورد رنگ‌ها از هم کم می‌شوند و رنگ‌های تفاضلی ایجاد می‌شوند (شکل b (۲-۹)) [۱۳].

۲-۳-۲ فضای رنگی CIEXYZ و CIExyZ

در سال ۱۹۳۱، CIE اقدام به معرفی یک مجموعه رنگ پایه‌ی جدید برای برطرف کردن مشکلات فضای رنگ RGB نمود و آن XYZ بود. مشکل فضای رنگ RGB در این بود که برای مشاهده‌گرهای مختلف نظیر انسان‌ها، سنسورها و ... تعریف واحدی برای دریافت اطلاعات رنگی موجود نبود. یعنی در فضای RGB، مشخصات رنگی نیمه شهودی و وابسته به وسایل اندازه گیری است. بنابراین در حالت کلی نمی‌تواند ادراک بشری را مدل بندی کند. در این فضای رنگ پایه‌ی جدید، اجزای رنگ‌های پایه رنگ‌های واقعی نیستند. میزان درخشندگی رنگ در این فضا برخلاف فضای قبل فقط به یک پارامتر (Y) بستگی دارد و بقیه‌ی پارامترها، ویژگی‌های رنگی را پوشش می‌دهند [۱۲]، [۱۳].

رایت^{۳۵} و گیلد^{۳۶} در سال ۱۹۲۰ فضای رنگی CIEXYZ را از یک سری تجربیات ناشی از طیف مرئی نتیجه گرفتند و نمودار گسترش یافته آن CIExy (یا CIE1931) نامیده می‌شود. آن یکی از اولین تعریف ریاضی‌وار فضای رنگی است که به وسیله کمیسیون بین‌المللی در روشن سازی (CIE) در سال ۱۹۳۱ ایجاد شده است. فضای رنگی CIEXYZ مبتنی بر سیستم بینایی انسان است، که انسان رنگ را از میان سه نوع پذیرنده رنگ معلوم مانند سلول‌های مخروطی، که حس رنگ را تولید می‌کند، درک می‌کند. مخروط‌ها، کوتاه (S)، متوسط (M) و بلند (L)، برای طول موج اوج حساسیت طیفی‌شان برچسب زده شده‌اند [۱۲]. مقادیر نسبی رنگ‌های اصلی برای ایجاد رنگ‌های دیگر از S, M, L با هم ترکیب می‌شوند، جایی که اوج طول موج‌ها تقریباً در قرمز و سبز و آبی با فضای رنگی CIEXYZ، به ترتیب X، Y و Z متناظر است. برای ورود به فضای XYZ از RGB و بالعکس می‌توان از ماتریس‌های تبدیلات ۲-۲ و ۳-۲ (استاندارد CIE1931 با رنگ مرجع سفید D65) استفاده کرد:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.412453 & 0.357580 & 0.180423 \\ 0.212671 & 0.715160 & 0.072169 \\ 0.019334 & 0.119193 & 0.950227 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad (۲-۲)$$

³⁵ Wright

³⁶ Guild

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.240479 & -1.537150 & -0.498535 \\ -0.969256 & 1.875992 & 0.041556 \\ 0.055648 & -0.204043 & 1.057311 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

نکته ۲-۳-۲: در تبدیل مستقیم (یعنی حرکت از RGB به XYZ)، اگر مقادیر R، G و B در بازه‌ی [0, 255] باشند، X، Y و Z به ترتیب در بازه‌های [0, 243]، [0, 255] و [0, 278] واقع خواهند شد و برای نمایش ۸ بیتی باید تغییر مقیاس داده شوند. برای انجام تبدیل معکوس نیز ابتدا باید مقادیر ۸ بیتی XYZ به بازه‌های [0, 243]، [0, 255] و [0, 278] تغییر مقیاس داده شده و سپس ضرب ماتریس‌ها انجام شود. که در این صورت مقادیر بدست آمده، ۸ بیتی خواهند بود.

نکته ۲-۳-۲: برای تبدیلات فوق ماتریس‌های تبدیل بسیار زیادی ارائه شده‌اند، که هر کدام نیز نسبت به یک رنگ سفید مرجع انجام می‌گیرند. در این مورد از استاندارد CIE1931 و رنگ مرجع استاندارد D65 استفاده شده است. نتیجه‌ی تقسیم حاصلضرب ماتریس ورودی در ماتریس تبدیل بر رنگ سفید مرجع، همان نتیجه‌ی تغییر مقیاس را خواهد داد. در واقع اگر مختصات رنگ سفید مرجع (X_0, Y_0, Z_0) باشد، نتایج تبدیلی که در پیاده سازی فوق ارائه شد، $(\frac{X}{X_0}, \frac{Y}{Y_0}, \frac{Z}{Z_0})$ یا همان مقادیر دیجیتال شده‌ی (X, Y, Z) می‌باشند. مختصات رنگ سفید مرجع در این استاندارد، در بازه‌ی [0, 1] عبارتند از:

$$\text{D65 Whitepoint: } (X_0, Y_0, Z_0) = (0.9504, 1, 1.0889)$$

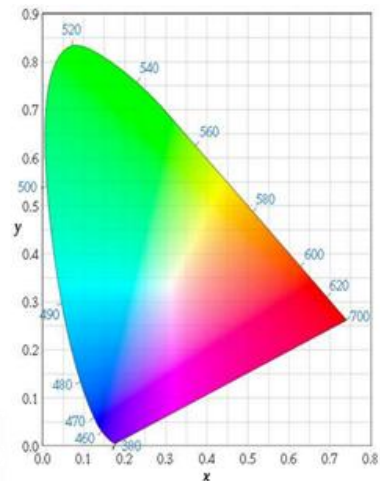
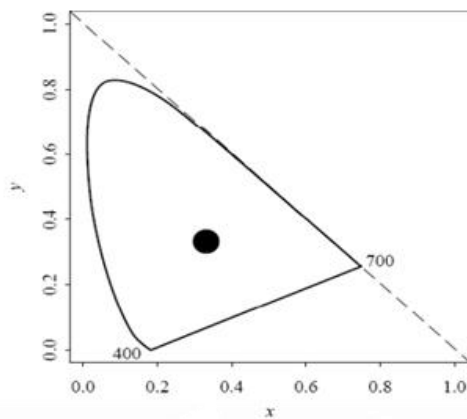
برای نمایش کلی رنگ‌ها، فضای سه بعدی نیاز است. نمایش در سه بعد دشوار است. نمودار رنگی CIExy یک نمودار تعریف رنگ دو بعدی از فضای رنگی CIEXYZ نشان داده شده در شکل ۲-۱۰ است. برای ترسیم شکل ۳ بعدی نموداری از فضای رنگی CIEXYZ به فضای دو بعدی، فضای رنگی CIExyz از فضای رنگی CIEXYZ الهام گرفته است. این فضای رنگی جدید نمایش کرومالومی می‌باشد. از آنجایی که $x+y+z=1$ در نتیجه با داشتن دو مقدار x و y، مقدار z نیز به

راحتی به دست می‌آید، لذا این فضا را با xyz نمایش می‌دهند. استفاده از این فضا در مواردی که به یک فضای دوبعدی مستقل از شدت نور برود، مفید است. Z در این مدل لومینانس و x و y کروما هستند. در نتیجه دو مقدار رنگ که فقط در شدت نور متفاوت هستند، در فضای xy دارای مقادیر یکسانی هستند. برای رفتن به این فضا، کافی است از نمایش دوم فضای XYZ که در بالا توضیح داده شد استفاده شود. زیر فضای کرومینانس در شکل ۲-۱۰ نمایش داده شده است. در فضای رنگی CIE_{xyz} ، رنگ پذیری از یک رنگ به وسیله دو پارامتر اشتقاقی x و y ، دو تا از سه مقدار نرمال شده که توابعی از سه مقدار نسبی x و y و Z هستند، تعیین شد. معادله ۲-۴ مشتقی از مؤلفه x و y را نشان می‌دهد و معادله ۲-۵ نشان می‌دهد چگونه مقادیر اصلی از x و y محاسبه می‌شوند:

$$z = \frac{Z}{X + Y + Z} = 1 - x - y \quad y = \frac{Y}{X + Y + Z} \quad (4-2)$$

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}$$

$$X = \frac{Y}{y}x \quad Z = \frac{Y}{y}(1 - x - y) \quad (5-2)$$



شکل ۲-۱۰: دیاگرام رنگی CIE در فضای دو بعدی

نکته ۲-۳-۲: در تبدیل XYZ به xyz اگر $x+y+z$ برابر با صفر شود، تقسیم بر صفر پیش می‌آید. در این حالت x و y را می‌توان مختصات رنگینگی سفید مرجع در نظر گرفت، یعنی: $(x, y) = (0, 0)$. در تبدیل معکوس هم اگر $z = 0$ باشد، $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ در نظر گرفته می‌شود.

نکته ۲-۳-۴: دانش رنگ‌شناسی‌ای که به کیفیت یک رنگ نه بر اساس روشنایی، بلکه بر پایه‌ی فام و اشباع تعریف شود، فام‌داری گفته می‌شود. در رنگ‌شناسی، نقطه‌ی سفید یک روشن‌گر یا یک صفحه‌ی نمایش را معیار اولیه در نظر می‌گیرند. به این معیار اولیه یک فام‌داری مشخصی نسبت می‌دهند. برای نمونه نقطه‌ی سفید یک نمایشگر با استاندارد اس‌آر‌جی‌بی (sRGB) یا استاندارد سرخ سبز آبی) یک فام‌داری x, y به مقدار $0.3127, 0.329$ دارد. سپس تمامی بقیه فام‌داری‌ها را می‌توان به نسبت این فام‌داری و با استفاده از مختصات قطبی تعیین نمود [۱۱]، [۱۲]، [۱۳].

۲-۳-۳ مدل‌های رنگی CMY, CMYK (رنگ تفاضلی)

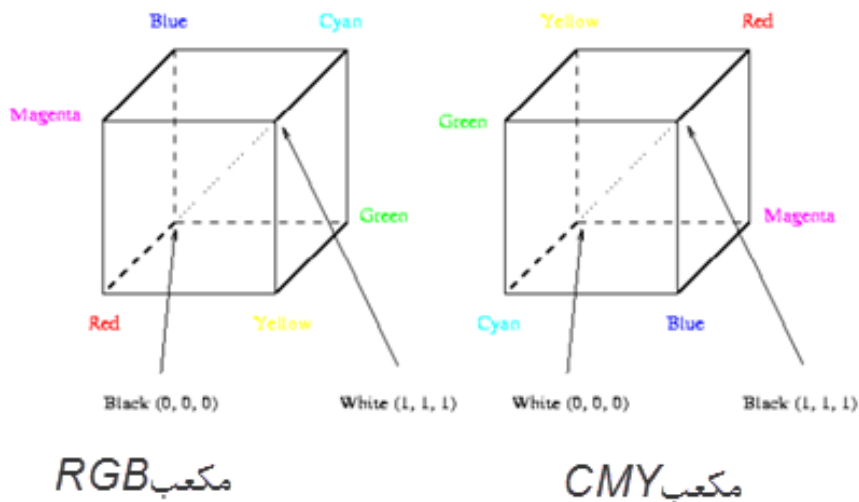
مدل فضای رنگی CMY از جنبه‌های زیادی شبیه مدل فضای رنگی RGB است. به جای رنگ‌های اصلی قرمز، سبز و آبی به رنگ اولیه‌ای نیاز داریم که مقدار آن‌ها R- و G- و B- باشد. این مدل بر پایه‌ی رنگ‌های فیروزه‌ای، بنفش و زرد می‌باشد. بسیاری از وسایل، مانند پرینترهای رنگی و دستگاه‌های کپی‌کننده که ذرات رنگی را بر روی کاغذها می‌نشانند، برای کار خود نیاز به اطلاعات ورودی CMY دارند. در فضای رنگی CMY، سفید و سیاه دقیقاً متضاد فضای رنگی RGB است. زمانی که همه‌ی مؤلفه‌های رنگ در مینیمم سطح شبیه کاغذ بدون هیچ مرکب روی آن باشد، سفید تعریف می‌شود و زمانی که تمام مؤلفه‌های رنگی در سطح ماکسیمم باشد، سیاه تعریف می‌شود. تبدیل فضای رنگی RGB به CMY به آسانی به وسیله عمل معادله (۲-۶) انجام می‌شود. فرض کنید تمام مقادیر رنگ به بازه $[0, 1]$ نرمال شده‌اند.

$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} \quad (۶-۲)$$

اگرچه فضای رنگی CMY فضای رنگی مناسب برای چاپ کردن وسایلی که خروجیشان بر مبنی رنگ دانه است، فضای رنگی به ندرت به عنوان شکل اصلی استفاده می‌شود، زیرا مخلوطی از مواد رنگی فیروزه‌ای، ارغوانی و زرد است که به طور عادی در سیاه کثیف در کاغذ استفاده می‌شود. معمولاً به جای فضای رنگی CMY از فضای رنگی CMYK با افزایش سیاه به عنوان چهارمین ماده رنگی استفاده می‌شود، که K نماینده کلیدی یا ثابت است. از آن جایی که در چاپگرها و سایر وسایلی که از پودرها و ذرات رنگی استفاده می‌کنند، هزینه‌ی تولید رنگ سیاه که می‌تواند مستقیماً از دوده تولید شود، از سه جزء رنگی دیگر، بسیار بیشتر می‌باشد، تولید این فضای رنگی جدید برای مقادیر سطوح خاکستری منطقی به نظر می‌رسد. در شکل (۲-۱۱) یک مقایسه بین دو فضای RGB و CMY دیده می‌شود [۱۳]. روابط (۲-۷) تبدیل از فضای رنگ CMY به فضای CMYK و بالعکس را نشان می‌دهد

[۱۱]، [۱۲]، [۱۳].

$$\begin{aligned} C &= \min(1, C(1-K) + K) & K &= \min(C, M, Y) \\ M &= \min(1, M(1-K) + K) & C &= (C-K)/(1-K) \\ Y &= \min(1, Y(1-K) + K) & M &= (M-K)/(1-K) \\ & & Y &= (Y-K)/(1-K) \end{aligned} \quad (۷-۲)$$



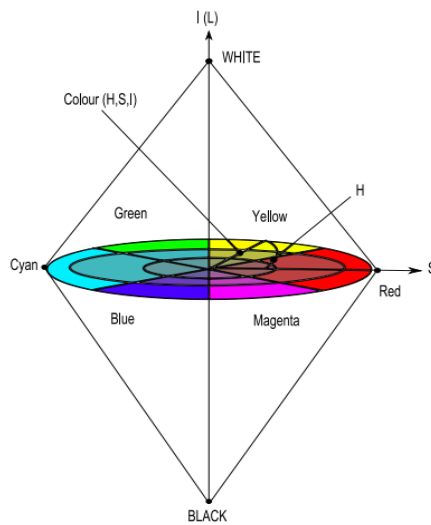
شکل ۲-۱۱: در شکل تفاوت بیت دو فضای CMY و RGB دیده می‌شود.

۲-۳-۴ فضاهای رنگی HSI، HSL و HSV

HIS همچنان به عنوان مدل فضای رنگی HSL (روشنایی) مبنی بر فضای رنگی درک می‌شود. رنگ در فضای رنگ HSI به وسیله سه مؤلفه تعریف شده است، فام، اشباع و شدت^{۳۷}. همچنین شکل ۲-۱۲ نشان می‌دهد، مدل رنگی HSI بیشتر از مدل فضای رنگی RGB و CMYK متمایل به فضای رنگی انسانی است، زیرا که افراد می‌توانند، یک رنگ را از چرخش رنگ در مرکز محور شدت بردارند و آن را به وسیله حرکت در امتداد محور شدت روشن‌تر یا تاریک‌تر بکنند. یک رنگ قرمز به عنوان «رنگ مرجع» در فضای HSI انتخاب شده است. زیرا که $H = 0^0$ و $H = 360^0$ برابر با رنگ قرمز است. برای هر مؤلفه H و S و I مؤلفه فام، رنگ غالب شامل نقطه، تعریف شده است و توصیف کننده رنگ خالص برای مثال قرمز خالص است و نوع رنگ را بر حسب درجه بیان می‌کند. اشباع (درجه شدت اختلاف بین یک رنگ و رنگ منبع نوری بی رنگ یا همان منبع روشنایی)، اندازه گیری خلوص به وسیله مقداری از سفید افزوده شده به رنگ خالص را مشخص می‌کند و نشان می‌دهد که یک رنگ خالص تا چه حد توسط نور یا رنگ سفید رقیق شده است. سرانجام شدت رنگ، روشنی نسبی از نقطه

³⁷ intensity

برابر است. برای ورود به HSI از فضای RGB تبدیل واحدی وجود ندارد (به دلیل ماهیت فضای HSI)، تبدیلات مختلفی برای این منظور ارائه شده‌اند که هر کدام در کاربرد خاصی بهتر عمل کرده است [۲]. روابط ۲-۸ که در کتاب پردازش تصویر گونزالس^{۳۸} آورده شده است، مقادیر هر معادله در فضای رنگی HSI از فضای رنگی RGB را تعریف می‌کند [۱۱].



شکل ۲-۱۲: فضای رنگی HSI(HSL) [۱۲].

$$H = \begin{cases} \delta & \text{if } B \leq G \\ 360^\circ - \delta & \text{if } B \geq G \end{cases}$$

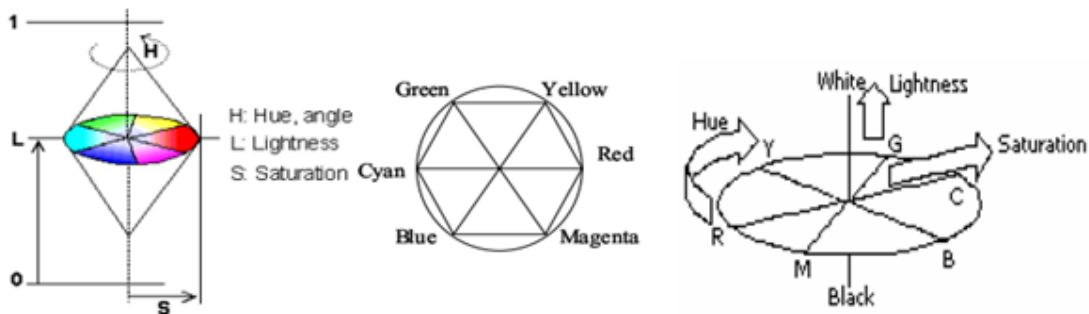
$$\delta = \arccos\left(\frac{(R - G) + (R - B)}{\sqrt{(R - G)^2 + (R - B)(G - B)}}\right)$$

(۸-۲)

$$s = 1 - 3 \frac{\min(R, G, B)}{R + G + B}$$

$$I = \frac{R + G + B}{3}$$

فضای رنگی HSL نیز مانند HIS است (شکل ۲-۱۲ و ۲-۱۳). در این فضا L میزان یا مقدار روشنایی رنگ می‌باشد. در این فضا رنگ در بعد H نمایش داده می‌شود و دو بعد L و S توصیف کننده رنگ می‌باشند.



شکل ۲-۱۳: نمودار فضای رنگ HSL و دایره‌ی فام

فضای رنگ HSV یک بازنمایی از نقاط در RGB است که سعی می‌کند در ضمن پایین نگه داشتن پیچیدگی محاسبات، ارتباط مفهومی رنگ‌ها را به صورت دقیق‌تری مدل‌بندی نماید. این مدل تا حد زیادی شبیه به سیستم درک رنگ توسط انسان‌ها می‌باشد. هر رنگ در این فضا توسط سه مؤلفه H و S و V نمایش داده می‌شود، که همان طور که گفته شد H توصیف کننده رنگدانه یا رنگ خالص بوده (مانند زرد خالص یا قرمز خالص) و نوع رنگ را بر حسب درجه بیان می‌کند. S میزان اشباع رنگ است

و مقدار V ³⁹ نیز، نشان دهنده مقدار یا میزان روشنایی می‌باشد. مطابق با شکل ۲-۱۴ مانند دو فضای قبلی، فام H زاویه ای است که حول محور عمودی V با قرمز در صفر درجه می‌سازد، مقدار S نسبت است و از صفر در مرکز خط محور عمودی V به ۱ در اطراف دو مخروط تغییر می‌کند. تفاوت بین HSI و HSV محاسبه مؤلفه‌ی روشنایی (I یا V) است، که توزیع و محدوده پویایی⁴⁰ از هر دو روشنایی (I یا V) و اشباع S را تعیین می‌کند. فضای رنگی HSI برای توابع پردازش تصویر سنتی مانند پیچیدگی، هیستوگرام و برابری و... است که با دست‌کاری مقادیر روشنایی کار می‌کند، زیرا I به طور برابر وابسته به R ، G و B است. فضای رنگی HSV برای دست‌کاری فام و اشباع (انتقال رنگ‌ها یا تنظیم مقدار رنگ) ترجیح داده شده است، زیرا محدوده‌ی بیشتری از اشباع را در بر می‌گیرد. برای تبدیل مقدار یک رنگ از فضای RGB به فضای HSV از روابط ۲-۹ و ۲-۱۰ از تبدیل تراویس⁴¹ استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} \max &:= \max(R, G, B) \\ \min &:= \min(R, G, B) \end{aligned} \quad (2-9)$$

$$S = \frac{\max - \min}{\max} \quad \text{و} \quad V = \max \quad \text{و همچنین}$$

نکته این که V و S مؤلفه‌های فضای رنگی HSV هستند.

