



دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

یک کاربرد از روش کالوکیشن برای حل مسائل کنترل بهینه تاخیری

نگارش

معصومه منصوری

استاد راهنما

آقای دکتر علیرضا ناظمی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

۲۶ شهریور ۱۳۹۱

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی رازیور عقل آراست. هر چند واژه‌ها ریاکاری آن نیست لطف و محبت کسانی را که در تمام دوران زندگی‌م جرعه نوش دریای مهر و محبتشان بوده‌ام به تصویر کشم، ابابره رسم ادب و احترام بوسه بردستان زده و بر خود واجب می‌دانم از زحمات مستمر و بی‌دیغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر حیدر طوسی‌ان شاذیزو جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش که زحمات و داورسی این پایان‌نامه را به عهده داشتند سپاسگزارم.

در نهایت از زحمات اعضای خانواده‌ام خصوصاً پدر و مادرم که همواره راهگشای مشکلاتم در تمام مراحل زندگی بوده‌اند ارج نهاده و مراتب تشکر قلبی و باطنی خویش را از الطاف و مهربانی آن‌ها ابراز دارم.

پس چنانچه از هم‌اتاقی‌های عزیز و مهربان و دوستان خوبم که بخطاتی سرشار از شادی و محبت را در کنارشان تجربه کردم سپاسگزارم.

معصومه منصوری

۲۶ شهریور ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه به حل عددی رده‌ای از مسائل کنترل بهینه تاخیر زمانی با استفاده از موجک هار می‌پردازیم. در ابتدا در فصل اول به مقدمه و معرفی مساله کنترل بهینه، موجک هار و تعاریف مورد نیاز می‌پردازیم. در فصل دوم یک مساله کنترل بهینه تاخیری از نوع بولزا را در نظر می‌گیریم که با استفاده از تقریب پاده به یک مساله بدون تاخیر زمانی تبدیل می‌شود. سپس با روش موجک هار به حل عددی آن می‌پردازیم. و در پایان فصل نتایج عددی را برای چهار مساله بررسی خواهیم کرد. فصل سوم شامل مساله کنترل بهینه تاخیری افق نامتناهی است. آن را با استفاده از تقریب پاده از حالت تاخیر خارج می‌کنیم و با استفاده از تغییر متغیر مساله را به یک مساله افق متناهی تبدیل می‌کنیم. در ادامه با روش موجک هار به حل عددی مساله بدست آمده می‌پردازیم و در پایان فصل سوم نتایج عددی را با حل دو مساله نشان می‌دهیم. در فصل چهارم مساله کنترل بهینه با اختلال برونی و کنترل تاخیری را معرفی می‌کنیم سپس با استفاده از تبدیل آرتستاین مساله را از حالت تاخیر خارج می‌کنیم و در انتها با استفاده از موجک هار به حل عددی آن می‌پردازیم. نتایج عددی با حل یک مثال در پایان فصل نشان داده شده است. در فصل پنجم واکنش سیستم ایمنی بدن به عوامل بیماری‌زا را بصورت یک مساله کنترل بهینه تاخیری در نظر می‌گیریم. مشابه مسائل فصل دوم مساله را به مساله بدون تاخیر تبدیل و با روش عددی موجک هار حل می‌کنیم. نمودارها در سرتاسر پایان‌نامه با استفاده از نرم افزار متلب ۷.۱۲ رسم شده است.

واژه‌های کلیدی: موجک هار، توابع هار گویا، تقریب پاده، مسائل کنترل بهینه تاخیر زمانی، مسائل افق نامتناهی، تبدیل آرتستاین، نقاط کالوکیشن، مساله کنترل بهینه غیرخطی با اختلال برونی، مساله کنترل بهینه سیستم ایمنی بدن.

فهرست مطالب

لیست تصاویر		ج
۱ مقدمه و مفاهیم اولیه		۱
۱.۱	مقدمه‌ای بر نظریه کنترل	۲
۲.۱	مقدمه‌ای بر مویک هار	۳
۳.۱	شکل کلی مساله کنترل بهینه	۴
۱.۳.۱	محک کنترل پذیری سیستم	۱۰
۲.۳.۱	معادلات دیفرانسیل تاخیری	۱۱
۳.۳.۱	تقریب پاده	۱۲
۴.۱	توابع مویک هار	۱۴
۱.۴.۱	ویژگی تعامد توابع هار گویا	۱۶
۲.۴.۱	تقریب توابع با توابع هار	۱۶
۳.۴.۱	ماتریس عملگر انتگرال گیری	۱۸
۲ حل عددی مسائل کنترل بهینه تاخیری		۲۱
۱.۲	مقدمه	۲۲
۲.۲	معرفی مساله	۲۲
۳.۲	تبدیل مساله تاخیری به مساله بدون تاخیر	۲۳
۴.۲	تبدیل قیود نامساوی مساله به قیود مساوی	۲۶
۵.۲	فرمول بندی مسائل کنترل بهینه	۲۷
۶.۲	کالوکیشن مستقیم	۲۸
۱.۶.۲	روش گسسته‌سازی هار	۲۸
۲.۶.۲	برنامه‌ریزی غیرخطی	۲۹
۷.۲	مثال های عددی	۳۰
۳ حل عددی مسائل کنترل بهینه تاخیری افق نامتناهی		۴۴
۱.۳	مقدمه	۴۵
۲.۳	معرفی مساله	۴۵
۳.۳	تبدیل مساله تاخیری به یک مساله بدون تاخیر	۴۶

۴۸	تبدیل مساله افق نامتناهی به مساله افق متناهی	۴.۳
۵۰	روش گسسته‌سازی هار برای تقریب توابع درمسائل کنترل بهینه غیرخطی	۵.۳
۵۱	برنامه‌ریزی غیرخطی	۶.۳
۵۳	مثال های عددی	۷.۳
۶۳	حل عددی مسائل کنترل بهینه غیرخطی با اختلال برونی و کنترل تاخیری	۴
۶۴	مقدمه	۱.۴
۶۴	معرفی مساله	۲.۴
۶۵	تبدیل مساله تاخیری به یک مساله بدون تاخیر	۳.۴
۶۶	روش گسسته‌سازی هار	۱.۳.۴
۶۷	برنامه‌ریزی غیرخطی	۲.۳.۴
۶۸	مثال عددی	۴.۴
۷۲	حل عددی مساله کنترل بهینه تاخیری سیستم ایمنی بدن	۵
۷۳	مقدمه	۱.۵
۷۳	معرفی مساله	۲.۵
۷۵	تبدیل مساله تاخیری به یک مساله بدون تاخیر	۳.۵
۷۷	مثال عددی	۴.۵
۸۳	نتایج و پیشنهاداتی برای کارهای آینده	
۸۴	مراجع و مآخذ	
۹۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۹۳	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

لیست تصاویر

۱۵ نمودار $RH(r, t)$ برای $r = 0, 1, 2, \dots, 7$	۱.۱
۱۹ نمودار توابع انتگرال $\phi_r(t)$ برای $r = 0, 1, \dots, 7$	۲.۱
۳۲ نمودار کنترل $u(t)$ برای مثال؟؟	۱.۲
۳۳ نمودار مسیرهای $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برای مثال؟؟	۲.۲
۳۴ نمودار مسیرهای $x_3(t)$ و $x_4(t)$ برای مثال؟؟	۳.۲
۳۶ نمودار کنترل $u(t)$ و مسیر $x_1(t)$ برای مثال؟؟	۴.۲
۳۸ نمودار کنترل $u(t)$ برای مثال؟؟	۵.۲
۳۹ نمودار مسیرهای $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برای مثال؟؟	۶.۲
۴۰ نمودار مسیرهای $x_3(t)$ و $x_4(t)$ برای مثال؟؟	۷.۲
۴۲ نمودار کنترل $u(t)$ و مسیر $x_1(t)$ برای مثال؟؟	۸.۲
۴۳ نمودار مسیرهای $x_3(t)$ و $x_4(t)$ برای مثال؟؟	۹.۲
۵۵ نمودار کنترل $v(\tau)$ برای مثال؟؟	۱.۳
۵۶ نمودار مسیرهای $y_1(\tau)$ و $y_2(\tau)$ برای مثال؟؟	۲.۳
۵۷ نمودار مسیرهای $y_3(\tau)$ و $y_4(\tau)$ برای مثال؟؟	۳.۳
۵۹ نمودار کنترل $v(\tau)$ برای مثال؟؟	۴.۳
۶۰ نمودار مسیرهای $y_1(\tau)$ و $y_2(\tau)$ برای مثال؟؟	۵.۳
۶۱ نمودار مسیرهای $y_3(\tau)$ و $y_4(\tau)$ برای مثال؟؟	۶.۳
۶۲ نمودار مسیرهای $y_5(\tau)$ و $y_6(\tau)$ برای مثال؟؟	۷.۳
۷۰ نمودار کنترل $u(t)$ و مسیر $x_1(t)$ برای مثال؟؟	۱.۴
۷۱ نمودار مسیر $x_2(t)$ برای مثال؟؟	۲.۴
۷۹ نمودار کنترل‌های $u_1(t)$ و $u_2(t)$ برای مثال؟؟	۱.۵
۸۰ نمودار کنترل‌های $u_3(t)$ و $u_4(t)$ برای مثال؟؟	۲.۵
۸۱ نمودار مسیرهای $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برای مثال؟؟	۳.۵
۸۲ نمودار مسیرهای $x_3(t)$ و $x_4(t)$ برای مثال؟؟	۴.۵

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه‌ای بر نظریه کنترل

در نظریه کنترل نشان داده شده است که رفتار دینامیکی بسیاری از سیستم‌ها را می‌توان به شکل معادلات یا نامعادلات ریاضی و بخصوص به شکل معادلات دیفرانسیل^۱ بیان نمود. البته ساختن یک مدل ریاضی برای یک سیستم ممکن است بسیار پیچیده باشد این مبحث در جای خود از اهمیت زیادی برخوردار است. ما فرض خواهیم کرد که کسی معادلات ریاضی سیستم را که خواص دینامیکی سیستم مورد بررسی را مشخص می‌کند تهیه کرده باشد. پس برای کنترل یک سیستم لازم است کنترل‌ها مناسب انتخاب شوند چنانکه معادلات ریاضی مربوط به آن سیستم برآورده شوند. البته محاسبه جواب‌های معادلات بخصوص معادلات دیفرانسیل غیرخطی عموماً پیچیده است. به‌عنوان مثال ما می‌خواهیم مساله مینیمم‌کردن مصرف سوخت راکت را مورد بررسی قرار دهیم. معادله حاکم بر حرکت راکت عبارت است از:

$$m \frac{dV}{dt} = mF + F_{ext},$$

که در آن m جرم راکت، V سرعت آن، F نیروی پرتاب که بوسیله راکت تولید می‌شود و F_{ext} نیروهای خارجی که از محیط به راکت وارد می‌شود. همچنین داریم [۲]:

$$|F| = \frac{c}{m} \beta,$$

که در آن c سرعت نسبی اگزوز و $\beta = -\frac{dm}{dt}$ نرخ مصرف سوخت است. اگر φ زاویه^۲ واقعی پرتاب (زاویه بین محور راکت و افق) باشد، آنگاه معادلات حرکت عبارتند از:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{c\beta}{m} \cos \varphi, \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{c\beta}{m} \sin \varphi - mg, \end{aligned}$$

که در آن $V = [v_1, v_2]^T$ و $F_{ext} = [0, -mg]^T$ اختیار شده است. مساله مصرف مینیمم سوخت عبارت است از انتخاب کنترل‌های β و φ که راکت را از نقطه اولیه به ارتفاع موردنظر \bar{y} برساند به قسمی که مقدار سوخت

^۱Differential Equations

^۲Angle

مصرفی مینیمم شود. سوخت مصرف شده عبارت است از:

$$I = \int_0^T \beta dt$$

که در آن T زمان رسیدن به \bar{y} است.

۲.۱ مقدمه‌ای بر موجک هار

در روش کلاسیک حل مسائل کنترل بهینه با استفاده از روش‌های حساب تغییرات^۳ و پونتریاگین^۴ متداول است. این روش‌ها دارای محدودیت‌ها و مشکلاتی هستند. به همین منظور روش‌های محاسباتی جایگزین متفاوتی برای حل مسائل کنترل بهینه در کتابها و مقالات علمی است. روشی که قرار است در این پایان نامه مورد بررسی قرار گیرد، روش موجک هار است.

موجک هار سری خاصی از توابع است که به‌عنوان ساده‌ترین و اولین نوع موجک شناخته می‌شود. این نوع موجک اولین بار در سال ۱۹۱۰ توسط آلفرد هار^۵ پیشنهاد شد. توابع هار^۶ مجموعه‌ای متعامد^۷ هستند که مقادیر خود را از مجموعه‌ی $\{0, \sqrt{2^i}, -\sqrt{2^i}\}$ ، $i = 0, 1, \dots$ اختیار می‌کنند. توابع هار ناپیوسته‌اند و در نقاط ناپیوستگی مشتق ناپذیرند. این موضوع باعث می‌شود که کاربرد مستقیم این موجک برای حل معادلات دیفرانسیل غیرممکن شود. یک راه غلبه بر این مشکل استفاده از روش انتگرال‌گیری است. در این روش بالاترین درجه مشتق موجود در معادله توسط سری هار بسط داده می‌شود. ایده اصلی این روش بر اساس تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری^۸ است. در این روش بازه زمانی به زیر بازه‌هایی با طول یکسان تقسیم می‌شود و توابع در این زیر بازه‌ها^۹ تقریب زده می‌شوند. به نقاط میانی این زیر بازه‌ها نقاط کالوکیشن^{۱۰} گفته می‌شود برای رسیدن به دقت بیشتر باید تعداد این نقاط افزایش یابد. این نقاط بصورت تصاعدی افزایش می‌یابند.

^۳Variational Calculus

^۴Pontryagin

^۵Alfred Haar

^۶Haar Functions

^۷Orthogonal Set

^۸Algebraic Equations

^۹Subintervals

^{۱۰}Collocation

۳.۱ شکل کلی مساله کنترل بهینه

در اینجا شکل کلی از یک مساله کنترل بهینه^{۱۱} معرفی می‌کنیم که در فصول بعدی با استفاده از روش عددی موجهک هار به حل آن می‌پردازیم.

فرض کنید سیستم دینامیکی توسط n متغیر حالت x_1, x_2, \dots, x_n مشخص شود، اکنون بردار حالت x را بصورت

زیر در نظر می‌گیریم:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

مولفه‌های x را می‌توان به‌عنوان محورهای مختصات n بعدی بنام فضای حالت^{۱۲} در نظر گرفت.

بردار کنترل u را به‌عنوان برداری از m متغیر کنترل u_1, u_2, \dots, u_m بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

فرض کنید $(x, u)^T$ در یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول^{۱۳} بصورت زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} \dot{x} = g(t, x, u) & t_a \leq t \leq t_b, \\ x(t_a) = x_a & x(t_b) = x_b, \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن $x(t_a)$ حالت اولیه و $x(t_b)$ حالت نهایی است. مساله کنترل بهینه عبارت است از پیدا کردن $(x, u)^T$ که

در (۱.۱) صدق کرده و تابعی زیر را ماکزیمم یا مینیمم کند:

$$I = \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t)) dt.$$

در اینجا f_0 و g_i ($i = 1, 2, \dots, n$)، توابعی پیوسته از t, x و u هستند.

در اینجا بطور خلاصه به بیان تعاریف و مباحثی که در این پایان نامه از آن استفاده شده است می‌پردازیم.

^{۱۱}Optimal Control Problem

^{۱۲}State Space

^{۱۳}First-Order Differential Equations

تعریف ۱.۳.۱. گروه^{۱۴} مجموعه‌ای است از اعضای G همراه با یک نگاشت^{۱۵} (که آن را یک عمل دوتایی نامیم)

$$*: G \times G \rightarrow G \text{ بطوریکه:}$$

۱. عضو $e \in G$ چنان موجود باشد که برای تمام $g \in G$ داشته باشیم $e * g = g * e = g$ این عضو را عضو

خنثی^{۱۶} گروه G گوییم.

۲. برای هر عضو $g \in G$ ، عضو منحصر بفرد^{۱۷} $h \in G$ موجود باشد بطوریکه $h * g = g * h = e$ عضو h

را وارون g نامیده و آن را با g^{-1} نشان می‌دهیم.

۳. برای کلیه g, h و j در G داشته باشیم $(g * h) * j = g * (h * j)$ ، یعنی $*$ شرکت‌پذیر باشد.

در اینصورت گروه را با $(G, *)$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه اگر برای کلیه $g, h \in G$ داشته باشیم $g * h = h * g$

آنگاه G را یک گروه جابجایی (تعویض‌پذیر) گوییم.

