

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده: ریاضی
گروه: ریاضی کاربردی

بررسی مسئله تشابه فازی و بعضی از کاربردهای آن

دانشجو: خدیجه بیگم احمدی

استاد راهنما:

دکتر صادق رحیمی شعر باف

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

مهر ماه ۱۳۹۱

تقدیم به:

خدایی که آفرید جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را،
عشق را و به کسانی که عشقشان را در وجودم دمید.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم:

آنان که فروغ نگاه شان و روشنی روی شان سرمایه های جاودانی
زندگی ام هستند، آنان که راستی قامت در شکستگی قامت شان تجلی
یافت. در برابر وجود گرامی شان زانوی ادب بر زمین می نهیم و با دلی
مملو از عشق و محبت بر دستشان بوسه می زنم.

تقدیم به همسر:

با سپاس و قدردانی از او که با قلبی آکنده از عشق و معرفت
محیطی سرشار از سلامت و امنیت و آرامش برای من فراهم آورده و
مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

تشکر و قدر دانی:

از استاد گرامیم جناب آقای دکتر صادق رحیمی شعر باف بسیار

سپاسگزارم چرا که بدون راهنمایی های ایشان تدوین این پایان نامه

بسیار مشکل می بود.

چکیده:

در جهان رقابتی امروزه، مقایسه امری مهم می باشد. افراد همه چیز را با هم مقایسه می کنند. معیار تشابه مفهومی مهم در این زمینه می باشد و به ما کمک می کند تا اندازه ی تشابه دو چیز را تشخیص دهیم. برای این امر، ما در ابتدا درجه تشابه دو چیز را محاسبه می کنیم. بالاترین درجه تشابه بین دو چیز، یعنی بیشترین تشابهی که آن دو نسبت به هم دارند.

در این پایان نامه، اندازه تشابه بین انواع مختلف مجموعه های فازی محاسبه می شود.

خلاصه فصل های این پایان نامه به شرح زیر می باشد:

فصل ۱ این فصل شامل مفاهیم به کار رفته، اساس، تاریخچه و مرور مختصری بر کارهای

انجام شده توسط محققین در زمینه ی اندازه تشابه فازی می باشد.

در فصل ۲ اندازه تشابه بین اعداد فازی تعمیم یافته همراه با ارائه ی مثالهای عددی مطرح

شده است. همچنین برخی از خواص اندازه تشابه اعداد فازی به همراه اثبات آنها ارائه شده است.

در فصل ۳ اندازه تشابه بین فاصله مقادیر مجموعه های فازی مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل ۴ شامل بررسی اندازه تشابه بین مجموعه های فازی شهودی می باشد. که در این رابطه

نیز مثال های عددی و اثبات بعضی از خواص ارائه شده است.

فصل ۵ کاربردهایی از معیار تشابه فازی ارائه شده است.

کلمات کلیدی:

اندازه(معیار) تشابه فازی – اعداد فازی – فاصله – تئوری مجموعه های فازی – اصول تشابه

فصل اول

2 ۱- مقدمه
2 ۱-۱ لزوم و اهمیت طرح موضوع تشابه
۴ ۱-۲ برخی از معیار عمومی معیار تشابه
۴ ۱-۳ مدل های اندازه گیری تشابه
۵ ۱-۳-۱ اندازه گیری تشابه بر مبنای فاصله
۶ ۱-۳-۱-۱ اصول تشابه بر مبنای فاصله
۷ ۱-۳-۲ معیار تشابه بر اساس برجستگی خصوصیات (ساختاری)
۸ ۱-۳-۳ معیار تشابه بر اساس نظریه احتمالات
۹ ۱-۴ نظریه مجموعه فازی
۱۴ ۱-۵ معیار تشابه فازی
۱۵ ۱-۶ معیار تشابه بر اساس برخی از انواع فاصله
۱۵ ۱-۶-۱ معیار تشابه بر اساس غیر α - برش
۱۷ ۱-۶-۲ معیار تشابه بر اساس α - برش
۱۸ ۱-۷ تعمیم تئوری مجموعه ها به زیر مجموعه های فازی
۱۹ ۱-۸ مروری بر تاریخچه و ادبیات فازی

فصل دوم

۲۸ معیار تشابه اعداد فازی تعمیم یافته
۲۸ ۲-۱ مقدمات
۲۹ ۲-۱-۱ اعداد فازی تعمیم یافته
۳۰ ۲-۱-۲ عملیات محاسباتی
۳۳ ۲-۱-۳ روش مرکز ثقل (COG) رایج
۳۴ ۲-۱-۴ اندازه تشابه بین اعداد فازی
۳۶ ۲-۲ روش مرکز ثقل ساده (SCGM)
۳۸ ۲-۲-۱ مرکز ثقل (COG) یک مثلث
۳۹ ۲-۲-۲ مرکز ثقل (COG) یک مستطیل
۴۲ ۲-۲-۳ معیار تشابه بین اعداد فازی تعمیم یافته
۴۶ ۲-۲-۴ برخی از خواص ارائه شده اندازه تشابه
۵۰ ۲-۳ نتیجه

فصل سوم

۵۲ اندازه تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی
۵۳ ۳-۱ فاصله مقادیر اعداد فازی
۵۵ ۳-۲ عملیات محاسباتی
۵۷ ۳-۳ اندازه تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی
۶۱ ۳-۴ برخی از خواص ارائه شده
۶۸ ۳-۵ مثالهای عددی
۷۵ ۳-۶ نتیجه

فصل چهارم

۷۷	----- اندازه تشابه بین مجموعه های فازی شهودی
۷۸	----- ۴-۱ مجموعه های فازی شهودی (IFSs) و مجموعه های مبهم
۷۹	----- ۴-۲ اندازه تشابه بین IFSs
۸۴	----- ۴-۳ برخی از خواص اندازه تشابه T
۸۷	----- ۴-۴ اوزان اصلاح شده ی اندازه تشابه بین IFSs
۹۱	----- ۴-۵ یک کاربرد از معیار تشابه اصلاح شده ی بین IFSs
۹۳	----- ۴-۶ نتیجه

فصل پنجم

۹۵	----- برخی از کاربردهای اندازه تشابه فازی
۹۵	----- ۵-۱ اندازه تشابه فازی و یافتن کوتاهترین مسیر فازی در یک شبکه
۱۰۲	----- ۵-۲ برخی کاربردهای دیگر

فهرست اشکال

۱۲	-----	شکل ۱-۱
۱۳	-----	شکل ۱-۲
۳۰	-----	شکل ۲-۱
۳۷	-----	شکل ۲-۲
۳۹	-----	شکل ۲-۳
۴۰	-----	شکل ۲-۴
۴۵	-----	شکل ۲-۵
۵۴	-----	شکل ۳-۱
۶۹	-----	شکل ۳-۲
۷۲	-----	شکل ۳-۳
۹۷	-----	شکل ۵-۱
۱۰۴	-----	شکل ۵-۲

فصل اوّل

فصل اول

۱- مقدمه

۱-۱ لزوم و اهمیت طرح موضوع تشابه:

تشابه، یک رابطه‌ی دو تایی است که با مقایسه‌ی دو شی با هم، باتوجه به ملاک‌های تعیین شده، وجه اشتراک دو شی را تعیین می‌کند. مفهوم تشابه یکی از بنیادی‌ترین مفاهیم در زمینه‌های علمی می‌باشد. بطور اخص در ریاضیات و روشهای هندسی تشابه در زمینه‌های مطالعات تشخیص تناسب‌ها به کار می‌رود. در تکسونامی^۱ مفهوم تشابه نیز به کار گرفته شده است. در تئوری مجموعه‌های فازی نیز از تشابه استفاده‌های بسیاری شده است. این موضوع در مواردی از قبیل مدیریت، دارو سازی و هواشناسی کاربرد دارد. در زیست‌شناسی مولکولی مسئله‌ی مهم، دنباله‌های متشابه بعنوان زوج‌های (جفت‌های پروتئین) از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. در علم ژنتیک یا ژن‌شناسی که یک دانش زیست‌شناسی است و به وراثت و تفاوت‌های جانداران می‌پردازد، اهمیت تشابه را می‌توان یافت. به وسیله‌ی قوانین و مفاهیم موجود در این علم می‌توان به تشابه و یا عدم تشابه بین دو موجود نسبت به یکدیگر پی برد. همچنین تشابه درمانی، یکی از شاخه‌های پزشکی می‌باشد. برخی از پزشکان معتقدند که تشابه درمانی، درمان‌کننده‌ی همه‌ی بیماری‌ها می‌باشد. بنابراین به اهمیت تشابه در علم پزشکی به منظور تشخیص بیماری می‌توان اشاره کرد. نقشه‌ها نیز تصویری از دنیای واقعی در ابعاد کوچکتر و متشابه با آن است. نقشه‌های جغرافیایی تصویرهای متشابه‌ی از وضعیت واقعی را نشان می‌دهند. همچنین برای مهندسان راه و ساختمان و معماران یا طراحان، هنگام

^۱taxonomy

ساختن یک پروژه ساختمانی یا یک وسیله، طراحی ماکتی که مشابه با ساختمان یا وسیله اصلی است، کمک مهمی به حساب می آید.

درجه تشخیص مردم از تشابه دو چیز یقیناً بطور بنیادی بر افکار و رفتار آنها تأثیر می گذارد. یکی از انگیزه های اساسی و اصلی نظریه پردازی در بین سیاست مداران و افرادی که به امور اجرایی می پردازند، براساس مجموعه داده ها و تشابه موجود در بین آنها می باشد. شناخت و ترغیب مردم در تشخیص بوهای خوش نیز دقیقاً همین وضعیت را دارد. بنابراین تشابه، عنصر محوری در دریافت ها و تشخیص ها بوده است. یا به عبارتی متغیری است که انگیزه ای برای رفتارهای مؤثر و مشخص. مفهوم تشابه حتی در نظریه ها و آزمایشهای روانشناسی نقشی اساسی ایفا می کند. برای مثال در بسیاری از آزمایش ها و آزمون های روانکاوی از مردم خواسته می شود که قضاوتی مستقیم یا غیر مستقیم در مورد اشیاء متشابه انجام دهند. روشهای آزمونی مختلف تحت مطالعه قرار می گیرد، ولی عادی ترین و مرسوم ترین آنها همان است که آیا اشیاء یکسانند یا تفاوتی دارند. یا شاید از آنها سؤال شود که شماره هایی را بین یک تا هفت بسازند و بعد در مورد اشیاء براساس احساساتشان تصمیم به شماره گذاری کنند. (بر این اساس که، یک ماکسیم تشابه و یا هفت ماکسیم عدم تشابه را نمایانگر سازند). برای مثال مفهوم تشابه در مورد مشاوره های قبل ازدواج دو فرد، روانشناسان معتقدند اگر دو فرد بیشتر از ۶۰ درصد با هم تشابه داشته باشند، آن گاه توانایی سازگاری و تغییر ۴۰ درصدی و سازگاری آنها وجود دارد. از تشابه برای اندازه گیری بهره هوشی (I.Q) در خصوص هوش انسان، استفاده شده است. (بخصوص در نظریه هایی در مورد تشخیص، تعریف ها، کلاس بندی کردن اشیاء). نیز در مواردی که احتمالاً افراد، اشیاء را با هم به دلیل ابهام غیر قابل تشخیص می دانند. همچنین در رده های محصولات تهیه شده توسط شرکت های مختلف، مفهوم تشابه نقش های مهمی را ایفا می کند. معمول ترین پیش فرض یا شاید فرض، ممکن است این باشد که یک محصول را توسط مردم و قضاوت آنها بر اساس تشابه با ایده آل ترین و بهترین مشابه آن بسنجند [۱۵].

۲-۱ برخی از معیار های عمومی تشابه

تعداد زیادی از ملاک های تشابه در منابع و مقالات پیشنهاد گردیده است. از آن جا که هنوز بهترین نوع تشابه وجود ندارد و آنچه صورت می پذیرد بر اساس درجات بین دامنه ی [۱،۱-] و [۱،۰] به عنوان برد یا نگاره ی یک نگاشت مورد استفاده قرار می گیرد.

برخی از معیار های تشابه عبارتند از:

- ۱- معیار تشابه می تواند به منظور مقایسه بین دو گزارش و دو سند یا یک سند و یک گزارش باشد.
- ۲- معیار تشابه بر اساس درجه بندی اهمیت اسناد که می توان آنها را طبقه بندی کرد.
- ۳- معیار تشابه، تابعی است که درجه تشابه بین دو شیء را بررسی می کند.
- ۴- مقادیر ۰ یا ۱- نشان گر حداقل تشابه هستند. (تشابه نا مناسب). و عدد ۱ نشان گر حداکثر تشابه می باشد. (تشابه مطلق)

۳-۱ مدل های اندازه گیری تشابه

سه مدل برای سنجش تشابه وجود دارد.

- ۱- اندازه گیری تشابه بر مبنای فاصله
- ۲- اندازه گیری تشابه بر مبنای خصوصیات
- ۳- اندازه گیری تشابه بر مبنای احتمالات

1-3-1 اندازه گیری تشابه بر مبنای فاصله

یکی از مؤثرترین نظریه های تشابه بر اساس ادراک روانشناختی فواصل می باشد. پیش فرض اساسی در بسیاری از نظریه های روانشناختی تشابه را در درک نزدیک بودن اشیاء بر روی یکدیگر و عدم تشابه را در درک دور بودن از یکدیگر (به لحاظ روانی) تعبیر می نماید. روش مقیاس چند بعدی در قضاوت راجع به تشابه (یا هر گونه قیاس تقریبی برای اندازه گیری) فضای روانی را ایجاد می کند که در آن تشابه بطور معکوس با فاصله ارتباط دارد. مقیاس های چند بعدی در برنامه ریزی های کامپیوتری متشکل است از چند محور مختصات که هر کدام بیان گر پیش فرض های فضاهای روانشناختی هستند. در چنین فضایی، محرکی که مورد سنجش قرار گرفته با اشیایی سنجیده می شود که بسیار به آن نزدیک (متشابه) هستند. دو معیار مشهور (متعارف) در مقیاس های چند بعدی به فاصله اقلیدسی موسومند. برای مثال (فاصله پرواز پرنده ها) یا فاصله بلوک های شهری. اگر محور مختصات محرک A را در یک فضای n - بعدی به صورت $(x_{A_1}, \dots, x_{A_n})$ باشد. در آن صورت فاصله محرک A تا یک محرک دیگر B به صورت زیر نمایانده می شود:

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{A_i} - x_{B_i})^2} \quad (1-1)$$

وقتی $n = 2$ باشد، معادله ی فوق به صورت فرمول فیثاغورث در می آید.

در مورد فواصل (فاصله بلوک شهری) فاصله دو محرک به صورت زیر تعریف می شود:

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^n |x_{A_i} - x_{B_i}| \quad (1-2)$$

شپارد^۱ [۳۲] پیشنهاد می کند که قانون کلی برای فاصله و ادراک تشابه به صورت نمایی زیر می باشد.

$$S(A, B) = e^{-d(A, B)} \quad (۱-۳)$$

پیشنهاد بعدی او این است که این تابع نمایی، توصیف گر میزان احتمالی است که دو محرک در یک ناحیه فضایی مشترک قرار گرفته و پاسخ یکسان ارائه دهند که او این ناحیه را ناحیه نتیجه گیری خوانده است. شپارد مشاهده کرد که ناکارایی (خطای) تابع نمایی در مورد اشیایی که از یکدیگر قابل تشخیص نیستند رخ می دهد، اگر چه بعداً نشان داده شد که این مسئله می تواند با روشهایی در احتمالات و استفاده از روش تابع تشابه [۳۲] شپارد در لحظه ی تصمیم گیری قابل حل باشد. همه انواع فاصله از خواص معینی پیروی می کنند، که این خواص به قضایای فاصله معروفند. برای مثال فاصله ی بین A تا B با فاصله بین B تا A برابر باشند. اینک اگر تشابه به طور معکوس مرتبط با فاصله روانشناختی باشد، در آن صورت ادراک تشابه باید از این قضایا پیروی کند. بنابراین تلاش های عددی قابل توجه برای معتبر بودن قضایای فاصله معرفی گردیده است.

1-۱-۳-۱ اصول تشابه بر مبنای فاصله

چهار اصل تشابه بر مبنای فاصله عبارتند از:

۱- اصل یگانگی با خود (تساوی):

فاصله تشابه با خود برای تمام نقاط B, A $d(A, A) = d(B, B)$ و در نتیجه $S(A, A) = S(B, B)$. برای

تمام نقاط منتخب B, A

^۱Shepard

۲- اصل کمینگی (حداقل):

برای هر دو نقطه A, B ، $d(A, A) < d(A, B) < d(A, A)$ بنابرین $S(A, B) < S(A, A)$.

۳- اصل تقارن:

برای هر دو نقطه A, B بنابرین $d(A, B) = d(B, A)$ و $S(A, B) = S(B, A)$.

۴- اصل نامساوی مثلثی:

برای نقاط A, B و C نامساوی مثلثی می رساند که اگر محرک های A, B متشابه باشند و همچنین

محرک های A, C متشابه باشند، آن گاه محرک های A, B نیز متشابه هستند. (تعدی)

۲-۳-۱ معیار تشابه بر مبنای خصوصیات (ساختاری)

تی ورسکی^۱ [۱۵] در مقابل اصول موضوعه فاصله، معیاری را ارائه نمود که به طور جزئی تر می

تواند خصوصیات اشیاء مورد مقایسه در تشابه یا عدم تشابه دخیل باشد.

فرض کنید که $g(A \cap B)$ بر ویژگی های مشترک بین A, B دلالت دارد و $g(A - B)$ بر

ویژگی های منحصر به فرد محرک A دلالت داشته باشد. در آن صورت تی ورسکی [۱۵]، مدل سازی

را که محرک A نسبت به محرک B دارا می باشد را بر اساس معادله ی زیر بیان می کند.

$$S(A, B) = \alpha g(A \cap B) - \beta g(A - B) - \gamma g(B - A) \quad (۱-۴)$$

^۱Tversky

به قسمی که α, β, γ ثابت هایی هستند که ممکن است از فردی به فردی و موضوعی به موضوعی دیگر و یا ساختاری به ساختار دیگر تغییر کنند. بر اساس این مدل، برجستگی های مشترک، باعث افزایش تشابه گردیده، حال آن که خواص منحصر به فرد در یک محرک باعث کاهش تشابه می شود. مزیت دیگر مدل مقایسه ی خصوصیات این است که می تواند شمارشگر خطاها در هر مقدار فاصله ای باشد.

۳-۱-۳ معیار تشابه بر اساس نظریه ی احتمالات

همه (معیار های تشابه) که تا کنون مورد بررسی قرار گرفت، فرضشان بر این بود که تکرار نمایان یک محرک مشخص، همیشه باعث استخراج نتیجه ی یک نوع ادراک و برداشت است. بدین معنی که همیشه پیش فرضشان بر اساس تعیین ادراک است. اما بسیاری از نظریه پردازان مباحث دیگری را مطرح می کنند. بدین گونه که اطلاعات که شکل دهنده ی ادراک، می باشد با زمان تغییر می کنند و بنابراین اعتقاد دارند که مفهوم ادراکات باید بر اساس نظریه ی احتمالات باشد. این موضوع در تطابق با تجربیات شخصی بوده به ویژه در مورد ذائقه فرد در رابطه با محصولات مختلف و همچنین نگرشهای سیاسی فرد راجع به مردم، مراحل زیست شناختی و تولید ادراکات دخیل می باشد. تغییرات شیمیایی و فیزیکی که با محرک ها مرتبط می باشند باعث ایجاد محدودیت هایی در توانایی های ما برای شناخت اطلاعات گردیده و همگی اینها همه ی مدل های مطلوب را به گونه ای بر اساس ادراکات احتمالی پیشنهاد می کند.

مدل های احتمالی بسیاری پیشنهاد شده است در مجموع تمامی این مدل ها از دو فرض اساسی

که ملهم از دو ادعای دارستون^۱ [۱۵] می باشد سرچشمه گرفته است. هم چنین توسط نظریه ی

^۱Thurstone

"دریافت سیگنال"^۱ ارائه شده توسط تانر^۲ و وتز^۳ [۱۵] که هردو عنوان گر این مطلب اند که ادراک برگرفته شده از یک محرک به طور احتمالاتی درنمایش های مختلف همان محرک تغییر می کند. یک نظریه خاص که قاعده تصمیم گیری خوش تعریف می باشد نیز توصیف گر این مطلب است که پاسخ برگرفته شده از یک ادراک در هر مقدار لحظه ای چگونه انتخاب می گردد برخی از مدل های احتمالاتی بیان گر این پیش فرض هستند که تشابه بطور معکوسی با فواصل روانشناختی مرتبط است که در مقاله های انیس^۴ و جانسون^۵ ارائه شده است. حال آن که مدل های دیگر بر اساس مفهوم "دریافت سیگنال ها" نباشد. و هم چنین کران های تصمیم گیری در مقالات اشبای^۶ و پرین^۷ نیز ارائه شده است.

با فرض این که ادراک اساساً مفهومی احتمالی باشد یقیناً مدل پیش بینی ها تغییر خواهد کرد. برای مثال، تمام مدل هایی که فرض آنها بر اساس ادراکات احتمالاتی است حداقل برای بعضی از اصول موضوعه ی فاصله خطاهایی را منظور می کند.

۴-۱ نظریه مجموعه فازی

در این بخش به بررسی برخی از تعاریف نظریه ی فازی می پردازیم [۱۵].

^۱Signal-detection

^۲Tanner

^۳Swets

^۴Ennis

^۵Johnson

^۶Ashby

^۷Perrin

تعریف ۱-۱: مجموعه قطعی یا یک مجموعه کلاسیک گردایه ای است از اشیاء قابل تمایز و

مختلف، که به این اشیاء عناصر A گفته می شود. یک مجموعه قطعی در مجموعه مرجع X تعریف می شود. و می توان آن را به صورت

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\} \quad (1-5)$$

$$\mu_A(x): X \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{به قسمی که:}$$

تابع مشخصه باشد و تعریف آن به صورت زیر می باشد:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \quad (1-6)$$

تعریف ۱-۲: تابع مشخصه $\mu_A(x)$ ، یک مجموعه قطعی $A \subseteq X$ دو مقدار ۰ و ۱ را به هر یک از

عناصر X تخصیص می دهد و این تابع را می توان به تابع دیگری به نام $\mu_{\bar{A}}$ تعمیم داد به قسمی که

اعدادی که به هر عنصر X (مجموعه مرجع) منسوب می شوند، در فاصله اعداد حقیقی بین $[0, 1]$ قرار

داشته باشند. یعنی $\mu_{\bar{A}}: X \rightarrow [0, 1]$ عدد نسبت داده شده معروف، به درجه ی عضویت یک عنصر در

مجموعه A است. تابع $\mu_{\bar{A}}$ را تابع عضویت می نامیم و \bar{A} را به صورت رابطه ی زیر نشان می دهیم:

$$\bar{A} = \{(x, \mu_{\bar{A}}(x)); x \in X\} \quad (1-7)$$

که این تابع برای هر عنصر $x \in X$ یک مجموعه فازی را تعریف می کند. $\mu_{\bar{A}}(x)$ تعیین کننده درجه

عضویت x در \bar{A} می باشد. هرچه $\mu_{\bar{A}}(x)$ به یک نزدیک تر باشد، میزان تعلق x به \bar{A} بیشتر می

باشد.

تعریف ۳-۱: فرض کنید \tilde{A} مجموعه ای فازی و α عددی در بازه بسته $[0, 1]$ باشد، در این

صورت مجموعه قطعی A_α را که به صورت زیر تعریف می کنیم

$$A_\alpha = \{x \in X; \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (1-8)$$

α -برش \tilde{A} می گوئیم.

مجموعه قطعی A_{α^+} را به صورت رابطه ی

$$A_{\alpha^+} = \{x \in X; \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\} \quad (1-9)$$

تعریف می کنیم و آن را α -برش قوی \tilde{A} می خوانیم.

تعریف ۴-۱: مجموعه فازی \tilde{A} روی مجموعه مرجع R عدد فازی گوئیم به شرطی که تابع

عضویت آن دارای مشخصه های زیر باشد:

۱- تابع $[\cdot, 1]: R \rightarrow [\cdot, 1]$ باید پیوسته باشد.

۲- به ازای تمام مقادیر x ، $x \in (-\infty, c] \cup [d, \infty)$ باید $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ باشد.

۳- بر روی بازه $[c, a]$ اکیداً صعودی و بر روی بازه $[b, d]$ اکیداً نزولی باشد.