³⁹ Value

⁴⁰ Dynamic Range

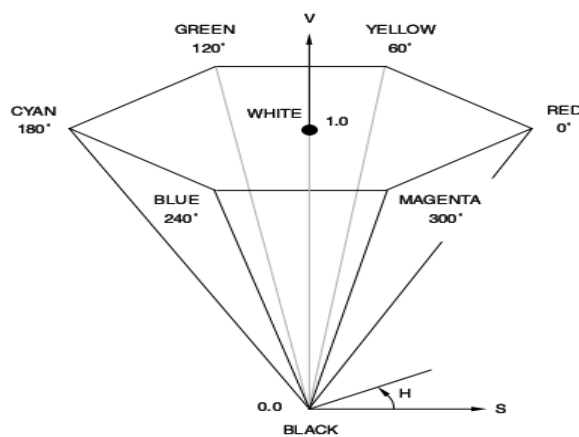
⁴¹ Travis

$$R' = \frac{\max - R}{\max - \min} \quad G' = \frac{\max - G}{\max - \min} \quad B' = \frac{\max - B}{\max - \min}$$

$$H = \begin{cases} \text{Undefined} & \text{if } S=0 \\ 5+B' & \text{if } (R=\max) \& (G=\min) \\ 1-G' & \text{if } (R=\max) \& (B=\min) \\ 1+R' & \text{if } (G=\max) \& (B=\min) \\ 3-B' & \text{if } (G=\max) \& (R=\min) \\ 3+G' & \text{if } (B=\max) \& (r=\min) \\ 5-R' & \text{if } (B=\max) \& (G=\min) \end{cases} \quad (10-2)$$

نکته: در رابطه‌ی فوق $H=Undefined$ ، به این معنی است که رنگ مورد نظر فام نداشته و مونوکروم می‌باشد. همچنین در محاسبه‌ی S اگر \max برابر صفر باشد، یعنی $(R,G,B) = (0,0,0)$ ، در آن صورت S برابر صفر است. مقادیر S و V بین صفر تا یک بوده و مقدار H با ضرب کردن آن در 60 درجه، بین صفر تا 360 درجه خواهد بود، که این مقادیر را در بازه‌ی $[0,255]$ تغییر مقیاس می‌یابد [۱۱]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۶].

$$H = H' * 60$$



شکل ۲-۱۴: مدل رنگی HSV [۱۶]

۲-۳-۵ فضای رنگ Ycber

این فضای رنگی برای نمایش تصاویر ویدیویی دیجیتال و همچنین کاربردهایی مانند فشرده سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این فضای رنگی Y معرف روشنایی پیکسل بوده و cr و cb به ترتیب نشان دهنده‌ی تفاضل رنگ قرمز و آبی از رنگ مرجع می‌باشد. برای تبدیل مقدار یک رنگ از فضای RGB به فضای Ycber از فرمول ۱۱-۲ استفاده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} Y \\ Cr \\ Cb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.257 & 0.504 & 0.098 \\ 0.439 & -0.386 & 0.071 \\ -0.148 & -0.291 & 0.439 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad (11-2)$$

این فضای رنگی از چند جهت حائز اهمیت است. اولاً در این فضا میزان روشنایی به صورت کامل از سایر مؤلفه‌ها جدا شده است. در حقیقت y شامل فرکانس‌های لازم برای یک نمایشگر سیاه و سفید را فراهم می‌نماید و از طرفی چون مقدار روشنایی از مقادیر cb و cr کم شده است، این دو مؤلفه تا حد زیادی نسبت به تغییرات روشنایی پایدار هستند [۱۷].

۳-۱ ارتباط رنگ و منطق فازی

در زندگی روزمره، کلماتی به کار برده می‌شوند که اغلب برای توصیف متغیرها استفاده می‌شوند. به عنوان مثال هنگامی که گفته می‌شود «امروز سرد است» یا «دمای هوا امروز پایین است» از واژه «پایین» برای توصیف «دمای هوای امروز» استفاده شده است، به این معنی که متغیر دمای هوای امروز واژه «پایین» را به عنوان مقدار خود پذیرفته است. واضح است که متغیر «دمای هوای امروز» می‌تواند مقادیری نظیر 3° ، 10° ، 8° و 24° و ... را اختیار کند. هنگامی که یک متغیر، اعداد را به عنوان مقدار بپذیرد، یک چهارچوب ریاضی مشخص برای فرموله کردن وجود دارد، اما هنگامی که متغیر واژه‌ها را به عنوان مقدار می‌گیرد در آن صورت چهارچوب مشخص برای فرموله کردن آن در تئوری ریاضیات کلاسیک وجود ندارد. در واقع در سیستم‌های عملی، اطلاعات مهم از دو منبع سرچشمه می‌گیرند: یکی از منابع افراد خبره که دانش و آگاهی‌شان را در مورد سیستم با زبان طبیعی تعریف می‌کنند و منبع دیگر اندازه‌گیری‌ها و مدل‌های ریاضی هستند که از قواعد فیزیکی مشتق شده‌اند. بنابراین یک مسئله مهم ترکیب این دو نوع اطلاعات در طراحی سیستم‌هاست. برای انجام این ترکیب سؤال کلیدی این است که چگونه می‌توان دانش بشری را به یک فرمول ریاضی تبدیل کرد؟

برای اینکه چنین چهارچوبی به دست آید، مفهوم متغیرهای زبانی^{۴۲} تعریف شده است. در صحبت‌های عامیانه اگر یک متغیر بتواند واژه‌هایی از زبان طبیعی را به عنوان مقدار بپذیرد یک متغیر زبان شناختی نامیده می‌شود.

برای فرموله کردن واژه‌ها در گزاره‌های ریاضی از مجموعه‌های فازی برای مشخص کردن واژه‌ها استفاده و تعریف می‌شود: «اگر یک متغیر بتواند واژه‌هایی از زبان طبیعی را به عنوان مقدار خود بپذیرد آنگاه متغیر زبان شناختی نامیده می‌شود که واژه‌ها به وسیله مجموعه‌های فازی در محدوده ای که متغیرها تعریف شده‌اند مشخص می‌گردد».

⁴² Linguistic

حال می‌توان مجموعه‌های فازی را در مورد رنگ‌ها نیز به کار برد. یعنی هنگامی که ما در رنگ‌ها از عباراتی چون «تقریباً هم‌رنگ برای مثال رنگ قرمز است» یا «میزان کم رنگی یا پررنگی» بحث می‌کنیم، در واقع شکل فازی رنگ‌ها را مورد بحث قرار داده‌ایم. برای این کار نیازمند تعریف فضای رنگی هستیم که در فصل دوم در مورد آن بحث شد. رنگ یک ویژگی نیرومندی برای توصیف و تحلیل تصویر است. در تصاویر رنگی، هر پیکسل شامل سه مؤلفه (یا بیشتر) متناظر با رنگ‌های اولیه در یک فضای رنگی داده شده (به عنوان مثال قرمز، سبز و آبی برای RGB)، می‌شود. در برخی کاربردها، گرفتن درک خاصی از رنگ‌ها از یک کاربر معین، در زمانی که یک تصویر را پردازش می‌کند، خیلی مهم است. با این وجود ادراک رنگ بشر، یک سه تایی از مقادیر حقیقی نیست. برای به دست آوردن این مختص، درک ناصحیح از رنگ‌ها به وسیله کاربر و یا برای کاربرد های معین، نویسندگان زیادی چون ال. هیلدبراند^{۴۳} و ام. فثی^{۴۴} مجموعه‌های فازی را پیشنهاد کرده‌اند [۱۵]. در این نگرش، رنگ‌های یک تصویر، برچسب‌های زبان شناختی، به عنوان زیر مجموعه‌های فازی از سه تایی‌های یک فضای رنگی معین در نظر گرفته می‌شوند [۱۵]. در این فصل تحلیلی از رنگ‌های فازی ارائه خواهد شد.

۳-۲ رنگ فازی بر مبنای زبان شناختی

تعریف ۳-۲-۱: یک رنگ فازی \tilde{C} یک زیرمجموعه نرمال شده ای از رنگ‌ها است [۱۵].

همان طور که در فصل دوم توضیح داده شد رنگ‌ها را می‌توان به عنوان یک سه تایی از اعداد حقیقی متناظر با مختصات در یک فضای رنگی نشان داد (اگر C_k یک رنگ باشد آنگاه $C_k = [x, y, z]$). بنابراین یک رنگ فازی می‌تواند به عنوان یک زیر مجموعه فازی نرمال شده از نقاط یک فضای رنگی تعریف شود. فرض می‌شود XYZ فضای رنگی کلی با مؤلفه‌های X ، Y و Z است و فرض می‌شود که فضای رنگی XYZ با دامنه‌های D_X ، D_Y و D_Z در تناظر مؤلفه‌های رنگ به کار گرفته شده‌است.

⁴³ L. Hildebrand

⁴⁴ M. Fathi

تعریف ۳-۲-۲: یک رنگ فازی \tilde{C} یک برچسب زبان شناختی است، که وابسته های معنایی اش در یک فضای رنگی XYZ به وسیله یک زیرمجموعه فازی نرمال شده از $D_X \times D_Y \times D_Z$ نمایش داده شده است [۱۵].

می توان نمایش یک رنگ فازی با معانی متفاوتی از زیر مجموعه های فازی در فضاهای رنگی متفاوت را تعریف نمود، مشروط بر اینکه آنها همان معنی را داشته باشند. برای مثال، اگر فضای رنگی RGB به کار رود، رنگ قرمز را می توان به عنوان یک زیر مجموعه فازی با زبان شناختی «تقریباً [255,0,0]» و همچنین اگر فضای HSV (شبه فضای رنگی HSL) به کار رود با متغیر زبان شناختی «تقریباً [0,1,128]» نشان داد. همچنین در مورد رنگ هایی که می توانند به وسیله سه مقدار دقیق توصیف شوند، تعریف با معانی زیرمجموعه های فازی در دامنه ای از هر مؤلفه ممکن است.

تعریف ۳-۲-۳: یک مؤلفه رنگ فازی \tilde{C}_X (به ترتیب \tilde{C}_Y ، \tilde{C}_Z) یک برچسب زبان شناختی است، که وابسته های معنایی اش به وسیله یک زیرمجموعه فازی نرمال شده از D_X (به ترتیب D_Y ، D_Z) نمایش داده شده است [۱۵].

با استفاده از این مؤلفه ها، یک رنگ فازی \tilde{C} را می توان تعریف کرده و در عمل به وسیله سه تایی $[\tilde{C}_X, \tilde{C}_Y, \tilde{C}_Z]$ نشان داد، جایی که \tilde{C}_X ، \tilde{C}_Y و \tilde{C}_Z مؤلفه های رنگ فازی \tilde{C} هستند. از این راه زیرمجموعه فازی متناظر با یک رنگ فازی، با ترکیب کردن مؤلفه های فازی متناظر با یک روش مناسب به دست می آید. بنابراین هر رنگ قطعی $[x, y, z]$ با درجه عضویت \tilde{C} به شکل رابطه ۳-۱ تعریف می شود.

$$\tilde{C}(x, y, z) = \wedge \{ \tilde{C}_X(x), \tilde{C}_Y(y), \tilde{C}_Z(z) \} \quad (۱-۳)$$

که \wedge معمولاً مینیمم است.

برای گسترش مفهوم فضای رنگی برای مواردی از رنگ‌های فازی و فرض کردن یک فضای رنگی ثابت

XYZ ، با دامنه های D_X ، D_Y و D_Z ، متناظر با مؤلفه های رنگ، تعریف ۳-۲-۴ بیان شده است:

تعریف ۳-۲-۴: یک فضای رنگی فازی \overline{XYZ} یک مجموعه از رنگ‌های فازی است، که یک تجزیه از

$$D_X \times D_Y \times D_Z \text{ تعریف می کند.}$$

تعریف ۳-۲-۵: یک فضای فازی بر روی مؤلفه X (به ترتیب Y و Z) یک مجموعه از مؤلفه های

رنگ‌های فازی است، که یک تجزیه از D_X (به ترتیب D_Y ، D_Z) تعریف می کند [۱۵].

۳-۳ مدل رنگ فازی بر مبنای فضای رنگی HSL و تبدیل آن از فضای رنگی RGB

حال با استفاده از مدل‌های RGB و HSL و با استناد بر منطق فازی به بیان مدل رنگ فازی HSL

می‌پردازیم. فرض کنید برای یک رنگ (R,G,B) که به وسیله سیستم مختصات رنگ RGB نشان داده

شده است، مقادیر R، G و B در بازه [0,255] قرار دارند و به ترتیب مقادیر قرمز، سبز و آبی را نشان

می‌دهند. نسبت شدت (r,g,b) از (RGB) به شکل رابطه ۳-۲ تعریف می‌شود:

$$r = \frac{R}{255}, g = \frac{G}{255}, b = \frac{B}{255} \quad (۲-۳)$$

فرض کنید $I_{\max} = \max\{r, g, b\}$ و $I_{\min} = \min\{r, g, b\}$. حال مقادیر H، S و L به وسیله فرمول‌های ۳-

۳ تا ۳-۶ از مقادیر R و G و B به دست می‌آیند.

$$H = \begin{cases} 60 \times \left(\frac{g-b}{I_{\max} - I_{\min}} \right) & \text{if } r = I_{\max} \\ 60 \times \left(2 + \frac{b-r}{I_{\max} - I_{\min}} \right) & \text{if } g = I_{\max} \\ 60 \times \left(4 + \frac{r-g}{I_{\max} - I_{\min}} \right) & \text{if } b = I_{\max} \\ \text{undefine} & \text{if } I_{\min} = I_{\max} \end{cases} \quad (۳-۳)$$

$$H = H + 360 \quad \text{if } H < 0 \quad (۴-۳)$$

$$L = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} \quad (5-3)$$

$$L' = 1 - \frac{|L - 0.5|}{0.5}$$

$$S = \begin{cases} 0 & \text{if } I_{\min} = I_{\max} \\ \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} & \text{if } L \leq 0.5 \\ \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2 - I_{\max} - I_{\min}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6-3)$$

کاوامورا⁴⁵ و همکاران صفت رنگ فام و تن (درجه تیرگی و سایه دار بودن رنگ در گرافیک کامپیوتری) را مورد استفاده قرار دادند تا یک نگرش بر مبنای فازی برای تشخیص رنگ طراحی کنند. سوگانو⁴⁶ از صفت رنگ شامل فام و تن برای طراحی مدل توصیف اثر رنگ استفاده کرد. بنابراین بر مبنای ترکیب فام و تن، برای ساخت رنگ‌های فازی استفاده می‌شود. تن به وسیله روشنایی و اشباع ساخته شده است. برای رنگ داده شده، از توابع عضویت سه تایی برای محاسبه درجات عضویت مطابق با مجموعه فازی از پیش تعریف شده فام استفاده می‌شود. توابع عضویت سه تایی، همچنین برای محاسبه درجات عضویت مربوط به مجموعه های فازی روشنایی و اشباع بکار گرفته شده است. سپس مجموعه های فازی روشنایی و اشباع نسبت به مجموعه فازی تن محاسبه می‌شوند. بعد از آن، مجموعه فازی فام با مجموعه فازی تن برای ساختن رنگ فازی ترکیب می‌شود.

فرض کنید $H = \{H_i | i = 1, 2, \dots, h\}$ مجموعه از پیش تعریف شده فام ها، داده شده به وسیله کاربر باشد. برای یک فام H ، مجموعه فازی \tilde{H} به وسیله رابطه ۲-۷ نمایش داده می‌شود:

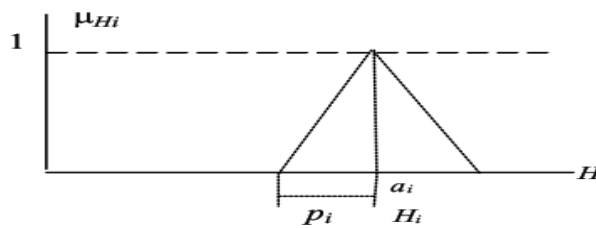
$$\tilde{H} = \left(\sum_{i=1}^h \mu_{H_i}(x) / H_i \right) \quad (7-3)$$

⁴⁵ Kawamura

⁴⁶ Sugano

که در آن x مقدار فام H تعریف شده در (۳-۳) و (۴-۳) است. درجه عضویت فام فازی برای یک H_i مشخص به وسیله تابع عضوی μ_{H_i} با دو پارامتر a_i و p_i در تابع عضویت ۳-۸ کاراکتر بندی شده است (شکل ۳-۱ را ببینید [۱۸]):

$$\mu_{H_i}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - a_i|}{p_i} & \text{if } a_i - p_i \leq x \leq a_i + p_i; \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (۳-۸)$$



شکل ۳-۱: درجه عضویت فام فازی برای H تعیین شده

در سیستم رنگ فازی پیشنهادی، چون تن به وسیله‌ی روشنایی و اشباع ساخته می‌شود، بنابراین در ابتدا مجموعه های فازی روشنایی و اشباع را تعریف و سپس دو مجموعه، برای به وجود آوردن مجموعه فازی تن ترکیب می‌شوند. فرض کنید $L = \{L_i | i = 1, 2, \dots, l\}$ مجموعه از پیش تعریف شده روشنایی باشد. برای یک روشنایی L ، مجموعه فازی \tilde{L} توسط رابطه ۳-۹ نمایش داده می‌شود:

$$\tilde{L} = \left(\sum_{i=1}^l \mu_{L_i}(y) / L_i \right), \quad (۳-۹)$$

که در آن y مقدار روشنایی L تعریف شده در (۳-۵) است. درجه عضویت روشنایی فازی برای \tilde{L} مشخص شده به وسیله تابع عضویت μ_{L_i} با دو پارامتر q_i و b_i توسط معادله (۳-۱۰) کاراکتر بندی شده است:

$$\mu_{L_i}(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|y - b_i|}{q_i} & \text{if } b_i - q_i \leq y \leq b_i + q_i; \\ 0 & \text{ow} \end{cases} \quad (10-3)$$

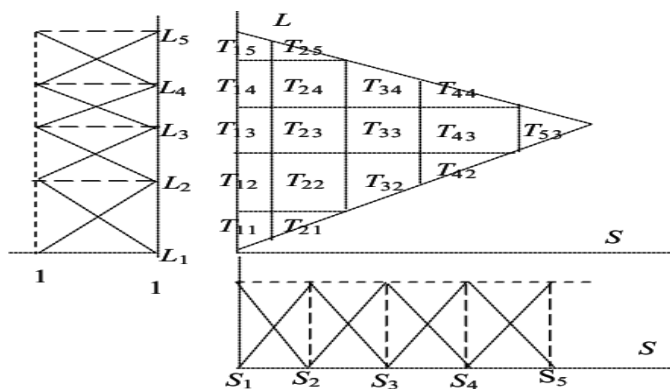
سرانجام اگر $S = \{S_i | i = 1, 2, \dots, s\}$ مجموعه از پیش تعریف شده اشباع باشد. برای یک اشباع s ، مجموعه فازی

$$\tilde{S} = \left(\sum_{i=1}^s \mu_{S_i}(z) / S_i \right), \quad (11-3)$$

را داریم که z مقدار اشباع s تعریف شده در (3-6) است. درجه عضویت روشنایی فازی برای S_i مشخص شده به وسیله تابع عضویت μ_{S_i} با دو پارامتر c_i و r_i توسط تابع عضویت (3-12) کاراکتر بندی شده است:

$$\mu_{S_i}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|z - c_i|}{r_i} & \text{if } c_i - r_i \leq z \leq c_i + r_i; \\ 0 & \text{ow} \end{cases} \quad (12-3)$$

حال نوبت به مجموعه فازی تن است. مشاهده می‌شود که تعریف اشباع در (3-5) به روشنایی بستگی دارد. بنابراین با استفاده از تعاریف و روابط مجموعه های فازی، مجموعه های فازی به دست آمده از روشنایی و اشباع را ترکیب کرده و صفحه مثلثی شکل تن ایجاد می‌شود. نتیجه ترکیب S و L درون یک ناحیه مثلثی، به جای مستطیل متقاطع، در صفحه تن مکان یابی خواهد شد. بیرون ناحیه مثلثی صفحه تن هرگز در این سیستم رنگی ظاهر نخواهد شد. در ابتدا فضای روشنایی و اشباع با استفاده از مجموعه های فازی تعریف شده در روابط (3-9) و (3-11) تجزیه می‌شود. برای تناظر متغیر اشباع S_i ، $1 \leq i \leq s$ ، در مجموعه فازی μ_s ، هر S_i به وسیله مجموعه فازی روشنایی μ_i به چندین ناحیه تن افزای شده است. به علت وابستگی روابط بین اشباع و روشنایی، جدایی‌ها در تعداد زمانی که مقدار اشباع s بزرگ‌تر است، کاهش خواهد یافت. شکل 3-2 نشان دهنده این موضوع است [18].



شکل ۳-۲: ساختار مجموعه فازی تن. در این شکل از ترکیب دو مجموعه فازی \tilde{L} و \tilde{S} با توابع عضویت مثلثی مجموعه فازی تن ایجاد شده است.