تعریف ۲.۳.۱. میدان مجموعه‌ای است از اعضای F همراه با دو عمل $+: F \times F \rightarrow F$ و $\cdot: F \times F \rightarrow F$ که

به ترتیب جمع و ضرب نامیده می‌شوند بطوریکه $(F, +)$ گروهی جابجایی با عضو همانی 0 بوده و $(F - \{0\}, \cdot)$

نیز گروهی جابجایی باشد عضو همانی^{۱۸} $(F - \{0\}, \cdot)$ را با 1 نشان داده و آن را واحد می‌نامیم. چنین میدانی

را بصورت $(F, +, \cdot)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۳.۱. یک فضای برداری^{۱۹} روی میدان F (که اعضای آن اسکالر نامیده می‌شود) مجموعه‌ای مانند V

است که اعضای آن را بردار^{۲۰} می‌نامیم بطوریکه:

^{۱۴}Group

^{۱۵}Mapping

^{۱۶}Neutral Element

^{۱۷}Unique Element

^{۱۸}Identity Element

^{۱۹}Vector Space

^{۲۰}Vector

۱. نگاشتی مانند $V \times V \rightarrow V$: $+$ که آن را جمع نامیده و $(V, +)$ گروهی جابجایی باشد. عضو همانی

این گروه را با $\bar{0}$ نشان می‌دهیم. همچنین نگاشت $V \times V \rightarrow V$ را که ضرب اسکالر^{۲۱} نامیده می‌شود

تعریف می‌کنیم. ضرب اسکالر F و V را برای هر $f \in F$ و $\mathcal{V} \in V$ بصورت $f\mathcal{V}$ نشان می‌دهیم. برای

کلیه $a, b \in F$ و $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in V$ ضرب اسکالر دارای خواص زیر است:

$$۲. a(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = a\mathcal{U} + a\mathcal{V} \text{ (توزیع ضرب اسکالر روی جمع برداری),}$$

$$۳. (a + b)\mathcal{V} = a\mathcal{V} + b\mathcal{V} \text{ (توزیع ضرب برداری روی جمع اسکالر),}$$

$$۴. a(b\mathcal{V}) = (a.b)\mathcal{V} \text{ (شرکت‌پذیری ضرب اسکالر),}$$

$$۵. ۱\mathcal{V} = \mathcal{V}$$

$$۶. \bar{0}\mathcal{V} = \bar{0}$$

چنین فضای برداری را با (V, F) نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۳.۱. فضای برداری V روی میدان اعداد مختلط^{۲۲} را یک فضای ضرب داخلی^{۲۳} (و یا فضای شبه هیلبرت)

نامیم هرگاه تابعی چون $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W} \in V$ و $a \in \mathbb{C}$

$$۱. \langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle \geq 0 \text{ و } \langle \mathcal{V}, \mathcal{V} \rangle = 0 \text{ اگر و تنها اگر } \mathcal{V} = 0,$$

$$۲. \langle \mathcal{U}, \mathcal{V} + \mathcal{W} \rangle = \langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle + \langle \mathcal{U}, \mathcal{W} \rangle,$$

$$۳. \langle a\mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle = a \langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle,$$

$$۴. \langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle = \overline{\langle \mathcal{V}, \mathcal{U} \rangle}, \text{ که خط بالایی عمل مزدوج در اعداد مختلط است.}$$

^{۲۱}Scalar Multiplication

^{۲۲}Complex Number

^{۲۳}Inner Product Space

تابع $\langle \cdot, \cdot \rangle$ را یک ضرب داخلی گوییم.

تعریف ۵.۳.۱. دنباله $(\mathcal{V}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ در فضای ضرب داخلی (V, \mathbb{C}) کشی^{۲۴} نامیده می‌شود هرگاه برای هر $N, \epsilon > 0$

ای در \mathbb{N} چنان یافت شود که برای هر $m, n \geq N$ داشته باشیم $d(\mathcal{V}_m, \mathcal{V}_n) \leq \epsilon$.

تعریف ۶.۳.۱. یک فضای ضرب داخلی را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا^{۲۵} باشد.

تعریف ۷.۳.۱. یک فضای ضرب داخلی کامل را یک فضای هیلبرت^{۲۶} گوییم.

تعریف ۸.۳.۱. فضای $L^2[a, b]$ برای بازه $[a, b]$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : \int_{[a, b]} |f|^2 < \infty \right\}.$$

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید تابع f برای $0 \leq t < \infty$ تعریف شده و s یک متغیر حقیقی^{۲۷} باشد. تابع F را

بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

حوزه تعریف F مجموعه s هایی است که به ازای آن‌ها انتگرال فوق همگراست، یعنی s هایی که به ازای آن‌ها حد

زیر موجود است:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt.$$

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس^{۲۸} تابع $f(t)$ می‌نامیم و آن را با $L\{f(t)\}$ نشان می‌دهیم، پس:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

^{۲۴}Cauchy

^{۲۵}Convergent

^{۲۶}Hilbert Space

^{۲۷}Real Variable

^{۲۸}Laplace Transformation

تعریف ۱۰.۳.۱. اگر در تعریف بالا $-\infty \leq t < \infty$ باشد آنگاه $F(s)$ را تبدیل لاپلاس دو طرفه^{۲۹} تابع $f(t)$ می‌نامیم و آن را بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$$B\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض می‌کنیم $X \neq \phi$ یک مجموعه باشد، یک جبر از مجموعه‌ها روی X عبارت است از یک خانواده غیرتهی A از زیر مجموعه‌های X بطوریکه در دو شرط زیر صدق کند:

$$۱. \text{ اگر } E_1, \dots, E_n \in A \text{ آنگاه } \bigcup_{k=1}^n E_k \in A.$$

$$۲. \text{ اگر } E \in A \text{ آنگاه } E^c \in A.$$

یک جبر روی X را σ -جبر گوییم، هرگاه تحت اجتماع شمارش‌پذیر بسته باشد. یعنی اگر $E_k \in A$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ آنگاه $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in A$.

تعریف ۱۲.۳.۱. فرض کنید $A \subseteq X$ یک σ -جبر باشد، تابع مجموعه‌ای μ از A بتوی $[0, \infty)$ را یک اندازه روی σ -جبر A می‌نامیم هرگاه:

$$۱. \mu(\phi) = 0.$$

$$۲. \text{ فرض کنیم } E_k \in A, k \in \mathbb{N} \text{ و } E_k \cap E_l = \phi \text{ وقتی } k \neq l. \text{ داریم: } \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

$\mu(E)$ را اندازه مجموعه E نامیم.

تعریف ۱۳.۳.۱. اگر A یک σ -جبر روی مجموعه X و μ یک اندازه بر (X, A) باشد. (X, A) را یک فضای اندازه‌پذیر^{۳۰} می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۳.۱. فرض می‌کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ یک خانواده از زیر مجموعه‌های باز X و $E \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} G_\alpha$ باشد. $\{G_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ را یک پوشش باز مجموعه E در فضای متریک X می‌نامیم.

^{۲۹}Two-sided Laplace

^{۳۰}Measurable Space

تعریف ۱۵.۳.۱. یک زیر مجموعه E از فضای متریک X را یک مجموعه فشرده می‌گوییم اگر هر پوشش باز E یک زیر پوشش باز متناهی داشته باشد.

تعریف ۱۶.۳.۱. فرض می‌کنیم $f : X \rightarrow Y$ یک تابع، (X, M) و (Y, N) فضاهای اندازه‌پذیر باشند. تابع f را اندازه‌پذیر^{۳۱} می‌گوییم اگر برای هر $E \in N$ داشته باشیم:

$$f^{-1}(E) \in M.$$

تعریف ۱۷.۳.۱. یک تابع اندازه‌پذیر f که روی \mathbb{R} تعریف شده است را یک انتگرال لبگ^{۳۲} می‌گوییم اگر یک دنباله از توابع (f_n) وجود داشته باشد بطوریکه در دو شرط زیر صدق کند:

$$۱. \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty.$$

$$۲. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty.$$

آنگاه انتگرال f بصورت

$$\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n,$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۱۸.۳.۱. یک تابع f که روی \mathbb{R} تعریف شده است، انتگرال‌پذیر موضعی^{۳۳} گفته می‌شود اگر

$$\int_a^b f,$$

برای هر $-\infty < a < b < \infty$ موجود باشد.

^{۳۱}Measurable

^{۳۲}Lebesgue Integral

^{۳۳}Locally Integrable

تعریف ۱۹.۳.۱. فرض می‌کنیم (X, A) یک فضای اندازه‌پذیر باشد و $E \subseteq X$ ، تابع مشخصه^{۳۴} χ_E بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_E = \begin{cases} 0, & x \notin E, \\ 1, & x \in E. \end{cases}$$

تعریف ۲۰.۳.۱. یک مجموعه S اندازه‌پذیر گفته می‌شود اگر تابع مشخصه χ_S یک تابع انتگرال‌پذیر موضعی باشد.

تعریف ۲۱.۳.۱. فرض کنید S یک مجموعه اندازه‌پذیر باشد، اگر تابع مشخصه χ_S یک تابع انتگرال‌پذیر باشد آنگاه $\mu(S)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu(S) = \int \chi_S,$$

اگر χ_S انتگرال‌پذیر نباشد آنگاه:

$$\mu(S) = \infty.$$

تعریف ۲۲.۳.۱. مجموعه توابع $\{u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots\}$ را در فاصله $[a, b]$ متعامد^{۳۵} گوئیم. اگر داشته باشیم:

$$\int_a^b u_m(x)u_n(x) dt \begin{cases} = 0, & m \neq n, \\ > 0, & m = n. \end{cases}$$

۱.۳.۱ محک کنترل‌پذیری سیستم

سیستمی با معادله حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

$$y = cx,$$

^{۳۴}Characteristic Function

^{۳۵}Orthogonal

که در آن A ماتریس $n \times n$ ، b بردار $1 \times n$ و c بردار سطری است. شرط لازم و کافی برای کنترل پذیری^{۳۶} سیستم این است که [۲]:

$$r(Q = [b \mid Ab \mid \dots \mid A^{n-1}b]) = n.$$

تعریف ۲۳.۳.۱. ماتریس Q را ماتریس کنترل پذیری سیستم می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۳.۱. ماتریس مربعی حقیقی $A = (a_{ij})$ ، از مرتبه n را نیمه‌معین مثبت^{۳۷} گوئیم هرگاه:

۱. متقارن^{۳۸} باشد،

$$2. \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x \geq 0.$$

۲.۳.۱ معادلات دیفرانسیل تاخیری

یک نوع خاص از معادله دیفرانسیل که یک معادله دیفرانسیل تاخیری، یا یک معادله دیفرانسیل با شناسه عقب افتاده نامیده می‌شود، در برخی مسائل عددی مطرح می‌شود. مدل‌های جمعیت و مسائل اختلاط دارای این شکل خاص هستند، که در آن‌ها مقدار $\dot{x}(t)$ به تابع x در مقادیر قبلی بستگی دارد. برای مثال فرض کنید:

$$\dot{x}(t) = f(x(t-1)).$$

اگر مقدار x را در $t-1$ بشناسیم، با استفاده از معادله دیفرانسیل قادر به محاسبه $\dot{x}(t)$ خواهیم بود. برای انتگرال‌گیری معادله دیفرانسیل با شروع در $t=0$ ، به مقدار $x(t)$ با شروع در $t=-1$ نیاز خواهیم داشت. بنابراین مقادیر $x(t)$ بر روی بازه $[0, -1]$ باید به‌عنوان مقادیر اولیه برای ما فراهم باشند. یک مثال از یک مساله خاص و خوش تعریف از این نوع مساله زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1), & t \geq 0, \\ x(t) = t^2, & -1 \leq t \leq 0. \end{cases}$$

^{۳۶}Controllability

^{۳۷}Semi-positive Definite Matrix

^{۳۸}Symmetric

دومین معادله این مساله مقادیر اولیه موردنیاز را برای $x(t)$ ارائه می‌دهد. اگر t به بازه $[0, 1]$ محدود باشد آنگاه در $t - 1$ در $[-1, 0]$ خواهد بود. بنابراین:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1) = (t-1)^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

جواب این معادله به راحتی با انتگرال گیری و فراهم نمودن یک مقدار ثابت مناسب انتگرال گیری بصورت زیر بدست می‌آید:

$$x(t) = \frac{1}{3}(t-1)^3 + \frac{1}{3}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

اگر جواب در بازه بعدی $[1, 2]$ پیوسته باشد، گام دیگری مانند اولین گام می‌تواند اختیار شود. بنابراین به ازای t های واقع در $[1, 2]$ داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1) = \frac{1}{3}(t-2)^3 + \frac{1}{3}, & 1 \leq t \leq 2, \\ x(1) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

جواب این معادله عبارت است از

$$x(t) = \frac{1}{12}(t-2)^4 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{12}, \quad 1 \leq t \leq 2.$$

جواب می‌تواند با محاسبات مشابه به طور نامتناهی به راست ادامه یابد [۳].

۳.۳.۱ تقریب پاده

تقریب گویا برای تابع $f(x)$ روی فاصله $[a, b]$ از خارج قسمت دو چندجمله‌ای $P_n(x)$ ، $Q_m(x)$ بترتیب از درجه m و n بصورت زیر بدست می‌آید:

$$R_L(x) = R_{m,n}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}.$$

درجه تقریب را با مجموع درجه چندجمله‌ای‌های $Q_m(x)$ ، $P_n(x)$ یعنی $L = m + n$ تعریف می‌کنیم. برای محاسبه $R_{m,n}$ باید $L + 2$ پارامتر a_0, a_1, \dots, a_n و b_0, b_1, \dots, b_m را بدست آورد. روش‌های مختلفی برای

محاسبه آن‌ها وجود دارد که یکی از این روش‌ها، روشی است که توسط پاده ارائه شد. در این تقریب برای محاسبه ۲ + L پارامتر، ابتدا b را برابر یک فرض می‌کنیم.

برای محاسبه $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$, $b_j (j = 1, \dots, m)$ از بسط مک‌لورن تابع $f(x)$ استفاده می‌شود.

یعنی:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} c_jx^j.$$

بطوریکه رابطه زیر برقرار باشد:

$$f^{(z)}(0) = R_L^{(z)}(0), \quad z = 0, 1, \dots, L. \quad (2.1)$$

و خطای محاسبه $f(x) - R_L(x)$ را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} Z(x) = f(x) - R_L(x) = f(x)Q_m(x) - P_n(x), \\ (\sum_{j=0}^{\infty} c_jx^j)(\sum_{j=0}^m b_jx^j) - \sum_{j=0}^n a_jx^j = \sum_{j=L+1}^{\infty} d_jx^j. \end{cases} \quad (3.1)$$

با توجه به رابطه (۲.۱) کمترین درجه چندجمله‌ای $Z(x)$ ، $L + 1$ است. با متحد قرار دادن ضرایب جملات با

درجه کمتر از $L + 1$ در طرفین رابطه (۳.۱) $L + 1$ معادله زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} c_0 - a_0 = 0, \\ b_1c_0 - c_1 - a_1 = 0, \\ b_2c_0 + b_1c_1 + c_2 - a_2 = 0, \\ b_3c_0 + b_2c_1 + b_1c_2 + c_3 - a_3 = 0, \\ \vdots \\ b_nc_0 + b_{n-1}c_1 + \dots + c_n - a_n = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

و

$$\begin{cases} b_m c_{n-m+1} + b_{m-1} c_{n-m+2} + \dots + b_1 c_n + c_{n+1} = 0, \\ b_m c_{n-m+2} + b_{m-1} c_{n-m+3} + \dots + b_1 c_{n+1} + c_{n+2} = 0, \\ \vdots \\ b_m c_n + b_{m-1} c_{n+1} + \dots + b_1 c_{n+m-1} + c_{n+m} = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

ابتدا از معادله (۴.۱) پارامترهای b_1, \dots, b_m را محاسبه کرده سپس با جایگذاری در رابطه (۵.۱)، a_0, \dots, a_n را

بدست می‌آوریم [۱].

۴.۱ توابع موجک هار

تعریف ۱.۴.۱. توابع هار را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(0, t) = 1, \quad 0 \leq t < 1,$$

$$H(1, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \end{cases}$$

$$H(2, t) = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ -\sqrt{2}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \end{cases}$$

$$H(3, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ \sqrt{2}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{3}{4}, \\ -\sqrt{2}, & \frac{3}{4} \leq t < 1. \end{cases}$$

بطور کلی داریم:

$$H(2^p + n - 1, t) = \begin{cases} \sqrt{2^p} & J_1 \leq t \leq J_{\frac{1}{2}}, \\ -\sqrt{2^p} & J_{\frac{1}{2}} \leq t \leq J_0, \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

که در آن

$$J_u = \frac{n - u}{2^p}, \quad u = 0, \frac{1}{2}, 1,$$

$$p = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots, 2^p.$$

لینچ^{۳۹} و ریس^{۴۰} توابع هار را گویا کردند [۴]. توابع هار گویا^{۴۱} تمام ویژگی توابع هار اصلی را دارند و آن‌ها را

با RH نمایش می‌دهیم. در این پایان نامه مسائل کنترل بهینه را با استفاده از این توابع حل می‌کنیم.

تعریف ۲.۴.۱. توابع هار گویا مقادیر خود را از مجموعه‌ی $\{1, -1, 0\}$ اختیار می‌کنند و روی بازه‌ی $(0, 1)$ بصورت

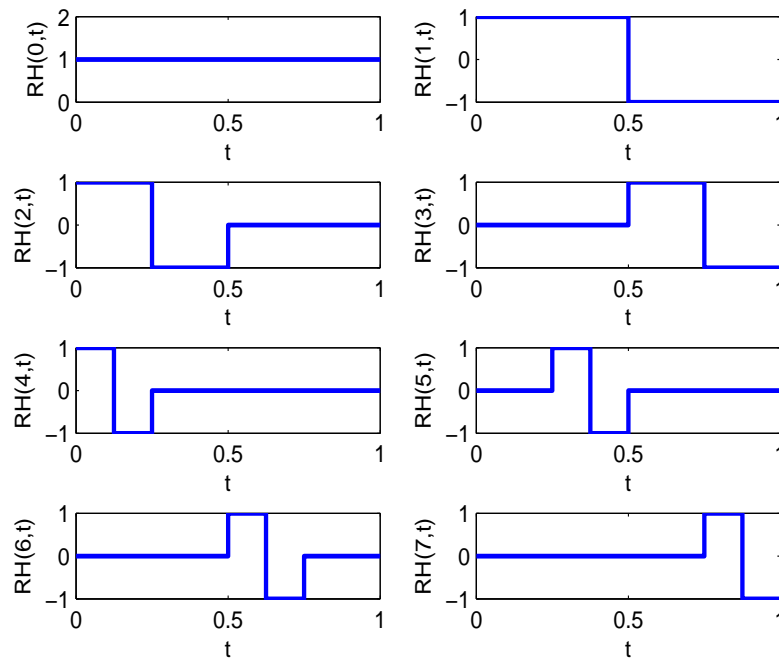
زیر تعریف می‌شوند [۵]:

$$RH(r, t) = \begin{cases} 1, & J_1 \leq t < J_{\frac{1}{2}}, \\ -1, & J_{\frac{1}{2}} \leq t < J_0, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

^{۳۹}Lynch

^{۴۰}Reis

^{۴۱}Rationalized Haar Functions



شکل ۱.۱: نمودار $RH(r, t)$ برای $r = 0, 1, 2, \dots, 7$

که در آن

$$J_u = \frac{j-u}{2^i}, \quad u = 0, \frac{1}{2}, 1,$$

و مقدار r و پارامترهای j, i بصورت زیر است:

$$r = 2^i + j - 1, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 2^i.$$

$RH(0, t)$ برای $i = j = 0$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$RH(0, t) = 1, \quad 0 \leq t < 1.$$

نمودار توابع هار گویا برای $r = 0, 1, 2, \dots, 7$ در شکل ۱.۱ رسم شده است [۶].