۴- برای همه $x \in [a, b]$ داریم: $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

تعریف ۵-۱: تکیه گاه مجموعه فازی \tilde{A} عبارت است از یک زیرمجموعه قطعی X که به صورت

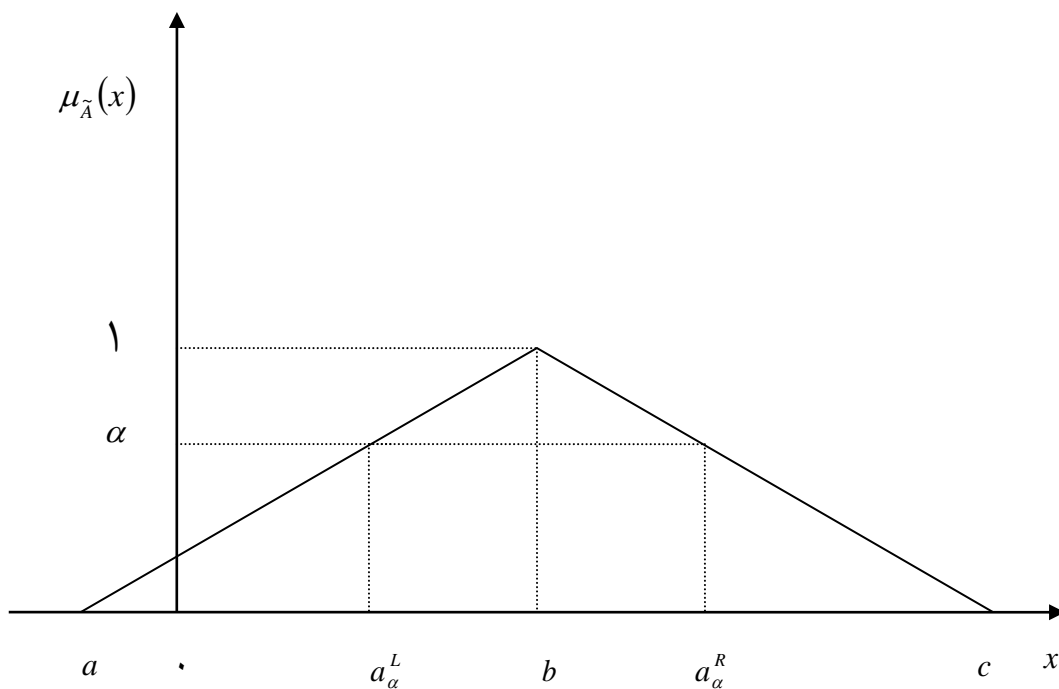
زیر تعریف می شود:

$$Supp(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (1-10)$$

تعریف ۶-۱: عدد فازی $\tilde{A} = (a, b, c)$ را یک عدد فازی مثلثی می‌گوییم به شرط آن که تابع عضویت آن به صورت زیر بیان شده باشد.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1 & x = b \\ \frac{x-c}{b-c}, & b < x < c \\ 0 & x \geq c \end{cases} \quad (1-11)$$

شکل ۱-۱ در زیر نمایش‌گر عدد فازی مثلثی \tilde{A} است.



شکل ۱-۱ یک عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a, b, c)$

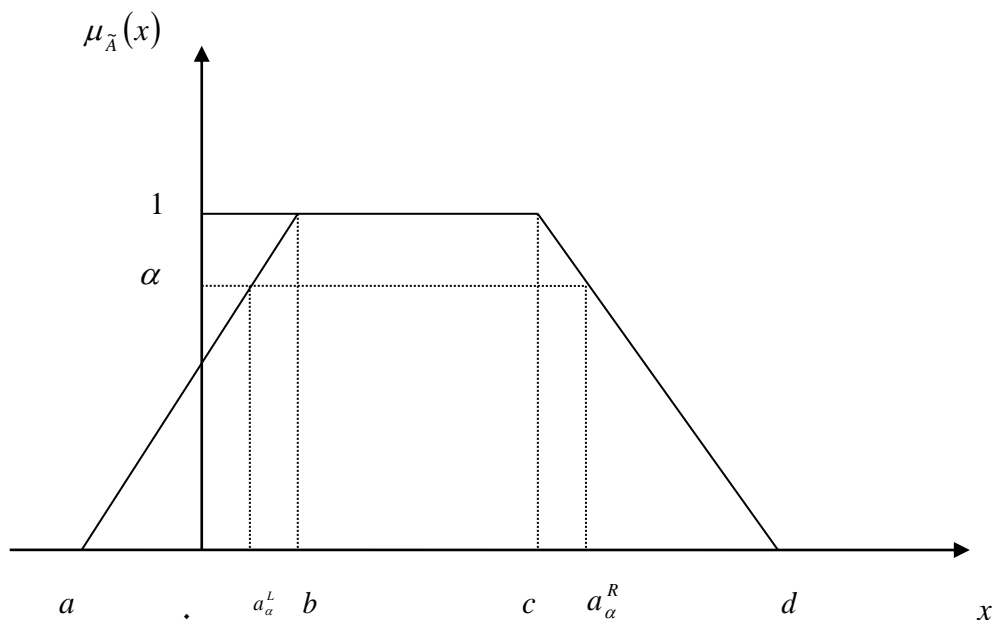
علاوه بر این α -برش عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a, b, c)$ فاصله بسته زیر می‌باشد:

$$A_{\alpha} = [a_{\alpha}^L, a_{\alpha}^R] = [a + (b-a)\alpha, c + (b-c)\alpha] \quad \alpha \in (0, 1] \quad (1-12)$$

تعریف ۱-۷: عدد فازی $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ را عدد فازی دوزنقه ای \tilde{A} می گوییم به شرط آن که تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{x-d}{c-d}, & c \leq x \leq d \end{cases} \quad (1-13)$$

شکل ۱-۲ در زیر نمایش گر عدد فازی دوزنقه ای \tilde{A} است.



شکل ۱-۲ یک عدد فازی دوزنقه ای $\tilde{A} = (a, b, c, d)$

بعلاوه α -برش عدد فازی دوزنقه ای $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ به صورت فاصله بسته زیر می باشد:

$$A_{\alpha} = [a_{\alpha}^L, a_{\alpha}^R] = [a + (b-a)\alpha, d + (c-d)\alpha] \quad \alpha \in (0, 1] \quad (1-14)$$

۵-۱ معیار تشابه فازی

در نظریه مجموعه های فازی، معیار تشابه مقیاسی، بسیار حائز اهمیت است. معیار تشابه فازی

توصیف گر درجه تشابه بین دو زیر مجموعه فازی است.

فرض می کنیم که $F(U)$ بر مجموعه فازی با دامنه تغییرات U دلالت دارد. برای $\tilde{A} \in F(U)$ و

$u \in U$ ، $\mu_{\tilde{A}}(u)$ تابع عضویت u برای \tilde{A} تعریف می شود و هم چنین \tilde{A}^c دلالت دارد بر مجموعه

متمم \tilde{A} ، به قسمی که آن را با رابطه ی

$$\mu_{\tilde{A}^c}(u) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(u) \quad (1-15)$$

نمایش می دهیم.

تعریف عمومی معیار تشابه فازی به صورت زیر داده شده است:

تعریف ۸-۱ [۲۵]: تابع حقیقی $S: F(U) \times F(U) \rightarrow [0, 1]$ معیار تشابه فازی $F(U)$ است اگر و

فقط اگر S در خواص زیر صدق کند.

$$(1) \quad S(\tilde{A}, \tilde{B}) = S(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad \forall \tilde{A}, \tilde{B} \in F(U) \text{ داریم:}$$

$$(2) \quad S(\tilde{A}, \tilde{A}^c) = 0 \quad \text{اگر } \tilde{A} \in F(U) \text{ آن گاه}$$

$$(3) \quad S(\tilde{A}, \tilde{A}) = 1 \quad \forall \tilde{A} \in F(U) \text{ داریم:}$$

$$(4) \quad \text{برای } \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in F(U), \forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \text{ اگر } \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{C} \text{ آن گاه } S(\tilde{B}, \tilde{C}) \geq S(\tilde{A}, \tilde{C}) \text{ و } S(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq S(\tilde{A}, \tilde{C})$$

تعریف ۹-۱ [۲۷]: تابع حقیقی $S: F(U) \times F(U) \rightarrow [0,1]$ به عنوان مقیاس تشابه فازی $F(U)$

تعریف می شود به شرط آن که S در خواص زیر صدق کند:

$$(1) \text{ برای } \forall \tilde{A}, \tilde{B} \in F(U) \text{ داریم: } S(\tilde{A}, \tilde{B}) = S(\tilde{B}, \tilde{A}).$$

$$(2) \text{ اگر } \mu_{\tilde{A}^c}(u) \in \{0,1\} \text{ آن گاه } S(\tilde{A}, \tilde{A}^c) = 0.$$

$$(3) \text{ برای } \forall \tilde{A} \in F(U) \text{ داریم: } S(\tilde{A}, \tilde{A}^c) = 1.$$

$$(4) \text{ برای } \forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in F(U) \text{ اگر } \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{C} \text{ آن گاه } S(\tilde{A}, \tilde{C}) \leq \min(S(\tilde{A}, \tilde{B}), S(\tilde{B}, \tilde{C})).$$

۶-۱ معیار تشابه بر اساس برخی از انواع فاصله

بدیهی ترین نوع محاسبات مجموعه های فازی در مورد تشابه براساس فواصل آنها می باشد،

چگونگی تعبیر و نشان دادن یک تابع در بسیاری از بررسی ها بر اساس رابطه ی بین دو تصور صورت

می پذیرد. دو مورد در ذیل مطرح شده اند.

۱-۶-۱ معیار تشابه براساس غیر α - برش

در منابع مجموعه های فازی تعاریف سودمندی برای فاصله ارائه شده است. ساده ترین آنها اندازه

گیری عدم توافق در مجموعه های فازی \tilde{A}, \tilde{B} می باشند.

$$S_D = 1 - \text{Sup} \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) \quad (1-16)$$

به طوری که $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ مینیمم t - نرم باشد، یعنی

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x) \} \quad \forall x \in X \quad (1-17)$$

در واقع این همان اندازه ای است که در ترکیب ماکسیمم، مینیمم استفاده شده است. معیار عدم توافق یک عدد قطعی در حوزه $[0,1]$ است.

آنچه از این پس مطرح می شود اندازه گیری فاصله براساس مجموعه های فازی از نوع تشابه دوزنقه ای (یا به عبارتی مجموعه های فازی که تابع عضویت آنها را می توان بر اساس فرم دوزنقه ای دنبال کرد).

در حالت دوزنقه ای مجموعه های فازی، را می توان با یک بردار چهار مؤلفه ای مشخص نمود، به این ترتیب که نقاط انتهایی، بالایی و پایینی هستند و تکیه گاه در نظر گرفته می شوند. برای مثال $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ در این حالت تشابه بین \tilde{A}, \tilde{B} را می توان به صورت فرمول (۱-۲) که توسط چن^۱ [۱۵] ارائه شده است توصیف کرد:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|}{4} \quad (1-18)$$

اگر فضای مجموعه های فازی نرمال شده باشد، در آن صورت $S(\tilde{A}, \tilde{B}) \in [0,1]$. مزیت فرمول فوق سادگی و تقلیل در پیچیدگی های محاسباتی آن می باشد. در هر صورت زیان باری آن منجر به درجاتی از تشابه در اشکال مختلف و غیر متشابه می گردد.

^۱Chen

۲-۶-۱ معیار تشابه بر اساس α -برش

اکثر تعاریف فاصله بر اساس α -برش دو مجموعه فازی بیان گردیده است. برای مثال:

اندازه بی نهایت هاسدورف^۱:

$$HM_{\infty}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \text{Sup}HM(\tilde{A}_{\alpha}, \tilde{B}_{\alpha}) \quad (1-19)$$

$\alpha \geq 0$

اندازه * هاسدورف: (

$$HM_{*}(\tilde{A}, \tilde{B}) = HM(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1) \quad (1-20)$$

که در آن:

$$HM(\tilde{A}, \tilde{B}) = \text{Max}\{\text{Supinf } d(a, b), \text{Supinf } d(a, b)\} \quad (1-21)$$

$$a \in \tilde{A}, b \in \tilde{B} \quad a \in \tilde{B}, b \in \tilde{A}$$

و همچنین $d(a, b)$ عبارت است از فاصله اقلیدسی معمولی.

اندازه بی نهایت کافمن^۲ و گوپتا^۳:

$$\Delta_{\infty}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \text{Sup}\Delta(\tilde{A}_{\alpha}, \tilde{B}_{\alpha}) \quad (1-22)$$

$\alpha \geq 0$

اندازه * کافمن و گوپتا: (

$$\Delta_{*}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \Delta(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1) \quad (1-23)$$

$\alpha \geq 0$

^۱Hausdorff

^۲Kaufmann

^۳Gupta

که در آن:

$$\Delta(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) = \frac{(|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|)}{2(\beta_2 - \beta_1)} \quad (1-24)$$

$\alpha \geq 0$.

که $[a_1, a_2]$ و $[b_1, b_2]$ به ترتیب تکیه گاههای \tilde{A}_α و \tilde{B}_α هستند. و $[\beta_1, \beta_2]$ تکیه گاههای هر دوی \tilde{A}_α و \tilde{B}_α بوده و $\alpha \in [0, 1]$.

همه ی اندازه های هاسدورف و اندازه کافمن و گوپتا هر دو مقدار قطعی در بازه $[0, \infty)$ هستند.

۷-۱ تعمیم تئوری مجموعه ها به زیر مجموعه های فازی [۳۷]

دو محقق به نام های دوبویس^۱ و پراد^۲ تشابه مجموعه های فازی که تعمیمی از تابع تشابه

مجموعه های کلاسیک است را پیشنهاد دادند. این تعمیم بر تعاریف کاردینالی و تفاضل مجموعه

فازی تکیه دارد.

عدد کاردینالی (power) یک زیر مجموعه فازی \tilde{A} از مجموعه مرجع U به صورت رابطه ی

زیر تعریف می شود:

$$|\tilde{A}| = \sum_{u \in U} \mu_{\tilde{A}}(u) \quad (1-25)$$

اگر تکیه گاه \tilde{A} نامتناهی باشد، آن گاه $power(\tilde{A})$ به صورت زیر تعریف می شود:

^۱Dubois

^۲Prade

$$|\tilde{A}| = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_A(x) dx \quad (1-26)$$

عملیات زیر را بین زیر مجموعه های فازی تعریف می کنیم:

$$\forall x \in U, \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] \quad (1-27)$$

$$\forall x \in U, \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] \quad (1-28)$$

$$\forall x \in U, \mu_{\tilde{A} \Delta \tilde{B}}(x) = \max[\min(\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)), \min(1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))] \quad (1-29)$$

$\tilde{A} \Delta \tilde{B}$ یک زیر مجموعه فازی است که تقریباً عنصر یا به مجموعه \tilde{A} تعلق دارد و به \tilde{B} تعلق ندارد یا برعکس.

۸-۱ مروری بر تاریخچه و ادبیات فازی و تشابه فازی

منطق فازی از سال ۱۹۶۵ میلادی که توسط لطفعلی زاده در مقاله ای با عنوان "مجموعه های فازی" به صورت رسمی به مجامع علمی ارائه گردید، تا کنون راه درازی را پیموده است. از آن زمان تا کنون مفاهیم و جنبه های منطق فازی بوسیله ی ریاضی دانان، دانشمندان، و مهندسیین سراسر دنیا مستقلاً مورد بررسی قرار گرفته است. البته در بدو کار شاید به دلیل وجود شک در عنوان فازی، این مفاهیم چندان جدی گرفته نشد. در دهه های اخیر به دلیل به کار گیری منطق فازی در ساخت محصولات خانگی، بار دیگر منطق فازی به عنوان یک مفهوم علمی کاربردی با استقبال دانشگاهیان و صنعتگران روبرو شد. طی چند سال اخیر تنها دانشمندان و صنعتگران ژاپنی متجاوز از ۱۰۰۰ فناوری مبتنی بر منطق فازی را به ثبت رسانده و از صدور محصولات مثل یخچال، ماشین لباسشویی و... که بر اساس مفاهیم فازی ساخته شده اند، به شکوفایی اقتصادی ژاپن کمک نموده اند [۳۹].

نظریه ی مجموعه های فازی توسط لطفعلی زاده ارائه و پیشنهاد گردید [۳۶]. در ریاضیات فازی اندازه های تشابه جایگاه مؤثری داشته و اکثر محققین در دنیای واقعی از آن مکرراً استفاده کردند. بر

این اساس معیار تشابه در زمینه های مختلف مانند تشخیص الگو، آموزش ماشین ها، تصمیم گیری و پیش بینی بازار و معیارهای فراوان دیگر نقشی اساسی را ایفا کرده است. در سالهای اخیر اندازه تشابه زیادی، بین مجموعه های فازی، تحقیق و پیشنهاد شده است. ویک^۱ و همکارانش [۳۷] تعداد نوزده اندازه تشابه را در مجموعه های فازی مقایسه و کارایی آنها را بررسی نمودند. تارکسن^۲ و هانگ^۳ مجموعه های فازی را برای معیار تشابه به کار گرفته و روش تقریب تشابهی طرح دلائل (AARS) پیشنهاد نمودند که برتری نظریه فازی را بر برهان های تشابهی دیگر در دستگاه های مختلف از دیدگاه مهارت سنجی نشان می دهد. بیلجیک^۴ و تارکسن مراحل تحقیقاتی را پیشنهاد کردند که به قواعد آتش (fire rules) موسوم هستند و در الگوهای مقایسه ای تطبیقی برای معیار تشابه استفاده می شود. همچنین آنها دو روش پیشنهاد کردند که در هر دو از خواص معیار تشابه استفاده می شود. پاپیس^۵ و کاراکاتیلیدز^۶ مقادیر فازی مرتبط با معیار تشابه را در خواص مختلف ارائه و مقایسه نمودند. معیارهایی که اندازه ها را بر اساس اجتماع و اشتراک امتحان می کرد. یکی براساس حداکثر اختلاف و دیگری بر اساس اختلاف و نیز حاصل جمع تعداد درجات عضویت متناظر با آنها به کار گرفته شد. مشاهده شد که تعداد زیادی از خواص در تمام اندازه گیری ها مشترک است. ولی به هر صورت، برخی از خواص برای همه ی آنها پا بر جا نیست.

^۱zwick

^۲Turksen

^۳zhong

^۴Bilgic

^۵Pappies

^۶Karacatilides

هیانگ^۱ و همکارانش [۱۴] دو معیار تشابه که یکی بر اساس تشابه بین مجموعه های فازی و دیگری برای تفاوت های عناصر مجموعه های فازی هستند را پیشنهاد دادند. آنها مثالی ارائه دادند که نشان می دهد معیار تشابه پیشنهادی می تواند حتی در آنالیز (تحلیل) رفتارها در یک سازمان بکار گرفته شود.

چن و یارانش [۱۵] کار پاپیس و کاراکانیلیدز [۱۵] را گسترش داده و مقاله ای ارائه دادند که مقادیر فازی را در معیارهای مختلف تشابه با یکدیگر مقایسه می کند. مقیاس هایی که بر اساس مدل های هندسی امتحان گردید، همچنین نگرش هایی بر اساس تئوری مجموعه ها و همچنین تابع تطبیق S به کار گرفته شد. نتیجه آنکه نشان داده شده است که خواص زیادی هستند که برای تمام اندازه گیری ها مشترک می باشند و نیز بسیاری از خواص برای همگی تطابق ندارد. چن [۱۵] دو معیار مقایسه را برای اندازه گیری درجه تشابه بین دو مجموعه ی مبهم به کار گرفت. معیار تشابه پیشنهاد شده می تواند روش مفیدی برای اندازه گیری درجه تشابه بین دو مجموعه ی مبهم باشد. ونگ^۲ [۳۴] دو روش معیار تشابه را پیشنهاد می کند که معیار تشابه بین مجموعه ی فازی و همچنین عناصر را به ترتیب بررسی می نماید. این معیارهای تشابه می توانند به آسانی محاسبه و ظاهراً روابط بین تشابه قابل اعتماد را بیان می نماید. مثالهایی برای تشریح مقایسه ی بین اندازه گیری های قبلی و این روش ارائه شده است. چن [۱۵] مقاله ای ارائه می دهد که در آن معیار های تشابه بین مجموعه های مبهم و عناصرشان بررسی می شود و نیز مثالی هم برای موارد و مسائل چگونگی مدیریت آنالیز رفتارها در این مقاله بر اساس معیار تشابه و کاربرد آن ارائه می گردد. ظاهراً روش پیشنهادی فوق می تواند وسیله ی مفیدی برای اداره کردن مشکلات در تحلیل رفتارها به طرز

^۱Hyung

^۲Wang

مفیدی به کار گرفته شود. سننتینی^۱ و جین^۲ [۳۱] یک معیار تشابه را براساس منطق فازی توسعه دادند که منجر به نمایش ساختارهای مختلف در آزمایش های تطابقی در مورد انسان گردید، نامی که به این مدل اعطا گردید (FFC)^۳، به معنی تقابل خصوصیات فازی و نیز تعمیمی است به حوزه ی عمومی تر در مدل تقابلی مربوط به ورسکی. آنها نشان دادند که چگونه مدل FFC می تواند برای مدل ارزشیابی و تشخیص در قضاوت های مختلف فازی در مورد خواص به کار گرفته شود. همچنین وابستگی خواص به یکدیگر را بر اساس اندازه گیری های فازی به نمایش گذاشته شده است.

لی^۴ و چنج^۵ [۱۵] روش جدیدی را در آنالیز ریسک بر اساس معیار تشابه با اعداد فازی تعمیم یافته ارائه نمودند. نخست این که، روشی به نام مرکز ثقل ساده ارائه شده که مرکز ثقل یا امید ریاضی اعداد فازی تعمیم یافته را تعیین می کند. مفاهیم مختلف زیادی در رابطه با اندازه گیری تشابه بین مجموعه های فازی در ادبیات فازی پیشنهاد شده است. این گونه اندازه گیری ها نمی توانند به طور غریزی مجموعه های فازی را از دیدگاه معیار تشابه مدیریت نمایند. برای رفع این نقصان لی و چنج تعریفی ارائه دادند که به نام درجه تشابه بین (IFSS)^۶ تعریف شده است. از آن پس معیارهای تشابه جدیدی را پیشنهاد شده که به طور ذاتی بین مجموعه های فازی برقرار می باشند و نیز معیار تشابه پیشنهادی خود را در مورد اینگونه مجموعه های فازی ذاتی برای تشخیص الگو به کار می گیرد.

^۱Santini

^۲Jain

^۳Fuzzy Feature Contrast

^۴Li

^۵Cheng

^۶Intuitionistic fuzzy sets

دو شخص به نام های چن و چن [۸] روش مرکز ثقل ساده را به کار گرفته و روش جدیدی را برای تعیین درجه ی تشابه بین اعداد فازی تعمیم یافته پیشنهاد می کند. روش این دو چنان است که مرکز گرانش را به شیوه ی دوزنقه ای یا مثلثی محاسبه می کند و در واقع مرکز اعداد فازی تعمیم یافته را با روشهای فوق الذکر محاسبه کرده و سپس به محاسبه ی درجه تشابه بین اعداد فازی تعمیم یافته می پردازد. همچنین آنها ثابت کردند که خواص روش پیشنهادیشان در رابطه با معیار تشابه کارآیی داشته و مثالی برای مقایسه روش پیشنهادیشان و روش های موجود دیگر ارائه دادند. و بدین ترتیب مزیت روش خویش را به روشهای موجود قبلی به نمایش گذاشتند. آنها نشان دادند که در مسائل مربوط به آنالیز ریسک روش آنها برتری دارد.

لیو^۱ [۲۶] همچنین عنوان می کند که روشهای لی و چنج [۱۵] در برخی از موارد در مورد معیار تشابه مستدل نمی باشد. برای رفع این مشکل او در همان مقاله [۲۶] روش جدیدی را پیشنهاد می کند که درجه تشابه بین مجموعه های فازی ذاتی و نیز عناصر و خواص مطرح شده ی آنها را می سنجند. حاصل مقایسه ی لیو [۲۶] نشان می دهد که روش پیشنهادی او منطقی تر می باشد و بالاخره لیو [۲۶] همان مثالهایی را به کار می گیرد که لی و چنج [۱۵] برتری کاربرد و روش خود را در تشخیص الگو به نمایش می گذارد.

چن و چن [۸] اگرچه روش مرکز ثقل مبتنی بر معیار تشابه را برای اعداد فازی تعمیم یافته پیشنهاد کردند که در مورد مسائل مربوط به آنالیز ریسک به کار گرفته شد ولی در هر حال هنگامی که دو عدد فازی تعمیم یافته دارای یک مرکز ثقل باشند، روش چن نمی تواند به دقت ریسک فازی را تعیین نماید. لذا برای رفع این نقصان، لیاوو^۲ و یارانش، روشی را برای ارزیابی ریسک فازی مرتبه ای

^۱Liu

^۲Liao

پیشنهاد کردند [۲۴]. در این روش پیشنهادی، میانگین اوزان فازی برای محاسبه ی مقادیر ریسک فازی بر اساس ساختارهای امنیتی مرتب شده و پیشنهاد گردیده و معیار تشابه برای اعداد فازی تعمیم یافته مسبب ایجاد مدل های تقریب زبان شناختی در یک شبکه ی امنیتی ریسک ها معرفی می گردد. در نهایت دو مثال برای تشریح شفافیت و صحت روش پیشنهادی ارائه می گردد.