فرض کنید T_{ij} به وسیله S_i و L_j درون صفحه مثلثی تن تقسیم شده است. مجموعه فازی تن به صورت ۳-۱۳ تعریف می‌شود:

$$\tilde{T} = \left(\sum_{T_{ij} \in \text{Fone rang}} \mu_{T_{ij}}(y, z) / T_{ij} \right), \quad (13-3)$$

حال تابع عضویت برای مجموعه فازی تن تعریف می‌شود:

$$\mu_{T_{ij}}(y, z) = \mu_{L_j}(y) \cdot \mu_{S_i}(z) \quad (14-3)$$

در شکل ۳-۲ می‌توان ۱۷ تن فازی را به وسیله تعاریف پنج مجموعه فازی روشنایی L_1, \dots, L_5 و پنج مجموعه فازی اشباع S_1, \dots, S_5 تولید کرد. اشباع فازی S_1 و S_2 به توی پنج تن فازی، به ترتیب، شامل $T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}$ و $T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{24}, T_{25}$ افراز شده اند. به طور مشابه، S_3 و S_4 به توی ۳ تن فازی به وسیله L_2, L_3, L_4 به ترتیب افراز شده اند، و S_5 فقط می‌تواند با L_3 برای T_{53} شدن، متصل شود. آنگاه مجموعه فازی تن به صورت * است:

$$\begin{aligned}
\tilde{T} = & (\mu_{T_{11}}(y, z)/T_{11} + \mu_{T_{12}}(y, z)/T_{12} + \mu_{T_{13}}(y, z)/T_{13} + \\
& \mu_{T_{14}}(y, z)/T_{14} + \mu_{T_{15}}(y, z)/T_{15} + \mu_{T_{21}}(y, z)/T_{21} + \\
& \mu_{T_{22}}(y, z)/T_{22} + \mu_{T_{23}}(y, z)/T_{23} + \mu_{T_{24}}(y, z)/T_{24} + \\
& \mu_{T_{25}}(y, z)/T_{25} + \mu_{T_{32}}(y, z)/T_{32} + \mu_{T_{33}}(y, z)/T_{33} + \\
& \mu_{T_{34}}(y, z)/T_{34} + \mu_{T_{42}}(y, z)/T_{42} + \mu_{T_{43}}(y, z)/T_{43} + \\
& \mu_{T_{44}}(y, z)/T_{44} + \mu_{T_{53}}(y, z)/T_{53}).
\end{aligned}
\tag{*}$$

حال مجموعه های فازی فام و تن برای ساختن رنگ های فازی به کار می روند. h تافام و t تا تن را در نظر گرفته و فرض کنید $C = \{C_{ij} | 1 \leq i \leq h \& 1 \leq j \leq t\}$ مجموعه ای از رنگ ها فازی ساخته شده به وسیله فام و تن باشند. مجموعه رنگ فازی \tilde{C} به شکل معادله (۱۵-۳) است:

$$\tilde{C} = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^t \mu_{C_{ij}}(x, y, z) / C_{ij} \tag{۱۵-۳}$$

و درجه عضویت برای رنگ فازی توسط (۱۶-۲) تعریف شده است:

$$\mu_{C_{ij}}(x, y, z) = \mu_{H_i}(x) \cdot \mu_{T_j}(y, z) \tag{۱۶-۳}$$

جایی که، به ترتیب، x در معادله (۳-۳) و (۴-۳) و y و z در معادله (۵-۳) و (۶-۳) تعریف شده است. در معادله (۸-۳) μ_{H_i} و در معادله (۱۴-۳) μ_{T_j} تعریف شده است [۱۸]. بنابراین رنگ فازی و تابع عضویت آن با کمک دو فضای رنگی RGB و HSL ساخته شد.

۴-۳ توصیف کننده رنگ فازی

نه رنگ اصلی تعریف شده مجموعه τ به نمایندگی یک مثال خوب از رنگ‌ها (بعد H) را در نظر بگیرید:

$$\tau = \{\text{قرمز، نارنجی، زرد، سبز، فیروزه ای، آبی، زرشکی، ارغوانی، صورتی}\}$$

τ به هفت رنگ نیوتن مشهور است، که با افزودن صورتی و فیروزه ای، مجموعه رنگ رنگین کمان را تشکیل می‌دهند.

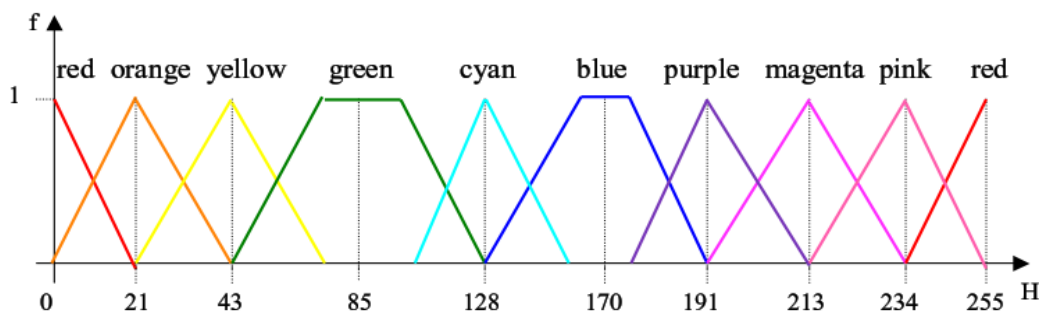
یک نکته در مورد فضاها، مسئله یکنواختی مقیاس^{۴۷} است. فضای HSL برای مسائل مناسب است، اما مقیاس یکنواخت رنگ^{۴۸} UCS نیست. حقیقتاً چشمان نمی‌توانند تغییرات کوچک از فام را زمانی که رنگ سبز ($h = \pm 85$) یا آبی ($h = \pm 170$) است، درک کنند، در صورتی که آن‌ها برای مثال نارنجی را خیلی خوب درک می‌کنند. بعد H به صورت دایره است، در حقیقت توابع عضویت می‌توانند به صورت‌های مختلفی چون دوزنقه ای، مثلثی یا گوسی و ... نمایش داده شوند. بنابراین برای مدل بندی با استناد به این که توزیع رنگ‌ها در دایره فام یکنواخت نیست، تراک^{۴۹} و سایرین پیشنهاد دادند تا آن‌ها را با مجموعه های فازی دوزنقه ای یا مثلثی نمایش بدهند. برای هر رنگ τ آن‌ها یک تابع عضویت مختلف از ۰ تا ۱ می‌سازند (f_t با $t \in \tau$). اگر این توابع معادل با ۱ باشند، رنگ متناظر درست است. برای هر رنگ بنیادی، بازه مربوطه مطابق با نام‌های زبانی رنگ تعریف شده است. برای مثال، برای ساخت f_d ، فام معادل با ۵۵ و تابع عضویت $f_d \pm 0.5$ است. برای برخی رنگ‌ها بازه وسیعی به دست می‌آید و این حالتی برای رنگ‌های سبز و آبی است که به وسیله زیر مجموعه های فازی دوزنقه ای به نمایش در می‌آیند. در این حالت از همان نمایش فازی از رنگ‌ها استفاده شده

⁴⁷ Uniformity of the scale

⁴⁸ Uniform color scale

⁴⁹ Truck

است ولی با این تفاوت که دو تابع مربوط به دو رنگ متوالی، باید مقدار نقطه تقاطعشان معادل با $\frac{1}{2}$ باشند. این بدان معنی است، زمانی که h متناظر با یک نقطه تلاقی است آن می‌تواند برای هر دو رنگ با همان وزن ذکر شود.



شکل ۳-۳: اعداد فازی دوزنقه ای و مثلثی در بعد H [۱۹]

یاد آور می‌شود که یک زیر مجموعه فازی دوزنقه ای معمولاً با (a, b, α, β) مشخص شده است و زمانی که مرکز به یک نقطه کاهش یافته است، آن یک زیرمجموعه مثلثی مشخص شده به وسیله (a, α, β) جایی که $a = b$ است.

حال توابع عضویت هر رنگ t با رابطه ۳-۱۷ تعریف می‌شود:

$$\forall t \in \tau, f_t(h) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \leq h \leq b \\ 0 & \text{if } h \leq a - \alpha, h \geq b + \beta \\ \frac{h - (a - \alpha)}{\alpha} & \text{if } h > a - \alpha, h < a \\ \frac{(b + \beta) - h}{\beta} & \text{if } h > b, h < b + \beta \end{cases} \quad (۳-۱۷)$$

برای مثال، برای نارنجی t یک زیر مجموعه مثلثی با $(a = 21, \alpha = 21, \beta = 22)$ وجود دارد:

$$f_{\text{orange}}(h) = \begin{cases} 0 & \text{if } h \geq 43 \\ \frac{h}{21} & \text{if } h < 21 \\ \frac{43-h}{22} & \text{if } h \geq 21 \end{cases}$$

برای سبز $t=$ یک زیر مجموعه ذوزنقه ای با $(a = 75, \alpha = 22, b = 95, \beta = 33)$ موجود است:

$$f_{\text{green}}(h) = \begin{cases} 1 & \text{if } h \geq 75, h \leq 95 \\ 0 & \text{if } h \leq 43, h \geq 128 \\ \frac{h-43}{22} & \text{if } h > 43, h < 75 \\ \frac{128-h}{33} & \text{if } h > 95, h < 128 \end{cases}$$

حال به دو بعد دیگر نیاز است (S و L). این دو بعد عملاً رنگی ندارند و توصیف کننده رنگ می باشند. برای آسان کردن فرایند هر بازه (بردار) بعد به توی سه زیر بازه تقسیم شده است: مقدار پایین^{۵۰} (ضعیف)، مقدار متوسط^{۵۱} و مقدار قوی^{۵۲}، دو بردار را باهم ترکیب کرده و به صورت نموداری دو بعدی، در نظر گرفته می شوند که نه ناحیه توصیف رنگ حاصل می شود. بنابراین شش توصیف کننده یک بعدی وابسته و نه توصیف کننده دو بعدی وابسته که با Q مشخص شده به دست می آید.

$$Q = \{ \text{somber, dark, deep, gray, medium, bright, pale, light, luminous} \}$$

که معانی نسبتاً صحیح آن به شکل زیر است:

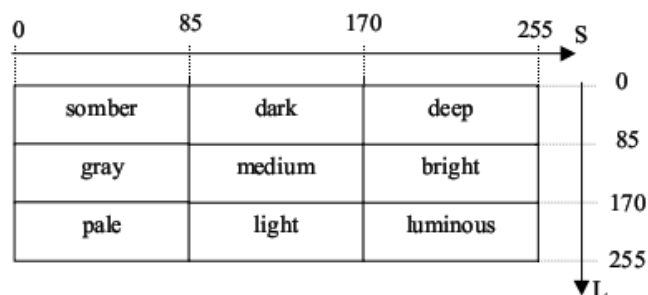
$$Q = \{ \text{سایه دار، تاریک، ژرف، خاکستری، متوسط، روشن، بی نور، سبک، درخشان} \}$$

شکل ۳-۴ نه توصیف کننده دو بعدی وابسته را نشان می دهد [۱۹]:

⁵⁰ Low value

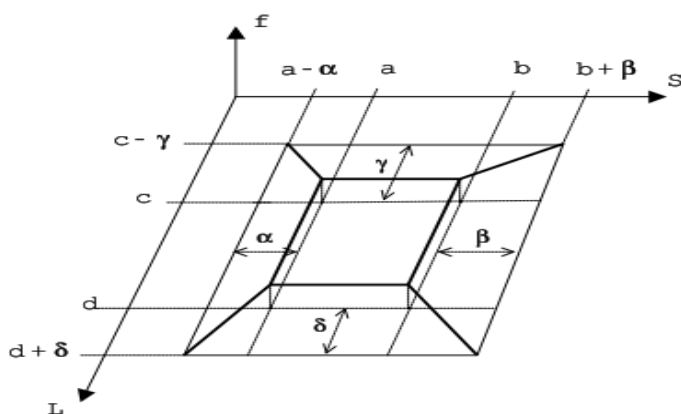
⁵¹ Average value

⁵² Strong value



شکل ۳-۴: توصیفگرهای بنیادی رنگ

هر توصیف کننده Q به یک تابع عضویت مختلف بین ۰ و ۱ وابسته است ($f_q Q \in Q$)، اما با این تفاوت که توابع عضویت هم باید L و هم S را بپوشانند. پس این توابع عضویت در فضای سه بعدی رسم می‌شوند (شکل ۳-۵). همچنین برای فام H ، مقدار نقطه تقاطع این تابع‌ها معادل با $\frac{1}{2}$ تصور شده است. بنابراین، هر تابع در میان مجموعه سه بعدی $(a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ نشان داده شده است [۱۹].



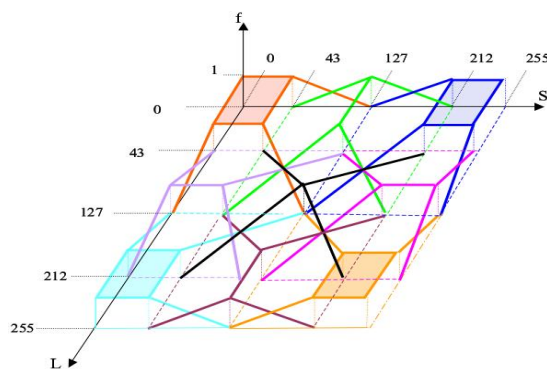
شکل ۳-۵: زیر مجموعه فازی سه بعدی ذوزنقه ای

تابع عضویت هر توصیف کننده q به صورت رابطه ۳-۱۸ تعریف شده است:

$$\forall q \in \mathcal{Q}, \tilde{f}_q(l, s) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \leq s \leq b \\ & \wedge c \leq l \leq d \\ 0 & \text{if } s \leq a - \alpha \vee s \geq b + \beta \\ & \vee l \leq c - \gamma \vee l \geq d + \delta \\ \frac{l - (c - \gamma)}{\gamma} & \text{if } c - \gamma < l < c \\ & \wedge \alpha l - \gamma s \leq \alpha c - \gamma a \\ & \wedge \beta l + \gamma s \leq \beta c + \gamma b \\ \frac{(d + \delta) - l}{\delta} & \text{if } d < l < d + \delta \\ & \wedge \beta l - \delta s > \beta d - \delta b \\ & \wedge \alpha l + \delta s > \alpha d + \delta a \\ \frac{s - (a - \alpha)}{\alpha} & \text{if } a - \alpha < s < a \\ & \wedge \alpha l - \gamma s > \alpha c - \gamma a \\ & \wedge \alpha l + \delta s \leq \alpha d + \delta a \\ \frac{(b + \beta) - s}{\beta} & \text{if } b < s < b + \beta \\ & \wedge \beta l + \gamma s > \beta c + \gamma b \\ & \wedge \beta l - \delta s \leq \beta d - \delta b \end{cases} \quad (18-3)$$

برای مثال، برای (سایه دار) q ما داریم $(a = \alpha = 0, b = 43, \beta = 84, c = \gamma = 0, d = 43, \delta = 84)$:

$$\tilde{f}_{\text{somber}}(l, s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \leq 43, l \leq 43 \\ 0 & \text{if } s \geq 127 \vee l \geq 127 \\ \frac{127 - l}{84} & \text{if } 43 < l < 127, l > s \\ \frac{127 - s}{84} & \text{if } 43 < s < 127, l \leq s \end{cases}$$



شکل ۳-۶: بعد S و L [۱۹]

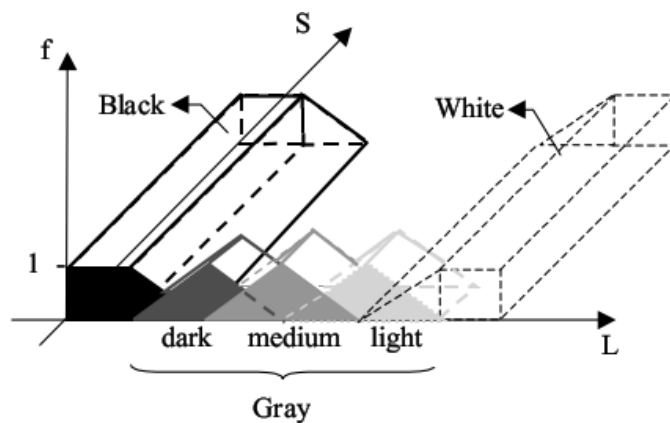
البته رنگ‌های سیاه، خاکستری و سفید مربوط به توابع عضویت فازی f_{black} ، f_{white} و f_{gray} هستند. نکته این که این رنگ‌ها (باید گفت بی رنگ‌ها) به طور کامل در میان فضاهای L و S تعریف شده

است، زیرا شامل هیچ فامی نمی‌شود (hue تعریف نشده است). زمانی که l خیلی ضعیف (low) باشد، رنگ به سفید تبدیل می‌شود. زمانی که l خیلی بالا (high) باشد رنگ به سیاه تبدیل می‌شود. زمانی که s خیلی ضعیف باشد، رنگ به خاکستری تبدیل می‌شود. درون رنگ خاکستری سه توصیف کننده تعریف می‌شود: تاریک (dark)، متوسط (medium) و نور (light) که مربوط به توابع عضویت فازی

\tilde{f}_{light} و \tilde{f}_{medium} ، \tilde{f}_{dark} شکل (۷-۳) هستند [۱۹].

برای مثال، برای $t=black$ ما داریم $(a = \alpha = 0, b = 255, \beta = 0, c = \gamma = 0, d = 15, \delta = 10)$:

$$f_{black}(l) = \begin{cases} 1 & \text{if } l \leq 15 \\ 0 & \text{if } l \geq 25 \\ \frac{25-l}{10} & \text{if } 15 < l < 25 \end{cases}$$



شکل ۷-۳: نمودار رنگ‌های آکروماتیک سیاه، خاکستری و سفید

۵-۳ اندازه گیری تشابه رنگ فازی

یک اندازه گیری تشابه فازی برای محاسبه تشابه بین دو رنگ فازی در یک تصویر پیشنهاد شده است. اندازه گیری تشابه فازی بر مبنای درجات عضویت رنگ فازی است. برای دو رنگ تعیین شده، رنگ یک (R_1, G_1, B_1) و رنگ دو (R_2, G_2, B_2) ، با پیروی از روش بخش ۳-۳ مختصات تناظر HSL می‌تواند به ترتیب به عنوان $C_1 = (h_1, l_1, s_1)$ و $C_2 = (h_2, l_2, s_2)$ محاسبه شود. از روابط (۳-۱۶) و (۳-۱۷) درجات عضویت رنگ فازی به ترتیب از رنگ \tilde{C}_1 و \tilde{C}_2 ،

$$\tilde{C}_2 = \sum_i^h \sum_j^t \mu_{C_{ij}}(h_2, l_2, s_2) / C_{ij} \quad \text{و} \quad \tilde{C}_1 = \sum_i^h \sum_j^t \mu_{C_{ij}}(h_1, l_1, s_1) / C_{ij}$$

هستند، پس اندازه تشابه به شکل ۳-۱۹ تعریف می‌شود:

$$\text{sim}(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) = \frac{\sum_i^h \sum_j^t \min(\mu_{C_{ij}}((h_1, l_1, s_1)), \mu_{C_{ij}}(h_2, l_2, s_2)) / C_{ij}}{\sum_i^h \sum_j^t \max(\mu_{C_{ij}}(h_1, l_1, s_1), \mu_{C_{ij}}(h_2, l_2, s_2)) / C_{ij}} \quad (۳-۱۹)$$

مقدار $\text{sim}(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2)$ در بازه $[0, 1]$ است [۱۸].

۳-۵-۱ یک مثال

فرض کنید پالت^{۵۳} رنگ (جدول رنگ و الگو- مجموعه ای از رنگ‌های قابل دسترس در یک سیستم گرافیکی کامپیوتر) سیستم قطعه بندی و توصیف کننده تن شکل ۳-۸ و شکل ۳-۹ انتخاب شده است. جدول ۳-۱ و ۳-۲ و ۳-۳ پارامترهای نسبی را نشان می‌دهد [۱۸]. دو رنگ تعیین شده، رنگ یک $RGB(77, 255, 51)$ و رنگ دو $RGB(51, 255, 26)$ داده شده است. تشابه رنگ با استفاده از

⁵³ Palette

پالت رنگ انتخاب شده به صورت زیر محاسبه می‌شود. مقادیر (r, g, b) رنگ‌های رنگ یک و رنگ دو به صورت زیر محاسبه شده است:

$$(r_1, g_1, b_1) = (77 / 255, 255 / 255, 51 / 255) = (0.3, 1, 0.2)$$

$$(r_2, g_2, b_2) = (51 / 255, 255 / 255, 26 / 255) = (0.2, 1, 0.1)$$

مطابق با معادلات (۳-۳) و (۴-۳) فام‌های رنگ یک و رنگ دو به صورت زیر محاسبه شده است:

فام رنگ یک = $112/5$ ، فام رنگ دو = $113/5$. مقادیر روشنایی رنگ یک و دو که مطابق با معادله (۳-۳) هستند، به شرح زیر محاسبه شده‌اند:

روشنایی رنگ یک = $0/6$ و روشنایی رنگ دو = $0/55$.

مقادیر اشباع رنگ یک و دو که مطابق با معادله (۶-۳) هستند، به شرح زیر محاسبه شده‌اند:

اشباع رنگ یک = $0/8$ و اشباع رنگ دو = $0/9$.