۱.۴.۱ ویژگی تعامد توابع هار گویا

مجموعه‌ی توابع هار گویا مجموعه‌ای متعامد کامل هستند و ویژگی تعامدشان بصورت زیر است [۵]:

$$\int_0^1 RH(r, t)RH(\nu, t) dt = \begin{cases} 2^{-i}, & r = \nu, \\ 0, & r \neq \nu, \end{cases}$$

که در آن

$$\nu = 2^n + m - 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots, 2^n.$$

۲.۴.۱ تقریب توابع با توابع هار

همانطور که اشاره شد مجموعه توابع هار گویا مجموعه‌ای متعامد کامل در فضای هیلبرت $L^2[0, 1]$ است، بنابراین

هر تابع پیوسته مانند $\mathcal{F}(t)$ در این فضا را می‌توان با این توابع به صورت زیر تقریب زد [۵]:

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r RH(r, t). \quad (6.1)$$

اگر تابع $\mathcal{F}(t)$ معلوم باشد a_r بصورت زیر بدست می‌آید:

$$a_r = 2^i \int_0^1 \mathcal{F}(t) RH(r, t) dt, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

که در آن $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, $j = 1, 2, 3, \dots, 2^i$ و برای $r = 2^i + j - 1$ و برای $i = j = 0$

$r = 0$ است. سری رابطه‌ی (۶.۱) نامتناهی است. برای تبدیل این سری به یک سری متناهی فرض می‌کنیم

$i = 0, 1, 2, \dots, \alpha$ باشد، بنابراین جملات سری به K جمله‌ی اولش محدود می‌شود، در نتیجه داریم:

$$\mathcal{F}(t) \simeq \sum_{r=0}^{K-1} a_r RH(r, t) = A^T \phi(t), \quad (7.1)$$

که در آن

$$K = 2^{\alpha+1}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A را بردار ضرایب توابع هار گویا و $\Phi(t)$ را بردار توابع هار گویا می‌نامیم و آن‌ها را بصورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A = [a_0, a_1, \dots, a_{K-1}]^T,$$

$$\Phi(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{K-1}(t)]^T,$$

که در آن

$$\phi_r(t) = RH(r, t), \quad r = 0, 1, 2, \dots, K-1.$$

نقاط موجود در بین هر زیر بازه موجک را نقاط کالوکیشن می‌نامیم و آن‌ها را بصورت زیر نمایش می‌دهیم [۷]:

$$t_l = \frac{l - 0.5}{K}, \quad l = 1, 2, \dots, K.$$

با انتخاب این نقاط کالوکیشن تابع به زیر بازه‌هایی با فاصله‌های مساوی گسسته‌سازی می‌شود. می‌توان بردار

$\phi_r(t), r = 0, 1, 2, \dots, K-1$ را در این نقاط مشخص کرد. فرض می‌کنیم $\hat{\Phi}_{K \times K}$ به‌عنوان ماتریس هار،

ترکیبی از بردارهای $\phi_r(t), r = 0, 1, 2, \dots, K-1$ در نقاط کالوکیشن باشد. بنابراین داریم:

$$\hat{\Phi}_{K \times K} = [\Phi(t_1), \Phi(t_2), \dots, \Phi(t_K)]. \quad (8.1)$$

به‌عنوان مثال ماتریس هار هشت موجک اول بصورت زیر است [۸]:

$$\hat{\Phi}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (9.1)$$

با استفاده از روابط (۷.۱) و (۸.۱) داریم:

$$[\mathcal{F}(t_1), \mathcal{F}(t_2), \dots, \mathcal{F}(t_K)] = A^T \hat{\Phi}_{K \times K}. \quad (10.1)$$

از رابطه‌ی (۱۰.۱) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$A^T = [\mathcal{F}(t_1), \mathcal{F}(t_2), \dots, \mathcal{F}(t_K)] \hat{\Phi}_{K \times K}^{-1}.$$

که در آن

$$\hat{\Phi}_{K \times K}^{-1} = \left(\frac{1}{K}\right) \hat{\Phi}_{K \times K}^T \text{diag}\left(1, 1, 2, 2, \underbrace{2^2, \dots, 2^2}_{2^2}, \underbrace{2^3, \dots, 2^3}_{2^3}, \dots, \underbrace{\frac{K}{2}, \dots, \frac{K}{2}}_{\frac{K}{2}}\right). \quad (11.1)$$

بنابراین تابع $\mathcal{F}(t)$ در نقاط کالوکیشن بصورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\mathcal{F}(t_l) \approx A_{1 \times K}^T \hat{\Phi}_{K \times K}, \quad l = 1, 2, \dots, K$$

۳.۴.۱ ماتریس عملگر انتگرال گیری

همیشه در حل مسائل کنترل بهینه با روابطی سر و کار داریم که مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری از آن‌ها اجتناب ناپذیر است، برای سیستم‌هایی که توابع را با موجک‌ها تقریب زده‌ایم مشتق‌گیری از موج‌های پله‌ای امکان‌پذیر

نیست در حالیکه انتگرال‌گیری از آن‌ها توابعی خطی نتیجه می‌دهد و از رابطه‌ی زیر بدست می‌آیند [۸]:

$$\int_0^t \Phi(t') dt' \simeq P \Phi(t). \quad (12.1)$$

ماتریس $P_{K \times K}$ ، ماتریس عملگر انتگرال‌گیری^{۴۲} است و از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید [۸]:

$$P_{K \times K} = \frac{1}{\sqrt{K}} \begin{bmatrix} \sqrt{K} P_{\frac{K}{\sqrt{K}} \times \frac{K}{\sqrt{K}}} & -\hat{\Phi}_{\frac{K}{\sqrt{K}} \times \frac{K}{\sqrt{K}}} \\ \hat{\Phi}_{\frac{K}{\sqrt{K}} \times \frac{K}{\sqrt{K}}}^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (13.1)$$

بطوریکه $\hat{\Phi}_{1 \times 1} = [1]$ ، $P_{1 \times 1} = [\frac{1}{\sqrt{K}}]$ ، همچنین $\hat{\Phi}_{\frac{K}{\sqrt{K}} \times \frac{K}{\sqrt{K}}}$ و $\hat{\Phi}_{\frac{K}{\sqrt{K}} \times \frac{K}{\sqrt{K}}}^{-1}$ به ترتیب از (۹.۱) و (۱۱.۱) بدست می‌آیند.

به عنوان مثال ماتریس عملگر انتگرال‌گیری مرتبه هشت $P_{8 \times 8}$ بصورت زیر است:

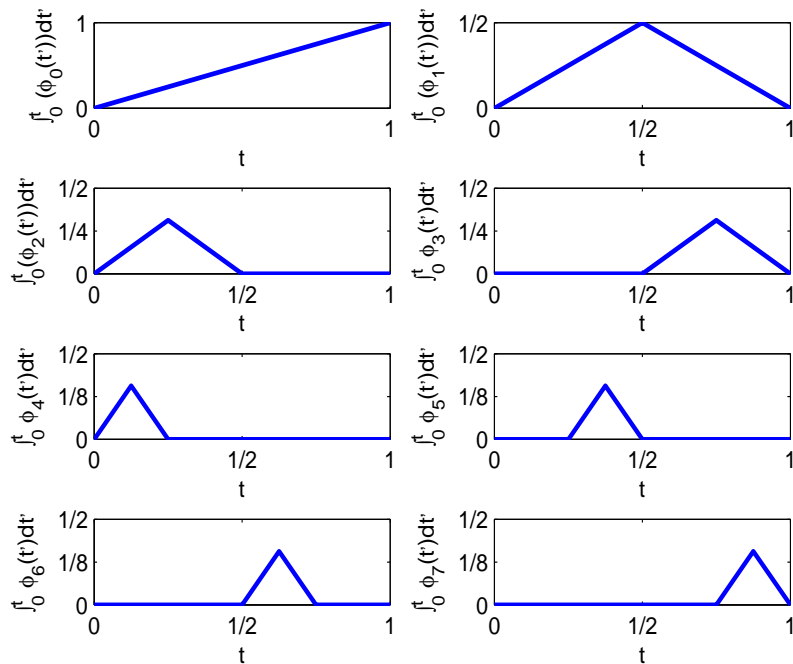
$$P_{8 \times 8} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 32 & -16 & -8 & -8 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 16 & 0 & -8 & 8 & -4 & -4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14.1)$$

انتگرال‌گیری از $\phi_r(t)$ ، $r = 0, 1, \dots, 7$ که در شکل ۲.۱ رسم شده است، بصورت زیر نمایش می‌دهیم [۹]:

$$\int_0^t \phi_0(t') dt' = t, \quad 0 \leq t < 1 \simeq \frac{1}{16} [1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11 \ 13 \ 15], \quad (15.1)$$

$$\int_0^t \phi_1(t') dt' = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ 1-t, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 7 \ 5 \ 3 \ 1], \quad (16.1)$$

^{۴۲}Operational Integration Matrix



شکل ۲.۱: نمودار توابع انتگرال $\phi_r(t)$ برای $r = 0, 1, \dots, 7$

$$\int_0^t \phi_0(t') dt' = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} - t, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \end{cases} \approx \frac{1}{16} [1 \ 3 \ 3 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (17.1)$$

$$\int_0^t \phi_1(t') dt' = \begin{cases} t - \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{3}{4}, \\ 1 - t, & \frac{3}{4} \leq t < 1, \\ 0, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \end{cases} \approx \frac{1}{16} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 3 \ 3 \ 1], \quad (18.1)$$

$$\int_0^t \phi_2(t') dt' = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{1}{8}, \\ \frac{1}{8} - t, & \frac{1}{8} \leq t < \frac{1}{4}, \\ 0, & \frac{1}{4} \leq t < 1, \end{cases} \approx \frac{1}{16} [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (19.1)$$

$$\int_0^t \phi_3(t') dt' = \begin{cases} t - \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{3}{8}, \\ \frac{1}{4} - t, & \frac{3}{8} \leq t < \frac{1}{2}, \\ 0, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \end{cases} \approx \frac{1}{16} [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (20.1)$$

$$\int_0^t \phi_4(t') dt' = \begin{cases} t - \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{5}{8}, \\ \frac{3}{4} - t, & \frac{5}{8} \leq t < \frac{3}{4}, \\ 0, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \end{cases} \approx \frac{1}{16} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0], \quad (21.1)$$

$$\int_0^t \phi_5(t') dt' = \begin{cases} t - \frac{3}{4}, & \frac{3}{4} \leq t < \frac{7}{8}, \\ 1 - t, & \frac{7}{8} \leq t < 1, \\ 0, & 0 \leq t < \frac{3}{4}, \end{cases} \approx \frac{1}{16} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]. \quad (22.1)$$

با ادغام روابط (۱۵.۱)–(۲۲.۱) داریم:

$$\int_0^t \hat{\Phi}_{8 \times 8}(t') dt' \simeq \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (23.1)$$

اکنون با توجه به روابط (۹.۱)، (۱۲.۱) و (۲۳.۱) ماتریس $P_{8 \times 8}$ بدست می‌آید که همان ماتریس (۱۴.۱) است.

فصل ۲

حل عددی مسائل کنترل بهینه تاخیری

۱.۲ مقدمه

در این فصل، در ابتدا با استفاده از تقریب پاده مرتبه اول^۱ مساله کنترل بهینه تاخیر زمانی^۲ را به یک مساله بدون تاخیر تبدیل می‌کنیم. سپس اگر این مساله دارای قیده‌های نامساوی نهایی^۳ باشد با استفاده از پارامترهای مجهول^۴ به قیده‌های مساوی تبدیل می‌شوند، و با استفاده از روش تقریبی موجک هار که در فصل اول توضیح دادیم جواب عددی مساله را بدست می‌آوریم و با جواب دقیق مقایسه می‌کنیم.

۲.۲ معرفی مساله

تاخیر زمانی [۱۰]-[۱۶] اغلب در سیستم‌های مهندسی^۵ مطرح می‌شود. همچنین بسیاری از سیستم‌ها مانند سیستم‌های فیزیکی^۶ و راکتورهای شیمیایی صنعتی^۷ با معادلات دیفرانسیل تاخیری مدل‌بندی می‌شوند. مسائل کنترل بهینه تاخیر زمانی سیستم‌های خطی و غیرخطی علاقه بسیاری از محققان را به خود جذب کرده است. مساله کنترل بهینه تاخیری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\min_{u, \pi} J = \eta(x_f, \pi) + \int_0^{t_f} L(x(t), x(t - \sigma), u(t), \pi, t) dt \quad (1.2)$$

subject to

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \sigma), u(t), \pi, t), \quad (2.2)$$

$$x(t) = \xi(t), \quad -\sigma \leq t \leq 0, \quad (3.2)$$

$$\eta(x_f, \pi) \geq 0, \quad (4.2)$$

^۱First-order Páde Approximation

^۲Time-delayed optimal control problem

^۳Terminal Conditions

^۴Valentine-type Unknown Parameters

^۵Engineering Systems

^۶Physical Systems

^۷Industrial Chemical Reactors

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ و $\pi \in \mathbb{R}^n$ به ترتیب بردار حالت، کنترل و پارامترهای مجهول هستند. $\eta \in \mathbb{R}^n$ قیود نامساوی نهایی^۱ را نشان می‌دهد و در اینجا $(\cdot)_f$ و σ به ترتیب مشتق نسبت به متغیر t ، شرط متغیر وابسته به زمان در زمان نهایی t_f و تاخیر زمانی مربوط به متغیر حالت است. برای سادگی بحث‌مان را به مسائلی محدود می‌کنیم که دارای تنها یک تاخیر زمانی هستند.

۳.۲ تبدیل مساله تاخیری به مساله بدون تاخیر

برای این که مسائل کنترل بهینه تاخیری را با استفاده از روش عددی مویک‌ها حل کنیم، ابتدا باید مساله را از حالت تاخیر خارج کنیم. با استفاده از تقریب پاده و تبدیل لاپلاس که در فصل اول بیان شد، فرض می‌کنیم که $X(s)$ یک تبدیل لاپلاس دوطرفه از $x(t)$ باشد:

$$x(t) \Leftrightarrow X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} x(t) dt,$$

که در آن $X(s)$ روی $\alpha < Re(s) < \beta$ تعریف می‌شود، $Re(s)$ قسمت حقیقی s است و “ \Leftrightarrow ” نشان‌دهنده یک تبدیل لاپلاس دو طرفه است. از تبدیل لاپلاس دو طرفه به این دلیل استفاده می‌شود که برای $t \leq 0$ ، $x(t) = \xi(t) \neq 0$ داریم:

$$x(t) \Leftrightarrow X(s),$$

بنابراین تبدیل لاپلاس دو طرفه از $x(t - \sigma)$ و $\dot{x}(t)$ بصورت زیر است:

$$x(t - \sigma) \Leftrightarrow e^{-\sigma s} X(s), \quad \alpha < Re(s) < \beta, \quad (5.2)$$

$$\dot{x}(t) \Leftrightarrow sX(s), \quad \alpha_1 < Re(s) < \beta_1. \quad (6.2)$$

^۱Terminal Inequality Constraint

برای حذف متغیرهای حالت دارای تاخیر زمانی در روابط (۱.۲)-(۴.۲) تعریف می‌کنیم:

$$y(t) \triangleq x(t - \sigma), \quad (۷.۲)$$

$$y(t) \Leftrightarrow Y(s). \quad (۸.۲)$$

از ادغام روابط (۵.۲)، (۷.۲) و (۸.۲) داریم:

$$Y(s) = e^{-\sigma s} X(s). \quad (۹.۲)$$

با استفاده از تقریب پاده مرتبه اول ($m = n = ۱$) و با فرض این که $f(\sigma s) = e^{-\sigma s}$ داریم:

$$e^{-(\sigma s)} = 1 - (\sigma s) + \frac{(\sigma s)^2}{2!} - \frac{(\sigma s)^3}{3!} + \dots = \frac{a_0 + a_1(\sigma s)}{1 + b_1(\sigma s)}. \quad (۱۰.۲)$$

با استفاده از روابط (۴.۱) و (۵.۱) داریم:

$$\begin{cases} 1 - a_0 = 0, \\ b_1 - 1 - a_1 = 0, \end{cases} \quad (۱۱.۲)$$

و

$$-b_1 + \frac{1}{2} = 0. \quad (۱۲.۲)$$

با استفاده از روابط (۱۱.۲) و (۱۲.۲) مقادیر a_0, a_1, b_1 بدست می‌آید. بنابراین داریم:

$$Y(s) = \frac{1 - \frac{\sigma s}{2}}{1 + \frac{\sigma s}{2}} X(s), \quad (۱۳.۲)$$

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{\sigma} - s}{\frac{2}{\sigma} + s} X(s), \quad (۱۴.۲)$$

$$\left(\frac{2}{\sigma} + s\right)Y(s) = \left(\frac{2}{\sigma} - s\right)X(s). \quad (۱۵.۲)$$