لی و یارانش [۲۲] مقایسه ای را بین خلاصه ی معیار های تشابه موجود در مجموعه های فازی ذاتی برای مجموعه های مبهم انجام دادند. مثالهای مرتبط با روش غیر ذاتی در تشخیص الگو و نقاط قوت هر معیار تشابه را با یک مثال نقض، یا حالتی که مانند یک مثال نقض رفتار می کند، تشریح می کنند. و به گونه ای نشان دادند که هریک از اینها تحت شرایطی خاص ممکن است به دلخواه کار نکنند.

چن و چن [۱۵] بازه های (فاصله) مقادیر اعداد فازی را برای معیار تشابه به کار می گیرند. این روش پیشنهادی برای معیار تشابه، تشابه بین گرانش روی محور x ها و اعداد فازی بالایی و هم چنین اختلاف بین توزیع بین اعداد فازی بالایی و ارتفاعات اعداد فازی بالایی و درجه تشابه روی محور x ها در بازه ی مقادیر فازی و گرانش روی محور y ها بین فاصله مقادیر اعداد فازی را به کار می گیرد. سه خاصیت را برای فاصله ی مقادیر اعداد فازی در معیار تشابه اثبات نمودند.

چن و چن [۱۵] روش جدیدی را برای مقابله با مسائل مرتبط با آنالیز ریسک بر اساس اندازه تشابه در فاصله های مقادیر فازی ارائه دادند. آنها برای معیار تشابه روشی پیشنهاد کردند که درجه تشابه را بین فاصله های مقادیر اعداد فازی مقایسه می نماید. روش مربوطه از هندسه به منظور محاسبه ی درجه تشابه بین فواصل برای محاسبه ی مرکز گرانش برای به ترتیب اعداد فازی پایینی و اعداد فازی بالایی در فواصل مقادیر فازی استفاده می کند. با مقایسه ی نتایج، آنها نشان دادند که

روش ارائه شده در این قسمت از انعطاف پذیری و هوشمندی بالاتری نسبت به آنچه خودشان در [۸] مطرح کردند برخوردار است.

سانگوانست^۱ و چن [۳۰] معیار تشابه جدیدی را بین فواصل مقادیر اعداد فازی ارائه دادند. در این روش ترکیبی از مفاهیم فواصل هندسی، محیط توزیع نقاط در اختلاف بین فواصل مقادیر روی هر دو محور ارائه گردیده است. این روش جدید قادر به رفع نقایص معیار تشابه های موجود بوده و بالاخره بر اساس فواصل اعداد فازی در معیار تشابه الگوریتم جدیدی برای آنالیز ریسک فازی و مسائل مرتبط با آن ارائه گردید.

وی^۲ و چن [۱۵] روش جدیدی را برای آنالیز ریسک فازی مبنی بر اندازه تشابه بین اعداد فازی تعمیم یافته بررسی کردند. ابتدا آنها یک اندازه تشابه جدید بین اعداد فازی تعمیم یافته ارائه دادند. این روش ترکیبی از مفاهیم فواصل هندسی از اعداد فازی تعمیم یافته که برای محاسبه درجه تشابه بین اعداد فازی تعمیم یافته بکار می رود. آنها نیز برخی از خواص اندازه تشابه را ثابت نمودند.

آنها روشی را ارائه دادند که در آن به تعداد ۱۵ مجموعه اعداد فازی تعمیم یافته را به کار گرفته و به مقایسه ی روش تجربی پیشنهادی با اندازه تشابه موجود می پردازد. روش پیشنهادی بر نقصان موجود در اندازه تشابه غلبه می کند. آنها نیز یک الگوریتم آنالیز ریسک فازی جدید که با مسائل آنالیز ریسک فازی سروکار دارد، را ارائه دادند. اکسو^۳ و یارانش [۱۵] روشی کارآمد برای آنالیز ریسک فازی بر اساس برخی از عملیات محاسباتی اعداد فازی دوزنقه ای ارائه دادند. همچنین آنها تشابه اعداد فازی دوزنقه ای که با آنالیز ریسک فازی سروکار دارد را پیشنهاد دادند و آزمایشی را مطرح کردند که از ۳۰

^۱Sanguansat

^۲Wei

^۳Xu

مجموعه اعداد فازی ذوزنقه ای برای مقایسه ی روش تجربی پیشنهادی با انداره تشابه موجود می پردازد و در انتها با ارائه یک مثال کارآیی روش موجود را نشان دادند.

فصل دوم

فصل دوم

معیار تشابه اعداد فازی تعمیم یافته

در این فصل، روش مرکز ثقل (COG)^۱ را برای محاسبه ی اندازه تشابه اعداد فازی تعمیم یافته بکار می بریم. روش COG رایج [۷] از این جهت مفید است که با مسئله نافازی سازی و موضوع رتبه بندی فازی بوسیله نقاط COG سروکار دارد. اگرچه، برخی مشکلات در روش COG رایج نیز وجود دارد، یعنی مستقیماً نمی توان نقطه ی COG را از یک فاصله قطعی یا عدد حقیقی محاسبه نمود. این روش برای محاسبه نقطه ی COG بسیار وقت گیر است. یک روش اصلاحی که روش مرکز ثقل ساده (SCGM)^۲ نامیده می شود، پیشنهاد شده است [۱۵].

۲-۱-۲ مقدمات:

در این بخش، مرور خلاصه ای بر مفهوم اعداد فازی تعمیم یافته و عملکردهای محاسباتی آن ها نیز داریم. روش COG رایج و وجود برخی اندازه تشابه فازی را بررسی می کنیم.

^۱Center-of-gravity

^۲Simple center-of-gravity metod

۱-۱-۲ اعداد فازی تعمیم یافته

چنانچه [۵] عدد فازی تعمیم یافته \tilde{A} را به صورت $\tilde{A} = (a, b, c, d; w)$ معرفی کرد، که در آن:

$0 < w \leq 1$ و a, b, c, d اعداد حقیقی هستند. عدد فازی تعمیم یافته \tilde{A} یک زیر مجموعه فازی از \mathbb{R}

است که تابع عضویت آن، $\mu_{\tilde{A}}$ می باشد و $\mu_{\tilde{A}}$ خواص زیر را دارد.

۱- $\mu_{\tilde{A}}(x)$ یک نگاشت پیوسته از \mathbb{R} در بازه ی بسته ی $[0, 1]$ است.

۲- $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ اگر $-\infty < x \leq a$ باشد.

۳- $\mu_{\tilde{A}}(x)$ روی بازه ی $[a, b]$ اکیداً صعودی است.

۴- $\mu_{\tilde{A}}(x) = w$ اگر $b \leq x \leq c$ باشد.

۵- $\mu_{\tilde{A}}(x)$ روی بازه ی $[c, d]$ اکیداً نزولی است.

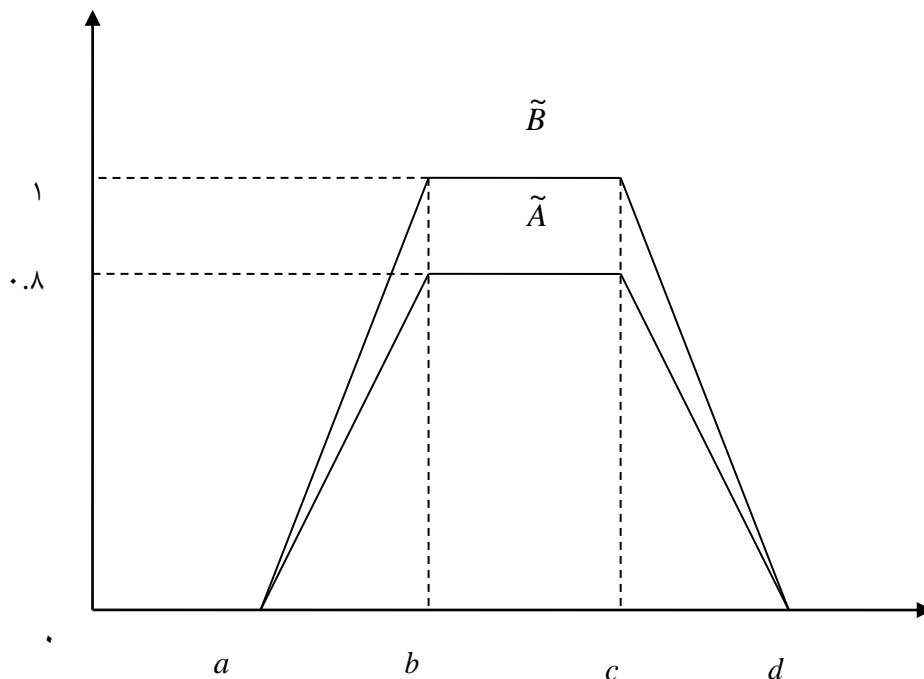
۶- $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ اگر $d \leq x < \infty$ باشد.

اگر $w = 1$ باشد آن گاه عدد فازی تعمیم یافته ی \tilde{A} یک عدد فازی نرمال نامیده می شود

که به صورت $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ می توان آن را مشخص نمود.

اگر $a = b$ و $c = d$ باشد، آن گاه \tilde{A} یک فاصله قطعی نامیده می شود.

اگر $a = b = c = d$ و $w = 1$ باشد، آن گاه \tilde{A} یک عدد حقیقی نامیده می شود.



شکل ۲-۱ دو عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته \tilde{A} , \tilde{B}

شکل ۲-۱ دو عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته متفاوت را نشان می دهد. یعنی اگر $\tilde{A} = (a, b, c, d : w_1)$ و $\tilde{B} = (a, b, c, d : w_2)$ نشان دهنده ی تصمیم گیری دو شخص متفاوت باشند. آن گاه مقادیر w_1 و w_2 به ترتیب نشانگر درجه اطمینان صحت تصمیم \tilde{A} و \tilde{B} هستند که در آن: $w_1 = 0.8$ و $w_2 = 1$.

۲-۱-۲ عملیات محاسباتی

عملیات محاسباتی فازی رایج تنها با اعداد فازی نرمال شده سروکار دارد. آنها نه تنها نوع تابع عضویت اعداد فازی را بعد از عملیات محاسباتی تغییر می دهند، اما مشکلی که وجود دارد این است که عملیات محاسباتی کسل کننده و به زحمت زیادی نیاز دارد. چن [۵] اصولی را ارائه داد که عملیات

محاسباتی فازی بین اعداد فازی تعمیم یافته را بکار برده، به طوریکه عملیات محاسباتی فازی با اعداد فازی تعمیم یافته (یعنی اعداد فازی غیر نرمال) سروکار دارد.

سیه^۱ و چن [۱۵] عملیات محاسباتی در [۵] را ارائه دادند، آنها نوع تابع عضویت عدد فازی را بعد از عملیات محاسباتی تغییر ندادند، بلکه در این روش زحمت عملیات محاسباتی کاهش می یابد. بنابراین ما از عملیات محاسباتی فازی چن که با عملیات محاسباتی بین اعداد فازی تعمیم یافته همراه است را استفاده می کنیم. فرض می کنیم دو عدد فازی ذوزنقه ای تعمیم یافته ی \tilde{A}_1 و \tilde{A}_2 وجود دارند. به قسمی که: $\tilde{A}_1 = (a, b, c, d; w_1)$ و $\tilde{A}_2 = (a, b, c, d; w_2)$ باشند. عملیات محاسباتی بین اعداد فازی ذوزنقه ای تعمیم یافته به صورت زیر داده می شود:

۱- جمع اعداد فازی \oplus :

$$\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1) \oplus (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2; \min(w_1, w_2)) \quad (2-1)$$

که در آن: a_1, b_1, c_1, d_1 و a_2, b_2, c_2, d_2 همگی اعداد حقیقی هستند.

۲- تفریق اعداد فازی \ominus :

$$\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1) - (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2, d_1 - d_2; \min(w_1, w_2)) \quad (2-2)$$

که در آن: a_1, b_1, c_1, d_1 و a_2, b_2, c_2, d_2 همگی اعداد حقیقی هستند.

^۱Hsieh

۳- ضرب اعداد فازی \otimes :

$$\tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_r = (a, b, c, d; \min(w_1, w_r)) \quad (2-3)$$

که در آن

$$a = \min(a_1 \times a_r, a_1 \times d_r, d_1 \times a_r, d_1 \times d_r)$$

$$b = \min(b_1 \times b_r, b_1 \times c_r, c_1 \times b_r, c_1 \times c_r)$$

$$c = \max(b_1 \times b_r, b_1 \times c_r, c_1 \times b_r, c_1 \times c_r)$$

$$d = \max(a_1 \times a_r, a_1 \times d_r, d_1 \times a_r, d_1 \times d_r)$$

بدیهی است که اگر a_1, b_1, c_1, d_1 و a_r, b_r, c_r, d_r همگی اعداد حقیقی مثبت باشند، آنگاه:

$$\tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_r = (a_1 \times a_r, b_1 \times b_r, c_1 \times c_r, d_1 \times d_r; \min(w_1, w_r))$$

۴- تقسیم اعداد فازی:

معکوس عدد فازی \tilde{A}_r ، $\frac{1}{\tilde{A}_r}$ می باشد که $\frac{1}{\tilde{A}_r} = \left(\frac{1}{d_r}, \frac{1}{c_r}, \frac{1}{b_r}, \frac{1}{a_r}; w_r \right)$ که در آن

a_r, b_r, c_r, d_r همگی اعداد حقیقی مثبت هستند. اگر a_1, b_1, c_1, d_1 و a_r, b_r, c_r, d_r همگی اعداد

حقیقی مثبت باشند، آن گاه تقسیم \tilde{A}_1 و \tilde{A}_r را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\tilde{A}_1 / \tilde{A}_r = \left(\frac{a_1}{d_r}, \frac{b_1}{c_r}, \frac{c_1}{b_r}, \frac{d_1}{a_r}; \min(w_1, w_r) \right) \quad (2-4)$$

تفاوت بین عملیات محاسباتی اعداد فازی نرمال شده و عملیات محاسباتی اعداد فازی رایج این است که اولی با هر دوی اعداد فازی نرمال شده و غیر نرمال سروکار دارد ولی دومی فقط روی اعداد فازی نرمال شده عمل می کند.

۳-۱-۲ روش مرکز ثقل (COG) رایج

روش مرکز ثقل (COG) رایج از این جهت مفید است که با مسئله نافازی سازی و موضوع رتبه بندی فازی سروکار دارد. فرمول محاسباتی COG (مرکز ثقل) اعداد فازی در زیر نشان داده شده است:

$$x_{\tilde{A}}^* = \frac{\int x \mu_{\tilde{A}}(x) dx}{\int \mu_{\tilde{A}}(x) dx} \quad (2-5)$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به مقدار عضویت x در \tilde{A} اشاره دارد و $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$.

فرض کنید یک عدد فازی دوزنقه ای \tilde{A} و تابع عضویت عدد فازی دوزنقه ای به صورت زیر

باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}^L(x) & a \leq x < b \\ 1 & b \leq x < c \\ \mu_{\tilde{A}}^R(x) & c \leq x < d \\ 0 & o.w \end{cases} \quad (2-6)$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{A}}^L : [a, b] \longrightarrow [0, 1]$$

پیوسته و اکیداً صعودی است. و

$$\mu_{\tilde{A}}^R : [c, d] \longrightarrow [0, 1]$$

پیوسته و اکیدا نزولی است. به قسمی که:

$$\mu_{\tilde{A}}^L = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{و} \quad \mu_{\tilde{A}}^R = \frac{x-d}{c-d} \quad (2-7)$$

سپس فرمول (2-5) به فرمول زیر تبدیل می شود:

$$x_{\tilde{A}}^* = \frac{\int_a^b (x\mu_{\tilde{A}}^L(x))dx + \int_b^c xdx + \int_c^d (x\mu_{\tilde{A}}^R(x))dx}{\int_a^b (\mu_{\tilde{A}}^L(x))dx + \int_b^c 1dx + \int_c^d (\mu_{\tilde{A}}^R(x))dx} \quad (2-8)$$

برخی مشکلات در روش COG رایج وجود دارد. برطبق فرمول (2-8) مشاهده می شود که مستقیماً نمی توان COG یک فاصله ی قطعی را محاسبه کرد، زیرا مخرج کسر فرمول (2-7) صفر می شود. بعلاوه محاسبه نقطه ی COG اعداد فازی مثلثی و دوزنقه ای بسیار وقت گیر است. بنابراین روشی جدید که روش مرکز ثقل ساده نامیده می شود، مشکل روش COG را برطرف می کند که در ادامه درمورد آن توضیح خواهیم داد.

۴-۱-۲ اندازه تشابه بین اعداد فازی

فرض می کنیم دو عدد فازی دوزنقه ای \tilde{A} و \tilde{B} که $\tilde{A} = (a_1, a_r, a_p, a_f)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_r, b_p, b_f)$ باشد در این صورت درجه تشابه بین اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} را می توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|}{4} \quad (2-9)$$

که در آن $S(\tilde{A}, \tilde{B}) \in [0, 1]$ است.

اگر \tilde{A} و \tilde{B} اعداد فازی مثلثی باشند به قسمی که $\tilde{A} = (a_1, a_r, a_f)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_r, b_f)$ ، آن

گاه درجه تشابه بین \tilde{A} و \tilde{B} را می توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^3 |a_i - b_i|}{3} \quad (2-10)$$

بزرگترین مقدار $S(\tilde{A}, \tilde{B})$ ، بیشترین تشابه بین اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} را نشان می دهد.

لی [20] یک اندازه تشابه را برای اعداد فازی ذوزنقه ای پیشنهاد می دهد که این اندازه

تشابه با آراء فازی و تصمیم گیری گروهی سروکار دارد، به طوری که درجه تشابه $S(\tilde{A}, \tilde{B})$ بین اعداد

فازی ذوزنقه ای \tilde{A} و \tilde{B} که $\tilde{A} = (a_1, a_r, a_f, a_4)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_r, b_f, b_4)$ به صورت زیر محاسبه می

شود:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{\|\tilde{A} - \tilde{B}\|_{lp}}{\|U\|} \times \epsilon^{-1/p} \quad (2-11)$$

به قسمی که:

$$\|\tilde{A} - \tilde{B}\|_{lp} = \left(\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i| \right)^{1/p} \quad (2-12)$$

و

$$\|U\| = \max(U) - \min(U) \quad (2-13)$$

بزرگترین مقدار $S(\tilde{A}, \tilde{B})$ ، بیشترین تشابه بین اعداد فازی دوزنقه ای \tilde{A} و \tilde{B} می باشد.

برای مثال، فرض کنید که $\tilde{A} = (0.2, 0.3, 0.4, 0.5)$ و $\tilde{B} = (0.3, 0.4, 0.5, 0.6)$ و $P=1$ در این

صورت با استفاده از فرمول (۲-۱۱) معیار تشابه بین \tilde{A} و \tilde{B} را می توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{|0.2 - 0.3| + |0.3 - 0.4| + |0.4 - 0.5| + |0.5 - 0.6|}{0.6 - 0.2} \times 4^{-1} = 0.75$$

۲-۲ روش مرکز ثقل ساده (SCGM)

در این بخش، روشی به نام روش SCGM که نقطه ی COG اعداد فازی تعمیم یافته را

محاسبه می کند. روش SCGM ارائه شده بر اساس مفهوم میانه ی نمودار [۱۵] نیز بنا شده

است [۱۵]. در ادامه بطور خلاصه مفهوم میانه ی نمودار [۱۵] را مرور می کنیم.

فرض می کنیم یک عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته ی $\tilde{A} = (a, b, c, d; w)$ وجود دارد،

میانه ی نمودار را به صورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۲-۱: میانه نمودار عدد فازی \tilde{A} تابعی است مانند $\eta_{\tilde{A}}(x)$ که به صورت زیر نمایش داده می

شود:

$$\eta_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} a & x = med(A_{\alpha}) \\ 0 & o.w \end{cases} \quad (2-14)$$

به قسمی که $\alpha \in (0, w]$. A_{α} نیز α -برش عدد فازی \tilde{A} نامیده می شود و آن را به صورت زیر

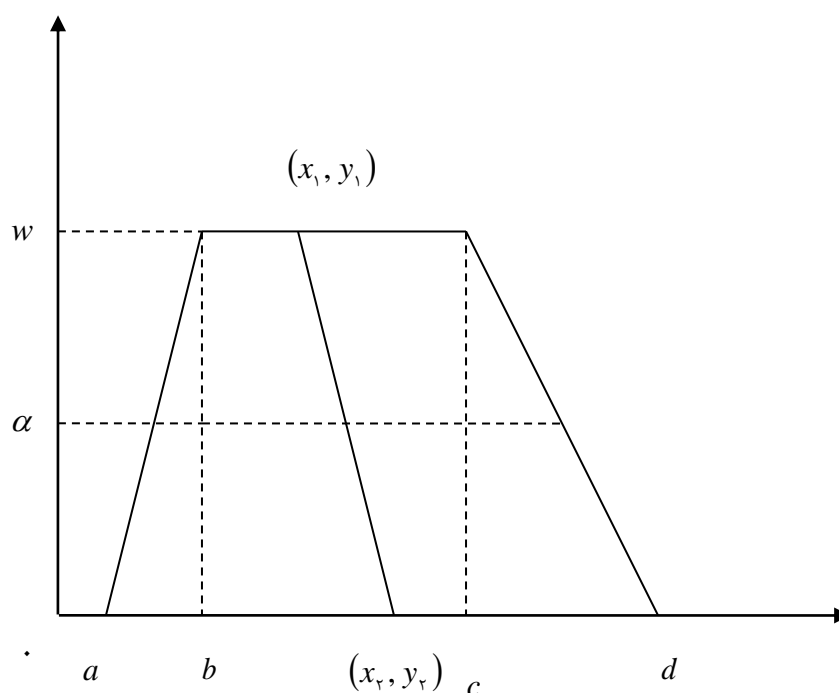
تعریف می کنیم:

$$A_{\alpha} = \{x; \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$$

نیز $Infimum(A_\alpha)$ به معنی کران پایین A_α نیز است. و $Supremum(A_\alpha)$ به معنی کران بالای A_α می باشد. در این صورت میانگین به صورت زیر داده می شود:

$$Med(A_\alpha) = \frac{[Infimum(A_\alpha) + Supremum(A_\alpha)]}{2} \quad (2-15)$$

برای مثال:



شکل ۲-۲ یک عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته

شکل ۲-۲ نشان می دهد که عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته \tilde{A} با تابع $\eta_{\tilde{A}}(x)$ میانه نمودار، که

میانه نمودار یک خط راست است و دو نقطه (x_1, y_1) و (x_r, y_r) به صورت زیر تعریف می شوند:

$$x_1 = \frac{c+b}{2}, \quad y_1 = w; \quad 0 < w \leq 1, \quad x_r = \frac{d+a}{2}, \quad y_r = 0 \quad (2-16)$$

از شکل ۲-۲ در می یابیم که فرمول میانه نمودار به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad (2-17)$$

به قسمی که معادله ی خطی رابطه ی (۲-۱۷) میانه نمودار عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته ی \tilde{A} نیز است.

۲-۲-۱ مرکز ثقل (COG) یک مثلث

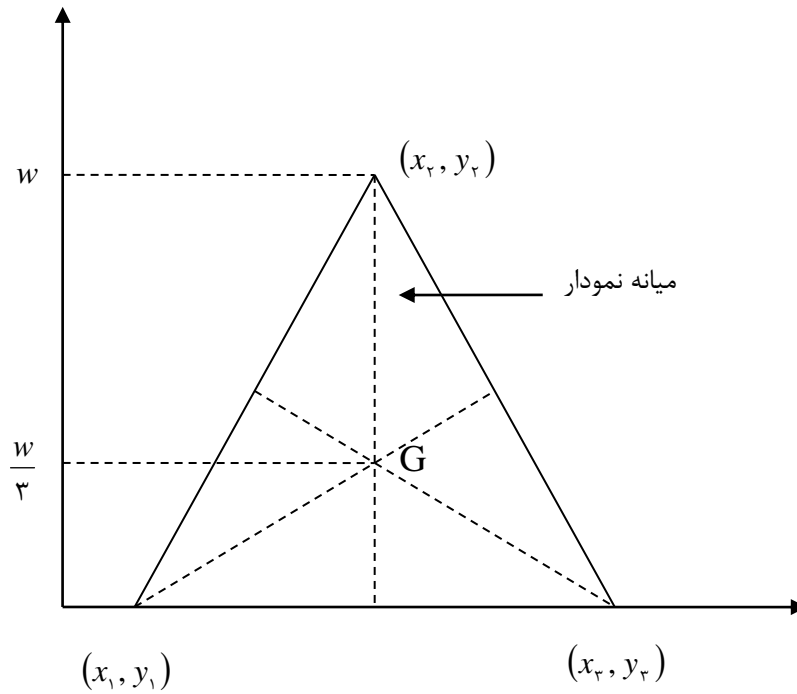
شکل ۲-۳ یک مثلث را نمایش می دهد. شکل ۲-۳ مرکز ثقل $G = (x^*, y^*)$ از یک مثلث را

که روی میانه نمودار آن واقع است و بوسیله ی نقطه چین مشخص شده است.

$$x^* = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad (2-18)$$

$$y^* = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad (2-19)$$

زیرا $y_1 = y_2 = 0$ و $y_3 = w$ می توان دید که $y^* = \frac{w}{3}$ که در آن $0 < w \leq 1$.