بنابراین، تناظر مختصات رنگ HSL از رنگ یک و رنگ دو، به شرح زیر است:

$$C_2 = (h_2, l_2, s_2) = (113.3, 0.55, 0.9) \quad \text{و} \quad C_1 = (h_1, l_1, s_1) = (112.5, 0.6, 0.8)$$

از معادله (۷-۳) و (۸-۳):

$$\tilde{H}_{h_1} = (0.25/YG + 0.75/G)$$

$$\tilde{H}_{h_2} = (0.223/YG + 0.777/G)$$

از معادله (۹-۳) و (۱۰-۳):

$$\tilde{L}_{l_1} = (0.6/L_3 + 0.4/L_4), \quad \tilde{L}_{l_2} = (0.8/L_3 + 0.2/L_4)$$

بر طبق معادله (۱۱-۳) و (۱۲-۳): $\tilde{S}_{s_1} = (0.8/S_4 + 0.2/S_5)$, $\tilde{S}_{s_2} = (0.4/S_4 + 0.6/S_5)$

با توجه به معادله های (۳-۱۳) و (۳-۱۴):

$$\tilde{T}_{C_1} = (0.48 / Hue + 0.32 / Br + 0.12 / Vi)$$

$$\tilde{T}_{C_1} = (0.32 / Hue + 0.08 / Br + 0.48 / Vi)$$

از (۳-۱۵) و (۳-۱۶):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{C_1} = & (0.12 / (YG, Hue) + 0.8 / (YG, Br) + 0.03 / (YG, Vi) + 0.36 / (G, Hue) \\ & + 0.24 / (G, Br) + 0.09 / (G, Vi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{C_2} = & (0.071 / (YG, Hue) + 0.018 / (YG, Br) + 0.017 / (YG, Vi) + 0.249 / (G, Hue) \\ & + 0.062 / (G, Br) + 0.0373 / (G, Vi)) \end{aligned}$$

بنابراین مطابق با معادله (۳-۱۹)، تشابه بین رنگ یک و دو به صورت زیر است [۱۸]:

$$sim(\tilde{C}_{C_1}, \tilde{C}_{C_2}) = \frac{0.071 + 0.018 + 0.03 + 0.249 + 0.062 + 0.09}{0.12 + 0.08 + 0.107 + 0.36 + 0.24 + 0.373} = 0.406.$$

جدول ۳-۱. پارامتر های انتخاب شده برای فام

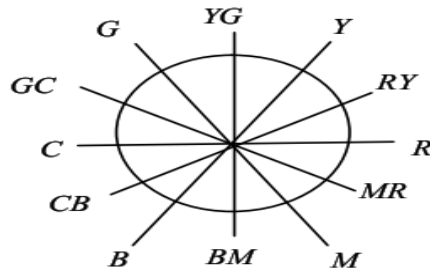
Alias	Hue Name	Hue Angle	p_i
H_1	R	0	30
H_2	RY	30	30
H_3	Y	60	30
H_4	YG	90	30
H_5	G	120	30
H_6	GC	150	30
H_7	C	180	30
H_8	CB	210	30
H_9	B	240	30
H_{10}	BM	270	30
H_{11}	M	300	30
H_{12}	MR	330	30

جدول ۳-۲: پارامترهای انتخاب شده برای توصیفگرهای تن

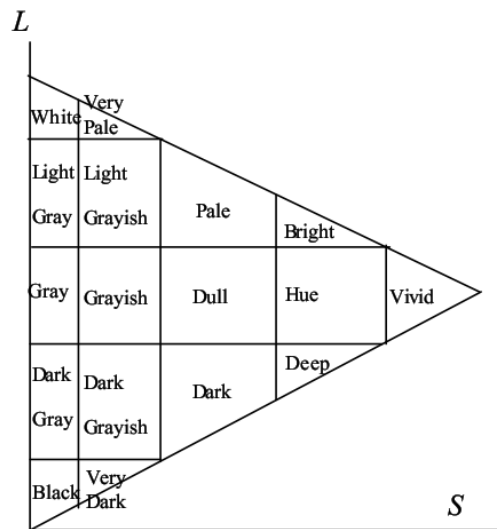
Name	Abbreviation	Region
<i>Block</i>	<i>Bl</i>	T_{11}
<i>Dark Gray</i>	<i>DG</i>	T_{12}
<i>Gray</i>	<i>Gr</i>	T_{13}
<i>Light Gray</i>	<i>LG</i>	T_{14}
<i>White</i>	<i>Wh</i>	T_{15}
<i>Very Dark</i>	<i>VD</i>	T_{21}
<i>Dark Grayish</i>	<i>DI</i>	T_{22}
<i>Grayish</i>	<i>Gi</i>	T_{23}
<i>Light Grayish</i>	<i>LI</i>	T_{24}
<i>Very Pale</i>	<i>VP</i>	T_{25}
<i>Dark</i>	<i>Da</i>	T_{32}
<i>Dull</i>	<i>Du</i>	T_{33}
<i>Pale</i>	<i>Pa</i>	T_{34}
<i>Deep</i>	<i>De</i>	T_{42}
<i>Hue</i>	<i>Hue</i>	T_{43}
<i>Bright</i>	<i>Br</i>	T_{44}
<i>Vivid</i>	<i>Vi</i>	T_{53}

جدول ۳-۳: پارامترهای روشنایی و اشباع

Granulations	b_i or c_i	q_i or n_i
S_1	0	0.25
S_2	0.25	0.25
S_3	0.5	0.25
S_4	0.75	0.25
S_5	1	0.25
L_1	0	0.25
L_2	0.25	0.25
L_3	0.5	0.25
L_4	0.75	0.25
L_5	1	0.25



شکل ۳-۸. مثالی از زاویه hue



شکل ۳-۹. توصیف کننده تن

۳-۵-۲ نمونه ای کاربردی از رنگ فازی بر مبنای تشابه فازی

از رنگ فازی می‌توان در بازیابی تصاویر و قطعه بندی تصویر استفاده کرد. تقسیم کردن تصاویر به مناطق غیر یکسان قطعه بندی نام دارد. ناحیه‌ها در واقع اشیاء متفاوت موجود در تصویرند که از لحاظ بافت و یا رنگ یکنواخت هستند. نواحی باید دارای حفره های کوچک نباشند. نواحی مجاور یک قطعه باید تفاوت قابل ملاحظه ای با آن ناحیه داشته باشند. در واقع قطعه بندی تصویر یک فرآیند افراز یک تصویر به نواحی به قسمی که هر ناحیه یکنواخت است، می‌باشد. قطعه بندی در مواردی چون پردازش تصویر، بینایی ماشین، پردازش تصاویر پزشکی، کتابخانه های دیجیتالی، بازیابی اطلاعات بر

پایه محتوا در تصاویر و فیلم، انتقال اطلاعات از طریق اینترنت و فشرده سازی تصاویر کاربرد دارد.

تکنیک‌های قطعه بندی تصویر با استفاده از رنگ را می‌توان در پنج دسته گنجانده [۲۰]:

(۱) قطعه بندی بر اساس پیکسل: اگر هر شی در تصویر دارای رنگ ثابت باشد پس می‌توان هر پیکسل از تصویر را به رنگ خاصی اختصاص داد. از جمله روش‌های استفاده شده در این دسته می‌توان به قطعه بندی بر اساس هیستوگرام تصویر، خوشه بندی فضای رنگ و دسته بندی رنگ فازی اشاره نمود.

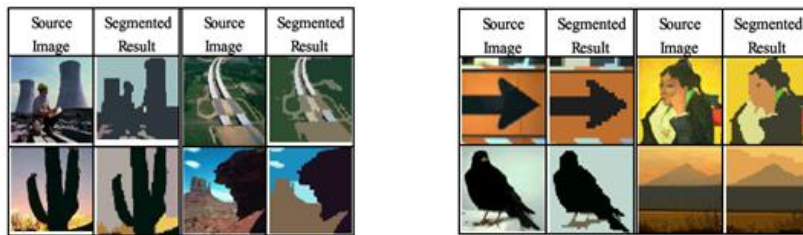
(۲) قطعه بندی بر اساس ناحیه: قطعه بندی در این روش بر اساس مجموعه ای از پیکسل‌ها می‌باشد که ناحیه ای از پیکسل‌های متصل به هم را که دارای شرایط یکسان و یکنواخت باشند به عنوان یک قطعه در نظر گرفته می‌شوند.

(۳) قطعه بندی بر اساس تشخیص لبه: هدف از این روش یافتن مکان‌هایی از تصویر است که تغییر ناگهانی رنگ و نور دارند و مرز بین دو ناحیه می‌باشند.

(۴) قطعه بندی ترکیبی بر اساس لبه و ناحیه: ترکیب روش‌های مختلف تشخیص ناحیه و لبه مانند دو روش watershed و catchments basin و قطعه بندی بر اساس خوشه بندی FCM

همان طور که دیده شد یک مجموعه از رنگ‌های فازی بر مبنای فضای رنگی HSL طراحی شد. هر پیکسل از رنگ‌های فازی به وسیله یک مجموعه رنگ‌های فازی که در جدول رنگ و الگوی انتخاب شده به وسیله فرد خبره، نمایش داده می‌شود. سپس یک اندازه تشابه فازی برای ارزیابی تشابه بین دو رنگ فازی از پیکسل بسط یافته است. بر مبنای اندازه تشابه رنگ فازی، پیکسل‌های مجاور به طور بازگشتی ادغام می‌شوند و اشیاء با معنی خارج از یک تصویر قطعه بندی خواهند شد.

در شکل ۱۰-۳ نمونه ای از قطعه بندی فازی با استناد به اندازه گیری تشابه فازی بین دو رنگ مشاهده می‌شود. چون قطعه بندی تصویر مربوط به موضوع بحث بنده نیست، بنابراین از توضیح آن صرف نظر کرده و برای اطلاعات بیشتر منبع [۱۸] را پیشنهاد می‌کنم.



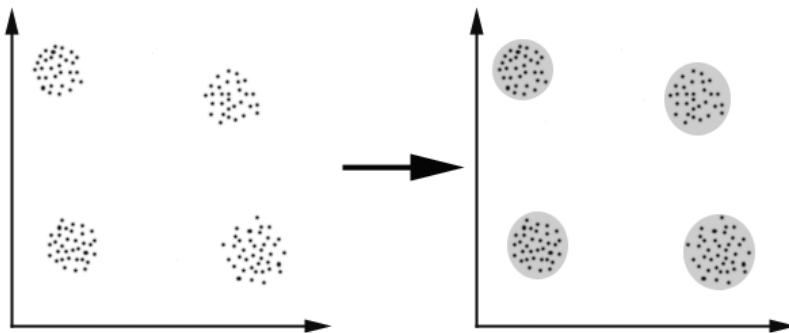
شکل ۱۰-۳: قطعه بندی تصویر بر مبنای تشابه فازی بین دو رنگ فازی

فصل چهارم

استفاده از خوشه بندی و
دسته بندی فازی در رنگ
فازی

۱-۴ خوشه بندی

خوشه بندی فرآیند خودکاری است که در طی آن، نمونه‌ها به دسته‌هایی که اعضای آن مشابه یکدیگر هستند، تقسیم می‌شوند که به این دسته‌ها، خوشه^{۵۴} گفته می‌شود. بنابراین خوشه مجموعه ای از اشیاء است که در آن اشیاء با یکدیگر مشابه بوده و با اشیاء موجود در خوشه های دیگر غیر مشابه می‌باشند. برای مشابه بودن می‌توان معیارهای مختلفی را در نظر گرفت. مثلاً می‌توان معیار فاصله را برای خوشه بندی مورد استفاده قرار داد و اشیائی را که به یکدیگر نزدیک‌تر هستند را به عنوان یک خوشه در نظر گرفت که به این نوع خوشه بندی، خوشه بندی مبتنی بر فاصله^{۵۵} نیز گفته می‌شود. به عنوان مثال در شکل ۱-۴ نمونه های ورودی در سمت چپ به چهار خوشه مشابه شکل سمت راست تقسیم می‌شوند. در این مثال هر یک از نمونه های ورودی به یکی از خوشه‌ها تعلق دارد و نمونه ای وجود ندارد که متعلق به بیش از یک خوشه باشد [۲۱].



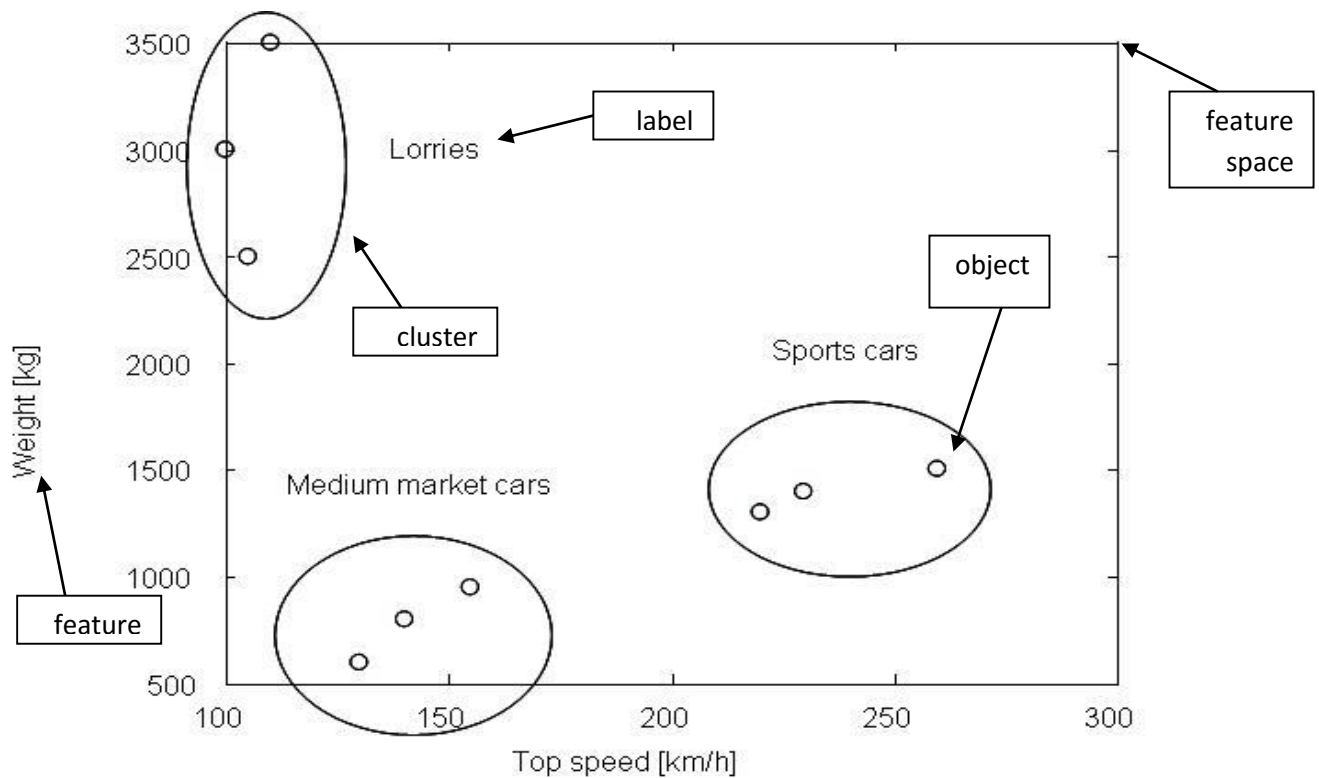
شکل ۱-۴: خوشه بندی نمونه های ورودی

به عنوان یک مثال دیگر شکل ۲-۴ را در نظر بگیرید در این شکل هر یک از دایره های کوچک یک وسیله نقلیه (شیء) را نشان می‌دهد که با ویژگی‌های وزن و حداکثر سرعت مشخص شده‌اند. هر یک

⁵⁴ Cluster

⁵⁵ Distance-based Clustering

از بیضی‌ها یک خوشه هستند و عبارت کنار هر بیضی برچسب آن خوشه را نشان می‌دهد. کل دستگاه مختصات که نمونه‌ها در آن نشان داده شده‌اند را فضای ویژگی می‌گویند.



شکل ۴-۲: خوشه بندی وسایل نقلیه

همان طور که در شکل ۴-۲ می‌بینید [۲۱] وسایل نقلیه به سه خوشه تقسیم شده‌اند. برای هر یک از این خوشه‌ها می‌توان یک نماینده در نظر گرفت مثلاً می‌توان میانگین وسایل نقلیه باری را محاسبه کرد و به عنوان نماینده خوشه وسایل نقلیه باری معرفی نمود. در واقع الگوریتم‌های خوشه بندی اغلب بدین گونه‌اند که یک سری نماینده اولیه برای نمونه های ورودی در نظر گرفته می‌شود و سپس از روی میزان تشابه نمونه‌ها با این نماینده‌ها مشخص می‌شود که نمونه به کدام خوشه تعلق دارد و بعد از این مرحله نماینده های جدید برای هر خوشه محاسبه می‌شود و دوباره نمونه‌ها با این نماینده‌ها

مقایسه می‌شوند تا مشخص شود که به کدام خوشه تعلق دارند و این کار آنقدر تکرار می‌شود تا زمانی که نماینده های خوشه‌ها تغییری نکنند.

خوشه بندی با طبقه بندی^{۵۶} متفاوت است. در طبقه بندی نمونه های ورودی برچسب گذاری شده‌اند ولی در خوشه بندی نمونه های ورودی دارای برچسب اولیه نمی‌باشند و در واقع با استفاده از روش‌های خوشه بندی است که داده های مشابه مشخص و به طور ضمنی برچسب گذاری می‌شوند. در واقع می‌توان قبل از عملیات طبقه بندی داده‌ها یک خوشه بندی روی نمونه‌ها انجام داد و سپس مراکز خوشه های حاصل را محاسبه کرد و یک برچسب به مراکز خوشه‌ها نسبت داد و سپس عملیات طبقه بندی را برای نمونه های ورودی جدید انجام داد. هدف خوشه بندی یافتن خوشه های مشابه از اشیاء در بین نمونه های ورودی است اما چگونه می‌توان گفت که یک خوشه بندی مناسب است و دیگری مناسب نیست؟ می‌توان نشان داد که هیچ معیار مطلق برای بهترین خوشه بندی وجود ندارد بلکه این بستگی به مسئله و نظر کاربر دارد که باید تصمیم بگیرد که آیا نمونه‌ها به درستی خوشه بندی شده‌اند یا خیر. با این حال معیار های مختلفی برای خوب بودن یک خوشه بندی ارائه شده است که می‌تواند کاربر را برای رسیدن به یک خوشه بندی مناسب راهنمایی کند. یکی از مسایل مهم در خوشه بندی انتخاب تعداد خوشه‌ها می‌باشد. در بعضی از الگوریتم‌ها تعداد خوشه‌ها از قبل مشخص شده است و در بعضی دیگر خود الگوریتم تصمیم می‌گیرد که داده‌ها به چند خوشه تقسیم شوند. برای خوشه بندی روش‌های مختلفی وجود دارد که از آن جمله می‌توان الگوریتم خوشه بندی داده‌ها k-میانگین^{۵۷} و الگوریتم خوشه بندی فازی c- میانگین^{۵۸} [۲۲] را نام برد. برای مثال در تصاویر رنگی، در الگوریتم k-میانگین جهت خوشه بندی پیکسل‌های یک تصویر، با توجه به معیار شباهت، هر پیکسل تنها به یک رده تعلق خواهد داشت. بدین معنی که احتمال عضویت هر پیکسل به یک کلاس قطعی بوده و نمی‌تواند به کلاس دیگری وابسته باشد. اما در الگوریتم فازی هر پیکسل دارای وابستگی

⁵⁶ Classification

⁵⁷ K-means

⁵⁸ Fuzzy C-means

قطعی به یک رده نبوده و معیار عضویت فازی برای آن تعریف می‌شود، که در بخش ۴-۲ توضیح داده می‌شود [۲۱].

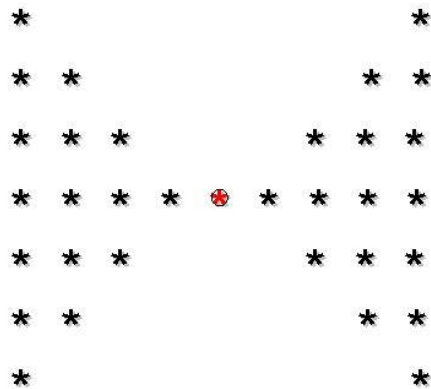
۴-۲ خوشه بندی فازی

در فصل اول تا حدودی منطق فازی و روابط فازی مورد بررسی قرار گرفت. در واقع همان طور که می‌دانیم برای مثال در مجموعه های کلاسیک یک عضو از مجموعه مرجع یا عضوی از مجموعه A است یا عضو مجموعه A نیست. مثلاً مجموعه مرجع اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. عدد $2/5$ عضو مجموعه اعداد صحیح نمی‌باشد حال آنکه عدد 2 عضو این مجموعه است. به زبان دیگر تعلق عدد $2/5$ به مجموعه اعداد صحیح 0 است و تعلق عدد 2 به این مجموعه 1 است. در واقع می‌توان برای هر مجموعه یک تابع تعلق تعریف کرد که مقدار این تابع تعلق برای اعضای مجموعه 1 می‌باشد و برای بقیه 0 است. در مجموعه های کلاسیک مقدار این تابع تعلق یا 0 است یا 1 . حال مجموعه انسان‌های جوان و پیر را در نظر بگیرید. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا فردی با سن 25 جزء این مجموعه است یا خیر؟ سن 30 چطور؟ 35 ؟ همان طور که حدس زدید نمی‌توان به طور قطع و یقین مرزی برای انسان‌های جوان و پیر در نظر گرفت. دلیل آن هم این است که اگر فرضاً 35 جوان محسوب شود 36 نیز می‌تواند جوان باشد و همین طور 37 و 38 و غیره. در واقع در اینجا با مفهوم عدم قطعیت^{۵۹} مواجه هستیم. ما خودمان نیز از عدم قطعیت در زندگی روزمره بارها استفاده کرده‌ایم مثلاً هوای سرد، آب داغ و غیره. در واقع تمامی مثال‌های بالا مثال‌هایی از مجموعه های فازی می‌باشند.

در خوشه بندی کلاسیک هر نمونه ورودی متعلق به یک و فقط یک خوشه است و نمی‌تواند عضو دو خوشه و یا بیشتر باشد. مثلاً در شکل ۴-۲ هر یک از وسایل نقلیه عضو یک خوشه می‌باشد و نمونه ای عضو دو خوشه نیست و به زبان دیگر خوشه‌ها همپوشانی ندارند. حال حالتی را در نظر بگیرید که

⁵⁹ Uncertainty

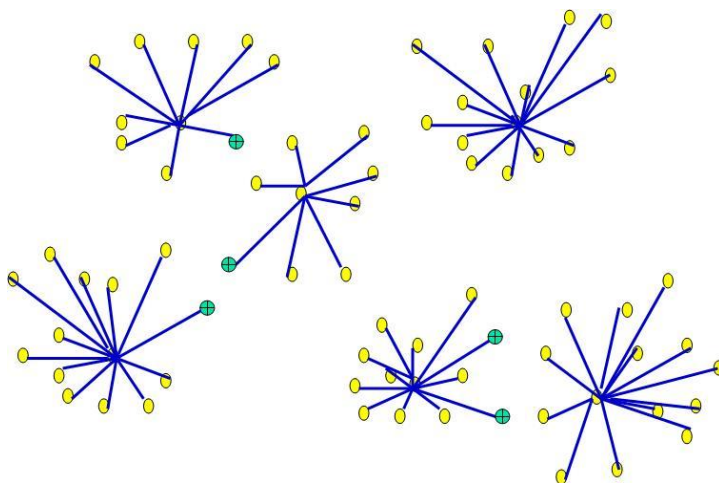
میزان تشابه یک نمونه با دو خوشه و یا بیشتر یکسان باشد در خوشه بندی کلاسیک باید تصمیم گیری شود که این نمونه متعلق به کدام خوشه است. تفاوت اصلی خوشه بندی کلاسیک و خوشه بندی فازی در این است که یک نمونه می تواند متعلق به بیش از یک خوشه باشد. برای روشن شدن مطلب شکل ۳-۴ را در نظر بگیرید [۲۱]:



شکل ۳-۴: مجموعه داده پروانه ای

اگر نمونه های ورودی مطابق شکل ۳-۴ باشند، مشخص است که می توان داده ها را به دو خوشه تقسیم کرد اما مشکلی که پیش می آید این است که داده مشخص شده در وسط می تواند عضو هر دو خوشه باشد، بنابراین باید تصمیم گرفت که داده مورد نظر متعلق به کدام خوشه است، خوشه سمت راست یا خوشه سمت چپ. اما اگر از خوشه بندی فازی استفاده کنیم داده مورد نظر با تعلق ۰/۵ عضو خوشه سمت راست و با تعلق مشابه عضو خوشه سمت چپ است. تفاوت دیگر در این است که مثلاً نمونه های ورودی در سمت راست شکل ۳-۴ می توانند با یک درجه تعلق خیلی کم عضو خوشه سمت چپ نیز باشند که همین موضوع برای نمونه های سمت چپ نیز صادق است.