اگر از طرفین (۱۵.۲) تبدیل لاپلاس معکوس^۹ بگیریم به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\dot{y}(t) = \frac{2}{\sigma} [x(t) - y(t)] - \dot{x}(t), \quad (۱۶.۲)$$

^۹Inverse Laplace

با استفاده از (۲.۲) داریم:

$$\dot{y}(t) = \frac{\gamma}{\sigma} [x(t) - y(t)] - f(x(t), y(t), u(t), \pi, t). \quad (۱۷.۲)$$

بنابراین با استفاده از (۱۶.۲) و (۱۷.۲) مساله کنترل بهینه تاخیری بطور تقریبی به مساله کنترل بهینه زیر تبدیل می‌شود:

$$\min_{u, \pi} J = \eta(x_f, \pi) + \int_0^{t_f} L(x(t), y(t), u(t), \pi, t) dt \quad (۱۸.۲)$$

subject to

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), u(t), \pi, t), \quad (۱۹.۲)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\gamma}{\sigma} [x(t) - y(t)] - f(x(t), y(t), u(t), \pi, t), \quad (۲۰.۲)$$

با شرایط اولیه^{۱۰} و نهایی:

$$x(0) = \xi(0), \quad y(0) = \xi(-\sigma), \quad (۲۱.۲)$$

$$\eta(x_f, \pi) \geq 0. \quad (۲۲.۲)$$

برای بهتر شدن تقریب، تاخیر زمانی را به بخش‌های کوچکتر تقسیم می‌کنیم. ما در اینجا زمان تاخیر σ را به $\frac{\sigma}{\gamma}$ تقسیم می‌کنیم. بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$y(t) \triangleq x\left(t - \frac{\sigma}{\gamma}\right),$$

$$z(t) \triangleq y\left(t - \frac{\sigma}{\gamma}\right) = x(t - \sigma).$$

دوباره با استفاده از تقریب پاده مرتبه اول داریم:

$$Y(s) = \frac{1 - \frac{\sigma s}{\gamma}}{1 + \frac{\sigma s}{\gamma}} X(s), \quad (۲۳.۲)$$

$$Z(s) = \frac{1 - \frac{\sigma s}{\gamma}}{1 + \frac{\sigma s}{\gamma}} Y(s). \quad (۲۴.۲)$$

^{۱۰}Initial condition

از دو رابطه بالا تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{\mathcal{F}}{\sigma} [x(t) - y(t)] - f(x(t), z(t), u(t), \pi, t), \\ \dot{z}(t) &= \frac{\mathcal{F}}{\sigma} [y(t) - z(t)] - \dot{y}(t) = \frac{\mathcal{F}}{\sigma} [2y(t) - z(t) - x(t)] \\ &\quad + f(x(t), z(t), u(t), \pi, t). \end{aligned}$$

در نتیجه مساله کنترل بهینه (۱۸.۲)–(۲۲.۲) به مساله کنترل بهینه زیر تبدیل می‌شود:

$$\min_{u, \pi} J = \eta(x_f, \pi) + \int_0^{t_f} L(x(t), z(t), u(t), \pi, t) dt$$

subject to

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), z(t), u(t), \pi, t), \\ \dot{y}(t) &= \frac{\mathcal{F}}{\sigma} [x(t) - y(t)] - f(x(t), z(t), u(t), \pi, t), \\ \dot{z}(t) &= \frac{\mathcal{F}}{\sigma} [2y(t) - z(t) - x(t)] + f(x(t), z(t), u(t), \pi, t), \end{aligned}$$

با شرایط اولیه و نهایی

$$x(0) = \xi(0), \quad y(0) = \xi\left(-\frac{\sigma}{\mathcal{F}}\right), \quad z(0) = \xi(-\sigma),$$

$$\eta(x_f, \pi) \geq 0.$$

۴.۲ تبدیل قیود نامساوی مساله به قیود مساوی

در مسائل کنترل بهینه با قیود کراندار اگر k مولفه از بردار قید نهایی $\eta(x_f, \pi)$ کراندار باشد بطوریکه:

$$\eta_{min}^i \leq \eta^i \leq \eta_{max}^i, \quad i = 1, \dots, k. \quad (۲۵.۲)$$

که در آن η_i ، η_i نامین مولفه از قید نهایی و η_{min}^i ، η_{max}^i به ترتیب کران بالا و پایین آن هستند، با استفاده از k پارامتر مجهول p_i برای $(i = 1, \dots, k)$ ، قیود نامساوی (۲۳.۲) به قیود مساوی زیر تبدیل می‌شوند:

$$(\eta_{max}^i - \eta^i)(\eta^i - \eta_{min}^i) - p_i^2 = 0.$$

از تحلیل‌های بالا، واضح است که یک مساله کنترل بهینه با تاخیر در تابع حالت، قابل تبدیل به یک مساله کنترل بهینه بدون تاخیر است. در قسمت بعد ما فرم کلی از یک مساله کنترل بهینه غیرخطی را بیان کرده و روش موجک‌ها را برای حل آن بیان خواهیم کرد.

۵.۲ فرمول‌بندی مسائل کنترل بهینه

سیستم کنترلی غیرخطی زیر را داریم:

$$\dot{X}(t) = G(t, X(t), U(t)), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (26.2)$$

$$S(t, X(t), U(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (27.2)$$

بطوریکه X بردار n بعدی متغیر حالت، G یک بردار n بعدی توابع دیفرانسیلی پیوسته، S بردار q بعدی، t متغیر زمان و U بردار m بعدی متغیر کنترل است. حالت‌ها دارای شرایط اولیه و مرزی معلوم $X(0) = X_0$ و $\vartheta(t_f, X_f) = 0$ هستند. بطوریکه ϑ بردار p بعدی از توابع است. t_0 زمان اولیه و t_f زمان نهایی است. در اینجا ما مسائل بولزا^{۱۱} [۱۷] را مورد بررسی قرار می‌دهیم، مسائلی که دارای تابع هدف از نوع مینیمم‌سازی بصورت زیر هستند:

$$J = \Psi(t_f, X_f) + \int_{t_0}^{t_f} H(t, X(t), U(t)) dt. \quad (28.2)$$

که در آن Ψ تابع اسکالر از زمان نهایی t_f و متغیر حالت نهایی X_f و $H(t, X, U)$ تابع اسکالر از زمان، حالت X و کنترل U است. از آنجا که توابع H گویا روی بازه‌ی $[0, 1]$ تعریف می‌شوند، از تبدیل بازه‌ی $t = [(t_f - t_0)\tau + t_0]$

^{۱۱}Bolza Problems

با $t \in [t_0, t_f], \tau \in [0, 1]$ استفاده می‌کنیم تا بازه $[t_0, t_f]$ را به بازه $[0, 1]$ تبدیل کنیم. با استفاده از این تبدیل، مسائل کنترل بهینه سیستم غیرخطی (۲۶.۲)–(۲۷.۲) با تابع هدف (۲۸.۲) به مساله بهینه‌سازی زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{minimize } J = \psi(t_f, x(1)) + (t_f - t_0) \int_0^1 h(\tau, t_f, x(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (29.2)$$

subject to

$$\dot{x}(\tau) = (t_f - t_0)g(\tau, t_f, x(\tau), u(\tau)), \quad \tau \in [0, 1], \quad (30.2)$$

$$s(\tau, t_f, x(\tau), u(\tau)) \leq 0, \quad \tau \in [0, 1], \quad (31.2)$$

$$x(0) = x_0. \quad (32.2)$$

۶.۲ کالوکیشن مستقیم

۱.۶.۲ روش گسسته‌سازی هار

در این بخش چگونگی تقریب توابع با موجک هار و ماتریس عملگر انتگرال‌گیری متناظر با آن را توضیح خواهیم داد. ما انتظار داریم که از این روش در حل مسائل کنترل بهینه استفاده کنیم. بنابراین جواب پیوسته متغیرهای حالت و کنترل برای یک مساله را بصورت مجموع توابع هار نمایش می‌دهیم. بازه‌ی استاندارد در این روش بازه‌ی $[0, 1]$ ، با مجموعه نقاط کالوکیشن بصورت زیر است:

$$\tau_l = \frac{l - 0.5}{K}, \quad l = 1, 2, \dots, K. \quad (33.2)$$

K بصورت توانی از دو است و با افزایش توان تعداد نقاط کالوکیشن نیز افزایش می‌یابد. نقاط کالوکیشن با فواصل مساوی $\frac{1}{K}$ روی بازه‌ی زمانی $[0, 1]$ قراردارند. مشتق متغیرهای حالت $\dot{x}(\tau)$ و متغیر کنترل $u(\tau)$ را با موجک

هار با K نقطه‌ی کالوکیشن بصورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\dot{x}(\tau) \approx C_x^T \Phi(\tau), \quad (۳۴.۲)$$

$$u(\tau) \approx C_u^T \Phi(\tau), \quad (۳۵.۲)$$

که در آن

$$C_x^T = [C_{x1}, C_{x2}, \dots, C_{xK}], \quad C_u^T = [C_{u1}, C_{u2}, \dots, C_{uK}].$$

با استفاده از ماتریس عملگرانتگرال‌گیری P تعریف شده در (۱۳.۱) متغیر حالت بصورت زیر بیان می‌شود:

$$x(\tau) = \int_0^\tau \dot{x}(\tau') d\tau' + x_0 = \int_0^\tau C_x^T \Phi(\tau') d\tau' + x_0 = C_x^T P \Phi(\tau) + x_0.$$

همان‌طور که در فصل ۱ بیان شد با توسیع ماتریس $\Phi(t)$ در K نقطه کالوکیشن (۳۳.۲)، ماتریس هار $\hat{\Phi}_{K \times K}$ نتیجه می‌شود:

$$\dot{x}(\tau_l) = C_x^T \Phi(\tau_l), \quad u(\tau_l) = C_u^T \Phi(\tau_l), \quad x(\tau_l) = C_x^T P \Phi(\tau_l) + x_0, \quad l = 1, \dots, K. \quad (۳۶.۲)$$

با استفاده از توضیح بالا می‌توانیم متغیرها را در نقاط کالوکیشن با استفاده از ضرب بردار ضرایب در بردار ستونی متناظر آن در ماتریس هار تقریب بزنیم.

۲.۶.۲ برنامه‌ریزی غیرخطی

هنگامی که از روش کالوکیشن هار در مسائل کنترل بهینه استفاده می‌کنیم، متغیرهای برنامه‌ریزی غیرخطی مجموعه‌ای شامل بردار ضرایب مجهول مشتق متغیر حالت و متغیر کنترل و زمان اولیه و نهایی بصورت زیر است:

$$x = [C_{x1}, C_{x2}, \dots, C_{xK}, C_{u1}, C_{u2}, \dots, C_{uK}, t_0, t_f].$$

بنابراین تابع هدف مساله کنترل بهینه رابطه (۲۹.۲) بصورت زیر است:

$$J = \psi(t_f, x(\tau_K)) + (t_f - t_0) \int_0^1 h(\tau, t_f, (C_x^T P \Phi(\tau) + x_0), C_u^T \Phi(\tau)) d\tau,$$

از آن جاکه توابع هار در هر زیر بازه دارای مقادیر ثابت هستند می توانیم تابع هدف مساله را بصورت زیر بنویسیم:

$$J = \psi(t_f, x(\tau_K)) + \frac{t_f - t_0}{K} \sum_{l=1}^K h(\tau_l, t_f, (C_x^T P \Phi(\tau_l) + x_0), C_u^T \Phi(\tau_l)),$$

و قید (۳۱.۲) بصورت زیر نوشته می شود.

$$s(\tau_l, t_f, (C_x^T P \Phi(\tau_l) + x_0), C_u^T \Phi(\tau_l)) \leq 0.$$

اگر $\dot{x}(\tau)$ ، $u(\tau)$ و $x(\tau)$ در رابطه (۳۰.۲) را با بسط موجک هار در (۳۶.۲) جایگزین کنیم داریم:

$$C_x^T \Phi(\tau_l) = (t_f - t_0) g(\tau_l, t_f, (C_x^T P \Phi(\tau_l) + x_0), C_u^T \Phi(\tau_l)).$$

مجموعه نقاط کالوکیشن شامل زمان اولیه و نهایی t_0 و t_f نیستند بنابراین متغیرهای حالت مربوط به آنها را می

توان بصورت زیر نوشت [۷]:

$$x_0 = x(\tau_1) - \frac{\dot{x}(\tau_1)}{2K}, \quad x_1 = x(\tau_K) + \frac{\dot{x}(\tau_K)}{2K}. \quad (37.2)$$

با این روش مساله کنترل بهینه به مساله بهینه سازی غیرخطی تبدیل می شود که با استفاده از نرم افزار لینگو ۱۱^{۱۲} قابل حل است.

۷.۲ مثال های عددی

کارایی روش موجک هار ارائه شده در فصل اول با بررسی چهار مثال نشان داده می شود.

مثال ۱.۷.۲. این مثال مربوط به مساله کنترل بهینه از یک نوسانگر هارمونیک با میرای تاخیری است که مستلزم

تابع هزینه

$$\text{minimize } J = 5x_f^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt \quad (38.2)$$

تحت قیود دستگاه معادلات دیفرانسیل تاخیری

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t-1) + u(t), & 0 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad (39.2)$$

^{۱۲}Lingo 11 software

و شرایط اولیه زیر است:

$$x_1(0) = 10, \quad x_2(t) = 0, \quad -1 \leq t \leq 0. \quad (40.2)$$

جواب تحلیلی برای مساله ارائه شده بصورت زیر است [۱۸]:

$$u(t) = \begin{cases} \delta \sin(2-t) + \left(\frac{\delta}{4}\right)(1-t) \sin(t-1), & 0 \leq t \leq 1, \\ \delta \sin(2-t), & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

که در آن $\delta \approx 2/5599$ است. همان طور که در (۳۹.۲) می بینیم زمان تاخیر مربوط به متغیر حالت x_2 است که در اینجا مقدار آن برابر ۱ است. با استفاده از روش توصیف شده در بخش ۳.۲ داریم:

$$\begin{cases} x_3(t) \triangleq x_2(t - \frac{1}{4}), \\ x_4(t) \triangleq x_3(t - \frac{1}{4}) = x_2(t - 1). \end{cases}$$

بنابراین معادلات دیفرانسیل تاخیری به معادلات زیر که فاقد تاخیر زمانی هستند تبدیل می شوند:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_4(t) + u(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) + 4x_2(t) - 4x_3(t) + x_4(t) - u(t), \\ \dot{x}_4(t) = -x_1(t) - 4x_2(t) + 8x_3(t) - 5x_4(t) + u(t). \end{cases} \quad (41.2)$$

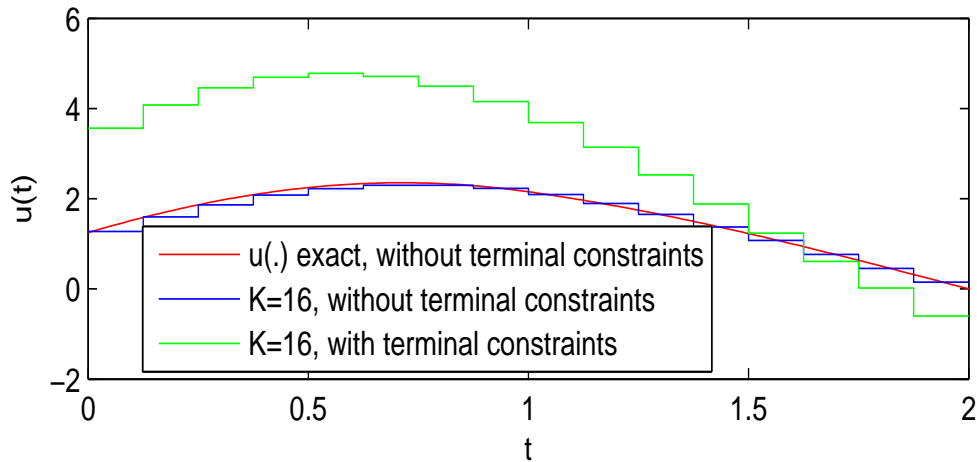
با شرایط اولیه

$$x_1(0) = 10, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0. \quad (42.2)$$

مساله مینیمم سازی با تابع هدف (۳۸.۲) تحت قیود (۴۱.۲) را با استفاده از روش تقریبی موجک هار برای $K = 16$ حل می کنیم مقدار بدست آمده برای J برابر $3/256613$ است و مقدار داده شده در [۱۹] برابر $3/3991$ است. کنترل بهینه و مسیرهای متناظر آن در شکل های ۱.۲-۳.۲ رسم شده است و با مقادیر دقیق داده شده در [۱۸] مقایسه شده است. حال قیود نامساوی نهایی زیر را به مساله (۳۸.۲)-(۴۰.۲) بصورت زیر اضافه می کنیم:

$$x_{1f} \geq 2, \quad x_{2f} \leq -5.$$

برای تبدیل این قیود به قیود مساوی همان طور که در بخش ۴.۲ توضیح دادیم از پارامترهای مجهول p_1 و p_2 استفاده می کنیم و مقادیر این پارامترها بطور بهینه تعیین می شوند. بنابراین قیود نامساوی به قیود تساوی زیر