شکل ۲-۳ یک مثلث

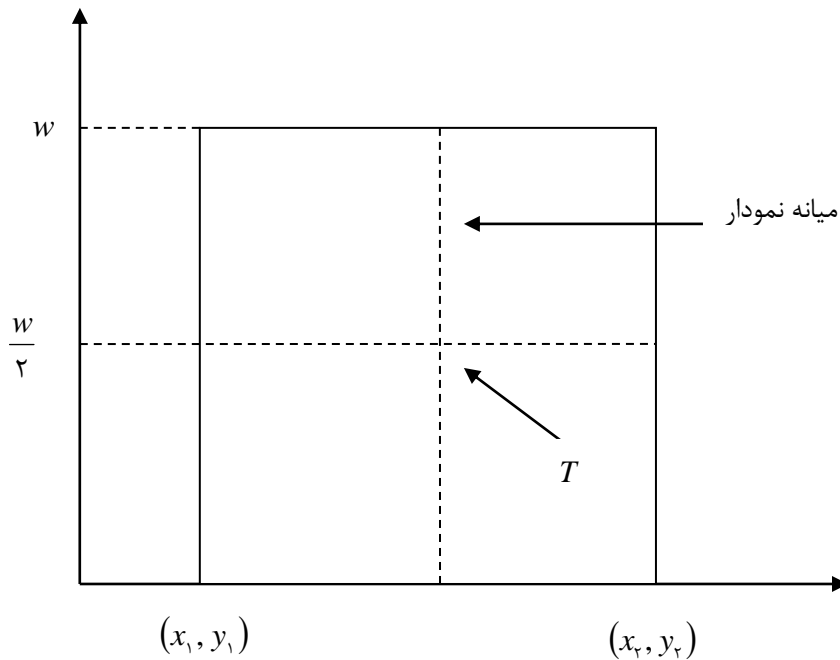
۲-۲-۲ مرکز ثقل (COG) یک مستطیل

شکل ۲-۴ یک مستطیل را نشان می دهد. از شکل ۲-۴ می توان دریافت که مرکز ثقل یک مستطیل روی میانۀ نمودار آن واقع است به طوری که:

$$x^* = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (2-20)$$

$$y^* = \frac{w}{2} \quad (2-21)$$

که در آن $0 < w \leq 1$.



شکل ۲-۴ یک مستطیل

با توجه به شکل های ۲-۲، ۳-۲ و ۲-۴، اگر فرض کنیم که یک مثلث، نماینده یک عدد فازی مثلثی و یک مستطیل یک فاصله قطعی و یک دوزنقه یک عدد فازی دوزنقه ای باشد، آن گاه مشاهده می کنیم که نقطه ی COG عدد فازی تعمیم یافته ی \tilde{A} روی میانۀ نمودار واقع است. با بکار بردن y^* نقطه ی COG و میانۀ نمودار می توان مقدار x^* نقطه ی COG را بدست آورد. بنابراین بحث قبل، روش جدیدی COG را ارائه می دهیم که روش SCGM نامیده می شود و به صورت زیر شرح داده می شود:

اگر $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_{\tilde{A}})$ یک عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشد، آن گاه مشاهده می کنیم که مقدار $y_{\tilde{A}}^*$ یک نقطه ی COG از \tilde{A} به صورت زیر است.

$$y_{\tilde{A}}^* = \begin{cases} \frac{w_{\tilde{A}} \times \left(\frac{a_{\tau} - a_{\gamma} + \tau}{a_{\phi} - a_{\gamma}} \right)}{\epsilon} & \text{if } a_{\gamma} \neq a_{\phi}, 0 < w_{\tilde{A}} \leq 1 \\ \frac{w_{\tilde{A}}}{\tau} & \text{if } a_{\gamma} = a_{\phi}, 0 < w_{\tilde{A}} \leq 1 \end{cases} \quad (2-22)$$

اگر \tilde{A} یک عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشد، بطوری که $\tilde{A} = (a_{\gamma}, a_{\tau}, a_{\gamma}, a_{\tau}; w_{\tilde{A}})$ باشد در

این صورت مقدار y^* از نقطه ی COG به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} y_{\tilde{A}}^* &= \frac{w_{\tilde{A}} \times \left(\frac{a_{\tau} - a_{\gamma} + \tau}{a_{\tau} - a_{\gamma}} \right)}{\epsilon} \\ &= \frac{w_{\tilde{A}} \times (0 + \tau)}{\epsilon} \\ &= \frac{w_{\tilde{A}}}{\tau} \end{aligned}$$

اگر \tilde{A} یک فاصله قطعی باشد به قسمی که $\tilde{A} = (a_{\gamma}, a_{\gamma}, a_{\phi}, a_{\phi}; w_{\tilde{A}})$ ، آن گاه مشاهده می کنیم که

مقدار نقطه ی COG به صورت زیر داده می شود:

$$\begin{aligned} y_{\tilde{A}}^* &= \frac{w_{\tilde{A}} \times \left(\frac{a_{\phi} - a_{\gamma} + \tau}{a_{\phi} - a_{\gamma}} \right)}{\epsilon} \\ &= \frac{w_{\tilde{A}} \times (1 + \tau)}{\epsilon} \\ &= \frac{w_{\tilde{A}}}{\tau} \end{aligned}$$

براساس فرمول ها (2-16) و (2-17) مقدار $x_{\tilde{A}}^*$ از نقطه ی COG (\tilde{A}) به صورت زیر می باشد:

$$\frac{y_r - y_1}{x_r - x_1} = \frac{y_{\tilde{A}}^* - y_1}{x_{\tilde{A}}^* - x_1}$$

$$\Rightarrow x_{\tilde{A}}^* = \frac{y_{\tilde{A}}^*(x_r - x_1) - x_r y_1 + x_1 y_r}{y_r - y_1} \quad (2-23)$$

به قسمی که:

$$x_1 = \frac{a_r + a_r}{2}, x_r = \frac{a_r + a_1}{2}, y_r = 0, y_1 = w_{\tilde{A}}, 0 < w \leq 1.$$

بنابراین (2-23) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x_{\tilde{A}}^* = \frac{y_{\tilde{A}}^*(a_r + a_r) + (a_r + a_1)(w_{\tilde{A}} - y_{\tilde{A}}^*)}{2w_{\tilde{A}}} \quad (2-24)$$

بر اساس فرمول های (2-22) و (2-24) می توانیم نقطه ی $COG(\tilde{A})$ را که از یک عدد فازی

دوزنقه ای تعمیم یافته است را به دست آوریم که در آن $COG(\tilde{A}) = (x_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{A}}^*)$.

۲-۲-۳ معیار تشابه بین اعداد فازی تعمیم یافته

در این بخش، به بررسی روشی که درجه تشابه بین اعداد فازی تعمیم یافته را محاسبه می

کند، می پردازیم. دو عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته \tilde{A} و \tilde{B} را در نظر می گیریم به قسمی که:

$$\tilde{A} = (a_1, a_1, a_r, a_r; w_{\tilde{A}}) \quad \text{و} \quad \tilde{B} = (b_1, b_1, b_r, b_r; w_{\tilde{B}})$$

$$0 \leq a_1 \leq a_r \leq a_r \leq a_1 \leq 1, \quad 0 \leq b_1 \leq b_r \leq b_r \leq b_1 \leq 1$$

گام ۱.

نخست از رابطه های (۲-۲۲) و (۲-۲۴) نقطه ی $COG(\tilde{A})$ و $COG(\tilde{B})$ اعداد فازی

دوزنقه ای تعمیم یافته ی \tilde{A} و \tilde{B} را به ترتیب به دست می آوریم به قسمی که:

$$COG(\tilde{A}) = (x_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{A}}^*) \quad \text{و} \quad COG(\tilde{B}) = (x_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{B}}^*)$$

گام ۲.

اکنون درجه تشابه بین اعداد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته ی \tilde{A} و \tilde{B} ، را به صورت زیر

محاسبه می کنیم:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{\ddagger} |a_i - b_i|}{\ddagger} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)} \quad (2-25)$$

که در آن $S(\tilde{A}, \tilde{B}) \in [0, 1]$ و $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = \begin{cases} 1 & S_{\tilde{A}} + S_{\tilde{B}} > 0 \\ 0 & S_{\tilde{A}} + S_{\tilde{B}} = 0 \end{cases} \quad (2-26)$$

که در آن $S_{\tilde{A}}$ و $S_{\tilde{B}}$ به ترتیب طول های اعداد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته \tilde{A} و \tilde{B} به ترتیب

هستند و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$S_{\tilde{A}} = a_{\ddagger} - a_1 \quad (2-27)$$

$$S_{\tilde{B}} = b_{\ddagger} - b_1 \quad (2-28)$$

اندازه تشابه ارائه شده مفهومی از فاصله هندسی را که به وسیله ی عبارت $\left[1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^f |a_i - b_i|}{f}\right)\right]$ و

فاصله مرکز ثقل که بوسیله ی عبارت $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = (1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*|)$ می باشد، ارائه می شود.

مقدار $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})$ برای تعیین این که آیا ما فاصله ی COG (مرکز ثقل) را در نظر می

گیریم یا خیر، می باشد. اگر عدد فازی تعمیم یافته ی \tilde{A} و \tilde{B} هر دو اعداد حقیقی باشند (یعنی

$S_{\tilde{A}} + S_{\tilde{B}} = 0$)، آنگاه فاصله ی مرکز ثقل را در نظر نمی گیریم (یعنی $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = 0$).

اگر یکی از \tilde{A} یا \tilde{B} عدد فازی تعمیم یافته باشد (یعنی $S_{\tilde{A}} + S_{\tilde{B}} \neq 0$)، آن گاه باید فاصله ی

COG (مرکز ثقل) را در نظر بگیریم (یعنی $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = 1$).

بزرگترین مقدار $S(\tilde{A}, \tilde{B})$ ، بیشترین تشابه بین اعداد فازی تعمیم یافته ی \tilde{A} و \tilde{B} را تعیین می کند.

مثال ۱-۲

اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته ی \tilde{A} و \tilde{B} و \tilde{C} که در شکل ۵-۲ نشان داده شده است به

صورت زیر مفروض است: $\tilde{A} = (0.1, 0.3, 0.5; 1.0)$ و $\tilde{B} = (0.2, 0.4, 0.7; 1.0)$ و $\tilde{C} = (0.5, 0.7, 0.9; 1.0)$ به

وضوح می توان اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته را با اعداد فازی ذوزنقه ای تعمیم یافته به صورت زیر

نمایش داد:

$$\tilde{A} = (0.1, 0.3, 0.3, 0.5; 1.0)$$

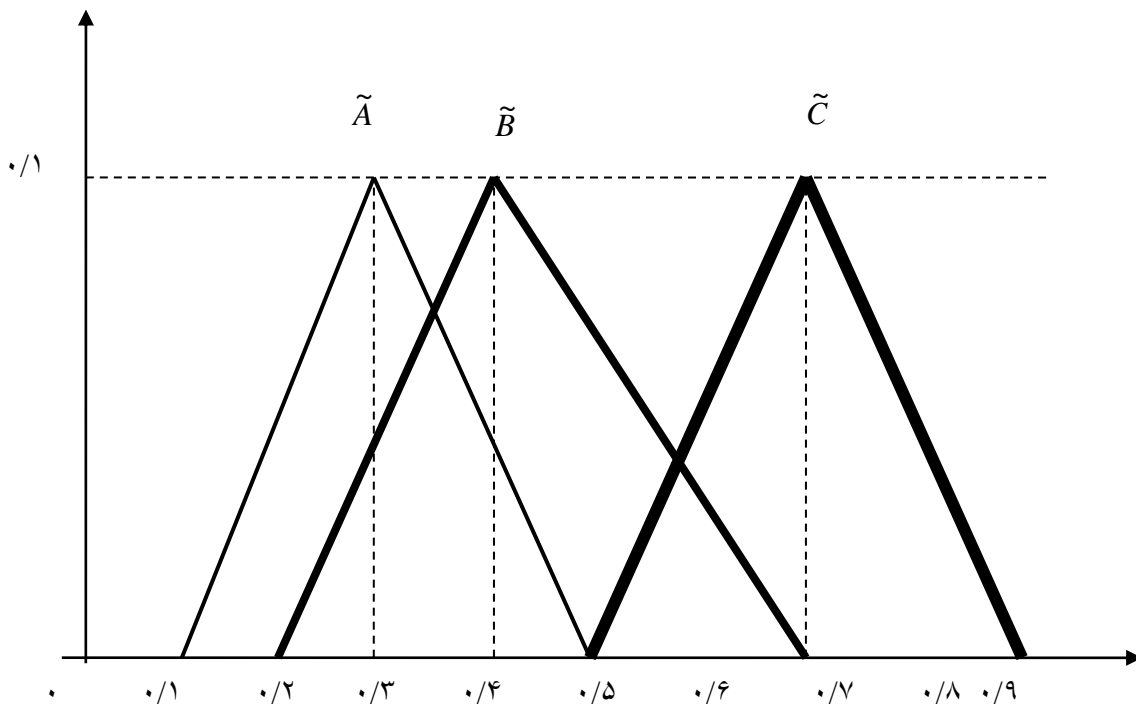
$$\tilde{B} = (0.2, 0.4, 0.4, 0.7; 1.0)$$

$$\tilde{C} = (0.5, 0.7, 0.7, 0.9; 1.0)$$

در شکل ۲-۵ می توانیم مشاهده کنیم که عدد فازی تعمیم یافته ی \tilde{B} تشابه بیشتری به عدد فازی تعمیم یافته ی \tilde{A} دارد تا عدد فازی تعمیم یافته ی \tilde{C} .
بر طبق عبارت های (۲-۲۲) و (۲-۲۴) داریم:

$$y_{\tilde{A}}^* = y_{\tilde{B}}^* = y_{\tilde{C}}^* = \frac{1}{3}$$

$$x_{\tilde{A}}^* = 0.3, \quad x_{\tilde{B}}^* = 0.433, \quad x_{\tilde{C}}^* = 0.7$$



شکل ۲-۵ سه عدد فازی مثلثی تعمیم یافته

همچنین $COG(\tilde{C}) = \left(0.7, \frac{1}{3}\right)$ و $COG(\tilde{B}) = \left(0.433, \frac{1}{3}\right)$ و $COG(\tilde{A}) = \left(0.3, \frac{1}{3}\right)$ به ترتیب مربوط

به اعداد فازی \tilde{C} و \tilde{B} , \tilde{A} هستند. از عبارت های (۲-۲۷) و (۲-۲۸) داریم:

$$S_{\tilde{A}} = 0.4, S_{\tilde{B}} = 0.5, S_{\tilde{C}} = 0.4.$$

از طرفی بنا به (۲-۲۶) داریم:

$$B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = 1, B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{C}}) = 1, B(S_{\tilde{B}}, S_{\tilde{C}}) = 1.$$

بنابراین با استفاده از (۲-۲۵) می توان درجه تشابه بین اعداد فازی تعمیم یافته را به صورت زیر

محاسبه نمود:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = [1 - 0.125] \times (1 - 0.13333)^1 \times 1 = 0.75833$$

$$S(\tilde{A}, \tilde{C}) = [1 - 0.4] \times (1 - 0.4)^1 \times 1 = 0.36$$

$$S(\tilde{B}, \tilde{C}) = [1 - 0.275] \times (1 - 0.26667)^1 \times 1 = 0.53167$$

چون $S(\tilde{A}, \tilde{B}) > S(\tilde{B}, \tilde{C})$ ، پس مشاهده می کنیم که عدد فازی تعمیم یافته ی \tilde{B} ، بیشتر به \tilde{A}

مشابه می باشد تا به \tilde{C} .

۲-۲-۴ برخی از خواص ارائه شده اندازه تشابه

خاصیت ۱: دو عدد فازی ذوزنقه ای تعمیم یافته ی \tilde{A} و \tilde{B} مساویند، اگر و تنها اگر $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$

باشد.

اثبات:

از رابطه ی (۲-۲۷) و (۲-۲۸) می توان دید که $S_{\tilde{A}} \neq 0$ و $S_{\tilde{B}} \neq 0$. بنا براین بنا بر رابطه ی (۲-۲۶)

می بینیم که $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = 1$ می باشد.

الف) اگر \tilde{A}, \tilde{B} مساوی باشند، آن گاه $a_1 = b_1$ و $a_2 = b_2$ و $a_3 = b_3$ و $a_4 = b_4$ و $w_{\tilde{A}} = w_{\tilde{B}}$.

لذا درجه تشابه بین \tilde{A}, \tilde{B} می تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|}{4} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}$$

$$= [1 - 0] \times (1 - 0)^1 \times 1 = 1$$

ب) اگر $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ ، آنگاه

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|}{4} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 = b_4, y_{\tilde{A}}^* = y_{\tilde{B}}^*, x_{\tilde{A}}^* = x_{\tilde{B}}^* .$$

از روابط (۲-۲۲) و (۲-۲۴) می توان دریافت که $w_{\tilde{A}} = w_{\tilde{B}}$. بنا براین اعداد فازی ذوزنقه ای تعمیم

یافته ی \tilde{A}, \tilde{B} مساوی هستند.

□

خاصیت ۲: $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = S(\tilde{B}, \tilde{A})$

اثبات:

ابتدا $S(\tilde{A}, \tilde{B})$ را به صورت زیر می توان نوشت:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^f |a_i - b_i|}{f} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}$$

و برای $S(\tilde{B}, \tilde{A})$ داریم:

$$S(\tilde{B}, \tilde{A}) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^f |b_i - a_i|}{f} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{B}}^* - x_{\tilde{A}}^*| \right)^{B(S_{\tilde{B}}, S_{\tilde{A}})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{A}}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{A}}^*)}$$

که در آن:

$$\sum_{i=1}^f |a_i - b_i| = \sum_{i=1}^f |b_i - a_i|, \quad |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*| = |x_{\tilde{B}}^* - x_{\tilde{A}}^*|, \quad B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = B(S_{\tilde{B}}, S_{\tilde{A}})$$

9

$$\left(\text{Min}(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*) / \text{Max}(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*) \right) = \left(\text{Min}(y_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{A}}^*) / \text{Max}(y_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{A}}^*) \right).$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = S(\tilde{B}, \tilde{A})$$

□

خاصیت ۳: اگر $\tilde{A} = (a, a, a, a; 1)$ و $\tilde{B} = (b, b, b, b; 1)$ دو عدد حقیقی باشند، آن گاه:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - |a - b|$$

اثبات:

براساس عبارت های (۲-۲۷) و (۲-۲۸) نتیجه می شود: $S_{\tilde{A}} = 0$ و $S_{\tilde{B}} = 0$.

و از عبارت (۲-۲۶) داریم:

$$B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = 0.$$

از (۲-۲۲) می توان دید که $y_{\tilde{A}}^* = y_{\tilde{B}}^* = \frac{1}{4}$ و بر اساس رابطه ی (۲-۲۵) داریم:

$$\begin{aligned} S(\tilde{B}, \tilde{A}) &= \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |b_i - a_i|}{4} \right] \times (1 - |x_{\tilde{B}}^* - x_{\tilde{A}}^*|) \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{A}}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{A}}^*)} \\ &= \left[1 - \frac{4|a - b|}{4} \right] \times 1 \times 1 \\ &= 1 - |a - b| \end{aligned}$$

□

۲-۳ نتیجه:

در این بخش، روشی جدید را برای محاسبه ی اندازه تشابه اعداد فازی تعمیم یافته ارائه دادیم. ابتدا روشی را که نقطه ی COG اعداد فازی تعمیم یافته را محاسبه می کند و روش SCGM نامیده می شود را بررسی کردیم. سپس به بررسی اندازه تشابه جدیدی که به محاسبه ی درجه تشابه بین اعداد فازی تعمیم یافته بر اساس روش SCGM می باشد، پرداختیم. و برخی از خواص اندازه تشابه پیشنهاد شده را اثبات کردیم. اندازه تشابه پیشنهاد شده می تواند نقصان موجود در اندازه تشابه را برطرف نماید.

فصل سوم

فصل سوم

اندازه تشابه فاصله مقادیر اعداد فازی

فاصله مقادیر اعداد فازی برای بیان و ارزیابی مقادیر دردنیای حقیقی مفید می باشند. جویجون^۱ و اکسیاوپینگ^۲ [۱۲] فاصله مقادیر اعداد فازی را تعریف کردند و عملیات مربوط به آن را توسعه دادند. در سالهای اخیر، روشهایی ارائه شده که درجه تشابه بین اعداد فازی را محاسبه کرده [۶و۸]، همچنین در فصل آخر روشی را برای محاسبه اندازه تشابه بین اعداد فازی تعمیم یافته ارائه داده ایم، هر چند این اندازه تشابه ها نمی توانند درجه تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی را محاسبه کنند. در این فصل، در مورد اندازه تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی بحث می کنیم. ابتدا به اندازه تشابهی که درجه تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی را محاسبه می کند، می پردازیم. سپس اندازه تشابه پیشنهادی، مفهوم هندسی را برای محاسبه ی نقطه ی COG اعداد فازی پایینی و بالایی فاصله مقادیر اعداد فازی که درجه تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی را محاسبه می کند، خواهیم پرداخت. هم چنین برخی از خواص اندازه تشابه پیشنهاد شده را ثابت می کنیم.

^۱Guijun^۲Xiaoping

۳-۱ فاصله مقادیر اعداد فازی

تعریف ۳-۱: یک فاصله مقادیر مجموعه فازی \tilde{A} روی مجموعه مرجع X به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{A} = \left\{ \left(x, \left[\mu_{\tilde{A}}^L(x), \mu_{\tilde{A}}^U(x) \right] \right) \mid x \in X \right\}$$

به قسمی که $0 \leq \mu_{\tilde{A}}^L \leq \mu_{\tilde{A}}^U \leq 1$ و درجه عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ عنصر x ، متعلق به فاصله مقادیر مجموعه فازی \tilde{A} می باشد، که به وسیله ی فاصله ی زیر ارائه می شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \left[\mu_{\tilde{A}}^L(x), \mu_{\tilde{A}}^U(x) \right]$$

تعریف ۳-۲ [۱۵]: اگر یک فاصله مقادیر مجموعه فازی \tilde{A} دارای خواص زیر باشد:

۱- \tilde{A} روی یک فاصله ی بسته کران دار تعریف شود.

۲- \tilde{A} یک مجموعه محدب باشد.

آن گاه \tilde{A} یک فاصله مقادیر اعداد فازی از مجموعه مرجع X نامیده می شود.