به عنوان یک مثال دیگر شکل ۴-۴ را در نظر بگیرید. در این شکل نمونه هایی که با علامت بعلاوه مشخص شده اند به بیش از یک خوشه تعلق دارند [۲۱].



شکل ۴-۴: خوشه بندی فازی داده

۴-۲-۱ الگوریتم خوشه بندی c- میانگین:

در این الگوریتم نیز تعداد خوشه‌ها (c) از قبل مشخص شده است. تابع هدفی که برای این الگوریتم تعریف شده است به صورت رابطه ۴-۱ می‌باشد:

$$J = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n u_{ik}^m d_{ik}^2 = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n u_{ik}^m \|x_k - v_i\|^2 \quad (4-1)$$

در فرمول فوق m یک عدد حقیقی بزرگتر از ۱ است که در اکثر موارد برای m عدد ۲ انتخاب می‌شود. x_k نمونه k ام است و v_i نماینده یا مرکز خوشه i ام است. u_{ik} میزان تعلق نمونه i ام در خوشه k ام را نشان می‌دهد. علامت $\|*\|$ میزان تشابه (فاصله) نمونه با مرکز خوشه می‌باشد که می‌توان از هر تابعی که بیانگر تشابه نمونه و مرکز خوشه باشد را استفاده کرد. از روی u_{ik} می‌توان یک ماتریس U تعریف کرد که دارای c سطر و n ستون باشد و مؤلفه‌های آن هر مقداری بین ۰ تا ۱ را بتوانند اختیار کنند. اگر تمامی مؤلفه‌های ماتریس U به صورت ۰ و ۱ باشند الگوریتم مشابه c میانگین کلاسیک خواهد بود. با اینکه مؤلفه‌های ماتریس U می‌توانند هر مقداری بین ۰ تا ۱ را اختیار کنند، اما مجموع مؤلفه‌های هر یک از ستون‌ها باید برابر ۱ باشد و داریم:

$$\sum_{i=1}^c u_{ik} = 1, \forall k = 1, \dots, n$$

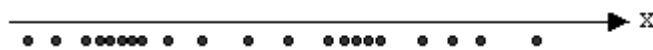
معنای این شرط این است که مجموع تعلق هر نمونه به c خوشه باید برابر ۱ باشد. با استفاده از شرط فوق و مینیمم کردن تابع هدف رابطه ۲-۴ برقرار است:

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^n u_{ik}^m x_k}{\sum_{k=1}^n u_{ik}^m} \quad u_{ik} = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left(\frac{d_{ik}}{d_{jk}} \right)^{2/(m-1)}} \quad (2-4)$$

مراحل الگوریتم:

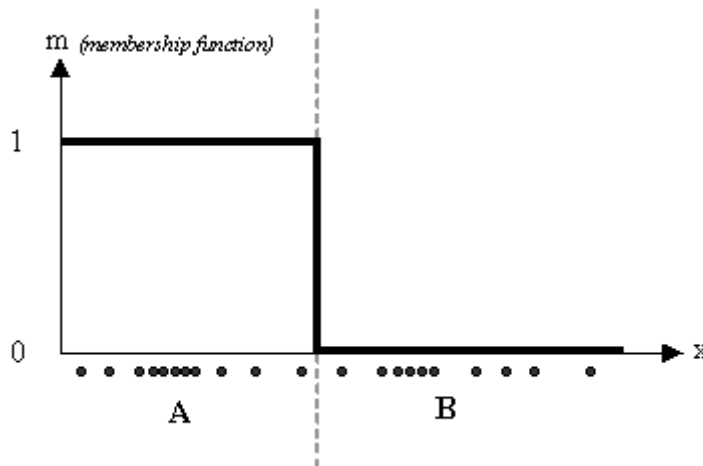
۱. مقدار دهی اولیه برای c, m و U^0 . خوشه های اولیه حدس زده شوند.
۲. مراکز خوشه ها محاسبه شوند (محاسبه v_i ها).
۳. محاسبه ماتریس تعلق از روی خوشه های محاسبه شده در ۲.
۴. اگر $\|U_{i+1} - U_i\| \leq \epsilon$ الگوریتم خاتمه می یابد و در غیر این صورت برو به مرحله ۲.

برای مشاهده عملکرد خوشه بندی فازی به مثال زیر توجه کنید. در شکل ۴-۵ یک توزیع یک بعدی از نمونه های ورودی آورده شده است [۲۳].



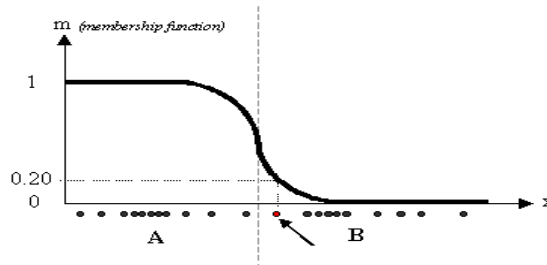
شکل ۴-۵: توزیع یک بعدی نمونه ها

اگر از الگوریتم c میانگین کلاسیک استفاده کنیم داده های فوق به دو خوشه مجزا تقسیم خواهند شد و هر نمونه تنها متعلق به یکی از خوشه ها خواهد بود. به عبارت دیگر تابع تعلق هر نمونه مقدار ۰ یا ۱ خواهد داشت. نتیجه خوشه بندی کلاسیک مطابق شکل ۴-۶ است [۲۳]:



شکل ۴-۶: خوشه بندی کلاسیک نمونه های ورودی

شکل ۴-۶ تابع تعلق مرتبط با خوشه A را نشان می‌دهد. تابع تعلق خوشه B متمم تابع تعلق A می‌باشد. همان طور که مشاهده می‌کنید نمونه های ورودی تنها به یکی از خوشه‌ها تعلق دارند و به عبارت دیگر ماتریس U به صورت دودویی است. حال اگر از خوشه بندی فازی استفاده شود، شکل ۴-۷ را خواهیم داشت [۲۳]:



شکل ۴-۷: خوشه بندی فازی نمونه‌ها

مشاهده می‌شود که در این حالت منحنی تابع تعلق هموارتر است و مرز بین خوشه‌ها به طور قطع و یقین مشخص نشده است. به عنوان مثال نمونه ای که با پیکان مشخص شده است با درجه تعلق 0.2 به خوشه A و با درجه تعلق 0.8 به خوشه B نسبت داده شده است.

نقاط قوت الگوریتم c میانگین فازی:

- همیشه همگرا می‌شود.

- بدون نظارت بودن الگوریتم.

نقاط ضعف الگوریتم c میانگین فازی:

- زمان محاسبات زیاد است.

- حساس به حدس‌های اولیه می‌باشد و ممکن است در مینیمم‌ها متوقف شود.

اگر معیار تشابه در تابع هدف بر اساس فاصله تعریف شود می‌توان از تعاریف مختلفی که در مورد

فاصله وجود دارد استفاده کرد که در جدول ۴-۱ چند نمونه از این توابع آورده شده است [۲۳]:

جدول ۴-۱: معیارهای تشابه بر اساس توابع فاصله مختلف

Distance Function	Formula and Comments
Euclidean distance	$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$
Hamming (city block) distance	$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i - y_i $
Tchebyshev distance	$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i=1,2,\dots,n} x_i - y_i $
Minkowski distance	$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^p}, p > 0$
Canberra distance	$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{ x_i - y_i }{x_i + y_i}, x_i \text{ and } y_i \text{ are positive}$
Angular separation	$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \right]^{1/2}}$

۳-۴ خوشه بندی رنگ فازی بر مبنای تشابه hsl

الگوریتم خوشه بندی رنگ نقش مهمی در تحلیل تصویر دارد. نتایج به دست آمده بسیار به سیستم مختصاتی و توابع تشابه (عدم تشابه) برای تجزیه رنگ وابسته هستند. در این بخش سعی خواهد شد که یک اندازه جدید برای تشابه رنگ که بر مبنای سیستم ادراکی HSL است، تعریف شود و با استفاده از این اندازه، یک الگوریتم برای خوشه بندی فازی رنگ ساخته شود.

قبلاً گفته شد که تبدیلات مختلفی برای فضای HSI (مشابه HSL) ارائه شده‌اند که هر کدام در کاربرد خاصی، عمل کرد بهتری دارد. حال فرمول ۳-۴ را برای بیان مؤلفه های HSL در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} L = \frac{M}{1+M-m} \\ S = \frac{2.(M-m)}{1+|M-0.5|+|m-0.5|} \\ h = a \tan 2 \left(\frac{B-G}{\sqrt{2}}, \frac{2R-B-G}{\sqrt{6}} \right) \end{cases} \quad (3-4)$$

که در آن

$$\begin{aligned} M &= \max(R, G, B) \\ m &= \min(R, G, B) \end{aligned}$$

فرض می‌شود $R, G, B \in [0, 1]$. مطابق با این فرمول نتیجه می‌شود که $L, S \in [0, 1]$ و $h \in (-\pi, \pi]$

برای داشتن یک واحد دقیق از سه جزء رنگ HSL، روشنایی L و اشباع S را از $[0, 1]$ به $[0, \frac{\pi}{2}]$ با

فرمول ۴-۴ مقیاس گذاری می‌شود.

$$\begin{cases} l = \frac{\pi}{2}.L \\ s = \frac{\pi}{2}.S \end{cases} \quad (4-4)$$

بنابراین، هر رنگ q از فضای RGB در فضای HSL نمایش ۴-۵ را خواهد داشت.

$$\begin{cases} l = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{M}{1+M-m} \\ s = \pi \cdot \frac{M-m}{1+|M-0.5|+|m-0.5|} \\ h = a \tan 2 \left(\frac{B-G}{\sqrt{2}}, \frac{2R-B-G}{\sqrt{6}} \right) \end{cases} \quad (۵-۴)$$

۴-۳-۱ فواصل و تشابه برای مقادیر HSL

برای دو مقدار زاویه‌ای α و β یک اندازه برای فاصله، بر مبنای تابع سینوسی است، بدین معنی که:

$$d(\alpha, \beta) = \left| \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right| \quad (۶-۴)$$

بنابراین، برای فام، فاصله به وسیله تابع داده شده ۴-۷ است:

$$d_h(h_1, h_2) = \left| \sin \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \right) \right| \quad (۷-۴)$$

با استفاده از فرمول ۴-۷ برای s و روشنایی ۱ مقادیرشان در بازه $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ به دست می‌آیند، زیرا

$l, s \in [0, \frac{\pi}{2}]$. بنابراین، با ضرب فرمول ۴-۶ در $\sqrt{2}$ ، مقادیرشان در بازه کلی $[0, 1]$ به دست خواهد

آمد. در این روش، فاصله برای روشنایی و اشباع به صورت ۴-۸ و ۴-۹ تعریف خواهد شد:

$$d_l(l_1, l_2) = \sqrt{2} \cdot \left| \sin \left(\frac{l_1 - l_2}{2} \right) \right| \quad (۸-۴)$$

$$d_s(s_1, s_2) = \sqrt{2} \cdot \left| \sin \left(\frac{s_1 - s_2}{2} \right) \right| \quad (۹-۴)$$

در اینجا، مربع فاصله یک اندازه خوبی از عدم تشابه است و منفی عدم تشابه اندازه خوبی برای تشابه است. به عبارت دیگر، اگر d فاصله باشد و σ تشابه باشد، در این صورت رابطه ۴-۱۰ بین آن‌ها وجود دارد:

$$\sigma = 1 - d^2 \quad (10-4)$$

با داشتن تعاریف فاصله و روابط مثلثاتی، تابع تشابه برای روشنایی و اشباع به صورت رابطه ۴-۱۱ تعریف خواهد شد:

$$\begin{aligned} \sigma_l(l_1, l_2) &= 1 - d_l^2(l_1, l_2) = \cos(l_1 - l_2) \\ \sigma_s(s_1, s_2) &= 1 - d_s^2(s_1, s_2) = \cos(s_1 - s_2) \end{aligned} \quad (11-4)$$

بنابراین برای فام رابطه ۴-۱۲ را داریم:

$$\sigma_h(h_1, h_2) = 1 - d_h^2(h_1, h_2) = \cos^2\left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right) \quad (12-4)$$

۲-۳-۴ تشابه رنگ HSL

در ابتدا رنگ پذیری c^60 و رنگ ناپذیری a^61 برای یک رنگ به عنوان مقدار اشباع s تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} c = \sin(s) \\ a = \cos(s) \end{cases} \quad (13-4)$$

رابطه ۴-۱۴ بین این دو پارامتر تعریف شده واضح است:

$$a^2 + c^2 = 1 \quad (14-4)$$

⁶⁰ chromaticity
⁶¹ achromaticity

به دو رنگ q_1 و q_2 تعریف شده به وسیله پارامترهای (h_1, s_1, l_1) و (h_2, s_2, l_2) توجه کنید. به این پارامترها ضرایب رنگی c_1 و c_2 و ضرایب بی رنگی a_1 و a_2 محاسبه شده به وسیله فرمول ۳-۱۳ افزوده خواهد شد.

حال تشابه بین دو رنگ با فرمول ۴-۱۵ تعریف می‌شود.

$$\sigma(q_1, q_2) = c_1 c_2 \cdot \sigma_h(h_1, h_2) + a_1 a_2 \cdot \sigma_l(l_1, l_2) \quad (15-4)$$

فرمول ۴-۱۵ تذکر می‌دهد که این اندازه تشابه رنگ جدید، یک ترکیب خطی و تطابق پذیر بین تشابه فام و تشابه روشنایی است. بنابراین برای دو رنگ کروماتیک، مفهوم اصلی به وسیله تشابه فام داده شده است و برای دو رنگ آکروماتیک مفهوم اصلی به وسیله تشابه روشنایی داده شده است. می‌توان دید زمانی که یک رنگ کروماتیک و دیگری آکروماتیک است، تشابه مقادیر کوچک‌تری دارد. این چیزی نیست جز این که دو رنگ مورد نظر، کاملاً نامشابه اند. همچنین می‌توان دید که در فرمول ۴-۱۵ تشابه اشباع به طور مستقیم به دست نمی‌آید، ولی یک جایی در پس زمینه وجود دارد.

فرمول ۴-۱۵ با رابطه ۴-۱۶ برابر است:

$$\sigma(q_1, q_2) = \sin(s_1) \cdot \sin(s_2) \cdot \cos^2\left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right) + \cos(s_1) \cdot \cos(s_2) \cdot \cos(l_1 - l_2) \quad (16-4)$$

داریم:

$$\begin{cases} \cos^2\left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right) \leq 1 \\ \cos(l_1 - l_2) \leq 1 \end{cases} \quad (17-4)$$

در نتیجه از ۴-۱۶ نابرابری ** به دست می‌آید:

$$\sigma(q_1, q_2) \leq \sin(s_1) \cdot \sin(s_2) + \cos(s_1) \cdot \cos(s_2) \quad (**)$$

بدین معنی که

$$\sigma(q_1, q_2) \leq \cos(s_1 - s_2)$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$\sigma(q_1, q_2) \leq \sigma_s(s_1, s_2) \quad (18-4)$$

فرمول ۱۸-۴ نشان می‌دهد که اگر اشباع دو رنگ یک تشابه پایین داشته باشد، آنگاه دو رنگ یک تشابه ضعیف دارند و اگر دو رنگ به طور قوی‌ای متشابه باشند آنگاه اشباعشان به طور قوی‌ای خوب است. همچنین از ۱۷-۴ و ۱۸-۴ نتایج زیر به دست می‌آید.

$$\sigma(q_1, q_2) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_h(h_1, h_2) \\ \sigma_l(l_1, l_2) \\ \sigma_s(s_1, s_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = h_2 \\ l_1 = l_2 \\ s_1 = s_2 \end{cases}$$

با استفاده از فرمول ۱۰-۴ می‌توان فاصله بین دو رنگ در فضای HSL را به شکل ۱۹-۴ تعریف کرد:

$$d(q_1, q_2) = \sqrt{1 - \sigma(q_1, q_2)} \quad (19-4)$$

می‌توان نشان داد که فرمول ۱۹-۴ یک متر را تعریف می‌کند. آن ۳ شرط متریک زیر را دارد.

- $d(q_1, q_2) = 0 \Leftrightarrow q_1 = q_2$
- $d(q_1, q_2) = d(q_2, q_1)$
- $d(q_1, q_2) + d(q_2, q_3) \geq d(q_1, q_3)$

اثبات این سه شرط، موضوع بحث ما نیست، بنابراین از آن می‌گذریم.

۳-۳-۴ الگوریتم خوشه بندی فازی رنگ

به n رنگ q_1, q_2, \dots, q_n که باید به توی k خوشه تجزیه شود، را در نظر بگیرید. هر خوشه i به وسیله ضرایب عضویت w_{i1}, \dots, w_{in} برای n رنگ مورد توجه مشخص شده است و خوشه مرکزی به وسیله رنگ $\bar{q}_i = (\bar{h}_i, \bar{s}_i, \bar{l}_i)$ تعریف شده است. برای خوشه بندی رنگ یک الگوریتم که شبیه به الگوریتم فازی c-mean است، ساخته می‌شود. باید به تابع هدف ۶۲ ۲۰-۴ توجه کرد:

$$J = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n w_{ij}^{\alpha} \cdot \sigma(\bar{q}_i, q_j) \quad (۲۰-۴)$$

که در آن α یک پارامتر فازی ساز- غیر فازی ساز است و همچنین $\alpha \in (0, 1)$. اگر α نزدیک ۱ باشد، آنگاه الگوریتم فازی نزدیک به الگوریتم قطعی است. تابع هدف J (۲۰-۴) باید ماکسیمم شود. برای داشتن تقسیم بندی فازی، باید موقعیت‌های زیر برای $j = 1, 2, \dots, n$ افزوده شود.

$$w_{1j} + w_{2j} + \dots + w_{kj} = 1 \quad (۲۱-۴)$$

در این مورد، با توجه به موقعیت ۲۱-۴ ضرایب لاگرانژ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ تابع هدف ۲۰-۴ مانند رابطه ۲۲-۴ می‌شود.

$$J = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n w_{ij}^{\alpha} \cdot \sigma(\bar{q}_i, q_j) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \left(\sum_{i=1}^k w_{ij} - 1 \right) \quad (۲۲-۴)$$

ماکسیمم مقدار تابع هدف J (۲۳-۴) از موقعیت‌های زیر نتیجه می‌شود.

$$\bullet \quad \forall i \in [1, k], \forall j \in [1, n] \quad \frac{\partial J}{\partial w_{ij}} = 0 \quad (۲۳-۴)$$

از اینجا بر می آید.

$$w_{ij} = \frac{(\sigma(\bar{q}_i, q_j))^{1-\alpha}}{\sum_{m=1}^k (\sigma(\bar{q}_m, q_j))^{1-\alpha}} \quad (24-4)$$

$$\bullet \quad \forall i \in [1, k] \quad \frac{\partial J}{\partial h_i} = 0 \quad (25-4)$$

آن نتیجه می دهد

$$\bar{h}_i = a \tan 2 \left(\frac{\sum_{j=1}^n u_{ij} \sin(h_j)}{\sum_{j=1}^n u_{ij}}, \frac{\sum_{j=1}^n u_{ij} \cos(h_j)}{\sum_{j=1}^n u_{ij}} \right) \quad (26-4)$$

$$u_{ij} = w_{ij}^\alpha c_j \quad (27-4)$$

$$\bullet \quad \forall i \in [1, k] \quad \frac{\partial J}{\partial \bar{l}_i} = 0 \quad (28-4)$$

آن نتیجه می دهد

$$\bar{l}_i = a \tan 2 \left(\frac{\sum_{j=1}^n v_{ij} \sin(l_j)}{\sum_{j=1}^n v_{ij}}, \frac{\sum_{j=1}^n v_{ij} \cos(l_j)}{\sum_{j=1}^n v_{ij}} \right) \quad (29-4)$$

که در آن

$$v_{ij} = w_{ij}^\alpha a_j \quad (30-4)$$

$$\bullet \quad \forall i \in [1, k] \quad \frac{\partial J}{\partial \bar{s}_i} = 0 \quad (31-4)$$

آن نتیجه می‌دهد

$$\bar{s}_i = a \tan 2 \left(\frac{\sum_{j=1}^n x_{ij} \sin(s_j)}{\sum_{j=1}^n w_{ij}^\alpha}, \frac{\sum_{j=1}^n y_{ij} \cos(s_j)}{\sum_{j=1}^n w_{ij}^\alpha} \right) \quad (32-4)$$

که در آن

$$\begin{cases} x_{ij} = w_{ij}^\alpha \cdot \sigma_h(\bar{h}_i, h_j) \\ y_{ij} = w_{ij}^\alpha \cdot \sigma_l(\bar{l}_i, l_j) \end{cases} \quad (33-4)$$

الگوریتم به دست آمده برای خوشه بندی فازی یک تصویر به کار می‌رود که در قطعه بندی تصویر کاربرد دارد [24].