شکل ۱.۲: نمودار کنترل $u(t)$ برای مثال ۱.۷.۲

تبدیل می‌شوند:

$$x_{1f} - 2 - p_1^* = 0, \quad (43.2)$$

$$x_{2f} + 5 + p_2^* = 0. \quad (44.2)$$

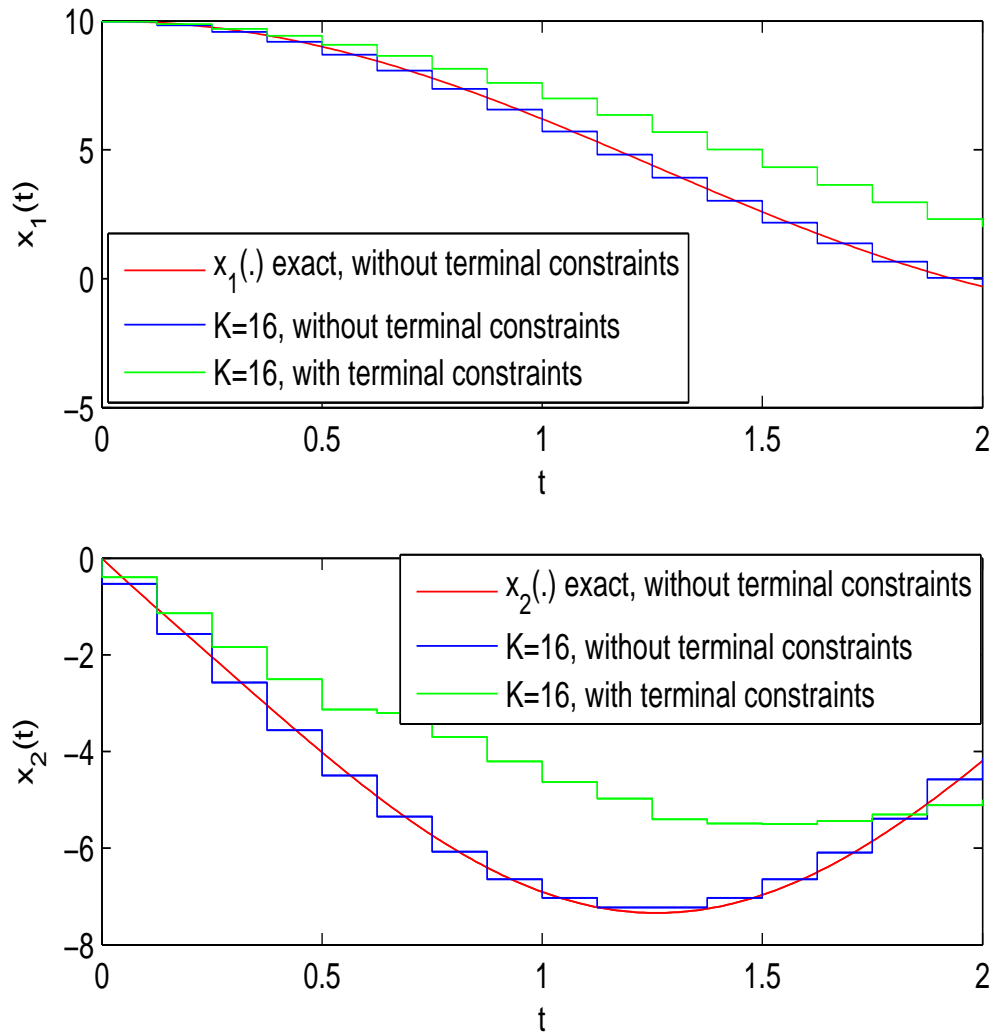
مقدار بهینه بدست آمده برای تابع هدف (۳۸.۲) تحت قیود داده شده (۴۱.۲)، (۴۳.۲)، (۴۴.۲) و شرایط اولیه (۴۲.۲) در [۲۰] برابر $31/303$ داده شده است که با حل مساله به روش موجک هار برابر $31/2759$ بدست می‌آید. کنترل بهینه u و مسیرهای جدید x_1, x_2, x_3 و x_4 به ترتیب در شکل‌های ۱.۲-۳.۲ رسم شده است. دور از انتظار نیست که مقدار نهایی برای x_1 و x_2 به ترتیب ۲ و -5 بدست می‌آید.

مثال ۲.۷.۲. مساله زیر را در نظر بگیرید:

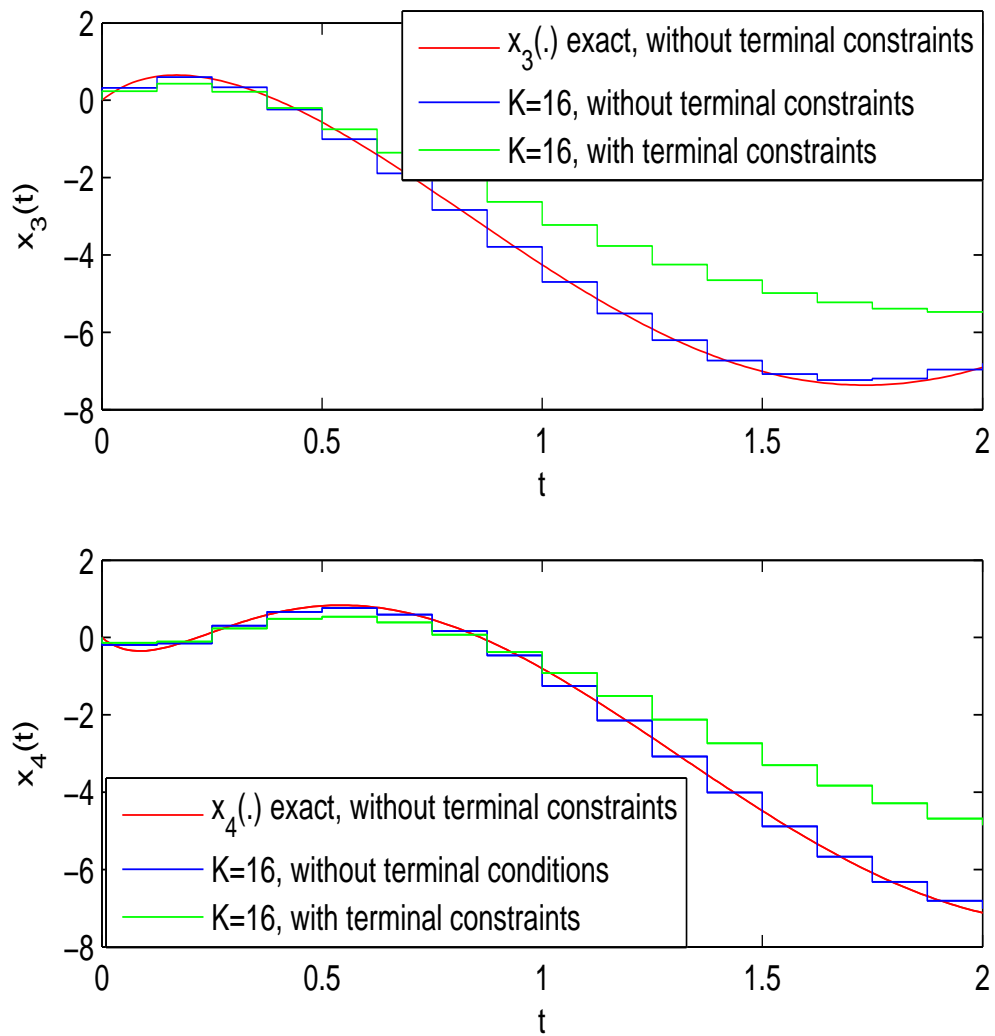
$$\text{minimize } J = \frac{1}{4} x_{1f}^2 + \frac{1}{4} \int_0^2 [x_1^2(t) + u^2(t)] dt$$

subject to

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) \sin(x_1(t)) + x_1(t-1) + u(t), \quad 0 \leq t \leq 2,$$



شکل ۲.۲: نمودار مسیرهای $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برای مثال ۱.۷.۲



شکل ۳.۲: نمودار مسیرهای $x_3(t)$ و $x_4(t)$ برای مثال ۱.۷.۲

با شرط اولیه

$$x_1(t) = 10, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

برای حذف زمان تاخیر $\sigma = 1$ در این مساله مانند مثال ۱.۷.۲ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_2(t) \triangleq x_1(t - \frac{1}{\gamma}), \\ x_3(t) \triangleq x_2(t - \frac{1}{\gamma}) = x_1(t - 1). \end{cases}$$

بنابراین با استفاده از روش گفته شده در بخش ۳.۲ قید مساله به قیود زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) \sin(x_1(t)) + x_3(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 4x_2(t) - x_3(t) - x_1(t) \sin(x_1(t)) - u(t), \\ \dot{x}_3(t) = -4x_1(t) + 8x_2(t) - 3x_3(t) + x_1(t) \sin(x_1(t)) + u(t), \end{cases} \quad (45.2)$$

با شرایط اولیه

$$x_1(0) = 10, \quad x_2(0) = 10, \quad x_3(0) = 10. \quad (46.2)$$

ملاحظه می‌کنید که در این روش دو قید به قیود مساله و دو شرط به شرایط اولیه و بطور کلی دو متغیر به متغیرهای حالت افزوده می‌شود. با حل عددی مساله به روش موجهک هر مقدار بهینه تابع هدف برای $K = 8$ برابر $161/88$ بدست می‌آید و مقدار J در [۲۱] و [۲۲] به ترتیب $162/019$ و $162/104$ داده شده است. نمودار بهینه $u(t)$ و $x_1(t)$ برای $t \in [0, 2]$ در شکل ۴.۲ رسم شده است.

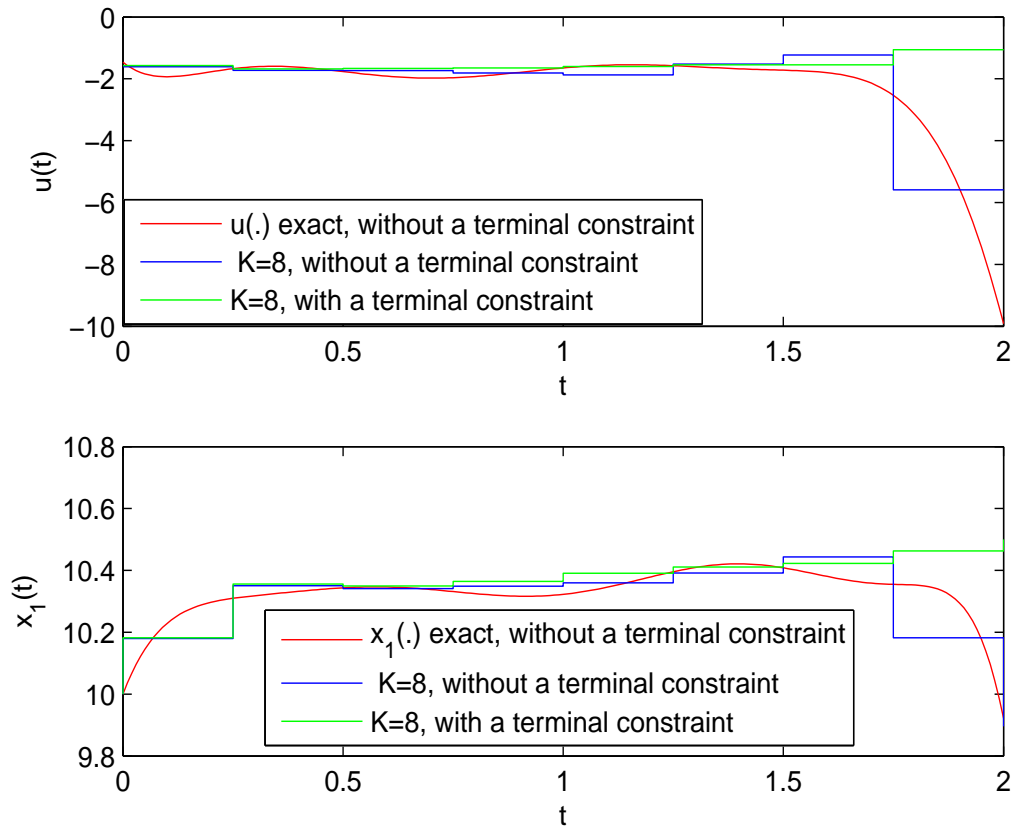
قید نامساوی نهایی زیر را به مساله اضافه می‌کنیم:

$$x_{1f} \geq 10/5. \quad (47.2)$$

با استفاده از روش توصیف شده در بخش ۴.۲ و معرفی پارامتر p_1 قید نامساوی (۴۷.۲) به قید مساوی زیر تبدیل می‌شود.

$$x_{1f} - 10/5 - p_1 = 0. \quad (48.2)$$

همان‌طور که در مثال ۱.۷.۲ توضیح دادیم پارامتر p_1 بطور بهینه تعیین می‌شود. مقدار J داده شده در [۲۰] برابر $165/009$ است ما این مساله را تحت قیود (۴۵.۲) و شرایط نهایی (۴۸.۲) و شرایط اولیه (۴۶.۲) با استفاده از



شکل ۴.۲: نمودار کنترل $u(t)$ و مسیر $x_1(t)$ برای مثال ۱.۷.۲

روش موجک هار برای $K = 8$ حل می‌کنیم مقدار تقریبی J برابر $۰.۲۳۲ / ۱۶۵$ است. همچنین کنترل بهینه $u(t)$ و مسیر جدید $x_1(t)$ در شکل ۴.۲ رسم شده است.

مثال ۳.۷.۲. مساله کنترل بهینه تاخیری مینیمم‌سازی با زمان تاخیر $\sigma = 1$ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\text{minimize } J = \frac{1}{\gamma} \{ [x_1(2)]^2 + [x_2(2)]^2 \} + \frac{1}{\gamma} \int_0^2 [u(t)]^2 dt \quad (۴۹.۲)$$

subject to

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - x_1(t-1) + u(t), & 0 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad (۵۰.۲)$$

با شرایط اولیه

$$x_1(t) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

جواب دقیق برای این مساله بصورت زیر است [۱۸]:

$$u(t) = \begin{cases} (\mu - \delta)e^{t-2} + [2\mu - 3\delta - (\mu - \delta)t]e^{t-1} + \delta(t + 2) - \mu, & 0 \leq t \leq 1, \\ (\mu - \delta)e^{t-2} + \delta, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

که در آن $\delta \approx -0.259256$, $\mu \approx 0.5226194$ است. همچنین مقدار بهینه J برابر 0.197478 است.

همان طور که در قیود این مساله ملاحظه می کنیم زمان تاخیر مربوط به متغیر حالت x_1 است برای حذف این زمان

تأخیر تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} x_3(t) \triangleq x_1(t - \frac{1}{\tau}), \\ x_4(t) \triangleq x_3(t - \frac{1}{\tau}) = x_1(t - 1). \end{cases} \quad (51.2)$$

با استفاده از روش گفته شده در بخش ۳.۲ و روابط (51.2) دستگاه معادلات دیفرانسیل تاخیری (قیودمساله)

(50.2) به دستگاه معادلات دیفرانسیل بدون تاخیر زیر تبدیل می شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - x_4(t) + u(t), \\ \dot{x}_3(t) = 4x_1(t) - x_2(t) - 4x_3(t), \\ \dot{x}_4(t) = -4x_1(t) + x_2(t) + 8x_3(t) - 4x_4(t), \end{cases} \quad (52.2)$$

با شرایط اولیه

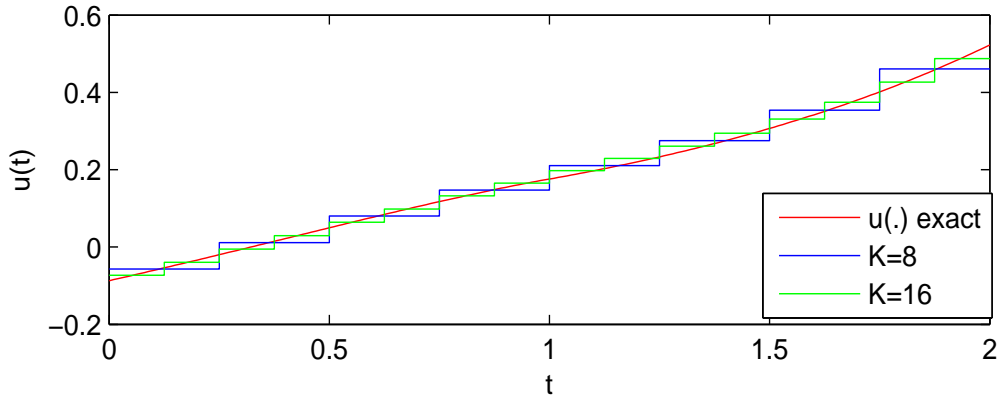
$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 1, \quad x_4(0) = 1. \quad (53.2)$$

مساله کنترل بهینه بدون تاخیر زمانی با تابع هدف درجه دوم (49.2) تحت قیود خطی (52.2) و شرایط اولیه

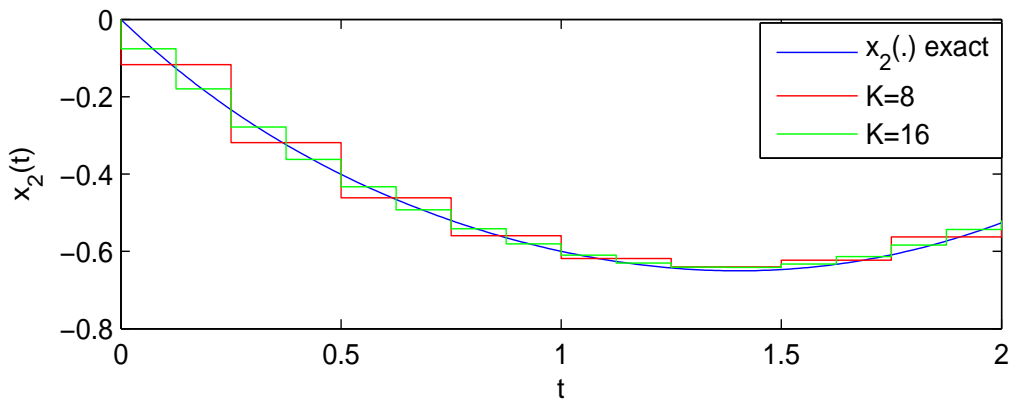
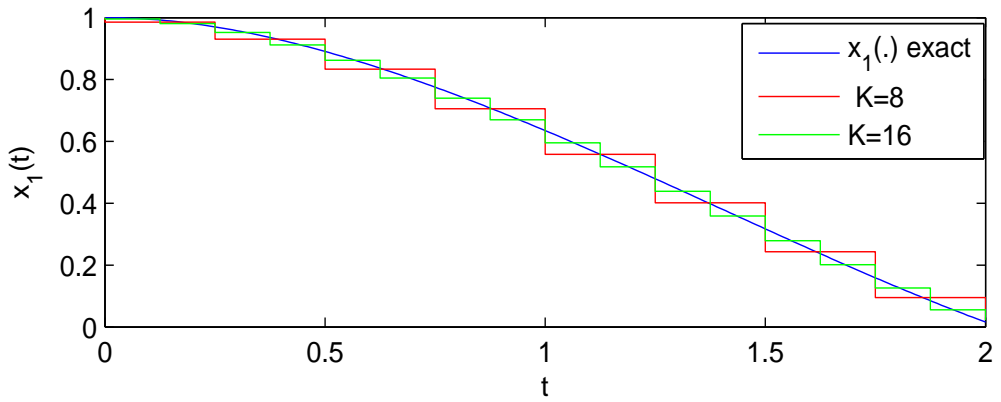
(53.2) را به روش عددی مویک هار حل می کنیم. مقدار بهینه J برای $K = 8, 16$ بترتیب برابر 0.1976 و