فرض کنید یک فاصله مقادیر عدد فازی $\tilde{A} = \left[\tilde{A}^L, \tilde{A}^U \right]$ وجود دارد که در شکل ۳-۱

نمایش داده شده است. در شکل ۳-۱ مشاهده کنیم که فاصله مقادیر عدد فازی \tilde{A} دو جزء دارد، به

قسمی که یکی از آنها عدد فازی پایینی \tilde{A}^L و دیگری عدد فازی بالایی \tilde{A}^U است. بعلاوه فاصله

مقادیر عدد فازی \tilde{A} را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\tilde{A} = \left[\left(a_1^L, a_r^L, a_r^L, a_f^L; w_{\tilde{A}}^L \right), \left(a_1^U, a_r^U, a_r^U, a_f^U; w_{\tilde{A}}^U \right) \right]$$

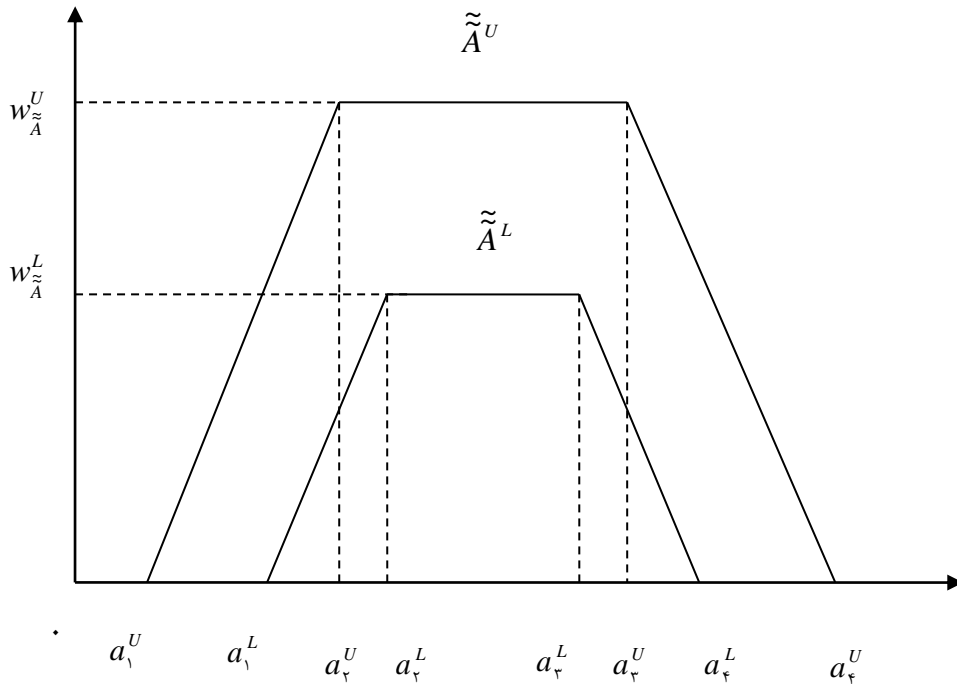
که در آن:

$$a_1^L \leq a_r^L \leq a_r^L \leq a_f^L, \quad a_1^U \leq a_r^U \leq a_r^U \leq a_f^U, \quad 0 \leq w_{\tilde{A}}^L \leq w_{\tilde{A}}^U \leq 1, \quad \tilde{A}^L \subset \tilde{A}^U.$$

اگر $w_{\tilde{A}}^L = w_{\tilde{A}}^U = w_{\tilde{A}}$ و $a_1^L = a_1^U, a_r^L = a_r^U, a_r^L = a_r^U, a_f^L = a_f^U$ آن گاه فاصله مقادیر عدد فازی

\tilde{A} را می توان به عنوان یک عدد فازی تعمیم یافته در نظر گرفت و به صورت زیر نمایش داد:

$$\tilde{A} = (a_1, a_r, a_r, a_f; w_{\tilde{A}})$$



شکل ۳-۱ یک فاصله مقادیر اعداد فازی

۳-۲ عملیات محاسباتی

فرض کنید دو فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} وجود دارند. به قسمی که:

$$\tilde{A} = \left[\left(a_1^L, a_r^L, a_f^L, a_f^L; w_{\tilde{A}}^L \right), \left(a_1^U, a_r^U, a_r^U, a_f^U; w_{\tilde{A}}^U \right) \right] \text{ و}$$

$$\tilde{B} = \left[\left(b_1^L, b_r^L, b_r^L, b_f^L; w_{\tilde{B}}^L \right), \left(b_1^U, b_r^U, b_r^U, b_f^U; w_{\tilde{B}}^U \right) \right].$$

عملیات محاسباتی بین فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} به صورت زیر می باشد:

۱- مجموع فاصله مقادیر اعداد فازی \oplus :

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} =$$

$$\left[\left(a_1^L, a_r^L, a_r^L, a_f^L; w_{\tilde{A}}^L \right), \left(a_1^U, a_r^U, a_r^U, a_f^U; w_{\tilde{A}}^U \right) \right] \oplus \left[\left(b_1^L, b_r^L, b_r^L, b_f^L; w_{\tilde{B}}^L \right), \left(b_1^U, b_r^U, b_r^U, b_f^U; w_{\tilde{B}}^U \right) \right] =$$

$$\left[\left(a_1^L + b_1^L, a_r^L + b_r^L, a_r^L + b_r^L, a_f^L + b_f^L; \text{Min}(w_{\tilde{A}}^L, w_{\tilde{B}}^L) \right), \left(a_1^U + b_1^U, a_r^U + b_r^U, a_r^U + b_r^U, a_f^U + b_f^U; \text{Min}(w_{\tilde{A}}^U, w_{\tilde{B}}^U) \right) \right]$$

که در آن:

$a_1^L, a_r^L, a_r^L, a_f^L$ و $a_1^U, a_r^U, a_r^U, a_f^U$ و $b_1^L, b_r^L, b_r^L, b_f^L$ و $b_1^U, b_r^U, b_r^U, b_f^U$ مقادیر حقیقی هستند. و

$$0 < w_{\tilde{B}}^L \leq w_{\tilde{B}}^U \leq 1, \quad 0 < w_{\tilde{A}}^L \leq w_{\tilde{A}}^U \leq 1$$

۲- تفریق فاصله مقادیر اعداد فازی \ominus :

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} =$$

$$\left[\left(a_1^L, a_r^L, a_r^L, a_f^L; w_{\tilde{A}}^L \right), \left(a_1^U, a_r^U, a_r^U, a_f^U; w_{\tilde{A}}^U \right) \right] \ominus \left[\left(b_1^L, b_r^L, b_r^L, b_f^L; w_{\tilde{B}}^L \right), \left(b_1^U, b_r^U, b_r^U, b_f^U; w_{\tilde{B}}^U \right) \right] =$$

$$\left[\left(a_1^L - b_f^L, a_r^L - b_r^L, a_r^L - b_r^L, a_f^L - b_1^L; \text{Min}(w_{\tilde{A}}^L, w_{\tilde{B}}^L) \right), \left(a_1^U - b_f^U, a_r^U - b_r^U, a_r^U - b_r^U, a_f^U - b_1^U; \text{Min}(w_{\tilde{A}}^U, w_{\tilde{B}}^U) \right) \right]$$

به قسمی که:

$a_1^L, a_r^L, a_r^L, a_f^L, a_1^U, a_r^U, a_r^U, a_f^U$ و $b_1^L, b_r^L, b_r^L, b_f^L$ و $b_1^U, b_r^U, b_r^U, b_f^U$ مقادیر حقیقی هستند و

$$0 < w_{\tilde{B}}^L \leq w_{\tilde{B}}^U \leq 1 \text{ و } 0 < w_{\tilde{A}}^L \leq w_{\tilde{A}}^U \leq 1$$

۳- ضرب فاصله مقادیر اعداد فازی \otimes :

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} =$$

$$\left[\left(a_1^L, a_r^L, a_r^L, a_f^L; w_{\tilde{A}}^L \right), \left(a_1^U, a_r^U, a_r^U, a_f^U; w_{\tilde{A}}^U \right) \right] \otimes \left[\left(b_1^L, b_r^L, b_r^L, b_f^L; w_{\tilde{B}}^L \right), \left(b_1^U, b_r^U, b_r^U, b_f^U; w_{\tilde{B}}^U \right) \right] =$$

$$\left[\left(a_1^L \times b_1^L, a_r^L \times b_r^L, a_r^L \times b_r^L, a_f^L \times b_f^L; \text{Min}(w_{\tilde{A}}^L, w_{\tilde{B}}^L) \right), \left(a_1^U \times b_1^U, a_r^U \times b_r^U, a_r^U \times b_r^U, a_f^U \times b_f^U; \text{Min}(w_{\tilde{A}}^U, w_{\tilde{B}}^U) \right) \right]$$

که در آن:

$a_1^L, a_r^L, a_r^L, a_f^L, a_1^U, a_r^U, a_r^U, a_f^U$ و $b_1^L, b_r^L, b_r^L, b_f^L$ و $b_1^U, b_r^U, b_r^U, b_f^U$ مقادیر حقیقی هستند و

$$0 < w_{\tilde{B}}^L \leq w_{\tilde{B}}^U \leq 1, 0 < w_{\tilde{A}}^L \leq w_{\tilde{A}}^U \leq 1$$

۴- تقسیم فاصله مقادیر اعداد فازی \emptyset :

$$\begin{aligned} \tilde{A} \emptyset \tilde{B} = & \left[(a_1^L, a_1^L, a_1^L, a_1^L; w_{\tilde{A}}^L), (a_1^U, a_1^U, a_1^U, a_1^U; w_{\tilde{A}}^U) \right] \emptyset \\ & \left[(b_1^L, b_1^L, b_1^L, b_1^L; w_{\tilde{B}}^L), (b_1^U, b_1^U, b_1^U, b_1^U; w_{\tilde{B}}^U) \right] = \\ & \left[\left(a_1^L / b_1^L, a_1^L / b_1^L, a_1^L / b_1^L, a_1^L / b_1^L; \text{Min}(w_{\tilde{A}}^L, w_{\tilde{B}}^L) \right), \right. \\ & \left. \left(a_1^U / b_1^U, a_1^U / b_1^U, a_1^U / b_1^U, a_1^U / b_1^U; \text{Min}(w_{\tilde{A}}^U, w_{\tilde{B}}^U) \right) \right] \end{aligned}$$

که در آن:

صفر منفی یا نا صفر مثبت می باشند و $0 < w_{\tilde{A}}^L \leq w_{\tilde{B}}^L \leq 1$ ، $0 < w_{\tilde{A}}^U \leq w_{\tilde{B}}^U \leq 1$ ، که همگی اعداد حقیقی نا

۳-۳ اندازه تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی

در این بخش، به اندازه تشابهی که درجه تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} را

محاسبه می کند، می پردازیم.

فرض کنیم U مجموعه مرجع باشد که $U = [0, 1]$ و دو فاصله مقادیر اعداد فازی را به صورت زیر در

نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left[\tilde{A}^L, \tilde{A}^U \right] = \left[(a_1^L, a_1^L, a_1^L, a_1^L; w_{\tilde{A}}^L), (a_1^U, a_1^U, a_1^U, a_1^U; w_{\tilde{A}}^U) \right] \\ \tilde{B} &= \left[\tilde{B}^L, \tilde{B}^U \right] = \left[(b_1^L, b_1^L, b_1^L, b_1^L; w_{\tilde{B}}^L), (b_1^U, b_1^U, b_1^U, b_1^U; w_{\tilde{B}}^U) \right] \end{aligned}$$

که در آن:

$$a_1^L \leq a_r^L \leq a_r^L \leq a_r^L \leq 1, \quad 0 \leq a_1^U \leq a_r^U \leq a_r^U \leq a_r^U \leq 1, \quad 0 \leq w_{\tilde{A}}^L \leq w_{\tilde{A}}^U \leq 1, \quad \tilde{A}^L \subset \tilde{A}^U$$

$$b_1^L \leq b_r^L \leq b_r^L \leq b_r^L \leq 1, \quad 0 \leq b_1^U \leq b_r^U \leq b_r^U \leq b_r^U \leq 1, \quad 0 \leq w_{\tilde{B}}^L \leq w_{\tilde{B}}^U \leq 1, \quad \tilde{B}^L \subset \tilde{B}^U$$

اکنون روش پیشنهاد شده به صورت زیر ارائه می شود:

گام ۱.

بر اساس فرمول های (۲-۲۲) و (۲-۲۴) نقاط COG فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} را

به ترتیب می یابیم. برای مثال، فاصله مقادیر عدد فازی \tilde{A} دو نقطه ی COG متفاوت $(x_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{A}^L}^*)$ ، از

عدد فازی پایینی \tilde{A}^L و دیگری نقطه ی COG $(x_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{A}^U}^*)$ از عدد فازی بالایی \tilde{A}^U نیز به صورت

زیر می باشد:

$$y_{\tilde{A}^L}^* = \begin{cases} \frac{w_{\tilde{A}}^L \times \left(\frac{a_r^L - a_r^L}{a_r^L - a_1^L} + 2 \right)}{6} & \text{if } a_1^L \neq a_r^L, 0 < w_{\tilde{A}}^L \leq 1 \\ \frac{w_{\tilde{A}}^L}{2} & \text{if } a_1^L = a_r^L, 0 < w_{\tilde{A}}^L \leq 1 \end{cases} \quad (3-1)$$

$$x_{\tilde{A}^L}^* = \frac{y_{\tilde{A}^L}^* (a_r^L + a_1^L) + (a_r^L + a_1^L) (w_{\tilde{A}}^L - y_{\tilde{A}^L}^*)}{2w_{\tilde{A}}^L} \quad (3-2)$$

9

$$y_{\tilde{A}^U}^* = \begin{cases} \frac{w_{\tilde{A}}^U \times \left(\frac{a_r^U - a_r^U}{a_r^U - a_1^U} + 2 \right)}{6} & \text{if } a_1^U \neq a_r^U, 0 < w_{\tilde{A}}^U < 1 \\ \frac{w_{\tilde{A}}^U}{2} & \text{if } a_1^U = a_r^U, 0 < w_{\tilde{A}}^U \leq 1 \end{cases} \quad (3-3)$$

$$x_{\tilde{A}^U}^* = \frac{y_{\tilde{A}^U}^* (a_{\tau}^U + a_{\gamma}^U) + (a_{\tau}^U + a_{\gamma}^U) (w_{\tilde{A}}^U - y_{\tilde{A}^U}^*)}{2w_{\tilde{A}}^U} \quad (3-4)$$

به همین روش می توانیم، نقاط COG $(x_{\tilde{B}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)$ از عدد فازی پایینی \tilde{B}^L و نقطه ی COG $(x_{\tilde{B}^U}^*, y_{\tilde{B}^U}^*)$ از عدد فازی بالایی \tilde{B}^U ، از فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{B} را محاسبه نماییم.

گام ۲.

بر اساس فرمول (۲-۲۵) درجه تشابه $S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L)$ که بین اعداد فازی پایینی \tilde{A}^L و \tilde{B}^L و درجه تشابه $S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U)$ که بین اعداد فازی بالایی \tilde{A}^U و \tilde{B}^U را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{\tau} |b_i^L - a_i^L|}{\tau} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}^L}^* - x_{\tilde{B}^L}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}^L}, S_{\tilde{B}^L})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)} \quad (3-5)$$

که در

آن $B(S_{\tilde{A}^L}, S_{\tilde{B}^L})$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$B(S_{\tilde{A}^L}, S_{\tilde{B}^L}) = \begin{cases} S_{\tilde{A}^L}^L + S_{\tilde{B}^L}^L > 1 \\ S_{\tilde{A}^L}^L + S_{\tilde{B}^L}^L = 0 \end{cases} \quad (3-6)$$

به قسمی که $S_{\tilde{A}}^L$ و $S_{\tilde{B}}^L$ به ترتیب، طول هایی بر اساس فاصله مقادیر اعداد فازی دوزنقه ای پایینی \tilde{A} و \tilde{B} می باشند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$S_{\tilde{A}}^L = a_{\tau}^L - a_{\gamma}^L \quad (3-7)$$

$$S_{\tilde{B}}^L = b_{\tau}^L - b_{\gamma}^L \quad (3-8)$$

$$S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^r |b_i^U - a_i^U|}{r} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}^U}^* - x_{\tilde{B}^U}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}^U}, S_{\tilde{B}^U})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}^U}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}^U}^*)} \quad (3-9)$$

که در آن $B(S_{\tilde{A}^U}, S_{\tilde{B}^U})$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$B(S_{\tilde{A}^U}, S_{\tilde{B}^U}) = \begin{cases} 1 & S_{\tilde{A}^U} + S_{\tilde{B}^U} > 1 \\ 0 & S_{\tilde{A}^U} + S_{\tilde{B}^U} = 0 \end{cases} \quad (3-10)$$

$$S_{\tilde{A}}^U = a_{\tilde{A}}^U - a_{\tilde{A}}^L \quad (3-11)$$

$$S_{\tilde{B}}^U = b_{\tilde{B}}^U - b_{\tilde{B}}^L \quad (3-12)$$

مقدار $B(S_{\tilde{A}^L}, S_{\tilde{B}^L})$ و $B(S_{\tilde{A}^U}, S_{\tilde{B}^U})$ برای تعیین این که آیا نقطه ی COG را در نظر می

گیریم یا خیر می باشد. اگر فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} اعداد حقیقی باشند، یعنی

$$S_{\tilde{A}}^L + S_{\tilde{B}}^L = 0 \quad \text{و} \quad S_{\tilde{A}}^U + S_{\tilde{B}}^U = 0$$

آن گاه فاصله ی مرکز ثقل را در نظر نمی گیریم یعنی

$$B(S_{\tilde{A}^L}, S_{\tilde{B}^L}) = 0 \quad \text{و} \quad B(S_{\tilde{A}^U}, S_{\tilde{B}^U}) = 0$$

اما اگر یکی از \tilde{A} یا \tilde{B} عدد فازی تعمیم یافته باشند، یعنی

$$S_{\tilde{A}}^L + S_{\tilde{B}}^L \neq 0 \quad \text{و} \quad S_{\tilde{A}}^U + S_{\tilde{B}}^U \neq 0$$

آن گاه باید فاصله ی COG را در نظر بگیریم یعنی $B(S_{\tilde{A}^L}, S_{\tilde{B}^L}) = 1$

$$\text{و} \quad B(S_{\tilde{A}^U}, S_{\tilde{B}^U}) = 1 \quad \text{به قسمی که} \quad S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) \in [0, 1] \quad \text{و} \quad S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U) \in [0, 1]$$

بیشترین مقدار $S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L)$ ، بالاترین تشابه بین اعداد فازی پایینی \tilde{A}^L و \tilde{B}^L را نشان می دهد و

بیشترین مقدار $S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U)$ بالاترین تشابه بین اعداد فازی بالایی \tilde{A}^U و \tilde{B}^U می باشد.

گام ۳.

محاسبه ی درجه تشابه $S(\tilde{A}, \tilde{B})$ بین اعداد فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} به صورت زیر می باشد:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) \times S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U)} \quad (3-13)$$

به قسمی که $S(\tilde{A}, \tilde{B}) \in [0, 1]$ در این صورت بیشترین مقدار $S(\tilde{A}, \tilde{B})$ ، بالاترین تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} را نشان می دهد.

۳-۴ برخی از خواص ارائه شده

خاصیت ۱: دو فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} مساوی هستند اگر و فقط اگر $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$.

برهان ۱:

برای اثبات طرف اول، اگر \tilde{A} و \tilde{B} مساوی باشند، آن گاه برای اثبات حکم کافیت ثابت کنیم:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) \times S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U)} = 1$$

اگر \tilde{A} و \tilde{B} مساوی باشند، آن گاه \tilde{A}^L مساوی با \tilde{B}^L می باشد اگر و تنها اگر $S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) = 1$.

و \tilde{A}^U و \tilde{B}^U مساوی هستند اگر و تنها اگر $S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U) = 1$. به قسمی که:

$$S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^r |b_i^L - a_i^L|}{\varphi} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}^L}^* - x_{\tilde{B}^L}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}^L}^L, S_{\tilde{B}^L}^L)} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)}$$

اگر \tilde{A}^L مساوی با \tilde{B}^L باشد آن گاه:

$$a_1^L = b_1^L, a_r^L = b_r^L, a_{\varphi}^L = b_{\varphi}^L, a_{\varphi}^L = b_{\varphi}^L, w_{\tilde{A}}^L = w_{\tilde{B}}^L$$

بنابراین $x_{\tilde{A}^L}^* = x_{\tilde{B}^L}^*$ و $y_{\tilde{A}^L}^* = y_{\tilde{B}^L}^*$ و همچنین از عبارت های (۳-۷) و (۳-۸) داریم:

$S_{\tilde{A}}^L \neq 0$ و $S_{\tilde{B}}^L \neq 0$ ، بنابراین طبق (۳-۶) داریم:

$$B(S_{\tilde{A}}^L, S_{\tilde{B}}^L) = 1$$

بنابراین

$$S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) = [(1-0) \times (1-0)]^1 \times 1 = 1$$

حال $S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U)$ را به صورت زیر داریم:

$$S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^r |b_i^U - a_i^U|}{\varphi} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}^U}^* - x_{\tilde{B}^U}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}^U}^U, S_{\tilde{B}^U}^U)} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}^U}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}^U}^*)}$$

مشابهاً اگر \tilde{A}^U مساوی با \tilde{B}^U باشد آن گاه:

$$a_1^U = b_1^U, a_r^U = b_r^U, a_{\varphi}^U = b_{\varphi}^U, a_{\varphi}^U = b_{\varphi}^U, w_{\tilde{A}}^U = w_{\tilde{B}}^U,$$

بنابراین $x_{\tilde{A}^U}^* = x_{\tilde{B}^U}^*$ و $y_{\tilde{A}^U}^* = y_{\tilde{B}^U}^*$ و هم چنین از عبارت های (۳-۱۱) و (۳-۱۲) داریم:

$S_{\tilde{A}}^U \neq 0$ و $S_{\tilde{B}}^U \neq 0$ ، بنابراین طبق (۳-۱۰) داریم: $B(S_{\tilde{A}}^U, S_{\tilde{B}}^U) = 1$

$$S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U) = [(1-0) \times (1-0)]^{1/2} \times 1 = 1$$

لذا داریم:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{1 \times 1} = 1$$

۲- برای اثبات طرف دوم:

اگر $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ آن گاه $\sqrt{S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) \times S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U)} = 1$

و این یعنی داریم: $S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) = 1$ و $S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U) = 1$.

$$S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^f |b_i^L - a_i^L|}{f} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}^L}^* - x_{\tilde{B}^L}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}^L}, S_{\tilde{B}^L})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)} = 1$$

لذا می توان دریافت که:

$$a_1^L = b_1^L, a_2^L = b_2^L, a_3^L = b_3^L, a_4^L = b_4^L, w_{\tilde{A}}^L = w_{\tilde{B}}^L, x_{\tilde{A}^L}^* = x_{\tilde{B}^L}^* \text{ و } y_{\tilde{A}^L}^* = y_{\tilde{B}^L}^*$$

پس اعداد فازی پایینی \tilde{A}^L و \tilde{B}^L مساویند.

اگر $S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U) = 1$ آن گاه: ۶۳

$$S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^r |b_i^U - a_i^U|}{r} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}^U}^* - x_{\tilde{B}^U}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}^U}, S_{\tilde{B}^U})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}^U}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}^U}^*)} = 1$$

و این نشان می دهد که:

$$a_1^U = b_1^U, a_2^U = b_2^U, a_3^U = b_3^U, a_4^U = b_4^U, w_{\tilde{A}}^U = w_{\tilde{B}}^U, x_{\tilde{A}^U}^* = x_{\tilde{B}^U}^* \text{ و } y_{\tilde{A}^U}^* = y_{\tilde{B}^U}^* .$$

لذا اعداد فازی بالایی \tilde{A}^U و \tilde{B}^U مساوی هستند.

□

خاصیت ۲: $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = S(\tilde{B}, \tilde{A})$

برهان:

بر اساس عبارت (۱۳-۳) داریم:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) \times S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U)}$$

$$S(\tilde{B}, \tilde{A}) = \sqrt{S(\tilde{B}^L, \tilde{A}^L) \times S(\tilde{B}^U, \tilde{A}^U)}$$

به قسمی که:

$$S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^r |a_i^L - b_i^L|}{r} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}^L}^* - x_{\tilde{B}^L}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}^L}, S_{\tilde{B}^L})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)}$$

۶۴

$$S(\tilde{B}^L, \tilde{A}^L) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^f |b_i^L - a_i^L|}{f} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{B}^L}^* - x_{\tilde{A}^L}^*| \right)^{B(S_{\tilde{B}^L}, S_{\tilde{A}^L})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{B}^L}^*, y_{\tilde{A}^L}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{B}^L}^*, y_{\tilde{A}^L}^*)}$$

$$S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^f |b_i^U - a_i^U|}{f} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}^U}^* - x_{\tilde{B}^U}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}^U}, S_{\tilde{B}^U})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}^U}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}^U}^*)}$$

$$S(\tilde{B}^U, \tilde{A}^U) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^f |b_i^U - a_i^U|}{f} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{B}^U}^* - x_{\tilde{A}^U}^*| \right)^{B(S_{\tilde{B}^U}, S_{\tilde{A}^U})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{B}^U}^*, y_{\tilde{A}^U}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{B}^U}^*, y_{\tilde{A}^U}^*)}$$

به قسمی که:

$$\sum_{i=1}^f |a_i^L - b_i^L| = \sum_{i=1}^f |b_i^L - a_i^L| \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^f |a_i^U - b_i^U| = \sum_{i=1}^f |b_i^U - a_i^U| ,$$

$$|x_{\tilde{A}^L}^* - x_{\tilde{B}^L}^*| = |x_{\tilde{B}^L}^* - x_{\tilde{A}^L}^*| \quad \text{و} \quad |x_{\tilde{A}^U}^* - x_{\tilde{B}^U}^*| = |x_{\tilde{B}^U}^* - x_{\tilde{A}^U}^*| ,$$

$$\frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)} = \frac{\text{Min}(y_{\tilde{B}^L}^*, y_{\tilde{A}^L}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{B}^L}^*, y_{\tilde{A}^L}^*)}, \quad \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}^U}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}^U}^*)} = \frac{\text{Min}(y_{\tilde{B}^U}^*, y_{\tilde{A}^U}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{B}^U}^*, y_{\tilde{A}^U}^*)}$$

$$B(S_{\tilde{A}^L}, S_{\tilde{B}^L}) = B(S_{\tilde{B}^L}, S_{\tilde{A}^L}) \quad \text{و} \quad B(S_{\tilde{A}^U}, S_{\tilde{B}^U}) = B(S_{\tilde{B}^U}, S_{\tilde{A}^U}),$$

بنابراین داریم:

$$S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) = S(\tilde{B}^L, \tilde{A}^L),$$

$$S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U) = S(\tilde{B}^U, \tilde{A}^U)$$

لذا:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = S(\tilde{B}, \tilde{A}).$$

□

خاصیت ۳: اگر \tilde{A} و \tilde{B} دو عدد حقیقی باشند. آن گاه $|a-b| = 1 - S(\tilde{A}, \tilde{B})$.