4-4 دسته بندی و نام گذاری رنگ فازی

دسته بندی یکی از مراحل ابتدایی در ادراک و شناخت است. به طور کلی دسته بندی می‌تواند به منظور کاهش تعداد داده‌ها استفاده شود، بدین معنا که موضوعاتی که ویژگی‌هایی مشترک و نزدیک به هم دارند، باهم در داخل یک دسته قرار گیرند لذا مشخصه ای از آن دسته، نماینده موضوعات یا ویژگی‌های حاضر در میان اعضای آن می‌شود و در صورتی که عوامل محیطی مختلف بر روی آن تأثیر بگذارد، ویژگی مشترک داخل دسته به طور یکسان با نماینده دسته تغییر کنند. معنی دسته بندی رنگ، تقسیم بندی تأثیرات رنگ‌ها در طبقات متشابه (گروه‌هایی که نسبت به هم برتری خاصی ندارند و به صورت موازی در کنار هم قرار گرفته‌اند) می‌باشد به طوری که رنگ‌های قرارگرفته در یک دسته با یک لغت بیان می‌شوند و معرف چندین رنگ مشابه هستند. نام گذاری رنگ شامل تخصیص یک نام به دسته انتخاب شده ای از رنگ‌ها که دارای ویژگی مشترکی می‌باشند است. این

ویژگی‌ها بر اساس تأثیرات یک رنگ و ادراکی که افراد از آن دارند، آن را نام گذاری می‌کند. این تعریف ممکن است ساده و گویا به نظر بیاید ولی ادراک افراد برای نام گذاری رنگ‌ها ساده نمی‌باشد. این پیچیدگی، به خاطر تعریف رنگ با سه مشخصه فام، روشنایی و اشباع است که در یک فضای سه بعدی پیوسته، قابل تغییر هستند. افراد با نام گذاری قسمت‌های مختلف این فضای پیوسته سه بعدی آن‌ها را به دسته‌هایی تبدیل می‌کنند که معمولاً مشخصه هر دسته، یک عنوان است [۲۵].

۴-۴-۱ دسته بندی فضای رنگ به مجموعه فازی

کی^{۶۳} و مک دنیل^{۶۴} فضای رنگ را به بخش‌های فازی تقسیم بندی کردند، بدین معنا که دسته های رنگ به صورت تکی، جزء مجموعه های فازی هستند. بر این اساس، دسته های رنگ اولیه به سه دسته تقسیم شدند. دسته اول شامل ۶ رنگ بنیادی (اولیه های هرینگ^{۶۵}) بوده و عبارتند از: سیاه، سفید، زرد، سبز، آبی و قرمز. دسته های اولیه هرینگ از دو جفت رنگ کروماتیک قرمز- سبز و زرد- آبی و یک جفت رنگ آکروماتیک سفید- سیاه تشکیل شده‌اند. این دسته‌ها به عنوان دسته های اصلی^{۶۶} شناخته می‌شوند. دسته دوم شامل پیوندهای بنیادی فازی بوده، و به دسته های ترکیبی^{۶۷} معروف است. این گروه شامل سیستم‌های دوتایی سفید/گرم و سیاه/ سرد می‌شوند، همچنین برخی از دسته‌ها حاصل ترکیب دو رنگ از ۶ رنگ اصلی (اولیه های هرینگ) می‌باشند. برای مثال دسته ترکیبی سبز/ آبی بیانگر این موضوع می‌باشد که محدوده رنگ آبی و سبز در آن زبان با یک نام بیان می‌شود. دسته سوم فصل مشترک منطق فازی اولیه های هرینگ می‌باشد و به دسته های منشعب^{۶۸} معروف است. رنگ‌هایی از مخلوط دو رنگ از ۶ رنگ اولیه هرینگ، جزء این دسته می‌باشند. این دسته‌ها در اکثر موارد بعد از دسته های ترکیبی ظاهر می‌شوند، برای مثال رنگ نارنجی از مخلوط دو رنگ قرمز و زرد پدید می‌آید. مراحل تکاملی با فرض این که معمولاً همه دسته های ترکیبی قبل از

⁶³ Kay

⁶⁴ McDaniel

⁶⁵ Hering's primaries

⁶⁶ Fundamental categories

⁶⁷ Composite categories

⁶⁸ Derived categories

ظاهر شدن دسته های منشعب حذف می‌شوند، تعریف شد. برای مثال، معمولاً هیچ قهوه ای، بنفش یا هر دوی آن‌ها قبل از مخلوط‌های سبز/آبی، در یک زبان ظاهر نمی‌شوند [۲۵].

در نام گذاری رنگ، می‌توان توجه کرد که هر گروه رنگ، C_k ، یک مجموعه فازی با یک تابع عضویت f_{C_k} است، که برای هر رنگ نمونه x یک مقدار عضویت $f_{C_k}(x)$ در بازه $[0,1]$ تعیین می‌کند. این مقدار نشان می‌دهد که اطمینانی که درباره‌ی x وجود دارد، باید با عبارت زبان شناختی t_k ، مطابق با گروه C_k نام گذاری شود. از این رو، اولین مرحله از هر فرایند مدل بندی نام گذاری رنگ، تعریف توابع عضویت برای هر گروه رنگی خواهد شد. یک توصیف گر رنگ^{۶۹} $CD(x)$ مانند رابطه ۳-۳۴ است:

$$CD(x) = (f_{C_1}(x), \dots, f_{C_n}(x)) = (m_1, \dots, m_n) \quad (۳۴-۴)$$

$$m_k \in [0,1] \quad \forall k = 1, \dots, n \quad , \quad \sum_k m_k = 1$$

که در آن

$CD(x)$ رابطه عضویت x به هر گروه رنگی را توصیف می‌کند، m_k مقدار معین متناظر با x به وسیله f_{C_k} و n تعداد گروه های مورد توجه است. $n=11$ در نظر گرفته می‌شود و گروه های مورد نظر در مدل را مطابق با یازده عبارت رنگی پیشنهاد شده به وسیله برلین^{۷۰} و کی قرار داده می‌شود که

$$t_k \in \{ \text{سفید، سیاه، قرمز، سبز، زرد، آبی، قهوه ای، ارغوانی، صورتی، نارنجی و خاکستری} \} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

است. بنابراین توصیف گر رنگ $CD(x)$ تعریف شده بالا یک بردار از یازده مؤلفه است و اطلاعات مشمول در چنین توصیف گری می‌تواند به وسیله یک تابع تصمیم $N(x)$ برای تصمیم گیری نام

⁶⁹ color descriptor

⁷⁰ Berlin

رنگ از یک محرک x ⁷¹ داده شده، استفاده شود. آسان‌ترین قاعده تصمیم انتخاب ماکسیمم مقدار از

$CD(x)$ توسط رابطه (۳۵-۴) است [۲۶].

$$N(x) = \{t_k \mid m_k = \max_{i=1, \dots, 11} f_{C_i}(x)\} \quad (۳۵-۴)$$

فصل پنجم

رنگ آمیزی فازی

در این فصل موضوع رنگ آمیزی فازی گراف‌ها و گراف‌های فازی مطرح می‌شود. در بخش ۵-۱ رنگ-آمیزی گراف با رنگ‌هایی که ماهیت فازی دارند و در بخش‌های بعدی رنگ‌آمیزی فازی گراف‌های فازی نیز مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۵-۱ رنگ آمیزی فازی گراف با رنگ‌های فازی

در این بخش به رنگ‌آمیزی مجاز گراف با رنگ‌های فازی با استفاده از روش‌های پیشنهادی پرداخته می‌شود. در این رابطه سه مدل رنگ آمیزی به شرح ذیل پیشنهاد می‌شود.

۱- مدل رنگ‌آمیزی فازی گراف با مجموعه رنگ‌های فازی

۲- مدل رنگ‌آمیزی فازی گراف با استفاده از طیف یک رنگ فازی

۳- مدل رنگ‌آمیزی فازی گراف با استفاده از تشابه فازی رنگ‌ها

مدل رنگ‌آمیزی فازی گراف با مجموعه رنگ‌های فازی:

منظور از این نوع رنگ‌آمیزی گراف، اختصاص رنگ‌های فازی به جای رنگ‌های قطعی به رئوس گراف است. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد. اگر $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, K\}$ یک رنگ آمیزی مجاز برای رنگ کردن گراف با رنگ‌های ۱ تا K باشد، آنگاه می‌توان در $\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_K\}$ را یک رنگ آمیزی فازی مجاز با رنگ‌های فازی $\tilde{f}: V(G) \rightarrow \{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_K\}$ نظر گرفت. در این نوع رنگ‌آمیزی هر رنگ اختصاص یافته عضوی از مجموعه $\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_K\}$ است که خود یک مجموعه فازی است.

مدل رنگ‌آمیزی فازی گراف با استفاده از طیف یک رنگ فازی:

فرض کنیم مجموعه نرمال فازی $\tilde{C} = \{(c_1, \mu_{\tilde{C}}(c_1)), (c_2, \mu_{\tilde{C}}(c_2)), \dots, (c_k, \mu_{\tilde{C}}(c_k))\}$ مجموعه طیفی رنگ c باشد به طوری که $\mu_{\tilde{C}}(c) = 1$. منظور از مدل رنگ‌آمیزی فازی گراف با استفاده از طیف یک

رنگ فازی، اختصاص دو عضو c_i و c_j به دو رأس مجاور در گراف $G = (V, E)$ است، اگر و تنها اگر $L := |\mu_{\tilde{C}}(c_i) - \mu_{\tilde{C}}(c_j)| > \beta$ به طوری که $\beta \in [0, 1]$ و انتخاب β بر عهده فرد خبره باشد. یعنی این که دو رأس مجاور از یک گراف دلخواه را می توان توسط دو رنگ نزدیک به رنگ c ، رنگ آمیزی کرد، هرگاه اختلاف مقادیر تابع عضویت بین دو رنگ بیشتر از β باشد.

در این روش فقط به رنگ آمیزی گراف با یک رنگ می پردازیم. این بدان معنا است که رنگ های نزدیک به یک رنگ را در نظر گرفته و رئوس مربوط به گراف را به صورت دلخواه با آن رنگ ها، رنگ می کنیم. رنگ های نزدیک به یک رنگ دلخواه مانند قرمز، تشکیل یک مجموعه فازی با مقادیر توابع عضویت معینی را می دهند. بنابراین رنگ دلخواه، یک رنگ فازی یا به طور دقیق تر یک مجموعه رنگ فازی با اعضایی که خود رنگ فازی هستند را تشکیل می دهد.

تعریف ۵-۱-۱: اگر $X = \{c_1, c_2, \dots, c_k\} = \{\text{طیف رنگ } c\}$ ، مجموعه رنگ فازی به صورت $\{\text{رنگ های تقریباً به رنگ } c\} = \tilde{C}$ تعریف شود به طوری که برای یک $c \in X$ داشته باشیم $\mu_{\tilde{C}}(c) = 1$ ، آنگاه c یک رنگ قطعی است و بقیه رنگ ها تقریباً شبیه این رنگ هستند.

تعریف ۵-۱-۲: رنگ آمیزی فازی گراف $G = (V, E)$ ، هم رنگ آمیزی نامیده می شود اگر بتوان رئوس گراف را با فقط یک رنگ، رنگ آمیزی کرد.

در منبع [۲۷] یک نوع تابع عضویت برای رنگ فازی تعریف شده است. این تابع عضویت رنگ فازی را در فضای رنگ CIELAB بررسی می کند [۱۳]. این فضا برای نمایش قابلیت درک تفاضل رنگ از میان فواصل اقلیدسی، استفاده شده است. در این فضا هر رنگ c_k ، به عنوان یک مجموعه فازی \tilde{C}_k تعریف می شود. برای مثال برای رنگ قرمز $c_k = \text{رنگ قرمز}$ مجموعه فازی $\{\text{رنگ های تقریباً به رنگ قرمز}\} = \tilde{C}_k$ تعریف می شود. برای هر رنگ احتمالی c از فضای رنگی، درجه عضویت مجموعه فازی \tilde{C}_k ، $\mu_{\tilde{C}_k}(c)$ است و اعتبار رنگ c را نسبت به رنگ c_k نشان می دهد و این به معنی تشابه ادراکی است. فاصله

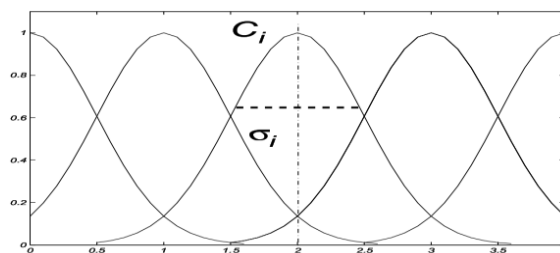
درون رنگ ادراکی در این فضا به وسیله فاصله اقلیدسی $d = \|c_k - c\|$ اندازه گیری شده است. پس تابع عضویت (۱-۵) در نظر گرفته می شود:

$$\mu_{\tilde{c}_k}(c) = \begin{cases} 1, & \text{if } d \leq JND \\ \exp\left(-\frac{(d/JND - 1)^2}{2\alpha^2}\right) & 0w \end{cases} \quad (1-5)$$

که در این جا JND تفاوت قابل ملاحظه رنگ تعریف می شود و مقداری برابر با ۲/۳ دارد. انتخاب ۱ برای عدد فازی بالا مطابق با رنگ های به نظر مشابه می باشد (در فاصله کمتر از JND قرار گرفته اند) و اگر آن ها به وسیله بیشتر از JND جدا شده باشند، تابع عضویت مورد نظر یک مدل گوسی هموار می شود که در این صورت اعتبار رنگ c به عنوان تقریبی از c_k کاهش می یابد [۲۷]. اگر A_i مجموعه فازی باشد در واقع تابع عضویت گوسی به صورت رابطه (۲-۵) تعریف می شود:

$$\mu_{A_i}(x) = \exp\left(-\frac{(c_i - x)^2}{2\sigma_i^2}\right), \quad (2-5)$$

که در آن c_i مرکز و σ_i پهنای مجموعه فازی A_i است. شکل (۱-۵) را ببینید [۲۸].



شکل ۱-۵: مجموعه فازی گوسی. c_i مرکز و σ_i پهنای آن را نشان می دهد.

فرض کنید تابع عضویت (۱-۵) برای رنگ های فازی مورد نظرمان به کار رود. بنابراین اگر $c(i)$ رنگ اختصاص داده شده به رأس $i \in V$ باشد و $\mu_{\tilde{c}_k}(c(i))$ برای دو رنگ از مجموعه رنگ فازی \tilde{C}_k ، ۱ شود، دو رنگ به ظاهر متشابه اند و نمی توان دو رأس مجاور را با آن دو رنگ، رنگ آمیزی کرد و در

غیر این صورت رنگ آمیزی صحیح است. اما اشکال کار این است که برای مثال دو رنگ سرخابی و سرخابی سیر خیلی به هم نزدیک هستند. اگر تابع عضویت سرخابی $0/8$ و سرخابی سیر $0/9$ باشد آیا می توان گفت که دو رأس مجاور را با این دو رنگ، رنگ آمیزی کرد و آنگاه رنگ آمیزی مجاز باشد؟ واضح است که همچنین ادعایی نمی تواند صحیح باشد، بنابراین باید محدودیتی مانند β را برای این نوع رنگ آمیزی در نظر گرفت.

مثال ۵-۱-۱: گراف دلخواه $G = (V, E)$ با مجموعه رأس های V و مجموعه یال های E را در نظر بگیرید. می خواهیم این گراف را با رنگ های نزدیک به رنگ قرمز رنگ آمیزی مجاز دلخواه کنیم. فرض

کنید $\{طیف رنگ قرمز\} = \{ارغوانی=c_1, گیلای=c_2, مرجانی=c_3, صورتی=c_4, قرمز=c_5\}$ و $X = \{c_5=قرمز, c_4=صورتی, c_3=مرجانی, c_2=گیلای, c_1=ارغوانی\}$

مجموعه رنگ فازی به صورت $\tilde{C}_{red} = \sum_{i=1}^5 \frac{\mu_{\tilde{C}_{red}}(c_i)}{c_i} = \frac{0.2}{c_1} + \frac{0.7}{c_2} + \frac{0.4}{c_3} + \frac{0.6}{c_4} + \frac{1}{c_5}$ باشد و فرض

کنید توابع عضویت از رابطه ۵-۱ به دست آمده اند. در این مثال قرار دهید $\beta = 0.3$. در ابتدا اختلاف بین توابع عضویت رنگ ها را به دست آورده و سپس اگر دو رنگ دارای اختلاف بیشتر از $0/3$ باشند، می توان دو رنگ از یک مجموعه فازی را به دو رأس مجاور اختصاص داد، در غیر این صورت باید رنگ بعدی را در نظر گرفت. برای مثال داریم: $L = |\mu_{\tilde{C}_{red}}(c_1) - \mu_{\tilde{C}_{red}}(c_2)| = 0.5 > 0.3$ ، پس دو رأس مجاور را می توان با دو رنگ c_1 و c_2 از مجموعه رنگ فازی \tilde{C}_{red} رنگ آمیزی کرد ولی چون $L = |\mu_{\tilde{C}_{red}}(c_1) - \mu_{\tilde{C}_{red}}(c_3)| = 0.2 < 0.3$ نمی توان دو رأس مجاور را با دو رنگ c_2 و c_3 ، رنگ آمیزی کرد. نکته این که اگر $L=0$ باشد، دو رنگ از مجموعه رنگ فازی، هم رنگ هستند.

مدل رنگ آمیزی فازی گراف با استفاده از تشابه فازی رنگ ها

در این مدل بر مبنای تشابه فازی بین رنگ های فازی، یک گراف دلخواه را رنگ آمیزی می کنیم. در این مورد نیز محدودیتی مانند β را در نظر می گیریم.

تعریف ۳-۱-۵: فرض کنید که $A = \{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_k\}$ خانواده‌ای از رنگ‌های فازی $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_k$ باشد. منظور از رنگ‌آمیزی دلخواه گراف G ، اختصاص دو مجموعه رنگ فازی متمایز \tilde{C}_i و \tilde{C}_j از خانواده A ، به دو رأس مجاور است به شرط آنکه تشابه فازی بین دو رنگ فازی کمتر از β باشد. انتخاب β بر عهده فرد خبره است و $\beta \in [0, 1]$. در حقیقت اگر تشابه فازی بین دو رنگ فازی برابر با $sim(\tilde{C}_i, \tilde{C}_j) < \beta$ باشد، آنگاه باید $sim(\tilde{C}_i, \tilde{C}_j) < \beta$.

برای مثال تشابه فازی بین دو رنگ در فضای HSL در رابطه‌ی ۳-۱۹ را در نظر بگیرید. در مثال ۳-۱-۵، تشابه فازی بین دو رنگ $c_1 = RGB(77, 255, 51)$ و $c_2 = RGB(51, 255, 1)$ به صورت $sim(\tilde{C}_{c_1}, \tilde{C}_{c_2}) = 0.406$ است. حال اگر $\beta = 0.3$ باشد، نمی‌توان دو رأس مجاور از یک گراف دلخواه را با این دو رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. نکته این که تشابه فازی بین دو رنگ فازی وابسته به انتخاب β است.

۵-۲ رنگ آمیزی رأسی از گراف‌های فازی با استفاده از α -برش:

پیش از این با مفهوم α -برش در تعریف ۱-۲-۶ آشنا شدیم. با در نظر گرفتن تعاریف ۱-۳-۱ تا ۱-۳-۴ به بررسی مفهوم رنگ آمیزی رأسی فازی می‌پردازیم.

تعریف ۱-۲-۵: یک خانواده $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ از مجموعه‌های فازی در X یک k رنگ آمیزی فازی

از $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ نامیم اگر

$$\forall \Gamma = \sigma \quad (a)$$

$$\gamma_i \wedge \gamma_j = 0 \quad (b)$$

(c) برای هر یال قوی xy از \tilde{G} ، $\min\{\gamma_i(x), \gamma_i(y)\} = 0, (1 \leq i \leq k)$

کمترین مقدار k برای اینکه گراف فازی \tilde{G} یک k رنگ آمیزی فازی داشته باشد، عدد رنگی فازی تعریف می‌شود و آن را با $\chi^f(\tilde{G})$ نشان می‌دهیم. زمانی که σ و μ مقادیرشان را به ترتیب در $\{1\}$ و $\{0,1\}$ می‌گیرند، \tilde{G} یک گراف قطعی است. در تعریف ۵-۲-۱، قسمت c نتیجه می‌دهد که، برای هر i ، $\sup \gamma_i$ یک مجموعه مستقل در Γ است، بنابراین در این مورد، Γ شامل یک k رنگ آمیزی از گراف \tilde{G} می‌شود [۸].

مثال ۵-۲-۱: گراف فازی با مجموع رئوس $\{1,2,3,4,5\}$ را در نظر بگیرید، که رئوس و یال‌های آن با توابع عضویت $\sigma(i)$ و $\mu(ij)$ مشخص شده‌اند:

$$\sigma(i) = \begin{cases} 0.5 & i \in \{1,2,3\} \\ 0.4 & i \in \{4,5\} \end{cases}$$

$$\mu(ij) = \begin{cases} 0.5 & i \in \{12,13\} \\ 0.3 & i \in \{24,25\} \\ 0.2 & i \in \{23\} \end{cases}$$

برای گراف فازی $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ ، k -رنگ آمیزی فازی را طبق تعریف از یک رأس دلخواه شروع کرده و γ_1 را برای تمام رئوس به دست می‌آوریم و این روند را تا γ_k ادامه می‌دهیم. رئوسی که در $i = 1, \dots, k$ قرار می‌گیرند، رئوسی با رنگ آمیزی یکسان هستند. در این مثال تمام خصوصیات تعریف ۵-۲-۱ برقرار است. پس با رنگ آمیزی گراف داریم:

$$\gamma_2(x_i) = \begin{cases} 0.5 & i = 2, i = 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{و} \quad \gamma_1(x_i) = \begin{cases} 0.5 & i = 1 \\ 0.4 & i = 4, i = 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

رئوس $\{1,4,5\}$ رنگ γ_1 و رئوس $\{2,3\}$ رنگ γ_2 دارند. چون یال x_2x_3 ضعیف است پس در تعریف ۵-۲-۱ قسمت c صدق نکرده و رأس‌های x_2 و x_3 رنگ یکسان می‌گیرند، بنابراین $\chi^f(\tilde{G}) = |\gamma| = 2$. مفهوم عدد رنگی از گراف‌های فازی توسط ما نوز^{۷۲} و همکاران معرفی شد [۷]. آن‌ها تنها به گراف‌های فازی با رئوس قطعی ($\sigma(i) = 1$ برای تمام $i \in X$) و یال‌های فازی توجه کردند. فرض

⁷²Munoz

کنید $\tilde{G} = (X, \mu)$ مانند یک گراف فازی باشد، که در آن $X = \{1, 2, \dots, n\}$ و μ یک عدد فازی در مجموعه ای از تمام دو زیرمجموعه های X باشد. فرض کنید که $A = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k\}$ مجموعه ای پایه ای از \tilde{G} را نشان دهد و $I = A \cup \{0\}$. برای هر $G_\alpha, \alpha \in I$ ، گراف قطعی $G_\alpha = (X, E_\alpha)$ که در آن $E_\alpha = \{ij \mid 1 \leq i < j \leq n, \mu(ij) \geq \alpha\}$ را نشان می‌دهد و $\chi_\alpha = \chi(G_\alpha)$ عدد رنگی از گراف قطعی G_α را نشان می‌دهد. بنابراین با تعریف آن‌ها از عدد رنگی گراف فازی \tilde{G} ، عدد فازی به شرح زیر است [۷]:

$$A_\alpha = \{1, 2, \dots, \chi_\alpha\} \text{ و } v(i) = \max\{\alpha \in I \mid i \in A_\alpha\} \text{ که } \chi(\tilde{G}) = \{(i, v(i)) \mid i \in X\}$$

در تعریف ۵-۲-۱، عدد رنگی از گراف فازی \tilde{G} یک تعداد است، اما در تعریف مانوز و همکاران از یک عدد فازی استفاده می‌شود. دیدن اینکه فرض شود اگر یک گراف فازی \tilde{G} با یک مجموعه رأس‌های قطعی و مجموعه فازی از یال‌ها باشد، سپس $\alpha \in I$ وجود دارد به طوری که $\chi^f(\tilde{G}) = \chi_\alpha$ آسان است. اما در گراف فازی کلی $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ ، ممکن است که برای هر $\alpha \in I$ ، $\chi^f(\tilde{G}) \neq \chi_\alpha$ [۸].