0.1967 بدست می آید. نمودار کنترل بهینه $u(t)$ و مسیرهای متناظر $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ و $x_4(t)$ و نمودار

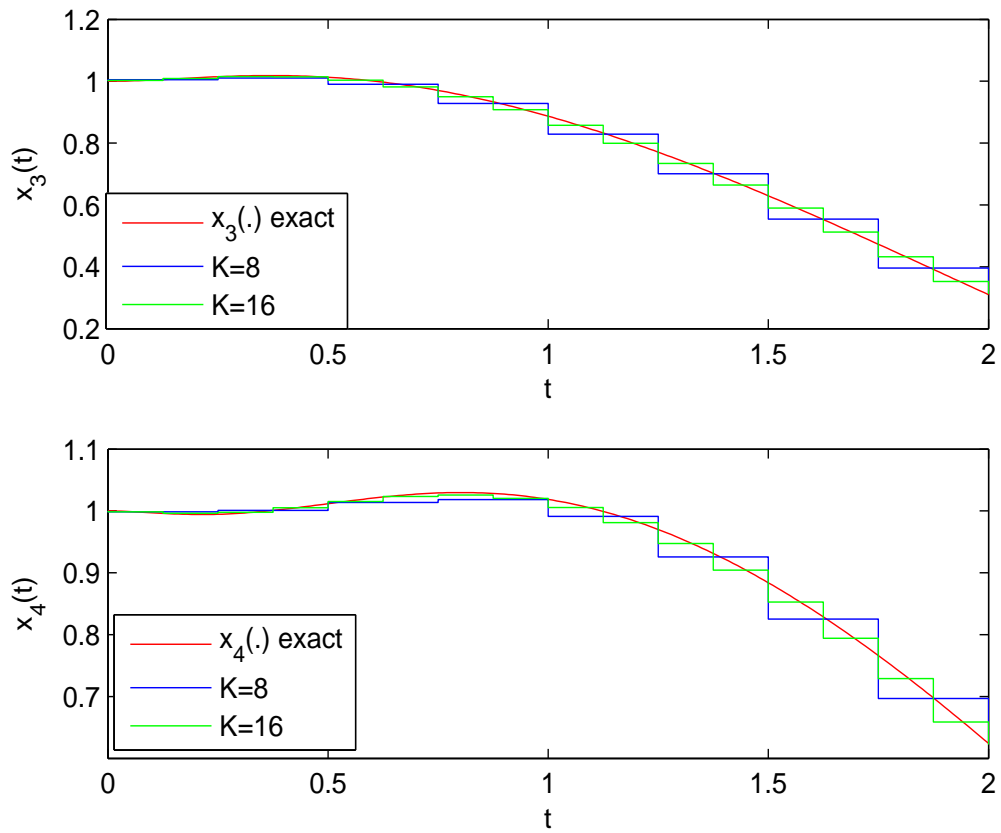
دقیق متناظر آنها بترتیب در شکل های 5.2-7.2 رسم شده است.



شکل ۵.۲: نمودار کنترل $u(t)$ برای مثال ۳.۷.۲



شکل ۶.۲: نمودار مسیرهای $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برای مثال ۳.۷.۲

شکل ۷.۲: نمودار مسیرهای $x_3(t)$ و $x_4(t)$ برای مثال ۱.۷.۲

مثال ۴.۷.۲. مساله کنترل بهینه مینیمم‌سازی تحت قيودی بصورت دستگاه معادلات دیفرانسیل تاخیری

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t-1) + u(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ x_1(t) = 1, & -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (54.2)$$

و تابع هدف زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\text{minimize } J = \frac{1}{4} [1 \cdot 0.5 x_1^2(2) + \int_0^2 u^2(t) dt]. \quad (55.2)$$

که در آن زمان تاخیر $\sigma = 1$ مربوط به متغیر حالت است برای حذف این زمان تاخیر با استفاده از روش توصیف

شده در بخش ۳.۲ به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x_2(t) \triangleq x_1(t - \frac{1}{4}), \\ x_3(t) \triangleq x_2(t - \frac{1}{4}) = x_1(t - 1). \end{cases}$$

جواب دقیق این مساله بصورت زیر است [۲۳]:

$$u(t) = \begin{cases} -2/1 + 1/0.5t, & 0 \leq t \leq 1, \\ -1/0.5, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

معادلات دینامیکی تاخیری به دستگاه زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 4x_2(t) - x_3(t) - u(t), \\ \dot{x}_3(t) = -3x_3(t) + 8x_2(t) - 4x_1(t) + u(t), \end{cases} \quad (56.2)$$

شرایط اولیه این مساله بصورت زیر است:

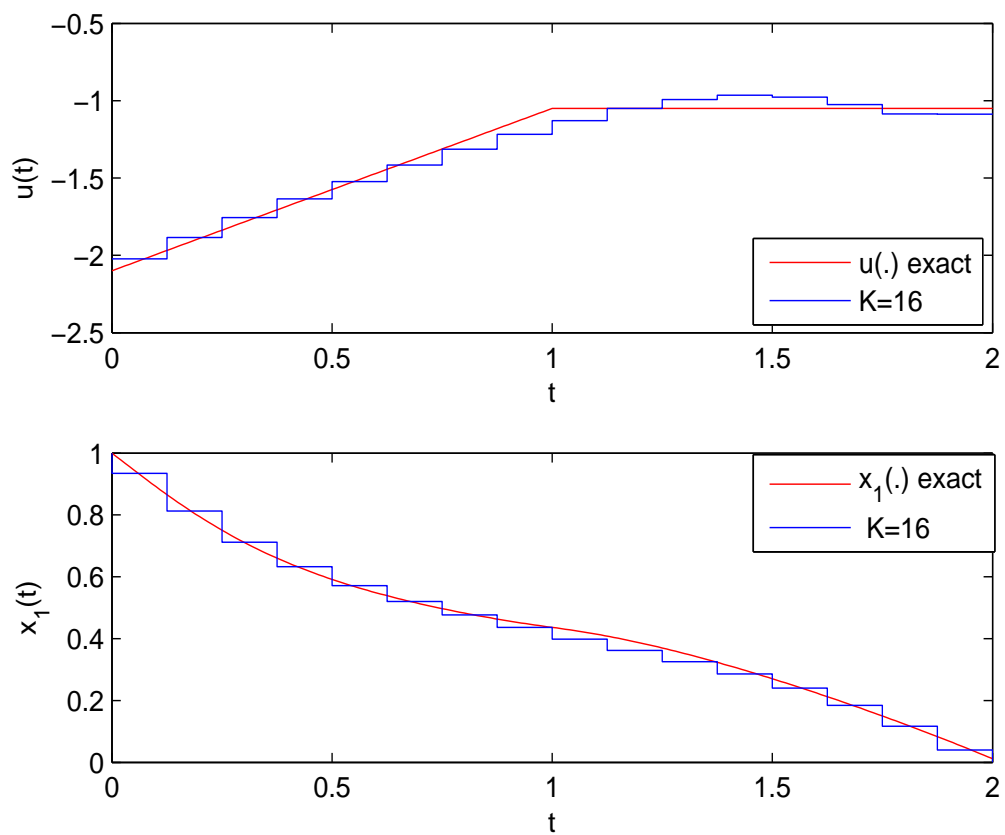
$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 1. \quad (57.2)$$

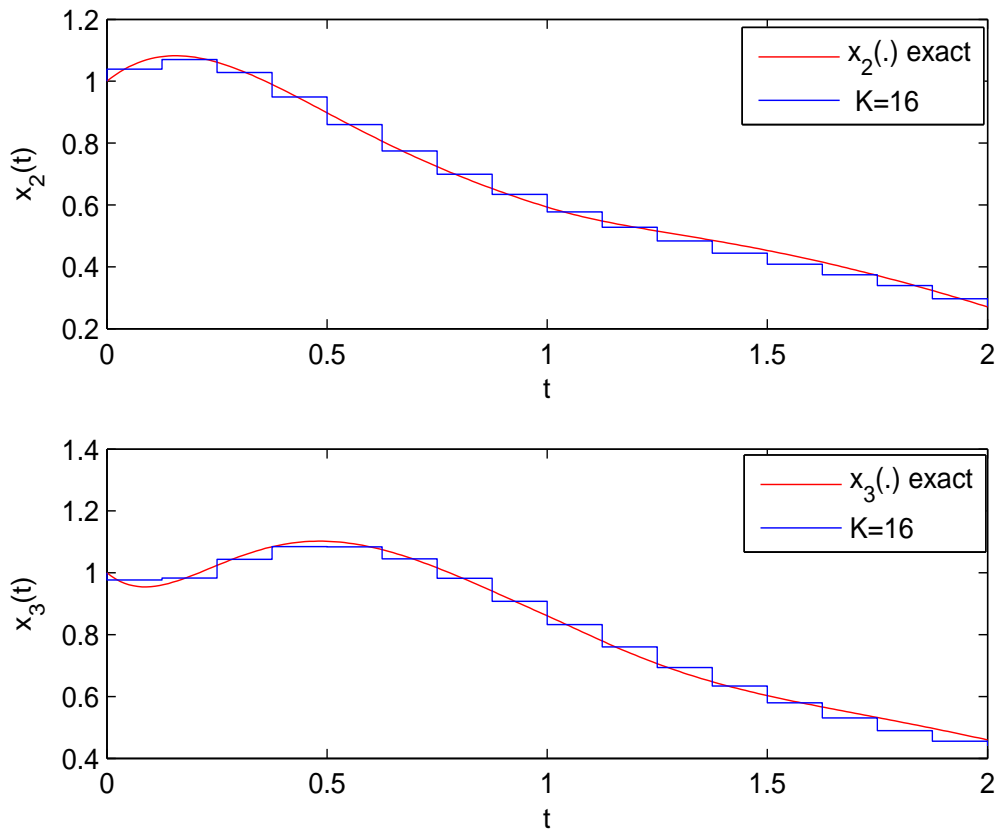
هدف از حل این مساله بدست آوردن کنترل بهینه $u(t)$ بطوریکه تابع هدف (۵۵.۲) را تحت قيود (۵۶.۲) و شرایط

اولیه (۵۷.۲) مینیمم کند. با حل عددی با روش موجک هار برای $K = 16$ مقدار مینیمم J ، $1/84730$ بدست

می‌آید. نمودار کنترل بهینه و مسیرهای بدست‌آمده با روش موجک هار و نمودار جواب دقیق متناظرشان بترتیب

در شکل‌های ۸.۲ و ۹.۲ رسم شده است.

شکل ۸.۲: نمودار کنترل $u(t)$ و مسیر $x_1(t)$ برای مثال ۴.۷.۲



شکل ۹.۲: نمودار مسیرهای $x_2(t)$ و $x_3(t)$ برای مثال ۱.۷.۲

فصل ۳

حل عددی مسائل کنترل بهینه تاخیری افق نامتناهی

۱.۳ مقدمه

در این فصل مسائل کنترل بهینه افق نامتناهی^۱ با قيودی به شکل معادلات دیفرانسیل تاخیری^۲ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا مساله را با استفاده از تقریب پاده مرتبه اول به یک مساله بدون تاخیر تبدیل می‌کنیم و سپس با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب^۳ و تبدیل بازه $[0, \infty)$ به $(0, 1)$ مساله را به یک مساله افق متناهی^۴ تبدیل می‌کنیم و در انتها با استفاده از روش تقریبی موجک هار جواب عددی مساله را بدست می‌آوریم.

۲.۳ معرفی مساله

اخیرا وجود و ساختار جواب مسائل کنترل بهینه روی بازه‌های نامتناهی و بازه‌های خیلی بزرگ مورد مطالعه قرار گرفته است [۲۴]-[۳۸]. این مسائل در مهندسی [۳۶، ۳۷]، مدل‌های رشد اقتصادی^۵ [۳۸] و [۳۹]-[۴۲]، مدل‌های فیزیک حالت جامد^۶ [۴۳، ۴۴] و نظریه ترمودینامیکی^۷ مواد [۴۵]-[۴۷] استفاده می‌شوند. مساله کنترل بهینه افق نامتناهی تاخیری بصورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{minimize } J = \int_0^{\infty} g(t, x(t), x(t - \sigma), u(t)) dt \quad (1.3)$$

subject to

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \sigma), u(t)), \quad (2.3)$$

$$x(t) = \xi(t), \quad -\sigma \leq t \leq 0, \quad (3.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^1, \quad (4.3)$$

^۱Infinite-Horizon Optimal Control Problems

^۲Time-delayed Differential Equations

^۳Variation of Variable

^۴Finite-Horizon Problem

^۵Models of Economic Growth

^۶Models of Solid-state Physics

^۷Theory of Thermodynamical

که در آن به ازای هر t , $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in Q \subseteq \mathbb{R}^n$ و $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ بترتیب متغیرهای حالت و کنترل هستند و Q و U یک مجموعه نا تهی و فشرده در \mathbb{R}^n و \mathbb{R}^m هستند. (۱) نشان دهنده مشتق نسبت به متغیر t و σ تاخیر زمانی مربوط به متغیر حالت x است.

۳.۳ تبدیل مساله تاخیری به یک مساله بدون تاخیر

قبل از این که مساله (۱.۳)–(۴.۳) را به مساله افق متناهی تبدیل کنیم مساله را به یک مساله بدون تاخیر تبدیل می کنیم. مانند فصل قبل برای حذف متغیر حالت دارای تاخیر زمانی رابطه زیر را تعریف می کنیم:

$$y(t) \triangleq x(t - \sigma),$$

که در آن $y \in B \subseteq \mathbb{R}^n$ و B مجموعه ای نا تهی و فشرده است. با توجه به روابط (۷.۲)–(۱۶.۲) و (۲.۳) داریم:

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial}{\partial \sigma}[x(t) - y(t)] - \dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial \sigma}[x(t) - y(t)] - f(t, x(t), y(t), u(t)).$$

در نتیجه مساله کنترل بهینه تاخیری افق نامتناهی (۱.۳)–(۴.۳) به مساله زیر تبدیل می شود:

$$\text{minimize } J = \int_0^{\infty} g(t, x(t), y(t), u(t)) dt$$

subject to

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y(t), u(t)), \quad (۵.۳)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial}{\partial \sigma}[x(t) - y(t)] - f(t, x(t), y(t), u(t)), \quad (۶.۳)$$

با شرایط اولیه

$$x(0) = \xi(0), \quad y(0) = \xi(-\sigma), \quad (۷.۳)$$

و شرایط نهایی

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^1. \quad (۸.۳)$$

برای بهتر شدن تقریب همان‌طور که در فصل دوم بیان شد تاخیر زمانی σ را به $\frac{\sigma}{4}$ تقسیم می‌کنیم و تعریف می‌کنیم:

$$y(t) \triangleq x\left(t - \frac{\sigma}{4}\right), \quad (۹.۳)$$

$$z(t) \triangleq y\left(t - \frac{\sigma}{4}\right) = x(t - \sigma). \quad (۱۰.۳)$$

که در آن $D \subseteq \mathbb{R}^n$ و $z \in D$ مجموعه‌ای ناتهی و فشرده است. با استفاده از روابط (۲۳.۲) و (۲۴.۲) داریم:

$$\dot{y}(t) = \frac{4}{\sigma}[x(t) - y(t)] - f(t, x(t), z(t), u(t)), \quad (۱۱.۳)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{4}{\sigma}[2y(t) - z(t) - x(t)] + f(t, x(t), z(t), u(t)).$$

بنابراین مساله کنترل بهینه (۱.۳)-(۴.۳) به مساله زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{minimize } J = \int_0^{\infty} g(t, x(t), z(t), u(t)) dt \quad (۱۲.۳)$$

subject to

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), z(t), u(t)), \quad (۱۳.۳)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{4}{\sigma}[x(t) - y(t)] - f(t, x(t), z(t), u(t)), \quad (۱۴.۳)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{4}{\sigma}[2y(t) - z(t) - x(t)] + f(t, x(t), z(t), u(t)), \quad (۱۵.۳)$$

با شرایط اولیه

$$x(0) = \xi(0), \quad y(0) = \xi\left(-\frac{\sigma}{4}\right), \quad z(0) = \xi(-\sigma), \quad (۱۶.۳)$$