برهان:

اگر \tilde{A} و \tilde{B} دو عدد حقیقی باشند، آن گاه می توان دید که:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left[(a_1^L, a_1^L, a_1^L, a_1^L; w_{\tilde{A}}^L), (a_1^U, a_1^U, a_1^U, a_1^U; w_{\tilde{A}}^U) \right] \\ &= [(a, a, a, a; 1), (a, a, a, a; 1)] \\ &= (a, a, a, a; 1) \\ &= a \end{aligned}$$

$$\tilde{B} = \left[(b_1^L, b_1^L, b_1^L, b_1^L; w_{\tilde{B}}^L), (b_1^U, b_1^U, b_1^U, b_1^U; w_{\tilde{B}}^U) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= [(b, b, b, b; \lambda), (b, b, b, b; \lambda)] \\
&= (b, b, b, b; \lambda) \\
&= b
\end{aligned}$$

بر اساس رابطه ی (۳-۷) و (۳-۸) داریم:

$$S_{\tilde{A}}^L = \cdot, S_{\tilde{B}}^L = \cdot$$

۶۶

و از رابطه ی (۳-۶) داریم:

$$B(S_{\tilde{A}}^L, S_{\tilde{B}}^L) = \cdot$$

مشابهتاً از عبارات (۳-۱۱) و (۳-۱۲) داریم:

$$S_{\tilde{A}}^U = \cdot, S_{\tilde{B}}^U = \cdot$$

و از رابطه (۳-۱۰) می توان دریافت که $B(S_{\tilde{A}}^U, S_{\tilde{B}}^U) = \cdot$

و از عبارات (۳-۱) و (۳-۳) می توانیم مشاهده کنیم که:

$$y_{\tilde{A}^U}^* = y_{\tilde{B}^U}^* = y_{\tilde{A}^L}^* = y_{\tilde{B}^L}^* = \frac{1}{4}$$

لذا از عبارت (۳-۵) داریم:

$$S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i^L - b_i^L|}{4} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}^L}^* - x_{\tilde{B}^L}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}^L}, S_{\tilde{B}^L}^L)} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 - \frac{4|a-b|}{4} \right] \times 1 \times 1 \\
&= 1 - |a-b|
\end{aligned}$$

و از عبارت (۳-۹) داریم:

$$S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^f |b_i^U - a_i^U|}{f} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}^U}^* - x_{\tilde{B}^U}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}^U}, S_{\tilde{B}^U})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}^U}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}^U}^*)}$$

۶۷

$$\begin{aligned} &= \left[1 - \frac{f|a-b|}{f} \right] \times 1 \times 1 \\ &= 1 - |a-b| \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sqrt{S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) \times S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U)} \\ &= \sqrt{(1 - |a-b|) \times (1 - |a-b|)} \\ &= 1 - |a-b| \end{aligned}$$

□

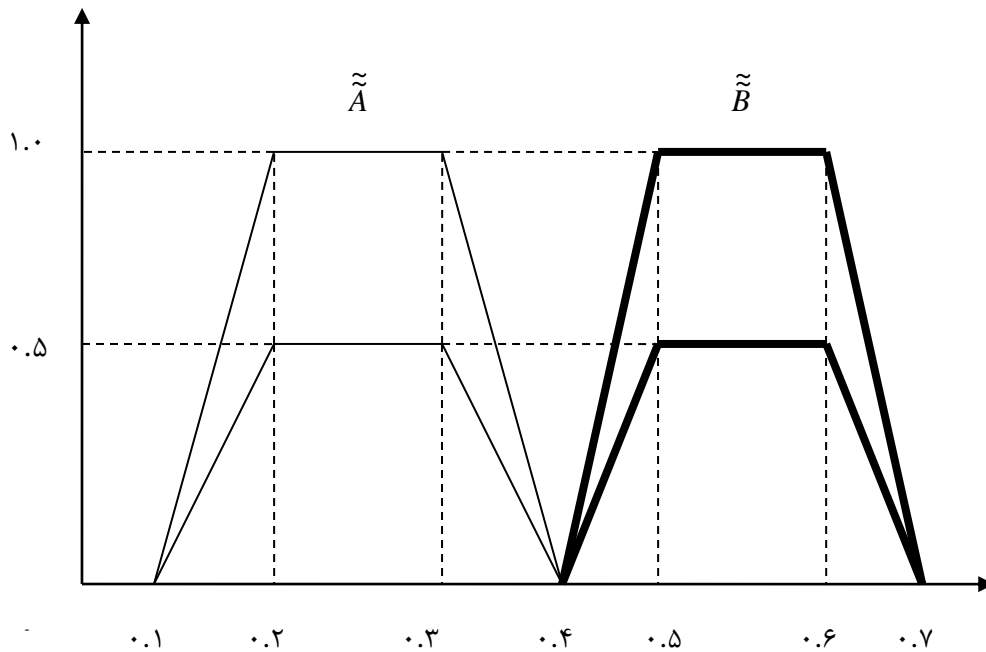
۳-۵ مثالهای عددی

مثال ۳-۱

فرض می کنیم که دو فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} وجود دارند به قسمی که:

$$\tilde{A} = [(0.1, 0.2, 0.3, 0.4; 0.5), (0.1, 0.2, 0.3, 0.4; 1)]$$

$$\tilde{B} = [(0.4, 0.5, 0.6, 0.7; 0.5), (0.4, 0.5, 0.6, 0.7; 1)]$$



شکل ۳-۲ دو فاصله مقادیر اعداد فازی

گام ۱:

از عبارت های (۳-۱) و (۳-۲) می توان نقطه ی $(x_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{A}^L}^*) = COG(\tilde{A}^L)$ عدد فازی پایینی \tilde{A}^L

را به دست آوریم، و به صورت زیر محاسبه شده است:

$$y_{\tilde{A}^L}^* = \frac{w_{\tilde{A}^L}^* \times \left(\frac{a_7^L - a_6^L}{a_6^L - a_5^L} + 2 \right)}{6}$$

$$= \frac{0.5 \times \left(\frac{0.3 - 0.2}{0.4 - 0.1} + 2 \right)}{6}$$

$$= 0.1944$$

$$\begin{aligned}
 x_{\tilde{A}^L}^* &= \frac{y_{\tilde{A}^L}^* (a_r^L + a_l^L) + (a_r^L + a_l^L) (w_{\tilde{A}}^L - y_{\tilde{A}^L}^*)}{2w_{\tilde{A}^L}} \\
 &= \frac{0.1944 \times (0.3 + 0.2) + (0.4 + 0.1) \times (0.5 - 0.1944)}{2 \times 0.5} \\
 &= 0.25
 \end{aligned}$$

مشابهاً داریم:

$$COG(\tilde{B}^L) = (0.55, 0.1944), COG(\tilde{A}^U) = (0.25, 0.3889), COG(\tilde{B}^U) = (0.55, 0.3889)$$

از عبارات (۳-۷) و (۳-۸) داریم:

$$S_{\tilde{A}}^L = a_r^L - a_l^L = 0.4 - 0.1 = 0.3$$

$$S_{\tilde{B}}^L = b_r^L - b_l^L = 0.7 - 0.4 = 0.3$$

$S_{\tilde{A}}^L + S_{\tilde{B}}^L > 0$ بنابراین از عبارت (۳-۶) داریم:

$$B(S_{\tilde{A}}^L, S_{\tilde{B}}^L) = 1$$

و مشابهاً داریم:

$$B(S_{\tilde{A}}^U, S_{\tilde{B}}^U) = 1$$

گام ۲:

از عبارت (۳-۵) می توان درجه تشابه $S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L)$ را بین اعداد فازی پایینی \tilde{A}^L و \tilde{B}^L را به

صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned}
 S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) &= \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i^L - b_i^L|}{4} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}^L}^* - x_{\tilde{B}^L}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}^L}, S_{\tilde{B}^L})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{B}^L}^*)} \\
 &= \left[1 - \frac{|0.1 - 0.4| + |0.2 - 0.5| + |0.3 - 0.6| + |0.4 - 0.7|}{4} \right] \times (1 - |0.25 - 0.55|) \\
 &\times \frac{\text{Min}(0.1944, 0.1944)}{\text{Max}(0.1944, 0.1944)} \\
 &= \left[1 - \frac{4 \times 0.3}{4} \right] \times (1 - 0.3) \times 1 \\
 &= 0.7 \times 0.7 = 0.49
 \end{aligned}$$

متشابهاً با استفاده از رابطه ی (۳-۹) می توان درجه تشابه $S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U)$ را بین اعداد فازی بالایی \tilde{A}^U و \tilde{B}^U را محاسبه نمود به قسمی که $S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U) = 0.49$.

گام ۳:

اکنون درجه تشابه $S(\tilde{A}, \tilde{B})$ بین فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned}
 S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sqrt{S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L) \times S(\tilde{A}^U, \tilde{B}^U)} \\
 &= \sqrt{0.49 \times 0.49} = 0.49
 \end{aligned}$$

یعنی درجه تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} ، 0.49 می باشد.

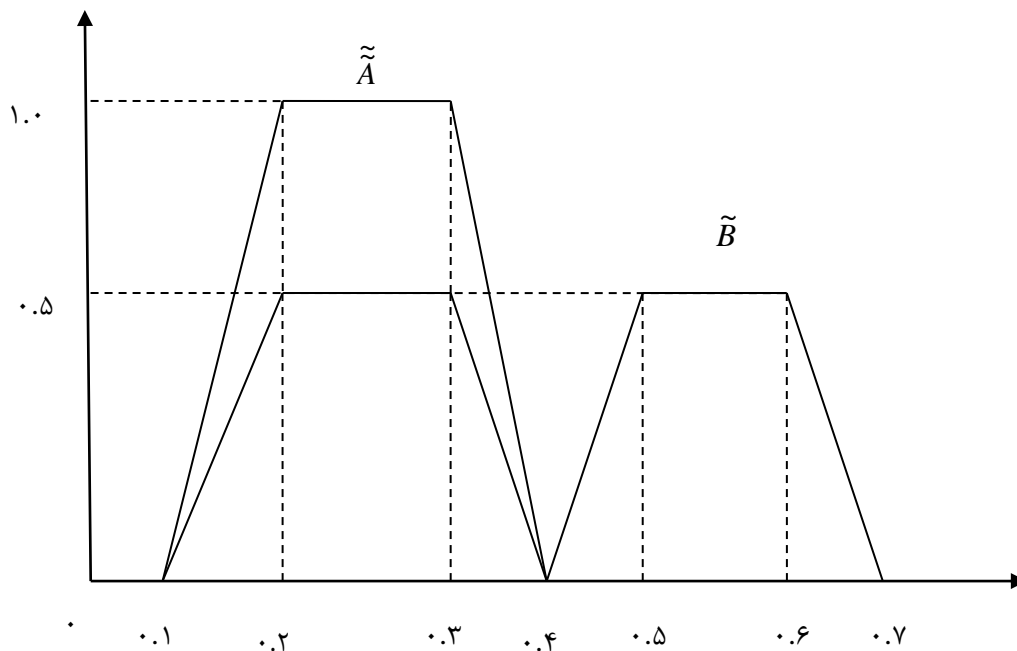
مثال ۲-۳

فرض می کنیم \tilde{A} فاصله مقادیر اعداد فازی و \tilde{B} یک عدد فازی تعمیم یافته می باشند به قسمی که داریم:

$$\tilde{A} = [(0.1, 0.2, 0.3, 0.4; 0.5), (0.1, 0.2, 0.3, 0.4; 1)]$$

$$\tilde{B} = [(0.4, 0.5, 0.6, 0.7; 0.5)]$$

در شکل ۳-۳ فاصله مقادیر عدد فازی \tilde{A} و عدد فازی \tilde{B} تعمیم یافته نشان داده شده است.



شکل ۳-۳ یک فاصله مقادیر عدد فازی و یک عدد فازی تعمیم یافته

باتوجه به شکل ۳-۳ می توان عدد فازی تعمیم یافته \tilde{B} را به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{B} = [(0.4, 0.5, 0.6, 0.7; 0.5), (0.4, 0.5, 0.6, 0.7; 0.5)].$$

گام ۱:

از عبارات (۳-۱) و (۳-۲) می توان نقطه ی $COG(\tilde{A}^L) = (x_{\tilde{A}^L}^*, y_{\tilde{A}^L}^*)$ عدد فازی پایینی \tilde{A}^L را

بدست آورد، که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} y_{\tilde{A}^L}^* &= \frac{w_{\tilde{A}^L}^* \times \left(\frac{a_r^L - a_r^L}{a_r^L - a_l^L} + 2 \right)}{6} \\ &= \frac{0.5 \times \left(\frac{0.3 - 0.2}{0.4 - 0.1} + 2 \right)}{6} \\ &= 0.1944 \\ x_{\tilde{A}^L}^* &= \frac{y_{\tilde{A}^L}^* (a_r^L + a_r^L) + (a_r^L + a_l^L) \left(w_{\tilde{A}^L}^L - y_{\tilde{A}^L}^* \right)}{2w_{\tilde{A}^L}^L} \\ &= \frac{0.1944 \times (0.3 + 0.2) + (0.4 + 0.1) \times (0.5 - 0.1944)}{2 \times 0.5} \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

مشابهاً $COG(\tilde{A}^U) = (0.25, 0.3889)$. از عبارت های (۲-۲۲) و (۲-۲۳) داریم:

$$COG(\tilde{B}) = (0.55, 0.1944)$$

هم چنین از عبارت های (۳-۷) و (۳-۸) می توان نوشت:

$$S_{\tilde{A}}^L = a_{\tilde{A}}^L - a_{\tilde{A}}^L = 0.4 - 0.1 = 0.3$$

$$S_{\tilde{B}} = b_{\tilde{B}} - b_{\tilde{B}} = 0.7 - 0.4 = 0.3$$

لذا $S_{\tilde{A}}^L + S_{\tilde{B}} > 0$ و از عبارت (۳-۵) داریم:

$$B(S_{\tilde{A}}^L, S_{\tilde{B}}) = 1$$

و مشابهاً:

$$B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}^L) = 1$$

گام ۲:

بنا به عبارت (۳-۵) درجه تشابه $S(\tilde{A}^L, \tilde{B}^L)$ را بین اعداد فازی پایینی \tilde{A}^L و \tilde{B}^L محاسبه می

کنیم:

$$\begin{aligned} S(\tilde{A}^U, \tilde{B}) &= \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i^U - b_i|}{4} \right] \times \left(1 - |x_{\tilde{A}^U}^* - x_{\tilde{B}}^*| \right)^{B(S_{\tilde{A}^U}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\text{Min}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\text{Max}(y_{\tilde{A}^U}^*, y_{\tilde{B}}^*)} \\ &= \left[1 - \frac{|0.1 - 0.4| + |0.2 - 0.5| + |0.3 - 0.6| + |0.4 - 0.7|}{4} \right] \\ &\quad \times \left(1 - |0.25 - 0.55| \right) \times \frac{\text{Min}(0.3889, 0.1944)}{\text{Max}(0.3889, 0.1944)} \\ &= \left[1 - \frac{4 \times 0.3}{4} \right] \times (1 - 0.3) \times \frac{0.1944}{0.3889} = 0.7 \times 0.7 \times 0.4998714 = 0.2449369 \end{aligned}$$

مشابهت می توانیم درجه تشابه $S(\tilde{A}^L, \tilde{B})$ بین فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A}^L و \tilde{B} را محاسبه نماییم به قسمی که داریم:

$$S(\tilde{A}^L, \tilde{B}) = 0.49$$

گام ۳:

اکنون درجه تشابه $S(\tilde{A}, \tilde{B})$ ، بین فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sqrt{S(\tilde{A}^L, \tilde{B}) \times S(\tilde{A}^U, \tilde{B})} \\ &= \sqrt{0.49 \times 0.2449369} = 0.346437 \end{aligned}$$

لذا درجه تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} ، 0.346437 می باشد.

۶-۳ نتیجه:

در این فصل، روشی برای محاسبه ی اندازه تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی ارائه شده است. معیار تشابه ارائه شده مفهوم هندسی را برای محاسبه ی مرکز ثقل نقاط اعداد فازی پایینی و بالایی فاصله مقادیر اعداد فازی را به ترتیب برای محاسبه ی درجه تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی به کار می برد. برخی از خواص پیشنهادی معیار تشابه را ثابت کردیم.

فصل چهارم

فصل چهارم

اندازه تشابه بین مجموعه های فازی شهودی

اتاناسو^۱ [۲] مفهوم مجموعه های فازی شهودی (IFSs)^۲ را برای عمومیت بخشیدن به مجموعه های فازی، توسط زاده معرفی نمود [۳۶]. باستینک^۳ و بارفلیو^۴ [۴] مفهوم مجموعه های مبهم را مشابه مجموعه های فازی شهودی معرفی کرد. چن [۱۵] روشهایی را برای اندازه گیری درجه تشابه بین مجموعه های مبهم ارائه داد. هانگ^۵ و کیم^۶ [۱۵] با مثالهایی نشان دادند که اندازه تشابه پیشنهادی توسط چن [۱۵] در برخی موارد مناسب نمی باشد. آنها معیار های اصلاح شده را پیشنهاد کردند.

اخیراً لی و چنج [۱۵] چندین معیار تشابه جدید را بین IFSs ارائه دادند.

در این بخش، نشان می دهیم که روشهای لی و چنج مشکلاتی نسبت به روشهای چن دارند. با یک مثال نشان می دهیم که معیار تشابهات اصلاح شده ی کیم و هانگ نیز در برخی موارد مناسب

^۱ Atanassov

^۲ Intuitionistic fuzzy sets

^۳ Bustince

^۴ Burfflilio

^۵ Hang

^۶ Kim

نمی باشند. بنابراین با یک نمایش هندسی IFSs و فاصله ی بین IFSs پیشنهادی توسط زمیت^۱ و کاپزیک^۲ [۳۳]، روشهایی را برای اندازه گیری درجه تشابه بین IFSs و اجزای بین آنها مطرح شد. با مقایسه ی درجه تشابهات، نشان داده می شود که اندازه تشابهات ارائه شده در این بخش مستدل تر از بخش قبل می باشند.

۴-۱ مجموعه های فازی شهودی (IFSs)

در این بخش، مروری بر تعاریف مجموعه های فازی شهودی خواهیم داشت.

تعریف ۴-۱ [۲]: فرض کنیم X یک مجموعه ثابت باشد. $IFS\tilde{A}$ در X به شکل رابطه ی زیر تعریف

می شود:

$$\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid x \in X \} \quad (4-1)$$

به قسمی که $[0,1] \rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x)$ به ترتیب درجه عضویت و درجه عدم عضویت عنصر $x \in X$ در

\tilde{A} می باشند. بعلاوه رابطه ی $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) + \nu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ برقرار می باشد.

برای هر $IFS\tilde{A}$ در X ، داریم:

$$\pi_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x) \quad (4-2)$$

⁷ Szmidt

⁸ Kacprzyk

که $\pi_{\tilde{A}}(x)$ اندیس شهودی X در \tilde{A} نامیده می شود. و درجه تردید X در \tilde{A} نامیده می شود. واضح است که $0 \leq \pi_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ به ازای هر $x \in X$.

۲-۴ اندازه تشابه بین IFSs

در این بخش، معیار تشابه پیشنهاد شده توسط چن [۱۵] و هانگ و کیم [۱۵] و لی و چن [۱۵] را به ترتیب مرور می کنیم. سپس با مثال هایی نشان می دهیم که معیار تشابه دربرخی موارد مستدل نیستند. در آخر، یک معیار تشابه بین IFSs ارائه می شود و در مورد خواص آنها بحث می شود.

فرض می کنیم $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه مرجع باشد. \tilde{A}, \tilde{B} را دو IFSs در X در نظر می گیریم، به قسمی که داریم:

$$\tilde{A} = \left\{ \langle x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i), \nu_{\tilde{A}}(x_i) \rangle \mid x_i \in X \right\}$$

$$\tilde{B} = \left\{ \langle x_i, \mu_{\tilde{B}}(x_i), \nu_{\tilde{B}}(x_i) \rangle \mid x_i \in X \right\}$$

چن [۱۵] معیار تشابه بین \tilde{A}, \tilde{B} را به صورت زیر پیشنهاد می دهد:

$$T_C = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)| + |\nu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)|}{2} \quad (4-3)$$

به قسمی که n تعداد شماره اندیس ها را تعیین می کند.

هانگ و کیم [۱۵] با ارائه مثال هایی نشان دادند که معیار تشابه پیشنهادی توسط چن مستدل نمی باشد.

مثال ۴-۱

فرض می کنیم $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه مرجع باشد و \tilde{A} , \tilde{B} و \tilde{C} نیز IFS هایی در X باشند، به قسمی که داریم:

$$\tilde{A} = \{ \langle x_i, \cdot, \cdot \rangle \mid x_i \in X \}$$

$$\tilde{B} = \{ \langle x_i, \cdot, 0.5 \rangle \mid x_i \in X \}$$

$$\tilde{C} = \{ \langle x_i, \cdot, 0.499 \rangle \mid x_i \in X \}$$

می توانیم ببینیم که $IFS\tilde{B}$ تشابه بیشتری به $IFS\tilde{C}$ دارد تا $IFS\tilde{A}$ و $IFS\tilde{A}$ مشابه به $IFS\tilde{B}$ نمی باشد. بر اساس رابطه ی (۳-۴) ما درجه تشابه بین \tilde{A} , \tilde{B} و بین \tilde{B} , \tilde{C} را محاسبه می کنیم. در این جا $n=1$ در نظر می گیریم.

$$T_C(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \left(\frac{|(0 - 0.5) - (0 - 0.5)|}{2} \right)$$

$$T_C(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$$

$$T_C(\tilde{B}, \tilde{C}) = 1 - \left(\frac{|(0.5 - 0.499) - (0.5 - 0.501)|}{2} \right)$$

$$T_C(\tilde{B}, \tilde{C}) = 0.999$$

لذا $T_C(\tilde{A}, \tilde{B}) > T_C(\tilde{B}, \tilde{C})$ و این یعنی معیار تشابه T_C چنانچه انتظار داشتیم، نیز مستدل نمی باشد.

لی و چنج [۱۵] درجه تشابه بین $IFS\tilde{A}$ و $IFS\tilde{B}$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$T_L(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \sqrt[P]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)| + |v_{\tilde{A}}(x_i) - v_{\tilde{B}}(x_i)|}{2} \right]^P} \quad (4-4)$$

به قسمی که $1 \leq P < +\infty$.

به وضوح می توان دید که معیار تشابه لی و چنج T_L ، مانند معیار تشابه چن T_C نیز مستدل نمی باشد. بنابراین معیار تشابه T_L نیز معایبی دارد.

برای غلبه بر این مشکل، هانگ و کیم [۱۵]، یک معیار تشابه اصلاح شده بین $IFS\tilde{A}$ و

$IFS\tilde{B}$ را به صورت زیر پیشنهاد داد:

$$T_H(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)| + |v_{\tilde{A}}(x_i) - v_{\tilde{B}}(x_i)|}{2} \quad (4-5)$$

در مثال زیر نشان می دهیم که معیار تشابه اصلاح شده توسط کیم و هانگ در برخی موارد مستدل نمی باشد.

مثال ۲-۴

فرض می کنیم که $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه ی مرجع باشد. $\tilde{A}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3$ نیز IFS هایی در

X باشند به قسمی که داریم:

$$\tilde{A} = \{ \langle x_i, \cdot, \cdot \rangle | x_i \in X \}$$

$$\tilde{B}_1 = \{ \langle x_i, \cdot, \cdot \rangle | x_i \in X \}$$

$$\tilde{B}_2 = \{ \langle x_i, \cdot, \cdot \rangle | x_i \in X \}$$

$$\tilde{B}_3 = \{ \langle x_i, \cdot, \cdot \rangle | x_i \in X \}$$

در این جا $n = 1$ در نظر می گیریم. با بکاربردن رابطه ی (۴-۵) داریم:

$$T_H(\tilde{A}, \tilde{B}_1) = 1 - \left(\frac{|(0 \dots 0.2) + (0 \dots 0.8)|}{2} \right) = 0.5$$

مشابهاً داریم:

$$T_H(\tilde{A}, \tilde{B}_2) = 0.5 \text{ و } T_H(\tilde{A}, \tilde{B}_3) = 0.5$$

لذا

$$T_H(\tilde{A}, \tilde{B}_1) = T_H(\tilde{A}, \tilde{B}_2) = T_H(\tilde{A}, \tilde{B}_3) = 0.5$$

در حقیقت از $\tilde{A} = \{ \langle x_i, \cdot, \cdot \rangle | x_i \in X \}$ و $\tilde{B}_k = \{ \langle x_i, \mu_{\tilde{B}_k}(x_i), \nu_{\tilde{B}_k}(x_i) \rangle | x_i \in X \}$ داریم:

$$\mu_{\tilde{B}_k}(x_i) + \nu_{\tilde{B}_k}(x_i) = 1 \quad (\forall x_i \in X, k = 1, 2, \dots)$$

نیز $T_H(\tilde{A}, \tilde{B}_k) = 0.5$ یعنی داریم:

$$T_H(\tilde{A}, \tilde{B}_1) = T_H(\tilde{A}, \tilde{B}_2) = \dots = 0.5$$

واضح است که ما نمی توانیم عمل مقایسه را در این موارد انجام دهیم و این مستلزم زحمت زیادی می باشد.