مثال ۵-۲-۲: فرض کنید گراف فازی $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ به وسیله $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ داده شده است.

$$\mu(xy) = \begin{cases} 1, & xy \in \{12, 13\}, \\ 0.3, & xy \in \{23, 24, 25, 34, 35\}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\sigma(i) = \begin{cases} 1, & i \in \{1, 2, 3\}, \\ 0.4, & i \in \{4, 5\}, \end{cases}$$

داریم $\chi_0 = 5$ ، $\chi_0 = 3$ ، $\chi_1 = 2$ ، اما، $\chi^f(\tilde{G}) = 3$. واضح است که برای $0 \leq c \leq 1$ ، $\chi^f(\tilde{G}) = \chi_{\alpha_0}$ جایی که $\alpha_0 = \min\{\alpha \in I \mid c \leq \alpha\}$ و هرگاه تعریف یال‌های قوی این گونه تغییر کند که xy قوی است هرگاه $\mu(xy) \geq c$.

اما اگر یال قوی را این گونه تعریف شود که xy قوی است هرگاه $\mu(xy) \geq c \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ ، سپس همیشه یک گراف فازی \tilde{G} وجود دارد، به طوری که $\chi^f(\tilde{G}) \notin \{\chi_\alpha | \alpha \in I\}$ (در مثال بالا 0.3 با $(c-\varepsilon)0.4$ برای ε مثبت و به اندازه کافی کوچک جایگزین کنید) [۸].

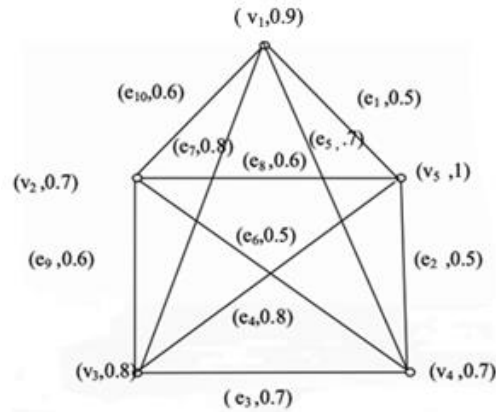
تعریف ۲-۲-۵: گراف فازی $\tilde{G} = (V, \sigma, \mu)$ را در نظر بگیرید. عدد رنگی، عدد فازی $\chi(\tilde{G}) = \{(\chi_\alpha, \alpha) | \alpha \in [0, 1]\}$ است، جایی که χ_α عدد رنگی G_α است. $\forall \alpha \in [0, 1]$ توجه شود که $E_\alpha = \{ij | 1 \leq i < j \leq n, \mu(ij) \geq \alpha\}$ و $V_\alpha = \{v \in V | \sigma(v) \geq \alpha\}$ ، بنابراین $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$ یک گراف قطعی است [۲۵].

مثال ۳-۲-۵: گراف فازی $\tilde{G} = (V, \sigma, \mu)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ را در نظر بگیرید، به طوری که:

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0.9 & v = v_1 \\ 0.7 & v = v_2 \text{ \& } v = v_4 \\ 0.8 & v = v_3 \\ 1 & v = v_5 \end{cases} \text{ و مجموعه یال‌های فازی } \tilde{E} \text{ به صورت زیر است:}$$

$$\tilde{E} = \{(v_1 v_5 = e_1, 0.5), (v_4 v_5 = e_2, 0.5), (v_3 v_4 = e_3, 0.7), (v_3 v_5 = e_4, 0.8), (v_1 v_4 = e_5, 0.7), (v_2 v_4 = e_6, 0.5), (v_1 v_3 = e_7, 0.8), (v_2 v_5 = e_8, 0.6), (v_2 v_3 = e_9, 0.6), (v_1 v_2 = e_{10}, 0.6)\}$$

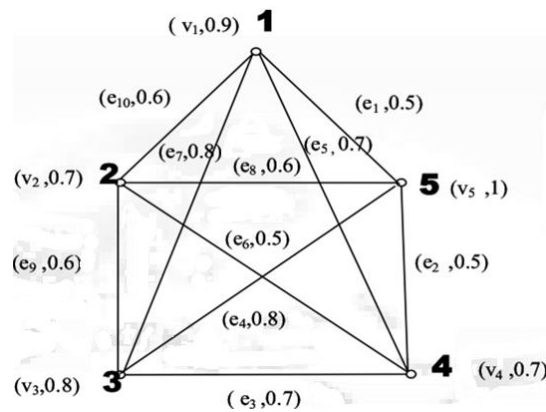
در این مثال شش با در نظر گرفتن مجموعه α -برش $\{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$ ، برای هر مقدار از α ، گراف G_α و عدد رنگی فازی آن را پیدا می‌کنیم.



شکل ۲-۵: گراف فازی $\tilde{G} = (V, \sigma, \mu)$ مثال ۳-۲-۵

برای $\alpha=0.5$ ، $G_{0.5}=(V_{0.5}, E_{0.5})$ ، جایی که $V_{0.5}$ و $E_{0.5}$ هر دو مجموعه های قطعی هستند. در واقع بنا بر تعریف ۲-۲-۵ داریم:

$V_{0.5}=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و $E_{0.5}=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$. پس برای گراف به دست آمده با توجه به شکل ۳-۵ مینیمم پنج رنگ برای رنگ آمیزی $G_{0.5}$ نیاز است. بنابراین $\chi_{0.5} = \chi(G_{0.5})=5$.

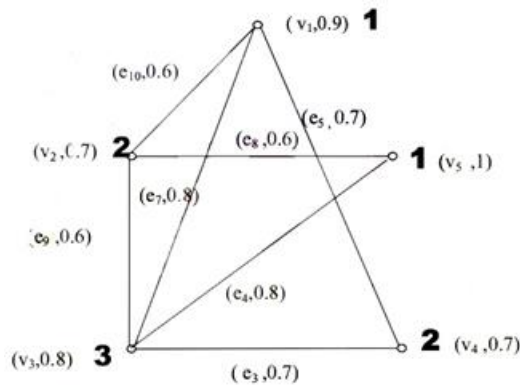


شکل ۳-۵: گراف به دست آمده از α -برش: $G_{0.5}=(V_{0.5}, E_{0.5})$

حال اگر $\alpha=0.6$ باشد. $G_{0.6}=(V_{0.6}, E_{0.6})$ ، جایی که $V_{0.6}$ و $E_{0.6}$ هر دو مجموعه های قطعی هستند. پس بنا بر تعریف ۲-۲-۵ $V_{0.6}=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و $E_{0.6}=\{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ گراف $G_{0.6}$

به صورت شکل ۴-۵ است. تعریف رنگ آمیزی گراف تعریف ۱-۱-۶ نتیجه می‌دهد:

$$\chi_{0.6} = \chi(G_{0.6}) = 3$$



شکل ۴-۵: گراف به دست آمده از α -برش: $G_{0.6} = (V_{0.6}, E_{0.6})$

به همین ترتیب برای $\chi_{0.7} = \chi(G_{0.7}) = 3, \alpha = 0.7$ برای $\chi(G_{0.8}) = 2, \alpha = 0.8$ برای

$\chi_{0.9} = \chi(G_{0.9}) = 1, \alpha = 0.9$ و برای $\chi_1 = \chi(G_1) = 1, \alpha = 1$ است. شش گراف قطعی $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$

با توجه به مقادیر α -برش‌ها به دست آمد. حال برای عدد رنگی χ_α برای هر α عدد رنگی گراف

فازی \tilde{G} به صورت $\chi(\tilde{G}) = \{(5, 0.5), (3, 0.6), (3, 0.7), (2, 0.8), (1, 0.9), (1, 1)\}$ است [۲۹].

۳-۵ مجموع رنگی فازی

مجموع رنگی از یک گراف قطعی $G = (V, E)$ ، $\sum(G)$ ، در پایان نامه کوبیکا^{۷۳} معرفی شده است [۳۰].

رنگ آمیزی مجموع شامل تخصیص رنگ $f(v) \in \square$ به هر رأس $v \in V$ از گراف است، به طوری که

رئوس مجاور رنگ‌های مختلفی بگیرند و مجموع $\sum_{v \in V} f(v)$ روی تمام رئوس مینیمم باشد. این نشان

می‌دهد که محاسبه مجموع رنگی از یک گراف دلخواه، مسئله NP-کامل است. رأس قوی از یک گراف

G ، که به وسیله $s(G)$ نشان داده می‌شود، کوچک‌ترین s صحیح است به طوری که $\sum(G)$ با

استفاده از رنگ‌های $\{1, 2, \dots, s\}$ به دست می‌آید. گراف G با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E

⁷³ Kubicka

را در نظر بگیرید، مینیمم مجموع رنگی G (MCS)، را با $\sum(G)$ نشان می‌دهند که مینیمم

$$\sum(G) = \sum_{v \in V} f(v)$$

از بین تمام رنگ آمیزی های مجاز f از گراف G است، به عبارت دیگر

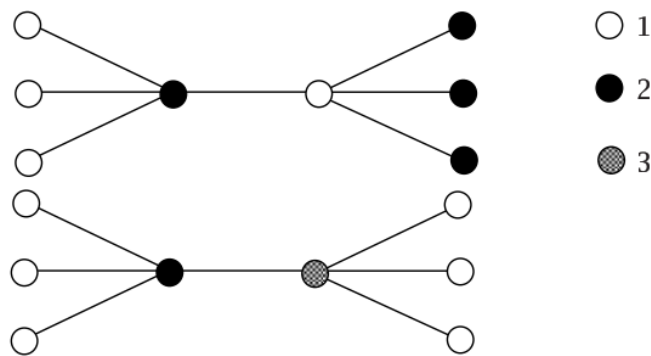
[۳۰].

مثال ۵-۳-۱: به درخت T در شکل ۵-۵ توجه کنید. اگر فقط از دو رنگ ۱ و ۲ برای رنگ آمیزی

مجاز گراف استفاده شود، مجموع رنگ‌ها ۱۲ است. با معرفی رنگ سوم مجموع رنگ‌ها به ۱۱ کاهش

پیدا می‌کند. در حقیقت $\sum T = 11$ و $s(T) = 3$. T کوچک‌ترین درختی است که سه رنگ برای به

دست آوردن مجموع رنگی‌اش نیاز دارد [۳۰].



شکل ۵-۵: درخت T با دو رنگ آمیزی متفاوت

توجه شود که پیدا کردن مجموع رنگی از یک گراف معین شبیه پیدا کردن عدد رنگی است.

حال مسئله برای گراف‌های فازی گسترش داده می‌شود، فرض کنید $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ یک گراف فازی

باشد، $U \subseteq X$ و $X' = X - U$ ، بنابراین گراف (X', σ', μ') جایی که برای هر دو رأس متفاوت

$$\sigma'(x) = \sigma(x), \mu'(xy) = \mu(xy), \text{ با } \tilde{G} - U \text{ نشان داده می‌شود. } x, y \in X'$$

تعریف ۵-۳-۱: برای k رنگ آمیزی فازی $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ از گراف فازی \tilde{G} ، مجموع رنگی فازی

$$\sum_{\Gamma}(\tilde{G}) = 1 \sum_{x \in C_1} \theta_1(x) + \dots + k \sum_{x \in C_k} \theta_k(x)$$

به عنوان $\sum_{\Gamma}(\tilde{G})$ ، نشان داده شده به وسیله $\sum_{\Gamma}(\tilde{G})$ ،

تعریف شده است، که در آن $C_i = \text{support of } \gamma_i$ (رأس‌هایی که γ_i را پشتیبانی می‌کنند)

$$\theta_i(x) = \max\{\sigma(x) + \mu(xy) \mid y \in C_i\}$$
 و

مجموع رنگی فازی \tilde{G} ، که با $\sum_{\Gamma}(\tilde{G})$ نشان داده می‌شود، به صورت رابطه ۵-۳ تعریف می‌شود:

$$\sum_{\Gamma}(\tilde{G}) = \min\left\{\sum_{\Gamma}(\tilde{G}) \mid \Gamma \text{ یک رنگ آمیزی فازی از } \tilde{G} \text{ است}\right\} \quad (۵-۳)$$

عدد رنگ آمیزی فازی از \tilde{G} متناهی است و بنابراین، یک رنگ آمیزی فازی Γ_0 که یک رنگ آمیزی

فازی مجموع مینیمال از \tilde{G} به طوری که $\sum_{\Gamma_0}(\tilde{G}) = \sum_{\Gamma}(\tilde{G})$ نامیده می‌شود، وجود دارد.

تعریف ۵-۳-۲: رأس قوی از گراف فازی \tilde{G} ، که به وسیله $s(G)$ نشان داده می‌شود، به صورت

رابطه ۵-۴ است:

$$s(G) = \min\left\{|\Gamma| \mid \sum_{\Gamma}(\tilde{G}) = \sum_{\Gamma}(\tilde{G})\right\} \quad (۵-۴)$$

این معنی می‌دهد که $s(G)$ مینم تعداد از رنگ‌ها است، به طوری که می‌توان مجموع رنگ آمیزی

فازی مینیمال \tilde{G} را با آن پیدا کرد. واضح است که $s(G) \geq \chi^f(\tilde{G})$. نکته این است که این عدم

تساوی می‌تواند دقیق باشد. گراف فازی در مثال ۵-۳-۴ دو عدد رنگی فازی دارد، اما رأس قوی آن ۳

است [۸].

تعریف ۵-۳-۳: فرض کنید \tilde{G} یک گراف فازی باشد و x یک رأس از \tilde{G} باشد. همسایه x از \tilde{G} به

صورت رابطه ۵-۵ تعریف شده است.

$$N(x) = \{y \mid xy \text{ است } \tilde{G}\} \quad (5-5)$$

قضیه ۵-۳-۱: فرض کنید \tilde{G} یک گراف فازی باشد و $\Gamma_0 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ یک رنگ آمیزی فازی مجموع مینیمال از \tilde{G} باشد. در این صورت نتایج زیر درست هستند.

$$\sum_{x \in C_1} \theta_1(x) \geq \sum_{x \in C_2} \theta_2(x) \geq \dots \geq \sum_{x \in C_s} \theta_s(x) \quad (\text{الف})$$

(ب) فرض کنید $x_0 \in C_i$. در نتیجه برای $j < i$ یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

$$C_j \cap N(x_0) \neq \emptyset \quad (1)$$

$$j \left[\sum_{x \in C'_j} \theta_j(x) - \sum_{x \in C_j} \theta_j(x) \right] \geq i \left[\sum_{x \in C'_i} \theta_i(x) - \sum_{x \in C_i} \theta_i(x) \right] \quad \text{و} \quad C_j \cap N(x_0) = \emptyset \quad (2)$$

جایی که $C'_j = C_j - \{x_0\}$ و $C'_i = C_i - \{x_0\}$.

اثبات: فرض کنید که برای برخی از مقادیر $i < j$ ما داریم $\sum_{x \in C'_i} \theta_i(x) < \sum_{x \in C'_j} \theta_j(x)$. به رنگ

آمیزی فازی $\Gamma'_0 = \{\gamma'_1, \dots, \gamma'_s\}$ تعریف شده به وسیله‌ی زیر توجه کنید.

$$\gamma'_r = \begin{cases} \gamma_r, & r \notin \{i, j\}, \\ \gamma_j, & r = i, \\ \gamma_i, & r = j. \end{cases}$$

حال داریم:

$$\sum_{\Gamma'_0} (\tilde{G}) - \sum_{\Gamma_0} (\tilde{G}) = (i - j) \left[\sum_{x \in C'_j} \theta_j(x) - \sum_{x \in C'_i} \theta_i(x) \right] < 0$$

بنابراین، $\sum_{\Gamma'_0} (\tilde{G}) < \sum_{\Gamma_0} (\tilde{G})$ که متناقض با کمینه سازی Γ_0 است.

(۲) فرض کنید $j < i$ و $C_j \cap N(x_0) = \emptyset$. به رنگ آمیزی فازی $\Gamma' = \{\gamma'_1, \dots, \gamma'_s\}$ تعریف شده به

وسیله‌ی $\gamma'_k = \gamma_k$ اگر $k \notin \{i, j\}$ ، توجه کنید،

$$\gamma'_i(x) = \begin{cases} \gamma_i(x) & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}, \quad \gamma'_j(x) = \begin{cases} \gamma_j(x) & x \neq x_0 \\ \sigma(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

حال چون Γ_0 رنگ آمیزی فازی مینیمال است، آنگاه:

$$0 \leq \sum_{\Gamma'} (\tilde{G}) - \sum_{\Gamma_0} (\tilde{G}) = j[\sum_{x \in C'_j} \theta_j(x) - \sum_{x \in C_j} \theta_j(x)] - i[\sum_{x \in C_i} \theta_i(x) - \sum_{x \in C'_i} \theta_i(x)]$$

و اثبات کامل است.

با استفاده از فرض قضیه ۵-۳-۱، $\sum (\tilde{G} - C_1) = \sum_{\Gamma_0} (\tilde{G}) - \sum_{i=1}^s [\sum_{x \in C_i} \theta_i(x)]$ و

$s(\tilde{G} - C_1) = s(\tilde{G}) - 1$ اما، در مثال زیر نشان داده می‌شود که این تساوی همیشه نگه داشته

نمی‌شود [۸].

مثال ۵-۳-۲: فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{26}\}$. ساختار گراف فازی $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ به شرح زیر

است.

$$\sigma(x_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq 26$$

$$\mu(x_i x_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq 10, 11 \leq j \leq 26, \\ 1, & 11 \leq i \leq 17, 19 \leq j \leq 26, \\ 1, & i = 18, 20 \leq j \leq 26, \\ 0.2, & i = 18, j = 19, \\ 0, & 1 \leq i < j \leq 10, \\ 0.3, & 11 \leq i < j \leq 17 \text{ or } 20 \leq i < j \leq 26, \\ 0.4, & i = 18, 11 \leq j \leq 17 \text{ or } i = 19, 20 \leq j \leq 26. \end{cases}$$

با استناد به منبع [۸] $s(G) = 4$ و $\Gamma_0 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_4\}$ رنگ آمیزی مجموع فازی مینیمال \tilde{G} که در آن

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq 10, \\ 0, & 0, w \end{cases}, \quad \gamma_2(x) = \begin{cases} 1, & 11 \leq i \leq 17, \\ 0, & 0, w \end{cases}$$

$$\gamma_3(x) = \begin{cases} 1, & 20 \leq i \leq 26, \\ 0, & 0, w \end{cases}, \quad \gamma_4(x) = \begin{cases} 1, & 18 \leq i \leq 19, \\ 0, & 0, w \end{cases}$$

و $\sum_{\Gamma_0}(\tilde{G}) = 65.1$ است. اما $s(\tilde{G}-C_1) = 2$ و $\Gamma_1 = \{\xi_1, \xi_2\}$ رنگ آمیزی فازی مجموع مینیمال از $\tilde{G}-C_1$ جایی که

$$\xi_1(x_i) = \begin{cases} 1, & 11 \leq i \leq 18, \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}, \quad \xi_2(x_i) = \begin{cases} 1, & 19 \leq i \leq 26, \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$$

و $\sum_{\Gamma}(\tilde{G}-C_1) = 33.6$ است.

اگر Γ یک سه رنگ آمیزی فازی از $\tilde{G}-C_1$ باشد، می توان چک کرد که $\sum_{\Gamma}(\tilde{G}-C_1) > 33.6$ ، بنابراین $s(\tilde{G}-C_1) = 2$. به عبارت دیگر، $\sum_{\Gamma_0}(\tilde{G}) - \sum_{i=1}^4 [\sum_{x \in C_i} \theta_i(x)] = 34.5$ ، بنابراین

$$\sum(\tilde{G}-C_1) < \sum_{\Gamma_0}(\tilde{G}) - \sum_{i=1}^4 [\sum_{x \in C_i} \theta_i(x)]$$

در واقع، هرگز رنگ آمیزی فازی مجموع مینیمال \tilde{G} با توسیع دادن Γ_1 به یک رنگ آمیزی فازی از \tilde{G} به دست نمی آید. اگر با توسیع دادن Γ_1 یک رنگ آمیزی فازی مجموع مینیمال \tilde{G} پیدا شود، آنگاه با قضیه ۵-۳-۱، این توسیع به عنوان $\Gamma' = \{\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3\}$ است جایی که،

$$\xi'_1(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in C_1, \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}, \quad \xi'_2(x_i) = \begin{cases} \xi_1(x_i), & \text{if } x_i \in G-C_1, \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$$

$$\xi'_3(x_i) = \begin{cases} \xi_2(x_i), & \text{if } x_i \in G-C_2, \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$$

اما $\sum_{\Gamma'}(\tilde{G}) = 66$ و Γ' یک رنگ آمیزی فازی مجموع مینیمال از \tilde{G} نیست.