و شرایط نهایی

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z^1. \quad (۱۷.۳)$$

فرض کنیم تابع برداری $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ و تابع اسکالر $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$ توابع انتگرال پذیر لبگ باشند که بطور پیوسته در t مشتق پذیرند. رده‌ای از کنترل‌های شدنی برای سیستم (۱۳.۳)–(۱۵.۳) مجموعه توابع اندازه پذیر لبگ $U \rightarrow [0, \infty) : u$ هستند. مسیر شدنی سیستم (۱۳.۳)–(۱۵.۳) است که متناظر با کنترل شدنی u است، جوابی بصورت (x, y, z) از معادلات دیفرانسیل (۱۳.۳)–(۱۵.۳) است که روی بازه $[0, \infty)$ تعریف می‌شود و در شرایط اولیه و نهایی (۱۶.۳) و (۱۷.۳) صدق می‌کند و مقادیر خود را از مجموعه $Q \times B \times D$ می‌گیرد. فرض می‌کنیم متناظر با هر کنترل شدنی u مسیر شدنی (x, y, z) وجود دارد و انتگرال در رابطه (۱۲.۳) بطور مطلق همگراست. یک چهارتایی شدنی $(\bar{x}(\cdot), \bar{y}(\cdot), \bar{z}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ یک جواب بهینه از مساله (۱۲.۳)–(۱۷.۳) است اگر برای هر چهارتایی شدنی $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), u(\cdot))$ در نامساوی زیر صدق کند:

$$\int_0^{\infty} g(t, x(t), z(t), u(t)) dt \geq \int_0^{\infty} g(t, \bar{x}(t), \bar{z}(t), \bar{u}(t)) dt.$$

۴.۳ تبدیل مساله افق نامتناهی به مساله افق متناهی

چون می‌خواهیم مساله را با روش عددی موجه‌تر حل کنیم و همان‌طور که در فصل اول توضیح دادیم توابع هار روی بازه $[0, 1)$ تعریف می‌شوند، بنابراین برای تبدیل بازه $[0, \infty)$ به $[0, 1)$ از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم [۴۸]:

$$t = \tan\left(\frac{\pi}{4}\tau\right), \quad t \in [0, \infty), \quad \tau \in [0, 1). \quad (18.3)$$

بنابراین مساله کنترل بهینه افق نامتناهی (۱۲.۳)–(۱۷.۳) به مساله افق متناهی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{minimize } J &= \int_{[0,1)} \frac{\pi}{4} g\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\tau\right), x\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\tau\right)\right), z\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\tau\right)\right), u\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\tau\right)\right)\right) \\ &\quad \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\tau\right) d\tau \end{aligned} \quad (19.3)$$

subject to

$$\dot{x}\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right) = f\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), x\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), z\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), u\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right)\right), \quad \tau \in [0, 1), \quad (20.3)$$

$$\dot{y}\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right) = \frac{\Psi}{\sigma}[x\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right) - y\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right)] - f\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), x\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), z\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), u\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right)\right), \quad \tau \in [0, 1), \quad (21.3)$$

$$\dot{z}\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right) = \frac{\Psi}{\sigma}[\Psi y\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right) - z\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right) - x\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right)] + f\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), x\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), z\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), u\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right)\right), \quad \tau \in [0, 1), \quad (22.3)$$

$$x(0) = x^0 = \xi(0), \quad y(0) = y^0 = \xi\left(-\frac{\sigma}{\Psi}\right), \quad z(0) = z^0 = \xi(-\sigma), \quad (23.3)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 1^-} x\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right) = x^1, \quad \tau \in [0, 1), \quad (24.3)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 1^-} y\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right) = y^1, \quad \tau \in [0, 1), \quad (25.3)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 1^-} z\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right) = z^1, \quad \tau \in [0, 1), \quad (26.3)$$

که در آن

$$\left(x\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), y\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), z\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), u\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right)\right)$$

$$\in Q \times B \times D \times U, \quad \tau \in [0, 1).$$

فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} \mathcal{X}(\tau) = x\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), \\ \mathcal{Y}(\tau) = y\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), \\ \mathcal{Z}(\tau) = z\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), \\ \mathcal{U}(\tau) = u\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right). \end{cases} \quad (27.3)$$

بنابراین با استفاده از روابط (۲۷.۳) مساله کنترل بهینه (۱۹.۳)-(۲۶.۳) به مساله زیر تبدیل می‌شود [۴۹]:

$$\text{minimize } J = \int_{[0,1)} \frac{\pi}{\Psi} g\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), \mathcal{X}(\tau), \mathcal{Z}(\tau), \mathcal{U}(\tau)\right) \sec^2\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right) d\tau \quad (28.3)$$

subject to

$$\dot{\mathcal{X}}(\tau) = \frac{\pi}{\Psi} \left(f \left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), \mathcal{X}(\tau), \mathcal{Z}(\tau), \mathcal{U}(\tau) \right) \right) \sec^{\Psi}\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), \quad \tau \in [0, 1), \quad (29.3)$$

$$\dot{\mathcal{Y}}(\tau) = \frac{\pi}{\Psi} \left(\frac{\Upsilon}{\sigma} [\mathcal{X}(\tau) - \mathcal{Y}(\tau)] - f \left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), \mathcal{X}(\tau), \mathcal{Z}(\tau), \mathcal{U}(\tau) \right) \right) \sec^{\Psi}\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), \quad \tau \in [0, 1), \quad (30.3)$$

$$\dot{\mathcal{Z}}(\tau) = \frac{\pi}{\Psi} \left(\frac{\Upsilon}{\sigma} [\Upsilon \mathcal{Y}(\tau) - \mathcal{Z}(\tau) - \mathcal{X}(\tau)] + f \left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), \mathcal{X}(\tau), \mathcal{Z}(\tau), \mathcal{U}(\tau) \right) \right) \sec^{\Psi}\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), \quad \tau \in [0, 1), \quad (31.3)$$

$$\mathcal{X}(0) = \mathcal{X}^0 = x^0, \quad \mathcal{Y}(0) = \mathcal{Y}^0 = y^0, \quad \mathcal{Z}(0) = \mathcal{Z}^0 = z^0,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 1^-} \mathcal{X}(\tau) = \mathcal{X}^1 = x^1, \quad \tau \in [0, 1),$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 1^-} \mathcal{Y}(\tau) = \mathcal{Y}^1 = y^1, \quad \tau \in [0, 1),$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 1^-} \mathcal{Z}(\tau) = \mathcal{Z}^1 = z^1, \quad \tau \in [0, 1),$$

که در آن

$$(\mathcal{X}(\tau), \mathcal{Y}(\tau), \mathcal{Z}(\tau), \mathcal{U}(\tau)) \in Q \times B \times D \times U, \quad \tau \in [0, 1).$$

۵.۳ روش گسسته‌سازی هار برای تقریب توابع در مسائل کنترل بهینه غیر خطی

برای حل عددی مسائل مانند فصل قبل جواب پیوسته مساله که شامل متغیرهای کنترل و حالت است بصورت جملاتی از سری هار و ماتریس عملگر انتگرال‌گیری آن که در معادلات دیفرانسیل صدق می‌کنند نمایش داده می‌شوند. بازه استاندارد در آن بازه $[0, 1)$ است با نقاط کلوکیشن که آن‌ها را با τ_l نمایش می‌دهیم:

$$\tau_l = \frac{l - 0.5}{K}, \quad l = 1, 2, \dots, K,$$

بطوریکه K تعداد نقاطی است که در گسسته‌سازی استفاده می‌شود و بصورت توانی از ۲ است. همچنین نقاط کلوکیشن روی بازه $[0, 1)$ با فاصله زمانی مساوی $\frac{1}{K}$ قرار دارند. مشتق متغیرهای حالت $\dot{\mathcal{X}}(\tau)$, $\dot{\mathcal{Y}}(\tau)$, $\dot{\mathcal{Z}}(\tau)$ و

متغیر کنترل $v(\tau)$ با نقطه کالوکیشن بصورت زیر تقریب زده می‌شوند:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{X}}(\tau) \approx C_{\mathcal{X}}^T \Phi(\tau), \\ \dot{\mathcal{Y}}(\tau) \approx C_{\mathcal{Y}}^T \Phi(\tau), \\ \dot{\mathcal{Z}}(\tau) \approx C_{\mathcal{Z}}^T \Phi(\tau), \\ v(\tau) \approx C_v^T \Phi(\tau). \end{cases}$$

بطوریکه

$$\begin{cases} C_{\mathcal{X}}^T = [C_{\mathcal{X}1}, C_{\mathcal{X}2}, \dots, C_{\mathcal{X}K}], & C_{\mathcal{Y}}^T = [C_{\mathcal{Y}1}, C_{\mathcal{Y}2}, \dots, C_{\mathcal{Y}K}], \\ C_{\mathcal{Z}}^T = [C_{\mathcal{Z}1}, C_{\mathcal{Z}2}, \dots, C_{\mathcal{Z}K}], & C_v^T = [C_{v1}, C_{v2}, \dots, C_{vK}]. \end{cases}$$

با استفاده از ماتریس عملگر انتگرال‌گیری P تعریف شده در (۱۳.۱)، متغیرهای حالت $\mathcal{X}(\tau)$ ، $\mathcal{Y}(\tau)$ و $\mathcal{Z}(\tau)$

بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} \mathcal{X}(\tau) = \int_0^\tau \dot{\mathcal{X}}(\tau') d\tau' + \mathcal{X}_0 = \int_0^\tau C_{\mathcal{X}}^T \Phi(\tau') d\tau' + \mathcal{X}_0 = C_{\mathcal{X}}^T P \Phi(\tau) + \mathcal{X}_0, \\ \mathcal{Y}(\tau) = \int_0^\tau \dot{\mathcal{Y}}(\tau') d\tau' + \mathcal{Y}_0 = \int_0^\tau C_{\mathcal{Y}}^T \Phi(\tau') d\tau' + \mathcal{Y}_0 = C_{\mathcal{Y}}^T P \Phi(\tau) + \mathcal{Y}_0, \\ \mathcal{Z}(\tau) = \int_0^\tau \dot{\mathcal{Z}}(\tau') d\tau' + \mathcal{Z}_0 = \int_0^\tau C_{\mathcal{Z}}^T \Phi(\tau') d\tau' + \mathcal{Z}_0 = C_{\mathcal{Z}}^T P \Phi(\tau) + \mathcal{Z}_0. \end{cases} \quad (۳۲.۳)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{X}}(\tau_l) \approx C_{\mathcal{X}}^T \Phi(\tau_l), \\ \dot{\mathcal{Y}}(\tau_l) \approx C_{\mathcal{Y}}^T \Phi(\tau_l), \\ \dot{\mathcal{Z}}(\tau_l) \approx C_{\mathcal{Z}}^T \Phi(\tau_l), \\ v(\tau_l) \approx C_v^T \Phi(\tau_l), \\ \mathcal{X}(\tau_l) = C_{\mathcal{X}}^T P \Phi(\tau_l) + \mathcal{X}_0, \\ \mathcal{Y}(\tau_l) = C_{\mathcal{Y}}^T P \Phi(\tau_l) + \mathcal{Y}_0, \\ \mathcal{Z}(\tau_l) = C_{\mathcal{Z}}^T P \Phi(\tau_l) + \mathcal{Z}_0. \end{cases} \quad (۳۳.۳)$$

با توجه به توضیحاتی که در بالا بیان شد، می‌توان متغیرها را در هر نقطه کالوکیشن با استفاده از ضرب بردار ضرایب

و ستون متناظر با آن در ماتریس‌ها تقریب بزنیم.

۶.۳ برنامه‌ریزی غیرخطی

هنگامی که از روش کالوکیشن در مسائل کنترل بهینه استفاده می‌کنیم متغیرهای برنامه‌ریزی غیرخطی را که شامل

بردار ضرایب مجهول مشتق متغیرهای حالت و متغیر کنترل است را بصورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$x = [C_{\mathcal{X}1}, C_{\mathcal{X}2}, \dots, C_{\mathcal{X}K}, C_{\mathcal{Y}1}, C_{\mathcal{Y}2}, \dots, C_{\mathcal{Y}K}, C_{\mathcal{Z}1}, C_{\mathcal{Z}2}, \dots, C_{\mathcal{Z}K}, C_{v1}, C_{v2}, \dots, C_{vK}]. \quad (۳۴.۳)$$

تابع هدف رابطه (۲۸.۳) با تابع هدف زیر جایگزین می‌شود:

$$J = \int_{[\tau_0, \tau_1)} \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} g \left(\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\tau\right), (C_{\mathcal{X}}^T P\Phi(\tau) + \mathcal{X}_0), (C_{\mathcal{Z}}^T P\Phi(\tau) + \mathcal{Z}_0), C_v^T \Phi(\tau) \right) \sec^{\gamma} \left(\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\tau \right) d\tau.$$

چون توابع هار در هر زیر بازه دارای مقادیر ثابت هستند بنابراین تابع هدف را می‌توانیم بصورت زیر بنویسیم:

$$J = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}K} \sum_{l=1}^K g \left(\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\tau_l\right), (C_{\mathcal{X}}^T P\Phi(\tau_l) + \mathcal{X}_0), (C_{\mathcal{Z}}^T P\Phi(\tau_l) + \mathcal{Z}_0), C_v^T \Phi(\tau_l) \right) \sec^{\gamma} \left(\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\tau_l \right).$$

با جایگزینی $\dot{\mathcal{X}}, \dot{\mathcal{Y}}, \dot{\mathcal{Z}}, v, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ و \mathcal{Z} در روابط (۲۹.۳)-(۳۱.۳) با مقادیر داده شده در رابطه (۳۳.۳) داریم:

$$C_{\mathcal{X}}^T \Phi(\tau_l) = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} \left(f \left(\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\tau_l\right), (C_{\mathcal{X}}^T P\Phi(\tau_l) + \mathcal{X}_0), (C_{\mathcal{Z}}^T P\Phi(\tau_l) + \mathcal{Z}_0), C_v^T \Phi(\tau_l) \right) \right) \sec^{\gamma} \left(\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\tau_l \right), \quad (۳۵.۳)$$

$$C_{\mathcal{Y}}^T \Phi(\tau_l) = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\mathcal{F}}{\sigma} \left[(C_{\mathcal{X}}^T P\Phi(\tau_l) + \mathcal{X}_0) - (C_{\mathcal{Y}}^T P\Phi(\tau_l) + \mathcal{Y}_0) \right] - f \left(\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\tau_l\right), (C_{\mathcal{X}}^T P\Phi(\tau_l) + \mathcal{X}_0), (C_{\mathcal{Z}}^T P\Phi(\tau_l) + \mathcal{Z}_0), C_v^T \Phi(\tau_l) \right) \right) \sec^{\gamma} \left(\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\tau_l \right), \quad (۳۶.۳)$$

$$C_{\mathcal{Z}}^T \Phi(\tau_l) = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\mathcal{F}}{\sigma} \left[\gamma (C_{\mathcal{Y}}^T P\Phi(\tau_l) + \mathcal{Y}_0) - (C_{\mathcal{X}}^T P\Phi(\tau_l) + \mathcal{X}_0) - (C_{\mathcal{Z}}^T P\Phi(\tau_l) + \mathcal{Z}_0) \right] + f \left(\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\tau_l\right), (C_{\mathcal{X}}^T P\Phi(\tau_l) + \mathcal{X}_0), (C_{\mathcal{Z}}^T P\Phi(\tau_l) + \mathcal{Z}_0), C_v^T \Phi(\tau_l) \right) \right) \sec^{\gamma} \left(\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\tau_l \right), \quad (۳۷.۳)$$

بنابراین قیدهای مساله به قیدهای یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شوند. متغیرهای حالت در زمان اولیه

و نهایی بصورت زیر تقریب زده می‌شوند:

$$\begin{cases} \mathcal{X}_0 = \mathcal{X}(\tau_1) - \frac{\dot{\mathcal{X}}(\tau_1)}{\sqrt{\gamma}K}, & \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}(\tau_K) + \frac{\dot{\mathcal{X}}(\tau_K)}{\sqrt{\gamma}K}, \\ \mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y}(\tau_1) - \frac{\dot{\mathcal{Y}}(\tau_1)}{\sqrt{\gamma}K}, & \mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}(\tau_K) + \frac{\dot{\mathcal{Y}}(\tau_K)}{\sqrt{\gamma}K}, \\ \mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}(\tau_1) - \frac{\dot{\mathcal{Z}}(\tau_1)}{\sqrt{\gamma}K}, & \mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}(\tau_K) + \frac{\dot{\mathcal{Z}}(\tau_K)}{\sqrt{\gamma}K}. \end{cases}$$

با این روش، مساله کنترل بهینه افق نامتناهی به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود که با استفاده از نرم‌افزار لینگو ۱۱ قابل حل است.

۷.۳ مثال‌های عددی

در این جا کارایی موجک هار برای حل مسائل کنترل بهینه تاخیری افق نامتناهی با دو مثال عددی نشان داده شده است.