برای رفع مشکل روشی جدید برای اندازه گیری معیار تشابه بین IFS ها مطابق با یک نمایش هندسی مجموعه های فازی شهودی و فاصله ی بین IFS ها که توسط زمیت و کاپزیک ارائه می شود [۳۳]:

$$T(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \sqrt[p]{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(|\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|^p + |\nu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)|^p + |\pi_{\tilde{A}}(x_i) - \pi_{\tilde{B}}(x_i)|^p \right)} \quad (4-6)$$

به قسمی که داریم:

$$\pi_{\tilde{A}}(x_i) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i) \text{ و } \pi_{\tilde{B}}(x_i) = 1 - \mu_{\tilde{B}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i) , \quad 1 \leq P < +\infty$$

اکنون اندازه تشابه جدید T را برای محاسبه ی اندازه تشابه مثال ۴-۱ و ۴-۲ به کار می گیریم. با

داشتن $P = 2$ در رابطه ی (۴-۶) در مثال ۴-۱ داریم:

$$T(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (0 - 0.5)^2 + (0 - 0.5)^2 + (1 - 0)^2} = 0.134$$

$$T(\tilde{B}, \tilde{C}) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (0.5 - 0.499)^2 + (0.5 - 0.501)^2 + (0 - 0)^2} = 0.999$$

برای مثال ۴-۲ داریم:

$$T(\tilde{A}, \tilde{B}_1) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (0 - 0.2)^2 + (0 - 0.8)^2 + (1 - 0)^2} = 0.083$$

$$T(\tilde{A}, \tilde{B}_2) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (0 - 0.4)^2 + (0 - 0.6)^2 + (1 - 0)^2} = 0.128$$

$$T(\tilde{A}, \tilde{B}_3) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (0 - 0.5)^2 + (0 - 0.5)^2 + (1 - 0)^2} = 0.134$$

بنابراین اندازه تشابه T مستدل تر است نسبت به اندازه تشابه T_H, T_L, T_C .

3-4 برخی از خواص اندازه تشابه T

خاصیت ۱: $0 \leq T(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 1$

اثبات:

بنا بر رابطه ی (۴-۶) واضح است که $0 \leq T(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 1$

□

خاصیت ۲: $T(\tilde{A}, \tilde{B}) = T(\tilde{B}, \tilde{A})$

اثبات:

$T(\tilde{A}, \tilde{B})$ به صورت زیر داده می شود:

$$T(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \sqrt[p]{\frac{1}{rn} \sum_{i=1}^n |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|^p + |v_{\tilde{A}}(x_i) - v_{\tilde{B}}(x_i)|^p + |\pi_{\tilde{A}}(x_i) - \pi_{\tilde{B}}(x_i)|^p}$$

$$T(\tilde{B}, \tilde{A}) = 1 - \sqrt[p]{\frac{1}{rn} \sum_{i=1}^n |\mu_{\tilde{B}}(x_i) - \mu_{\tilde{A}}(x_i)|^p + |v_{\tilde{B}}(x_i) - v_{\tilde{A}}(x_i)|^p + |\pi_{\tilde{B}}(x_i) - \pi_{\tilde{A}}(x_i)|^p}$$

به قسمی که:

$$|v_{\tilde{A}}(x_i) - v_{\tilde{B}}(x_i)| = |v_{\tilde{B}}(x_i) - v_{\tilde{A}}(x_i)|,$$

$$|\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)| = |\mu_{\tilde{B}}(x_i) - \mu_{\tilde{A}}(x_i)|,$$

$$|\pi_{\tilde{A}}(x_i) - \pi_{\tilde{B}}(x_i)| = |\pi_{\tilde{B}}(x_i) - \pi_{\tilde{A}}(x_i)|$$

لذا داریم:

$$T(\tilde{A}, \tilde{B}) = T(\tilde{B}, \tilde{A})$$

□

خاصیت ۳: $T(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B}$

اثبات:

$T(\tilde{A}, \tilde{B})$ به صورت زیر داده می شود:

$$T(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \sqrt[p]{\frac{1}{\gamma n} \sum_{i=1}^n |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|^p + |v_{\tilde{A}}(x_i) - v_{\tilde{B}}(x_i)|^p + |\pi_{\tilde{A}}(x_i) - \pi_{\tilde{B}}(x_i)|^p}$$

اگر $\tilde{A} = \tilde{B}$ آن گاه داریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x_i) = \mu_{\tilde{B}}(x_i), v_{\tilde{A}}(x_i) = v_{\tilde{B}}(x_i), \pi_{\tilde{A}}(x_i) = \pi_{\tilde{B}}(x_i)$$

بنابراین واضح است که:

$$\sqrt[p]{\frac{1}{\gamma n} \sum_{i=1}^n |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|^p + |v_{\tilde{A}}(x_i) - v_{\tilde{B}}(x_i)|^p + |\pi_{\tilde{A}}(x_i) - \pi_{\tilde{B}}(x_i)|^p} = 0$$

لذا داریم:

$$T(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$$

اکنون فرض می کنیم که $T(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ ، ثابت می کنیم که $\tilde{A} = \tilde{B}$.

اگر $T(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ باشد آن گاه داریم:

$$1 - \sqrt[p]{\frac{1}{\gamma n} \sum_{i=1}^n |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|^p + |v_{\tilde{A}}(x_i) - v_{\tilde{B}}(x_i)|^p + |\pi_{\tilde{A}}(x_i) - \pi_{\tilde{B}}(x_i)|^p} = 1$$

و این نشان می دهد که:

$$\mu_{\tilde{A}}(x_i) = \mu_{\tilde{B}}(x_i), v_{\tilde{A}}(x_i) = v_{\tilde{B}}(x_i), \pi_{\tilde{A}}(x_i) = \pi_{\tilde{B}}(x_i)$$

یعنی داریم:

$$\tilde{A} = \tilde{B}$$

□

برای IFS های \tilde{A} و \tilde{B} که به صورت زیر داده شده است:

$$\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) | x \in [a, b]\}$$

$$\tilde{B} = \{x, \mu_{\tilde{B}}(x), \nu_{\tilde{B}}(x) | x \in [a, b]\}$$

لی و چنج [۱۵] درجه تشابه بین \tilde{A} و \tilde{B} را به صورت زیر تعریف می کنند:

$$T_L^c(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \sqrt[p]{\frac{1}{b-a} \int_a^b \left[\frac{|\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)| + |\nu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{B}}(x)|}{2} \right]^p dx} \quad (۴-۷)$$

به قسمی که: $1 \leq P < +\infty$.

با استدلال مشابه از قبل، معیار تشابه T_L^c را به صورت زیر اصلاح می کنیم:

$$T^c(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \sqrt[p]{\frac{1}{2(b-a)} \int_a^b \left[|\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)|^p + |\nu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{B}}(x)|^p + |\pi_{\tilde{A}}(x) - \pi_{\tilde{B}}(x)|^p \right] dx} \quad (۴-۸)$$

به قسمی که: $1 \leq P < +\infty$.

مشابهاً T^c نیز خواص زیر را دارا می باشند:

$$0 \leq T^c(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 1 \quad ۱-$$

$$T^c(\tilde{A}, \tilde{B}) = T^c(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad ۲-$$

$$T^c(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B} \quad ۳-$$

4-4 اوزان اصلاح شده ی معیار تشابه بین IFSs

در این بخش، وزن های معیار تشابه بین IFS ها توسط چن [۱۵]، لی و چنج [۱۵] و هانگ

و کیم [۱۵] ارائه می شود. و نقصان آنها نشان داده می شوند.

اوزان اصلاح شده ی معیار تشابه به صورت زیر نشان داده شده است:

فرض کنیم $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ مجموعه مرجع باشد. \tilde{A} و \tilde{B} را دو IFS در X در نظر می گیریم به قسمی که:

$$\tilde{A} = \{ \langle x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i), \nu_{\tilde{A}}(x_i) \rangle | x_i \in X \},$$

$$\tilde{B} = \{ \langle x_i, \mu_{\tilde{B}}(x_i), \nu_{\tilde{B}}(x_i) \rangle | x_i \in X \}$$

چن [۱۵]، لی و چنج [۱۵] اوزان معیار تشابه بین \tilde{A}, \tilde{B} IFS را به ترتیب به صورت زیر تعریف کردند:

$$W_C(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{1}{a-b} \sum_{i=1}^n w_i \times | a \times (\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)) + b \times (\nu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)) + c \times (\pi_{\tilde{A}}(x_i) - \pi_{\tilde{B}}(x_i)) | \quad (4-9)$$

به قسمی که: $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ و $a \geq c \geq 0 \geq b$ ، $w_i \in [0, 1]$ ، $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$W_L(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \sqrt[P]{\sum_{i=1}^n \left[\frac{|\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i) - (\nu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i))|}{2} \right]^P} \quad (4-10)$$

به قسمی که: $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ و $w_i \in [0, 1]$ و $1 \leq P < +\infty$

اگر $a = 1$ ، $b = -1$ ، $c = 0$ ، $w_i = \frac{1}{n}$ را در نظر بگیریم، آن گاه داریم:

$$W_C(\tilde{A}, \tilde{B}) = T_C(\tilde{A}, \tilde{B}) \text{ , } W_L(\tilde{A}, \tilde{B}) = T_L(\tilde{A}, \tilde{B})$$

بنابراین W_L و W_C با استدلال مشابه قبل، معقول نیستند. بنابراین هانگ و کیم [۱۵] معیار تشابه

اصلاح شده به صورت زیر ارائه داده اند:

$$W_H(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{1}{a+b+c} \sum_{i=1}^n w_i \times [a \times |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)| + b \times |v_{\tilde{A}}(x_i) - v_{\tilde{B}}(x_i)| + C \times |\pi_{\tilde{A}}(x_i) - \pi_{\tilde{B}}(x_i)|] \quad (4-11)$$

به قسمی که $w_i \in [0, 1]$ و $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ و $a, b, c > 0$.

در ادامه مثال ۲-۴ برای نشان دادن این مطلب که معیار تشابه اصلاح شده کیم و هانگ در برخی موارد کامل نیستند، را ارائه می دهیم.

در مثال ۲-۴ داده شده است. اگر $a = b = c$ یا $(a = b, c = 0)$ باشد، آنگاه بنا به رابطه ی (۴-۱۱) خواهیم داشت:

$$W_H(\tilde{A}, \tilde{B}_1) = W_H(\tilde{A}, \tilde{B}_2) = W_H(\tilde{A}, \tilde{B}_3) = \frac{1}{3}$$

و یا

$$W_H(\tilde{A}, \tilde{B}_1) = W_H(\tilde{A}, \tilde{B}_2) = W_H(\tilde{A}, \tilde{B}_3) = \frac{1}{3}$$

در حقیقت از $\tilde{A} = \{ \langle x_i, \cdot, \cdot \rangle | x_i \in X \}$ و $\tilde{B}_k = \{ \langle x_i, \mu_{\tilde{B}_k}(x_i), v_{\tilde{B}_k}(x_i) \rangle | x_i \in X \}$ می توان داشت:

$$\mu_{\tilde{B}_k}(x_i) + v_{\tilde{B}_k}(x_i) = 1 (\forall x_i \in X, k = 1, 2, \dots), a = b = c \text{ یا } (a = b, c = 0)$$

و بنا به رابطه ی (۴-۱۱) داریم:

$$W_H(\tilde{A}, \tilde{B}_k) = \frac{1}{3} \text{ یا } W_H(\tilde{A}, \tilde{B}_k) = \frac{1}{3}$$

بنابراین W_H و T_H مستدل نمی باشند. زیرا عمل مقایسه را نمی توان انجام داد. برای غلبه بر این

مشکل، روشی اصلاحی را برای اندازه گیری درجه تشابه بین IFSs ها در ذیل ارائه می دهیم:

$$W(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \left[\sum_{i=1}^n w_i \times \left[\alpha \times |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|^p + \beta \times |\nu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)|^p + \gamma \times |\pi_{\tilde{A}}(x_i) - \pi_{\tilde{B}}(x_i)|^p \right] \right]$$

(۴-۱۲)

به قسمی که:

$$1 \leq P < +\infty, w_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n w_i = 1, \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1], \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

اکنون درجه تشابه مثال (۴-۱) و (۴-۲) را با به کارگیری رابطه ی (۴-۱۲) محاسبه می کنیم:

با انتخاب $p = 2$ و $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ و $w_i = \frac{1}{n}$ در مثال (۴-۱) بدست می آوریم:

$$W(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{3} \times |0 - 0.5|^2 + \frac{1}{3} \times |0 - 0.5|^2 + \frac{1}{3} \times |1 - 0|^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} = 0.293$$

$$W(\tilde{B}, \tilde{C}) = 1 - \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{3} \times |0.5 - 0.499|^2 + \frac{1}{3} \times |0.5 - 0.501|^2 + \frac{1}{3} \times |0 - 0|^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} = 0.999$$

برای مثال (۴-۲) داریم:

$$W(\tilde{A}, \tilde{B}_1) = 1 - \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{3} \times |0 - 0.2|^2 + \frac{1}{3} \times |0 - 0.8|^2 + \frac{1}{3} \times |1 - 0|^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} = 0.252$$

$$W(\tilde{A}, \tilde{B}_2) = 1 - \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{3} \times |0 - 0.4|^2 + \frac{1}{3} \times |0 - 0.6|^2 + \frac{1}{3} \times |1 - 0|^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} = 0.288$$

$$W(\tilde{A}, \tilde{B}_3) = 1 - \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{3} \times |0 - 0.5|^2 + \frac{1}{3} \times |0 - 0.5|^2 + \frac{1}{3} \times |1 - 0|^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} = 0.293$$

لذا اوزان اصلاح شده ی معیار تشابه W مستدل تر از قبل می باشد.

مشابهتاً تابع W خواص زیر را دارا می باشد:

$$0 \leq W(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 1 \quad (1)$$

$$W(\tilde{A}, \tilde{B}) = W(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (2)$$

$$W(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B} \quad \text{اگر } \alpha, \beta > 0 \quad (3)$$

برای $X = [a, b]$ فرض می کنیم وزن های $w(x)$ ، $x \in X$ می باشد به قسمی که $0 \leq w(x) \leq 1$

و $\int_a^b w(x) dx = 1$ ، در این صورت $IFSs \tilde{A}, \tilde{B}$ روی X به صورت زیر ارائه می شود:

$$\tilde{A} = \left\{ \langle x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i), \nu_{\tilde{A}}(x_i) \rangle \mid x_i \in X \right\}$$

$$\tilde{B} = \left\{ \langle x_i, \mu_{\tilde{B}}(x_i), \nu_{\tilde{B}}(x_i) \rangle \mid x_i \in X \right\}$$

لی و چنج [۱۵] در زیر اوزان معیار تشابه را به صورت زیر ارائه داده است:

$$W_L^c(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \sqrt[p]{\int_a^b w(x) \times \left[\frac{|\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)| + |\nu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{B}}(x)|}{2} \right]^p dx} \quad (4-13)$$

به قسمی که $1 \leq P < +\infty$.

$$\text{اگر برای } [a, b] \forall x \in [a, b], w(x) = \frac{1}{b-a} \text{ آن گاه داریم: } W_L^c(\tilde{A}, \tilde{B}) = T_L^c(\tilde{A}, \tilde{B}).$$

بنابراین به دلیل فوق W_L^c مستدل نمی باشد. بنابراین معیار تشابه را به صورت زیر اصلاح می کنیم:

$$W^c(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \left[\int_a^b w(x) \times \left[\alpha \times |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|^p + \beta \times |v_{\tilde{A}}(x_i) - v_{\tilde{B}}(x_i)|^p + \gamma \times |\pi_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|^p \right] dx \right] \quad (4-14)$$

به قسمی که :

$$\int_a^b w(x) dx = 1, \quad \alpha, \beta \in [0, 1], \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad 0 \leq w(x) \leq 1, \quad 1 \leq p < +\infty$$

W^c خواص زیر را دارا می باشد:

$$0 \leq W^c(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 1 \quad (1)$$

$$W^c(\tilde{A}, \tilde{B}) = W^c(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (2)$$

$$W^c(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B} \quad \text{اگر } \alpha, \beta > 0 \text{ آن گاه} \quad (3)$$

(اثبات مشابه با T می باشد.)

۴-۵ یک کاربرد از معیار تشابه اصلاح شده بین IFSs

در این بخش با یک مثال، کاربرد معیار تشابه اصلاح شده بین IFSs ها برای تشخیص الگو ارائه می دهیم.

قاعده ی تشخیص:

فرض می کنیم m الگو وجود دارند. که با $IFSs \tilde{A}_k$ ($k=1, 2, \dots, m$) بروی مجموعه مرجع X ارائه شده است. یک نمونه تشخیص که توسط $IFS \tilde{B}$ در X به صورت زیر ارائه شده است:

$$T(\tilde{A}_k, \tilde{B}) = \text{Maximum}\{T(\tilde{A}_k, \tilde{B})\}; \quad 1 \leq k \leq m$$

به قسمی که $T(A_k, \tilde{B})$ درجه تشابه بین $IFSs \tilde{A}_k$ و \tilde{B} بیان می شود. بنابراین نمونه \tilde{B} به الگوی \tilde{A}_{k_0} متعلق می باشد.

مثال ۳-۴

فرض می کنیم که سه الگو که با $IFSs$ در $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ارائه شده است:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 &= \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 0.8, 0 \rangle, \langle 0.7, 0.1 \rangle\}, \\ \tilde{A}_2 &= \{\langle 0.8, 0.1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0.9, 0 \rangle\}, \\ \tilde{A}_3 &= \{\langle 0.6, 0.2 \rangle, \langle 0.8, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}.\end{aligned}$$

یک نمونه \tilde{B} به صورت زیر تشخیص داده شده است، به قسمی که:

$$\tilde{B} = \{\langle 0.5, 0.3 \rangle, \langle 0.6, 0.2 \rangle, \langle 0.8, 0.1 \rangle\}.$$

با انتخاب $p = 2$ در رابطه ی (۴-۴) نتیجه ی زیر را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}T_L(\tilde{A}_1, \tilde{B}) &= 0.72, \\ T_L(\tilde{A}_2, \tilde{B}) &= 0.78, \\ T_L(\tilde{A}_3, \tilde{B}) &= 0.84,\end{aligned}$$

بنابراین بر طبق قاعده ی تشخیص ، نمونه ی \tilde{B} به الگوی \tilde{A}_3 متعلق می باشد.

اکنون با در نظر گرفتن $p = 2$ در رابطه ی (۴-۶) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}T(\tilde{A}_1, \tilde{B}) &= 0.72, \\ T(\tilde{A}_2, \tilde{B}) &= 0.74, \\ T(\tilde{A}_3, \tilde{B}) &= 0.84,\end{aligned}$$

از قاعده ی تشخیص الگو می توان نتیجه گرفت که \tilde{B} به الگوی \tilde{A}_3 متعلق می باشد.

فرض می کنیم که اوزان x_1, x_2, x_3 به ترتیب $0.5, 0.3, 0.2$ می باشند. با در نظر گرفتن $p = 2$ در رابطه ی (۴-۱۰) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} W_L(\tilde{A}_1, \tilde{B}) &= 0.70, \\ W_L(\tilde{A}_2, \tilde{B}) &= 0.78, \\ W_L(\tilde{A}_3, \tilde{B}) &= 0.85. \end{aligned}$$

لذا می توان نتیجه گرفت که \tilde{B} به الگوی \tilde{A}_3 متعلق می باشد. (بر طبق تشخیص الگو)

حال با در نظر گرفتن $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ و $p = 2$ در رابطه ی (۴-۱۲) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} W(\tilde{A}_1, \tilde{B}) &= 0.64 \\ W(\tilde{A}_2, \tilde{B}) &= 0.78 \\ W_L(\tilde{A}_3, \tilde{B}) &= 0.88 \end{aligned}$$

و نتیجه می گیریم که \tilde{B} به الگوی \tilde{A}_3 متعلق می باشد.

۴-۶ نتیجه

در این بخش با چندین مثال معیار تشابه *IFSS* توسط لی و چنج [۱۵] ارائه شده است. معیار تشابه اصلاح شده بین مجموعه های مبهم که توسط هانگ و کیم [۱۵] پیشنهاد شده است که در برخی از موارد مستدل نمی باشد. تعدادی معیار تشابه اصلاح شده بین *IFSS* ارائه شده است. با به کار بردن مثالهای مشابه که توسط لی و چنج [۱۵] ارائه شده است. در ادامه دیدیم، که کاربرد معیار تشابه جدید بهتر و مستدل تر از معیار تشابه پیشنهادی توسط لی و چنج [۱۵] و کیم و هانگ [۱۵] می باشد.

فصل پنجم

فصل پنجم

برخی از کاربردهای معیار تشابه فازی

۱-۵ اندازه تشابه فازی و یافتن کوتاهترین مسیر فازی در یک شبکه [۳۵ و ۲۹]:

هدف از مسئله ی کوتاهترین مسیر، یک مسیر یابی بهینه در شبکه می باشد. مسئله ی کوتاهترین مسیر فازی روی یک شبکه به هر یال یک عدد فازی مثلثی را به جای عدد حقیقی اختصاص می دهد. مسئله ی جستجوی کوتاهترین مسیر در تئوری گراف ها و بهینه سازی آنها از اهمیت ویژه ای برخوردار می باشد. در مسائل حمل و نقل و کاهش هزینه های اقتصادی کاربردهای فراوانی دارد. مسئله ی کوتاهترین مسیر روی دو نقطه ی S (منبع) و t (چاه) در شبکه انجام می شود. هدف یافتن مسیری با کمترین هزینه از S به t در شبکه می باشد. مسئله کوتاهترین مسیر فازی برای اولین بار توسط دوبویس و پراد نیز مورد بررسی قرار گرفت.

چانگ^۱ و کانگ^۲ روشی را پیشنهاد دادند که در آن طول کوتاهترین مسیر فازی را در بین

مسیرهای ممکن در شبکه را جستجو می کند.

^۱Chuang

^۲ Kung

مراحل یافتن طول کوتاهترین مسیر فازی:

در این جا، طول هر یال در شبکه، یک عدد فازی در نظر گرفته می شود. (برای مثال یک عدد

فازی مثلثی).

روند یافتن طول کوتاهترین مسیر فازی براساس نظریه چانگ و کانگ به صورت الگوریتم زیر

داده شده است.

گام ۱-

گراف $G = (V, E)$ را با تعدادی رأس و یال در نظر می گیریم. عدد n را که طول همه مسیرهای

ممکن در شبکه، L_i می باشد به قسمی که $L_i = (a_i, b_i, c_i)$

گام ۲- ابتدا قرار دهید:

$$L_{\min} = (a, b, c) = L_1 = (a_1, b_1, c_1)$$

گام ۳- قرار دهید $i = 2$

گام ۴- مقادیر زیر را محاسبه می کنیم:

$$b = \begin{cases} b & \text{if } b \leq a_i \\ \frac{(b \times b_i) - (a \times a_i)}{(b + b_i) - (a + a_i)} & \text{if } b > a_i \end{cases}$$

$$a = \min(a, a_i);$$

$$c = \min(c, b_i);$$

گام ۵-

قرار دهید $L_{\min} = (a, b, c)$ و مانند گام ۴ محاسبه می کنیم.

گام ۶-

قرار دهید: $i = i + 1$

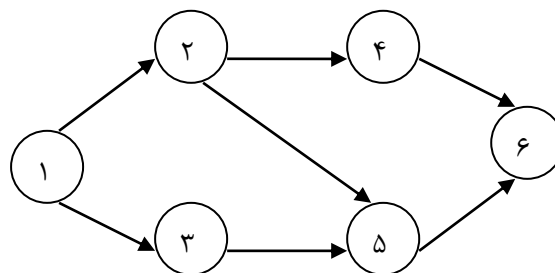
گام ۷-

اگر $i < n + 1$ آن گاه برو به گام ۴.

مثال ۱-۵

در شکل زیر یک شبکه نشان داده شده است که در آن به هر یال یک عدد فازی مثلثی نسبت

داده شده است.



شکل ۱-۵ مثال یک شبکه

در جدول زیر عدد فازی مثلثی نسبت داده شده به هر یال داده شده است.

طول l_{ij}	کمان (i, j)
(۱,۳,۴)	(۱,۲)
(۲,۴,۵)	(۱,۳)
(۱,۲,۳)	(۲,۴)
(۲,۴,۶)	(۲,۵)
(۲,۵,۶)	(۳,۵)
(۲,۳,۸)	(۴,۶)
(۳,۵,۷)	(۵,۶)

جدول ۵-۱

گام ۱-

ابتدا طول مسیرهای ممکن را می یابیم:

$$P_1 = 1-2-4-6 \rightarrow L_1 = (4, 8, 15)$$

$$P_2 = 1-2-5-6 \rightarrow L_2 = (6, 12, 17)$$

$$P_3 = 1-3-5-6 \rightarrow L_3 = (7, 14, 18)$$

گام ۲-

قرار دهید:

$$L_{\min} = (a, b, c) = L_1 = (a_1, b_1, c_1) = (4, 8, 15)$$

گام ۳ - قرار دهید: $i = 2$

گام ۴ -

(a, b, c) را محاسبه می کنیم:

$$b = \frac{(12 * 8) - (6 * 4)}{(12 + 8) - (6 + 4)} = 7.2$$

$$a = \min(4, 6) = 4;$$

$$c = \min(15, 12) = 12;$$

گام ۵ -

قرار دهید:

$$L_{\min} = (4, 7.2, 12)$$

گام ۶ - قرار دهید: $i = 3$

و داریم:

$$b = \frac{(7.2 * 14) - (4 * 7)}{(7.2 + 14) - (4 + 7)} = 7.1$$

$$a = \min(4, 7) = 4;$$

$$c = \min(12, 14) = 12;$$

گام ۷ -

اگر $i = 4$ ، آنگاه توقف.