تعریف ۵-۳-۴: فرض کنید \tilde{G} یک گراف فازی با عدد رنگی فازی $\chi^f(\tilde{G})$ باشد. $\sum_{\chi^f(\tilde{G})}(\tilde{G})$ را به

عنوان $\sum_{\chi^f(\tilde{G})}(\tilde{G}) = \min\{\sum_{\Gamma}(\tilde{G}) \mid |\Gamma| = \chi^f(\tilde{G})\}$ تعریف می شود.

قضیه ۵-۳-۲: برای گراف فازی $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ ، $\sum_{\chi^f(\tilde{G})}(\tilde{G}) \leq \frac{3(\chi^f(\tilde{G})+1)}{4} h(\sigma) |X|$ است.

اثبات: فرض کنید Γ_1 یک رنگ آمیزی فازی $\chi^f(\tilde{G})$ از \tilde{G} باشد به طوری که

$$\sum_{\chi^f(\tilde{G})}(\tilde{G}) = \sum_{\Gamma_1}(\tilde{G}) \quad \text{مشابه با قضیه ۱-۳-۵}$$

$$\sum_{x \in C_1} \theta_1(x) \geq \sum_{x \in C_2} \theta_2(x) \geq \dots \geq \sum_{x \in \chi^f(\tilde{G})} \theta_{\chi^f(\tilde{G})}(x), \quad 1 \leq i \leq \chi^f(\tilde{G})$$

$$\begin{aligned} & i \sum_{x \in C_i} \theta_i(x) + (\chi^f(\tilde{G}) - i + 1) \sum_{x \in \chi^f(\tilde{G})} \theta_{\chi^f(\tilde{G})}(x) \\ & \leq \frac{\chi^f(\tilde{G}) + 1}{2} \left[\sum_{x \in C_i} \theta_i(x) + \sum_{x \in \chi^f(\tilde{G})} \theta_{\chi^f(\tilde{G})}(x) \right] \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\chi^f(\tilde{G})} \left[i \sum_{x \in C_i} \theta_i(x) + (\chi^f(\tilde{G}) - i + 1) \sum_{x \in \chi^f(\tilde{G})} \theta_{\chi^f(\tilde{G})}(x) \right] \\ & \leq \sum_{i=1}^{\chi^f(\tilde{G})} \frac{\chi^f(\tilde{G}) + 1}{2} \left[\sum_{x \in C_i} \theta_i(x) + \sum_{x \in \chi^f(\tilde{G})} \theta_{\chi^f(\tilde{G})}(x) \right] \end{aligned}$$

لذا

$$\sum_{i=1}^{\chi^f(\tilde{G})} i \sum_{x \in C_i} \theta_i(x) \leq \frac{\chi^f(\tilde{G}) + 1}{2} \sum_{i=1}^{\chi^f(\tilde{G})} \sum_{x \in C_i} \theta_i(x)$$

اما چون $\theta_i(x) \leq 3h(\sigma)/2$ داریم $\sum_{i=1}^{\chi^f(\tilde{G})} \sum_{x \in C_i} \theta_i(x) \leq (3h(\sigma)/2)|X|$ و اثبات کامل

است.

حال با استفاده از قضیه ۲-۳-۵ یک کران بالایی برای $\sum(\tilde{G})$ پیدا می‌شود.

$$\sum(\tilde{G}) \leq \frac{3(\chi^f(\tilde{G}) + 1)}{4} h(\sigma) |X|, \quad \tilde{G}, \text{ برای گراف فازی } ۱-۳-۵: \text{ است [۸].}$$

تعریف ۵-۳-۵: برای گراف فازی $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ ، $\{x \in X \text{ و } xy \text{ یک یال ضعیف از } \tilde{G} \text{ است}$

$$w = \min\{\sigma(x) + \mu(xy) > 0\} \text{ تعریف می‌شود [۱۰].}$$

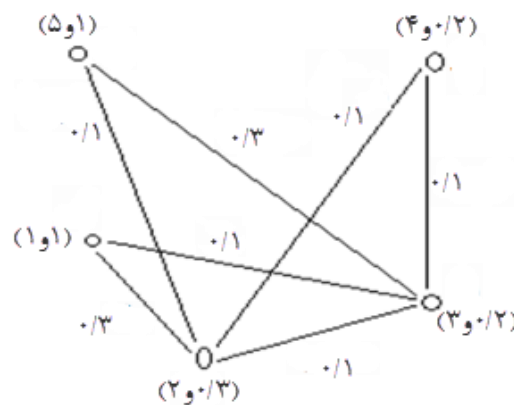
قضیه ۳-۳-۵: فرض کنید $\tilde{G} = (X, \sigma, \mu)$ یک گراف فازی همبند با یال‌های قوی از اندازه e باشد.

$$\text{سپس، } w \sqrt{8e} \leq \sum \tilde{G} \quad [A]$$

مثال ۳-۳-۵: گراف فازی $\tilde{G} = (V, \sigma, \mu)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ را در نظر بگیرید، به طوری

که:

$$\mu(v_i, v_j) = \begin{cases} 0.3 & \text{for } ij \in \{12, 35\} \\ 0.1 & \text{for } ij \in \{13, 23, 24, 25, 34\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{و} \quad \sigma(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{for } i = 1, 5 \\ 0.3 & \text{for } i = 2 \\ 0.2 & \text{for } i = 3, 4 \end{cases}$$



شکل ۵-۶: گراف فازی مطابق با مثال ۳-۳-۵

فرض کنید $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ یک خانواده از مجموعه‌های فازی در V باشد، جایی که

$$\gamma_1(v_i) = \begin{cases} 1 & i = 1, 5 \\ 0.2 & i = 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \gamma_2(v_i) = \begin{cases} 0.3 & i = 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\gamma_3(v_i) = \begin{cases} 0.2 & i = 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

جدول ۱-۵: مجموعه های فازی در V از مثال ۳-۳-۵

γ_3	γ_2	γ_1	رأس
۰	۰	۱	۱
۰	۰/۳	۰	۲
۰/۲	۰	۰	۳
۰	۰	۰/۲	۴
۰	۰	۱	۵

با در نظر گرفتن جدول ۱-۵، \tilde{G} یک سه رنگ آمیزی دارد و $\chi^f(\tilde{G}) = 3$ ، برای این سه رنگ آمیزی عدد رنگی Γ را می توان به شرح زیر محاسبه کرد:

فرض کنید $C_i = \text{supp } \gamma_i$ ، بنابراین $C_3 = \{3\}, C_2 = \{2\}, C_1 = \{1, 4, 5\}$

$$\begin{aligned} \theta_1(1) &= \max\{1+0, 1+0, 1+0\} = 1 & , & & \theta_2(2) &= \max\{0.3+0\} = 0.3 \\ \theta_1(4) &= \max\{0.2+0, 0.2+0, 0.2+0\} = 0.2 & , & & \theta_3(3) &= \max\{0.2+0\} = 0.2 \\ \theta_1(5) &= \max\{1+0, 1+0, 1+0\} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{در نتیجه } \sum_{\Gamma} \tilde{G} = 1(1+0.2+1) + 2(0.3) + 3(0.2) = 3.4$$

حال فرض کنید $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ ، یک خانواده از مجموعه های فازی در V به شکل زیر باشد:

$$\gamma_1(v_i) = \begin{cases} 1 & i \in \{1, 5\} \\ 0.2 & i = 4 \\ 0 & i = o.w \end{cases} \quad , \quad \gamma_2(v_i) = \begin{cases} 0.2 & i = 3 \\ 0.3 & i = 2 \\ 0 & i = o.w \end{cases}$$

که البته رنگ آمیزی بدین صورت اشتباه است، زیرا یال v_2v_3 قوی است و شرط سوم تعریف ۱-۳-۵ را در بر نمی گیرد. در نتیجه \tilde{G} یک سه رنگ آمیزی دارد و $\chi^f(\tilde{G}) = 3$ ، برای این سه رنگ آمیزی عدد رنگی $\Gamma' = \{\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3\}$ را می توان به شرح زیر و به شیوهی دیگر با رنگ آمیزی متفاوت با سه رنگ تعیین کرد:

$$\gamma'_1(v_i) = \begin{cases} 0.3 & i = 2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \quad \gamma'_2(v_i) = \begin{cases} 1 & i \in \{1,5\} \\ 0.2 & i = 4 \\ 0 & i = \text{o.w} \end{cases}$$

$$\gamma'_3(v_i) = \begin{cases} 0.2 & i = 3 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

فرض کنید $C_i = \text{supp } \gamma_i$ ، بنابراین $C_3 = \{3\}, C_2 = \{1,4,5\}, C_1 = \{2\}$

$$\begin{aligned} \theta_1(2) &= \max\{0.3+0\} = 0.3 \\ \theta_2(1) &= \max\{1\} = 1 \\ \theta_2(4) &= \max\{0.2+0, 0.2+0, 0.2+0\} = 0.2 \\ \theta_2(5) &= \max\{+0, 1+0, 1+0\} = 1 \\ \theta_3(3) &= \max\{0.2+0\} = 0.2 \end{aligned}$$

$$\sum_{\Gamma'} \tilde{G} = 1(0.3) + 2(1+0.2+1) + 3(0.2) = 5.1 \text{ در نتیجه}$$

البته با جابه‌جایی رنگ‌ها می‌توان برای خانواده‌های متفاوت Γ مجموع رنگی فازی مختلفی برای آن به دست آورد. در نهایت مجموع رنگی فازی $\sum \tilde{G}$ مینیمم آن‌ها می‌شود، که در اینجا $\sum \tilde{G} = 3.4$.

از تعریف ۵-۳-۵ می‌دانیم که $\{x \in X \text{ و } xy \text{ یک یال ضعیف از } \tilde{G} \text{ است}$
 $|w = \min\{\sigma(x) + \mu(xy) > 0\}$ در این مثال مجموعه یال‌های ضعیف $\{v_1v_5, v_1v_4, v_4v_5\}$ است، که
 $w = \min\{1+0, 1+0, 0.2+0\} = 0.2$ بنا بر قضیه ۵-۳-۳ برای گراف فازی همبند با یال‌های قوی
 $w \sqrt{8e} \leq \sum \tilde{G}$ ، در اینجا تعداد یال‌های قوی هفت است، پس $0.2\sqrt{8 \times 7} = 1.49 \leq \sum \tilde{G}$
 داریم [۱۰].

قضیه ۵-۳-۴: فرض کنید G یک گراف همبند باشد. در این صورت، $s(G_0) \leq \Delta(G) + 1$ و برابری حفظ می‌شود اگر G یک گراف کامل یا یک دور فرد باشد [۸].

در مثال ۵-۳-۴ نشان داده می‌شود که قضیه ۵-۳-۴ برای حالت فازی درست نیست.

مثال ۵-۳-۴: فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی با مجموعه رئوس $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\Delta(\tilde{G}) = 2 \text{ داریم } \mu(xy) = \begin{cases} 0.49, & xy \in \{13, 35, 24, 46\}, \\ 0, & 0W \end{cases} \text{ و } \sigma(i) = 2 \text{ برای هر } i \in X \text{ باشد}$$

. اگر $s(\tilde{G}) = 2$ یک رنگ آمیزی فازی Γ از اندازه ۲ به طوری که $\sum_{\Gamma} \tilde{G} = \sum \tilde{G}$ وجود دارد. اما هر

دو رنگ آمیزی فازی \tilde{G} به عنوان $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ است،

$$\gamma_1 = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in B, \end{cases} \quad , \quad \gamma_2 = \begin{cases} 0, & x \in B, \\ 1, & x \in A, \end{cases}$$

(یا $\gamma_2|_A = 1, \gamma_1|_B = 1$) جایی که $A = \{1, 3, 5\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$. در این مورد، $\sum_{\Gamma} \tilde{G} = 13.41$. حال

فرض کنید رنگ آمیزی فازی $\Gamma' = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ به عنوان

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{1, 4\}, \\ 0, & x \in o.w, \end{cases} \quad \gamma_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{2, 5\}, \\ 0, & x \in o.w, \end{cases} \quad \gamma_3(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{3, 6\}, \\ 0, & x \in o.w, \end{cases}$$

باشد.

در این مورد، $\sum_{\Gamma'} \tilde{G} = 12$ که معنی می‌دهد $s(\tilde{G}) > 2$. در نهایت باید نشان داده شود که

$s(\tilde{G}) = 3$. اما \tilde{G} نه یک دور فرد و نه یک گراف فازی کامل است [۸].

نتیجه گیری و چشم انداز آینده

در این تحقیق به طور کلی دو مبحث رنگ فازی و رنگ آمیزی فازی مورد بحث قرار گرفت. چون تئوری فازی برای موارد ابهام و عدم قطعیت به کار می‌رود و دانش فرد خبره جایگزین یک سری فرمول‌ها پیچیده ریاضی می‌شود، با در نظر گرفتن ماهیت فازی برای رنگ‌ها، مفهوم رنگ فازی و تشابه فازی رنگ‌ها مورد بررسی قرار گرفت. در این رابطه از تبدیل فضای رنگی RGB به فضای رنگی ادراکی HSL استفاده گردید. همچنین با تعریف خوشه بندی فازی و بر مبنای اندازه تشابه رنگ‌ها در فضای HSL، خوشه بندی فازی رنگ‌ها که در پردازش تصویر کاربرد دارد مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین در این پایان‌نامه از رنگ‌های فازی برای رنگ آمیزی مجاز گراف‌ها استفاده شده است. در این رابطه با به کار بردن گراف‌های فازی، مفاهیمی چون رنگ آمیزی فازی، عدد رنگی فازی و مینیمم مجموع رنگ فازی برای به دست آوردن جوابی بهینه مطرح گردید. در رابطه با چشم‌انداز آینده این موضوع می‌توان توسعه‌ی به‌کارگیری مفاهیم رنگ فازی در سایر موضوعات مربوط به رنگ‌آمیزی گراف‌ها را مورد توجه قرار داد. در پایان امید است که مطالب ارائه شده مورد توجه دانشجویان و علاقه‌مندان قرار گیرد.

واژه نامه

Chromatic number	عدد رنگی
Graph	گراف
Fuzzy sets	مجموعه‌های فازی
Fuzzy number	عدد فازی
Fuzzy graphs	گراف‌های فازی
Fuzzy coloring	رنگ آمیزی فازی
α -cut	α برش‌ها
Strong edge	یال قوی
Weak edge	یال ضعیف
Color	رنگ
Brightness	درخشندگی
Hue	فام
Colorfulness	پررنگی
Lightness	روشنایی
Chroma	رنگینی
Saturation	اشباع
visible spectrum	طیف مرئی

Rod	سلول‌های میله‌ای
Cone	سلول مخروطی
Color space	فضای رنگی
Bit	بیت
Tone	تن
Digital Number	شماره رقمی
Sampling	نمونه برداری
quantization	کوانتیمی
Digit binary	رقم دو دویی
Cyan	فیروزه‌ای
Magenta	ارغوانی
Yellow	زرد
Green	سبز
Red	قرمز
Primary	ابتدایی
Secondary	ثانویه
Linguistic	متغیرهای زبانی

Uniformity of the scale یکنواختی مقیاس

Uniform color scale..... مقیاس یکنواخت رنگ

Low valu مقدار پایین

Average value مقدار متوسط

Strong value مقدار قوی

Cluster خوشه

Distance-based Clustering خوشه بندی مبتنی بر فاصله

Classification طبقه بندی

K-means k - میانگین

C-means c - میانگین

Uncertainty عدم قطعیت

Similarity..... تشابه

Color descriptor توصیفگر رنگ

مراجع

- [1] Harjum T, "**Lecture Notes on Graph Theory**", (1994 – 2011) , Department of Mathematics, University of Turku,
- [۲] گریمالدی رالف، ریاضیات گسسته و ترکیباتی از دیدگاه کاربردی، ۱۳۷۹، ترجمه علی عمیدی، چاپ دوم، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۶.
- [3] West D, "**Introduction to Graph Theory**", Second Edition, University of Illinois-Orbana, pages of 1-67.
- [۴] تاناکا، کازوئو، ۱۳۸۱، مقدمه ای بر منطق فازی برای کاربردهای علمی، ترجمه علی وحیدیان و حامد رضا طارقیان، موسسه چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، ص ۳-۴۸.
- [5] Sunitha M.S,(2001) ,"**Studies On Fuzzy Graphs**", Cochin University of Science and Technology, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, , pages of 9-34.
- [6] Lavanya S and Sattanathan R, (2009) "**Fuzzy Total Coloring Of Fuzzy Graphs** ", International Journal of Information Technology and Knowledge Management, pp. 37-39.
- [7] Munoz S, Ortuno T, Ramirez J and YanezJ. (2005) , "**Coloring fuzzy graphs**" ,pp 211 – 221.
- [8] EslahchiI Ch and Onagh.,(2005) , "**Vertex-Strength Of Fuzzy Graphs**",Hindawi Publishing Corporation, pp 1-9.
- [9] Doost Ali M, (2007) "**Fuzzy Defining Number Of the Edge Fuzzy Graphs**", International Mathematical Forum, pp 893-904.
- [10] Swaminathan S. (2012) , "**Fuzzy Graph Applications of Job Allocation**", International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT), pp 7-10.
- [۱۱] محمدی جعفر، «فضاهای رنگ، ویژگی و کاربردها و جعبه ابزار **Color Conversion toolbox**»، (۱۳۸۳) گزارش پیشرفت پروژه کارشناسی ارشد، مرکز فناوری اطلاعات و ارتباطات پیشرفته شریف، گزارش شماره ۵.
- [12] Shin H. (2009) , "**Finding Near Optimum colour Classifier: Genetic Algorithm – Assisted fuzzy colour Contrast Fusion using Variable Colour Depth**" Master of Science thesis in computer in computer sciences, Massey university , Albany, Pages of 6-14.

[۱۳] مجله آموزش الکترونیکی، سیستم‌های چند رسانه ای، فصل چهارم، رنگ در تصویر و ویدئو انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران.

[۱۴] حبیبی حامد، مقاله پردازش تصویر از فصلنامه پردازش تصویر و هوش مصنوعی.

[15] Chamorro-Martinez J, Sanchez D, Soto-Hidalgo J.M (2008) , "**A Novel Histogram Definition for Fuzzy Color Spaces**", IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ 2008) , pp 2149-2156.

[16] Georgieva L, Dimitrova T and Angelov N. (2005) , "**RGB and HSV color models in color identification of digital traumas images**", International Conference on Computer Systems and Technologies, pp 1-6.

[17] Yousefzadeh R. (2011) , "**Pedestrians Tracking in a Camera Network**", Journal of Advances in Computer Research, pp 97-104.

[18] Been-Chain Ch and Ming-Cheng Ch. (2002) "**A color image segmentation Approach Based on fuzzy similarity**", IEEE International Journal, pp 449-454.

[19] Amine Ait Y, Isis T and Herman A, "**Color Image Proling Using Fuzzy Sets**" Paris, France, pp 343-359.

[۲۰] نصرآبادی عباس، آزادی ساسان و جواد حدادنی، آشکارسازی چهره انسان در تصاویر

رنگی بر مبنای فیلتر گوسی، ۱۳۸۸، مجله مدل سازی در مهندسی، سال هفتم، شماره ۱۷، ص

۱۰.

[21] http://ceit.aut.ac.ir/~shiry/lecture/machine_learning/tutorial/fuzzy%20clustering/introduction/introduction.htm.

[22] Bezdek C, Ehrlich R and William F, (1984) , "**The Fuzzy c-Means Clustering Algorithm**", Computers & Geosciences Vol. 10, No. 2-3, pp 191-203.

[23] http://ceit.aut.ac.ir/~shiry/lecture/machine_learning/tutorial/fuzzy%20clustering/FCM/FCM.htm.

[24] Patrascu V. (2009) "**New Fuzzy Color Clustering Algorithm Based on hsl Similarity**", Department of Informatics Technology, Tarom Company, Bucharest, Romania, pp 48-52.

[۲۵] جراحی امیر، امانی تهران محمد، سعید گرجی کندی، مروری بر نام گذاری و دسته بندی

رنگ‌ها، (۱۳۹۰)، دانشگاه صنعتی امیر کبیر، نشریه علمی-پژوهشی علوم و فناوری رنگ، ص

۱۷۶-۱۸۸.

[26] Benavente R, Maria V and Ramon B. (2006) "**A Data Set for Fuzzy Colour Naming**" Computer Vision Center / Dept. Informàtica (UAB), published in Color research and application, 31(1) : pp 48-56.

[27] Vertan C, Boujemaa N and Buzuloiu V, "**A Fuzzy Color Credibility Approach To Color Image Filtering**", Image Processing and Analysis Laboratory (IPAL), 4 pages.

[28] www.personal.reading.ac.uk/~sis01xh/teaching/.../fcslide3.pdf.

[29] Arindam D, Anita P. (2012) , "**Vertex Coloring Of A Fuzzy Graph Using Alpha Cut**", International Journal of Management, IT and Engineering, pp 340 352.

[30] Kubicka E, (2003) , "**The Chromatic Sum Of A Graph: History And Recent Devel Opments**", Hindawi Publishing Corp, pp 1563-1573.

Abstract

In this thesis first are explained the concept of color and color space and then fuzzy color model has been described. The proposed method defines a set of fuzzy colors based on the HLS color space. Then, a fuzzy similarity measure is developed for evaluating the similarity of fuzzy colors. Also, is presented a fuzzy color clustering algorithm that is based on a measure of similarity. This measure of color similarity is defined on a perceptual color system called HSL. In this thesis coloring of graphs using the concept of fuzzy color is shown and chromatic fuzzy sum and strength of fuzzy graph has been studied too.

Keywords: color spaces, fuzzy color, fuzzy clustering, fuzzy similarity, fuzzy graph, α -cut, fuzzy chromatic number, Chromatic fuzzy sum



Shahrood University of Technology

Faculty of math

Master of Science Thesis

Fuzzy color and Fuzzy coloring

Hamid Jorbounyan

Supervisors :

Dr. Sadegh Rahimi

October 2012