در پایان، طول کوتاهترین مسیر فازی را به دست می آوریم که داریم:

$$L_{\min} = (4, 7.1, 12)$$

حال در قسمت بعد، به یافتن کوتاهترین مسیر می پردازیم.

الگوریتم زیر جهت یافتن کوتاهترین مسیر می باشد.

هدف، مشخص کردن طول کوتاهترین مسیر فازی، L_{\min} و کوتاهترین مسیر از مبدأ به مقصد

می باشد. با محاسبه ی طول کوتاهترین مسیر فازی و ترکیب آن با اندازه تشابه الگوریتم جدیدی در

زیر داده شده است.

گام ۱-

همه ی مسیر های ممکن از مبدأ به مقصد را می یابیم. و طول مسیر متناظر $L_i (i = 1, 2, \dots)$ را

محاسبه می کنیم.

گام ۲-

L_{\min} را با استفاده از الگوریتم قبلی محاسبه می کنیم.

گام ۳-

فاصله ی اقلیدسی $d_i (i = 1, 2, \dots)$ را بین L_{\min} و همه ی مسیرهای ممکن محاسبه می کنیم.

گام ۴-

کوتاهترین مسیر را با داشتن پایین ترین فاصله اقلیدسی تعیین می کنیم.

حال در مرحله ی بعد به محاسبه ی درجه تشابه بین L_i و L_{\min} ، $S(L_{\min}, L_i)$ ، برای $i = 1, 2, 3$ می پردازیم. که بنا به رابطه زیر درجه تشابه بین دو عدد فازی \tilde{A} و \tilde{B} را می توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m |a_i - b_i|}{m}$$

در مثال قبلی طول سه مسیر ممکن در شبکه به صورت زیر می باشد:

$$P_1 = (4, 8, 15)$$

$$P_2 = (6, 12, 17)$$

$$P_3 = (7, 14, 18)$$

و طول کوتاهترین مسیر به صورت زیر می باشد:

$$L_{\min} = (4, 7, 12)$$

اکنون برای محاسبه ی گام ۳ الگوریتم باید فاصله ی اقلیدسی بین طول همه ی مسیرها و کوتاهترین مسیر را بیابیم. یعنی به روش زیر عمل می کنیم:

$$d(\text{Path}_1, L_{\min}) = \sqrt{(4-4)^2 + (8-7)^2 + (15-12)^2} = 3.13$$

$$d(\text{Path}_2, L_{\min}) = \sqrt{(6-4)^2 + (12-7)^2 + (17-12)^2} = 7.28$$

$$d(\text{Path}_3, L_{\min}) = \sqrt{(7-4)^2 + (14-7)^2 + (18-12)^2} = 9.62$$

از عملیات فوق درمی یابیم که کمترین فاصله اقلیدسی (بیشترین درجه تشابه) مربوط به

مسیر ۱، (P_1) می باشد که این با کوتاهترین مسیر فازی متناظر می باشد. لذا مسیر ۱-۲-۴-۶

به عنوان کوتاهترین مسیر فازی در شبکه می باشد.

۲-۵ برخی کاربردهای دیگر:

۱) زمان بندی و (برنامه ریزی) منابع شبکه بر اساس معیار تشابه [۲۷]:

در این جا نوع برخورد مسئله در نظر گرفتن خانواده ای از معیار تشابه فازی می باشد که هر معیار مشترکی در آنها را می توان به سادگی فقط با یک پارامتر خاص مشخص نمود. زمان بندی بر اساس منابع شبکه به دقت بر اساس آن پارامتر صورت می پذیرد. سپس یک مدل صوری از شبکه ی منابع با سه لایه برای تاثیر گذاری و هم چنین سازمان بخشی مناسب پیشنهاد می گردد که دسترسی به همه انواع منابع ناهمگون را میسر می سازد. در واقع تشابه فازی بین منابع شبکه تعیین می شود.

۲) بازیافت و طبقه بندی تصاویر رنگی [۳]:

بعنوان یک نکته مهم در پردازش تصویر بر اساس بازیافت رنگ تصویر و طبقه بندی آن مبحث مهمی است که با به کار بردن درجه تشابه فازی و خوشه بندی فازی استفاده می شود. در این روش اندازه تشابه دو تصویر، در امر پردازش تصویر مورد بررسی و محاسبه قرار می گیرد. روش پیشنهادی که نشانه ی مشخصه ی رنگ در یک تصویر می باشد از رنگ مایه ی آن استفاده کرده و بنابراین میزان تشابه بین دو تصویر را مشخص می نماید. اندازه تشابه بین تصویر u_i و تصویر u_j به صورت رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$r_{ij} = 1 - \frac{\left(p \times \sum_{k=1}^m |x_{ik} - x_{jk}| \right)}{\max \sum_{k=1}^m |x_{ek} - x_{fk}|} \quad (5-1)$$

$$1 \leq e, f \leq n, e \neq f$$

که در اینجا r_{ij} اندازه تشابه بین تصویر u_i و تصویر u_j می باشد. اگر تصویر u_i را به صورت

$$u_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, \dots, x_{im}\}$$

نمایش دهیم که x_{ik} ، k امین عنصر نمونه (تصویر i) می باشد. و p

ثابت برآورد اندازه تشابه فازی می باشد.

۳) بازیافت تصویر بر اساس محتوا [۲۱]:

بازیافت تصویر بر اساس محتوای آن (CBIR)^۱ اساساً بازیافت های مؤثر را که در رابطه با تصاویر

مربوط و مطمئن از یک تصویر بزرگ بر اساس داده هایی که بطور خودکار از ساختار تصویری یک تصویر

استخراج شده جستجو می کند. بسیاری از روشهای فازی در مورد این روش استفاده گردیده به جهت

این که تصاویر مشابه را بتوان بر اساس تشابهات مجموعه های فازی استخراج نمود.

۴) پیگیری تطابقی برای شاخه بندی و طبق بندی فازی سیگنال ها [۲۸]:

پیگرد تطابق ها روشی است که به خوبی شناخته شده و برای معرفی سیگنال ها و هم چنین

برای استخراج خصیصه ی طبقه های مختلف یک سیستم استفاده شده است. پیگرد تطابقی بر اساس

اندازه (معیار) که فقط از ضرایب و اطلاعات مازاد استفاده می کند، الگوریتمی بر اساس پیگرد تطابقی

تهیه می سازد که دو سیگنال را با یکدیگر مقایسه می کند. بنابراین این روش به راحتی در مسائل

مختلف قابل اعمال می باشد.

۵) تشخیص الگو [۱۳]:

روش تشخیص الگو موضوع بسیار مهمی بوده و در علوم اطلاعاتی و هم چنین هوش مصنوعی

(AI) بکار گرفته شده است. روشهای بسیاری برای حل مسئله تشخیص الگو وجود دارد. برای مثال

^۱Content- based image retrieval

تشخیص الگو به روش علوم آماری و تشخیص الگو بر پایه ی ریاضیات فازی و معیار تشابه فازی می باشد. اندازه تشابه در تشخیص الگو بر اساس اطلاعات فازی از دیدگاه تئوری بسیار اساسی و بنیادی می باشد. که درجه تشابه مجموعه های کانتور با عناصرمتناهی مورد بررسی قرار می گیرد.

۶) در تطابق انگشت نگاری [۱۰]:

پیشرفت های قابل توجهی برای تشخیص اثر انگشت صورت گرفته است. توجه به موضوع امنیتی اثر انگشت حساسیت موضوع را بیشتر نشان می دهد. چند روش برای تطابق اثر انگشت پیشنهاد شده است این روشها همگی مبتنی بر تطبیق الگوی نقاط می باشد. یکی از مشکلات حل مسئله انگشت نگاری تطابق پیچ و خم های اثر انگشت می باشد. درمورد انگشت نگاری معیار تشابه فازی الگوریتم های بسیاری را برای پیچ و خم های اثر انگشت فراهم آورده و کلاً بر اساس معیار تشابه نرمال شده می باشد. و این الگوریتم نسبت به سایر الگوریتم های متعارف مؤثر تر می باشد.



شکل ۲-۵

۷) آنالیز ریسک [۹]:

در مسائل آنالیز ریسک نیز معیار تشابه فازی مورد استفاده قرار گرفته و بطور کلی معیار تشابه از دیدگاه نظریه اساسی در تشخیص الگو از اطلاعات فازی بکار گرفته می شود. به علت اهمیت آنالیز ریسک و کاربرد شباهت اعداد فازی در این زمینه، ایجاد روشی مناسب در یافتن شبیه ترین عدد

فازی به عدد فازی مشخص اهمیت به سزایی دارد. وظیفه مدیریت کردن مسائل آنالیز ریسک نقش مهمی در مدیریت بازاری می‌کند. کارخانه‌ها در یک محیط غیر قطعی اغلب با کمبود اطلاعات ارزشمند برای تعیین ریسک یک جزء مواجه هستند. به منظور حل این مشکل، اعداد فازی برای نشان دادن ابهام مقادیر ارزیابی در مسائل آنالیز ریسک فازی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. یکی از روش‌هایی که در مبحث آنالیز ریسک فازی مورد بررسی قرار می‌گیرد، معیار تشابه بین اعداد فازی می‌باشد.

۸) در دستگاه‌های ضبط اصوات موسیقی (کپی رایت) [۱۷]:

در دستگاه‌های ضبط موسیقی (کپی رایت) نیز معیار تشابه فازی بکار گرفته شده و برای قطعات حروف صوتی موسیقایی در دستگاه‌های ضبط موسیقی، درجه تشابه فازی برای هر قطعه‌ی حرف موسیقی ارزیابی می‌شود.

۹) تجارت الکترونیک [۳۸]:

یکی از کاربردهای معیار تشابه در تجارت الکترونیکی می‌باشد. به این صورت که فرد با بهره‌گیری از مفهوم تشابه در تئوری فازی، از میان مجموعه پیشنهاد، پیشنهادی را برمی‌گزیند که بیشترین شباهت را با پیشنهاد اخیر حریف داشته باشد. یافتن پیشنهاد دارای بیشترین شباهت با پیشنهاد حریف، مستلزم در اختیار داشتن تقریب بسیار خوبی از وزن اهمیت معیارهای پیشنهاد، از دید حریف می‌باشد که عملاً جزء اطلاعات خصوصی وی محسوب می‌شود.

بدیهی‌ترین راه حلی که عامل در پیش رو دارد این است که پیشنهادی را انتخاب کند که بیشترین شباهت را با آخرین پیشنهاد ارائه شده از جانب حریف داشته باشد. با این توصیف، می‌توان

مفهوم “شباهت” در سیستم‌های فازی کمک‌گفت‌ه بصورت تقریبی میزان نزدیکی دو پیشنهاد را به

معیار تشابه بین دو پیشنهاد بنا به رابطه ی زیر محاسبه می شود:

دامنه ی مقادیر D_j داده شده است، تشابه بین دو مقدار $x_j, y_j \in D_j$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$sim_j(x_j, y_j) = \bigwedge_{1 \leq i \leq m} (h_i(x_j) \leftrightarrow h_i(y_j)) \quad (5-2)$$

که در آن $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ مجموعه جنبه های مقایسه می باشند و در آنها $h_j: D_j \rightarrow [0, 1]$ و \leftrightarrow

یک عملگر هم ارزی می باشد. عملگر \wedge نیز یک عملگر اتصال است که هر نوع تابع t -form می

تواند انتخاب شود. که در اینجا این عملگر هم ارزی به شکل زیر تعریف می شود:

$$h_i(x_j) \leftrightarrow h_i(y_j) = 1 - |h_i(x_j) - h_i(y_j)| \quad (5-3)$$

عملگر اتصال نیز عملگر کمینه (min) انتخاب گردیده است. شباهت بین دو پیشنهاد x, y بر روی

مجموعه معیار های J عبارت است از:

$$sim(x, y) = \sum_{j \in J} w_j sim_j(x_j, y_j) \quad (5-4)$$

که در آن $\sum_{j \in J} w_j = 1$ و sim_j تابع شباهت برای معیار j می باشد. وزن اهمیت معیار j می

باشد. باید توجه داشت که در کاربرد ما، نیاز خواهد بود میزان شباهت بین آخرین پیشنهاد ارائه شده

از طرف حریف و پیشنهاد انتخاب شده از میان پیشنهادات هم مقدار پیشنهاد پیشین، تعیین شود.

نتیجه:

در این پایان نامه، ابتدا مقدمه ای بر مفهوم تشابه و تعاریف مربوط به آن شد. سپس مروری بر ادبیات فازی و تاریخچه آن انجام شد. ابتدا، روشی جدید برای محاسبه ی اندازه تشابه اعداد فازی تعمیم یافته ارائه گردید. روشی که نقطه ی COG اعداد فازی تعمیم یافته را محاسبه می کند، روش SCGM بررسی شد. سپس به بررسی اندازه تشابه جدیدی که به محاسبه ی درجه تشابه بین اعداد فازی تعمیم یافته بر اساس روش SCGM می باشد، پرداخته و هم چنین برخی از خواص اندازه تشابه پیشنهاد شده اثبات گردید. همچنین، روشی برای محاسبه ی اندازه تشابه بین مقادیر اعداد فازی ارائه شده. معیار تشابه ارائه شده مفهوم هندسی را برای محاسبه ی مرکز ثقل نقاط اعداد فازی پایینی و بالایی فاصله مقادیر اعداد فازی را به ترتیب برای محاسبه ی درجه تشابه بین فاصله مقادیر اعداد فازی به کار می برد. برخی از خواص پیشنهادی معیار تشابه را ثابت کردیم. در فصل چهار با چندین مثال معیار تشابه *IFSs* توسط لی و چنچ [۱۵] ارائه شده است. و نیز بعضی از کاربردهای تشابه و تشابه فازی ارائه شد.

فهرست منابع

- [١] Ashby, F. G., and Perrin, N. A., *Toward a unified theory of Similarity and recognition*, Psychological Review, Vol. 95, 1988, pp.124-150.
- [٢] Atanassov, K., *Intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 20, 1986, pp.87-96.
- [٣] Ban, X., Lv, X. and Chen, J., *Color image retrieval and classification using fuzzy similarity measure and fuzzy clustering method*, Proceeding 28th Chinese Control Conference Shanghai, P.R. China, 2009, pp.7777-7782.
- [٤] Bustince, H. and Burillo, P., *Vague sets are intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, Vol.79, 1996, pp.403-405.
- [٥] Chen, S. H., *Operations on fuzzy numbers with function principal*, Tamkang Journal of Management Sciences, Vol. 6, 1985, pp.13-25.
- [٦] Chen, S. M., *New methods for subjective mental workload assessment and fuzzy risk analysis*, Cybernetics and Systems, Vol.27, 1996, pp.449-472.
- [٧] Chen, S.J. and Chen, S.M., *A new simple center-of-gravity method for handling the fuzzy ranking and the defuzzification problems*, 8th National Conference Fuzzy Theory Applications, Taipei, Taiwan, Republic of China, 2000.
- [٨] Chen, S. J. and Chen, S. M., *Fuzzy risk analysis based on similarity measure of generalizd fuzzy numbers*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 11, 2003, pp.45-56.
- [٩] Chen, S. M. and Chen, J.H., *Fuzzy risk analysis based on similarity measures between interval-valued fuzzy numbers and arithmetic operators*, Expert Systems with Applications, Vol. 36, 2009, pp.6309-6317.
- [١٠] Chen, X. and Tian, J., *A new algorithm for distorted fingerprints matching based on normalized fuzzy similarity measure*, IEEE Transaction on Image Processing, Vol. 15, 2006, pp.767-776.

- [11] Ennis, D.M. and Johnson, N . L., *Thurstone-shepard similarity models as special case of moment generating functions*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. 37, 1993, pp.104-110.
- [12] Guijun, W. and Xiaoping, L., *the applications of interval-valued fuzzy numbers and interval-distribution numbers*, Fuzzy Sets and Systems, , Vol.98, 1998, pp.331-335.
- [13] Guo, Z. L. and Tian, J., *Discussion about similarity measures in pattern recognition of fuzzy information*, Proceedings International Conference on Computational Intelligence and Security Workshops, 2007, pp.299-303.
- [14] Hyung, L. K., Song, Y. S. and Lee, K. M., *Similarity measure between fuzzy sets and between elements*, Fuzzy Sets Systems, Vol. 62,1994, pp.291-293.
- [15] Kaur, G, 2010, Thesis Masters, *Similarity measure different types of fuzzy sets*, Thapar University.
- [16] Kim, D. J. and Bien, Z., *A personalized facial expression recognition with fuzzy similarity measure and novel feature selection method*, FUZZY-IEEE,2004,pp.33-38.
- [17] Kim, K. H., Lim, M. and Kim, H. J., *Music copyright protection system using fuzzy similarity measure for music phonem segmentation*, International Conference on Fuzzy Systems (FUZZY-IEEE), 2009,pp.159-164.
- [18] Klir, G.J. and Yuan, B., *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice-Hall of India Pvt. Ltd.
- [19] Lee, C. C., *Fuzzy logic in control system: fuzzy logic controller*, IEEE Transaction Systems, Man, Cybernetics, Vol.20,1990, pp.419-435.
- [20] Lee, S.H., *An optimal aggregation method for fuzzy opinions of group decision*, Proceedings IEEE International Conference on Systems, Man, Cybernetics, Vol. 3,1999, pp.314-319.
- [21] Li, Y., Liu, J. M., Ye, W. D. C. X., and Wu, Z. F., *the fuzzy similarity measure for content-based image retrieval*, Proceedings of the Second International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Xian, 2-5 November, 2003, pp.3224-3228.

- [۲۲] Li, Y., Olson, D. L. and Qin, Z., Similarity measures between intuitionistic fuzzy (vague) sets: A comparative analysis, *Pattern Recognition Letters*, Vol. 28, 2007, pp. 278-285.
- [۲۳] Liang, Z. and Shi, P., *Similarity measure on intuitionistic fuzzy sets*, *Pattern Recognition Letters*, Vol. 24, 2003, pp.2687-2693.
- [۲۴] Liao, Y., Ma, C. and Zhang, C., *A new fuzzy risk assessment method for the network security based on fuzzy Similarity measure*, *Proceedings of the 6th World Congree on Intelligent Control and Automation*, Dalian, China, June 21-23, 2006, pp. 8486-8490.
- [۲۵] Liu, X., *Entropy distance measure and Similarity measure of fuzzy sets and their relations*, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 52, 1992,pp.305-318.
- [۲۶] Liu, H. W., *New similarity measures between intuitionistic fuzzy sets and between elements*, *Mathematical and Computer Modeling*, Vol. 42, 2005, pp.61-70.
- [۲۷] Lu, B.and Chen, J., *Grid resource scheduling on fuzzy Similarity measures*, *Proceeding of the 7th Conference on Cybernetics and Intelligent Systems*, London,U. K., 2008, PP.940-944.
- [۲۸] Mazhar, R., Gadar, P .D. and Wilson, J. N., *A matching pursuit based Similarity measure for fuzzy clustering and classification of signals*, *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2008, pp.1950-1955.
- [۲۹] Nagoorgani , A. and Mumtaj Began ۱۱۱ ۷ *Similarity Measure on Shortest Path* , Vol 5, 2010, pp.279-284.
- [۳۰] Sanguansat, K. and Chen, S. M., *Analyzing fuzzy risk based on a new Similarity measure between interval-valued fuzzy numbers*, *Proceeding of the 8th Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Baoding, 2009, pp.2869-2874.
- [۳۱] Santini, S. and Jain, R., *Similarity measure*, *IEEE Transactions*, Vol. 21, 1999, pp. 871-883.
- [۳۲] Shepard, R. N., *Toward a universal law generalization for psychological science*, *Science*, Vol. 237,1987, pp.1317-1323.

[۳۳] Szmidt, E. and Kacprzyk, J., *Distances between intuitionistic fuzzy Sets, fuzzy Sets and Systems*, Vol. 114, 2000, pp.505-518.

[۳۴] Wang, W. J., *New Similarity measure on fuzzy Sets and on element*, *Fuzzy sets and Systems*, Vol. 85, 1997, pp.305-309.

[۳۵] Yadav, K. and Biswas, R., *On Searching Fuzzy Shortest Path In a Network*, *International Journal of Recent Trends in Engineering*, Vol 2, No.3, November 2009.

[۳۶] Zadeh, L. A., *Fuzzy sets*, *Inform. and Control*, Vol. 8, 1965, pp.338-353.

[۳۷] Zwick, R., Carlstein, E. and Budescu, D. V., *Measures of similarity among fuzzy concepts: A comparative analysis*, *International Journal of Approximate Reasoning*, VOL. 1, 1987, PP. 221-242.

[۳۸] قدمیاری ع، عبدالله زاده بار فروش الف، ”طراحی و ارزیابی یک الگوریتم مذاکره چند معیاره در محیط چند

عامله تجارت الکترونیکی”، آزمایشگاه سیستمهای هوشمند، دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیر کبیر.

[۳۹] وحیدیان کامیاد ع ، طارقیان ح ر ، (۱۳۸۱)، ”مقدمه ای بر منطق فازی برای کاربردهای عملی”، انتشارات

دانشگاه فردوسی مشهد ، شماره ۳۲۷.

واژه نامه انگلیسی به فارسی

addition	جمع
center-of-gravity	مرکز ثقل
characteristic	مشخصه
crisp set	مجموعه قطعی
curve	منحنی
cut	برش
decision-making	تصمیم گیری

defuzzification	نافازی سازی
distance	فاصله
dissimilar	نامشابه
equal	مساوی
division	تقسیم
exponential	نمایی
feature	خصوصیات
fuzzy set	مجموعه فازی
generalized	تعمیم یافته
geometric	هندسی
inequality	نامساوی
interval	فاصله
intuitionistic	شهودی
medium	میانه
membership	عضویت
multiplication	ضرب
network	شبکه
path	مسیر
pattern	الگو
probabilistic	احتمالی
psychological	روانشناختی

recognition	تشخیص
rectangle	مستطیل
similarity	تشابه
stimuli	محرک
symmetry	متقارن
taxonomy	علم رده بندی - طبقه بندی
theoretical	نظریه
trapezoidal	ذوزنقه
triangle	مثلث
universal	مرجع - جهانی
vague	مبهم
weighted	اوزان

probabilistic	احتمالی
pattern	الگو
weighted	اوزان
cut	برش
similarity	تشابه
recognition	تشخیص

decision-making	تصمیم گیری
generalized	تعمیم یافته
division	تقسیم
addition	جمع
feature	خصوصیات
psychological	روانشناختی
network	شبکه
intuitionistic	شهودی
multiplication	ضرب
membership	عضویت
taxonomy	علم رده بندی - طبقه بندی
interval	فاصله - بازه
distance	فاصله
vague	مبهم
۱۱۵	
symmetry	متقارن
fuzzy set	مجموعه فازی
crisp set	مجموعه قطعی
stimuli	محرک
universal	مرجع
center-of-gravity	مرکز ثقل
equal	مساوی

rectangle	مستطیل
path	مسیر
characteristic	مشخصه
curve	منحنی
medium	میانہ
defuzzification	نافازی سازی
inequality	نامساوی
dissimilar	نامشابه
theoretical	نظریہ
exponential	نمایی
geometric	هندسی

Abstract:

In today's competitive world, it is important to compare. People tend to compare everything. An important concept in this context is a measure of similarity and the similarity measure can help us to recognize two things. For this, we first need to calculate the degree of similarity of two things. Highest degree of similarity between two things, both of which have the highest similarity.

In this dissertation, a similarity measure is calculated between different fuzzy sets.

The chapters this thesis are summarized as follows:

Chapter 1 This chapter contains concepts used, based on the history and brief review of the work done by researchers in the field are fuzzy similarity measure. In Chapter 2 similarity measure between generalized fuzzy numbers is presented along with provide numerical examples. Some properties of fuzzy numbers to prove they are similar in size. In Chapter 3 the size of the similarity between the values of fuzzy sets has been studied. Chapter 4 includes a measure of similarity between fuzzy sets is intuitive. The numerical examples demonstrate this relationship Bsy properties is presented. Chapter 5 Applications of fuzzy similarity measure are presented.

Keywords:

similarity measure of fuzzy - fuzzy numbers - distance - Fuzzy set theory - the principle of similarity.



Shahrood University of Technology

Faculty: Mathematic

The problem of fuzzy similarity and some of its applications

Khadije Begum Ahmady

Supervisor:

Doctor Sadeq Rahimi Sherbaf

Date: October 2012