مثال ۱.۷.۳. مساله کنترل بهینه تاخیری افق نامتناهی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{minimize } J = \int_0^{\infty} \{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u(t)^2\} dt \quad (38.3)$$

subject to

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - u(t), \\ \dot{x}_2(t) = -1/5 x_2(t) + 0/5 x_1(t-1) + 2u(t), \end{cases} \quad (39.3)$$

بطوریکه:

$$x_1(t) = e^{(t+1)}, \quad x_2(t) = 0, \quad t \in [-1, 0],$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_1^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2^* = 0.$$

همان‌طور که در قیود این مساله ملاحظه می‌کنیم زمان تاخیر مربوط به متغیر حالت x_1 است. برای حذف این تاخیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_3(t) \triangleq x_1(t - \frac{1}{5}), \\ x_4(t) \triangleq x_2(t - \frac{1}{5}) = x_1(t - 1). \end{cases} \quad (40.3)$$

با استفاده از روش گفته شده در بخش ۳.۳ و روابط بالا دستگاه معادلات دیفرانسیل تاخیری (۳۹.۳) به دستگاه زیر

تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - u(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\lambda_1 x_2(t) + \lambda_2 x_3(t) + \lambda_3 u(t), \\ \dot{x}_3(t) = \lambda_4 x_1(t) - \lambda_5 x_3(t) + u(t), \\ \dot{x}_4(t) = -\lambda_6 x_1(t) + \lambda_7 x_3(t) - \lambda_8 x_4(t) - u(t). \end{cases} \quad (41.3)$$

با شرایط اولیه

$$x_1(0) = e, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = e^{\frac{1}{\lambda_1}}, \quad x_4(0) = 1, \quad (42.3)$$

و شرایط نهایی

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_1^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = x_3^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x_4(t) = x_4^* = 0. \quad (43.3)$$

مساله کنترل بهینه افق نامتناهی (۴۱.۳)-(۴۳.۳) با تابع هدف (۳۸.۳) با استفاده از تغییر متغیر (۱۸.۳) به مساله

زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{minimize } J = \int_{[0,1]} \frac{\pi}{\lambda_1} (y_1^*(\tau) + y_2^*(\tau) + v^*(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{\lambda_1} \tau\right) d\tau \quad (44.3)$$

subject to

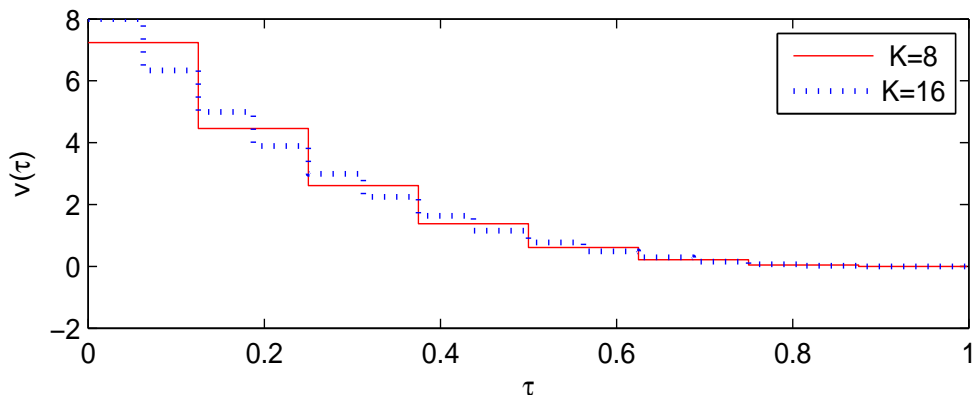
$$\begin{cases} \dot{y}_1(\tau) = \frac{\pi}{\lambda_1} (y_1(\tau) - v(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{\lambda_1} \tau\right), \\ \dot{y}_2(\tau) = \frac{\pi}{\lambda_1} (-\lambda_1 y_2(\tau) + \lambda_2 y_3(\tau) + \lambda_3 v(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{\lambda_1} \tau\right), \\ \dot{y}_3(\tau) = \frac{\pi}{\lambda_1} (\lambda_4 y_1(\tau) - \lambda_5 y_3(\tau) + v(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{\lambda_1} \tau\right), \\ \dot{y}_4(\tau) = \frac{\pi}{\lambda_1} (-\lambda_6 y_1(\tau) + \lambda_7 y_3(\tau) - \lambda_8 y_4(\tau) - v(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{\lambda_1} \tau\right), \end{cases} \quad (45.3)$$

با شرایط اولیه

$$y_1(0) = e, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = e^{\frac{1}{\lambda_1}}, \quad y_4(0) = 1, \quad (46.3)$$

و شرایط نهایی

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y_1(\tau) = y_1^* &= \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y_2(\tau) = y_2^* = \\ \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y_3(\tau) = y_3^* &= \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y_4(\tau) = y_4^* = 0. \end{aligned} \quad (47.3)$$

شکل ۱.۳: نمودار کنترل $v(\tau)$ برای مثال ۱.۷.۳

مساله کنترل بهینه افق نامتناهی (۴۴.۳)-(۴۷.۳) را با روش عددی موجک هار حل می‌کنیم. مقدار بهینه J برای $K = 8, 16$ به ترتیب برابر $35/22325$ و $35/22147$ بدست می‌آید. نمودار کنترل بهینه $v(\tau)$ و مسیرهای متناظر $y_1(\tau), y_2(\tau), y_3(\tau)$ و $y_4(\tau)$ در شکل‌های ۱.۳-۳.۳ رسم شده است.

مثال ۲.۷.۳. مساله کنترل بهینه مینیمم‌سازی افق نامتناهی تحت قيودی بصورت دستگاه معادلات دیفرانسیل تاخیری

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0/5 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2/25 \end{bmatrix} u(t), \quad (48.3)$$

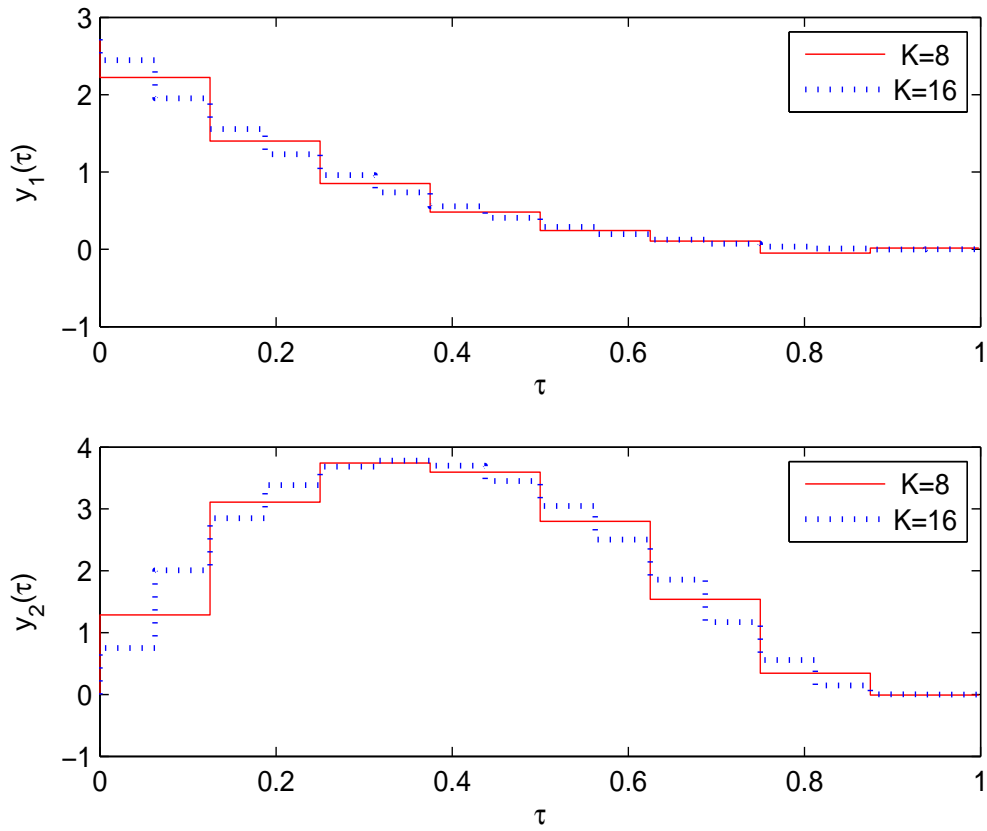
و تابع هدف زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{minimize } J = \int_0^{\infty} \{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u(t)^2\} dt \quad (49.3)$$

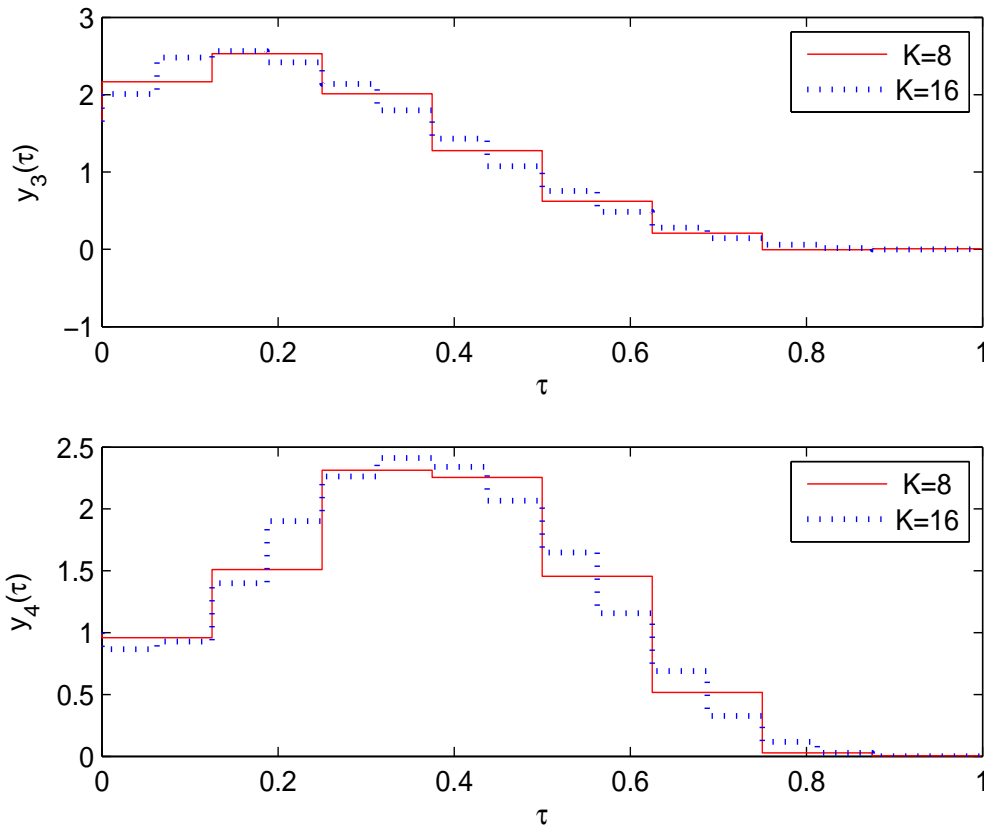
بطوریکه

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_1^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2^* = 0.$$



شکل ۲.۳: نمودار مسیرهای $y_1(\tau)$ و $y_2(\tau)$ برای مثال ۱.۷.۳



شکل ۳.۳: نمودار مسیرهای $y_3(\tau)$ و $y_4(\tau)$ برای مثال ۱.۷.۳

زمان تاخیر $\sigma = 1$ مربوط به متغیر حالت x_1 و x_2 است. با استفاده از روش گفته شده در بخش ۳.۳ داریم:

$$\begin{cases} x_3(t) \triangleq x_1(t - \frac{1}{\gamma}), \\ x_4(t) \triangleq x_2(t - \frac{1}{\gamma}) = x_1(t - 1), \\ x_5(t) \triangleq x_2(t - \frac{1}{\gamma}), \\ x_6(t) \triangleq x_5(t - \frac{1}{\gamma}) = x_2(t - 1). \end{cases}$$

بنابراین دستگاه معادلات دیفرانسیل تاخیری (۴۸.۳) به دستگاه زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - u(t), \\ \dot{x}_2(t) = -1/5 x_2(t) + x_4(t) + 0/5 x_6(t) + 2/25 u(t), \\ \dot{x}_3(t) = 3x_1(t) - 4x_3(t) + u(t), \\ \dot{x}_4(t) = -3x_1(t) + 8x_3(t) - 4x_4(t) - u(t), \\ \dot{x}_5(t) = 5/5 x_2(t) - x_4(t) - 4x_5(t) - 0/5 x_6(t) - 2/25 u(t), \\ \dot{x}_6(t) = 8x_5(t) - 3/5 x_6(t) - 5/5 x_2(t) + x_4(t) + 2/25 u(t), \end{cases} \quad (50.3)$$

با شرایط اولیه

$$x_1(0) = e, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = e^{\frac{1}{\gamma}}, \quad x_4(0) = 1, \quad x_5(0) = 0, \quad x_6(0) = 0, \quad (51.3)$$

و شرایط نهایی

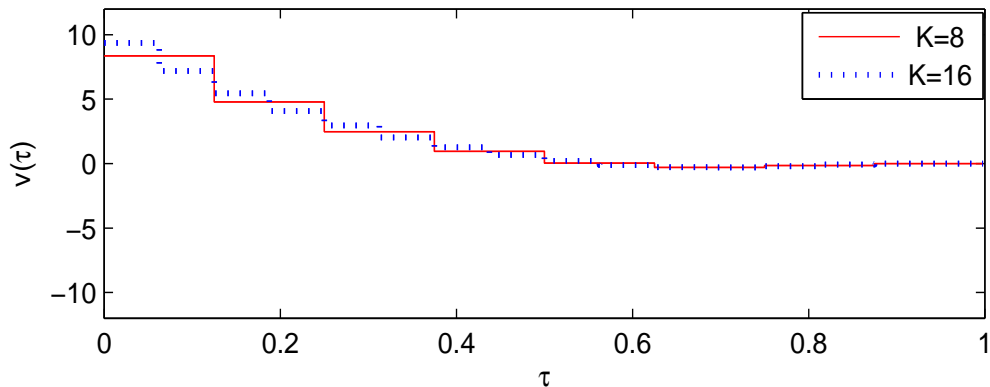
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_1^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = x_3^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x_4(t) = x_4^* = \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_5(t) = x_5^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x_6(t) = x_6^* = 0. \end{aligned} \quad (52.3)$$

با استفاده از تغییر متغیر (۱۸.۳) مساله کنترل بهینه افق نامتناهی (۴۹.۳)-(۵۲.۳) به مساله زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{minimize } J = \int_{[0,1)} \frac{\pi}{\gamma} (y_1^2(\tau) + y_2^2(\tau) + v^2(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{\gamma}\tau\right) d\tau \quad (53.3)$$

subject to

$$\begin{cases} \dot{y}_1(\tau) = \frac{\pi}{\gamma} (y_1(\tau) - v(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{\gamma}\tau\right), \\ \dot{y}_2(\tau) = \frac{\pi}{\gamma} (-1/5 y_2(\tau) + y_4(\tau) + 0/5 y_6(\tau) + 2/25 v(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{\gamma}\tau\right), \\ \dot{y}_3(\tau) = \frac{\pi}{\gamma} (3y_1(\tau) - 4y_3(\tau) + v(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{\gamma}\tau\right), \\ \dot{y}_4(\tau) = \frac{\pi}{\gamma} (8y_3(\tau) - 4y_4(\tau) - 3y_1(\tau) - v(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{\gamma}\tau\right), \\ \dot{y}_5(\tau) = \frac{\pi}{\gamma} (5/5 y_2(\tau) - y_4(\tau) - 4y_5(\tau) - 0/5 y_6(\tau) - 2/25 v(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{\gamma}\tau\right), \\ \dot{y}_6(\tau) = \frac{\pi}{\gamma} (8y_5(\tau) - 3/5 y_6(\tau) - 5/5 y_2(\tau) + y_4(\tau) + 2/25 v(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{\gamma}\tau\right), \end{cases} \quad (54.3)$$



شکل ۴.۳: نمودار کنترل $v(\tau)$ برای مثال ۲.۷.۳

با شرایط اولیه

$$y_1(0) = e, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = e^{\frac{1}{2}}, \quad y_4(0) = 1, \quad y_5(0) = 0, \quad y_6(0) = 0, \quad (55.3)$$

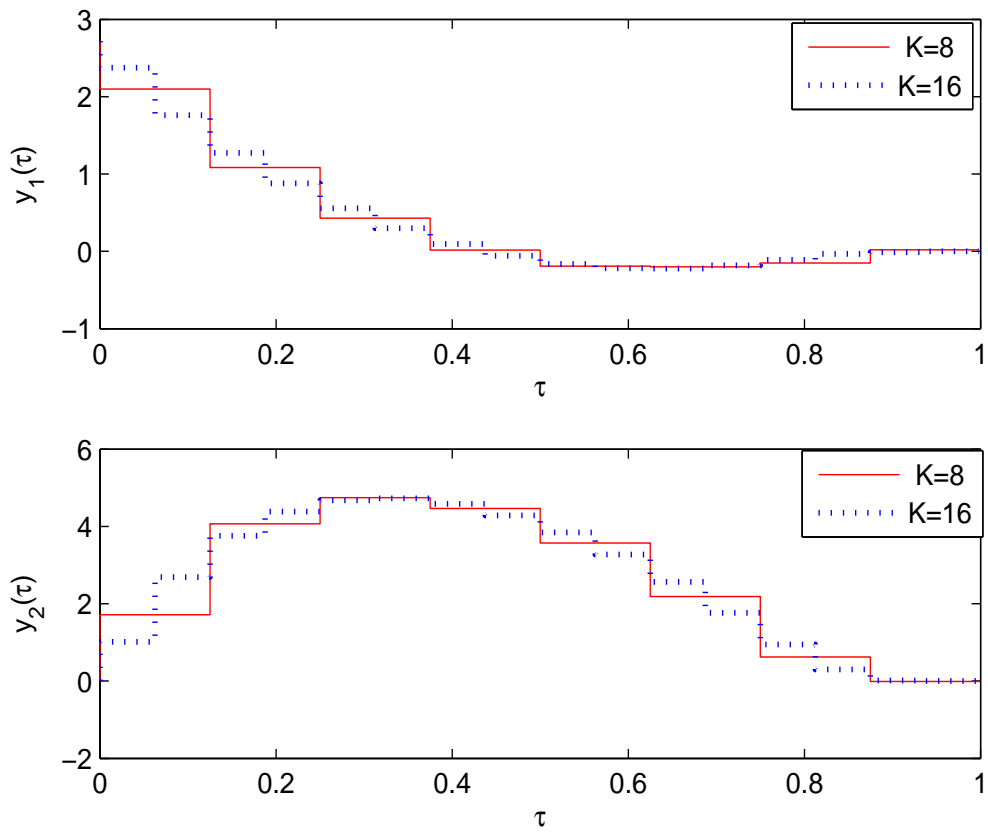
و شرایط نهایی

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y_1(\tau) = y_1^1 = \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y_2(\tau) = y_2^1 = \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y_3(\tau) = y_3^1 = \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y_4(\tau) = y_4^1 = \\ \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y_5(\tau) = y_5^1 = \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y_6(\tau) = y_6^1 = 0. \end{aligned} \quad (56.3)$$

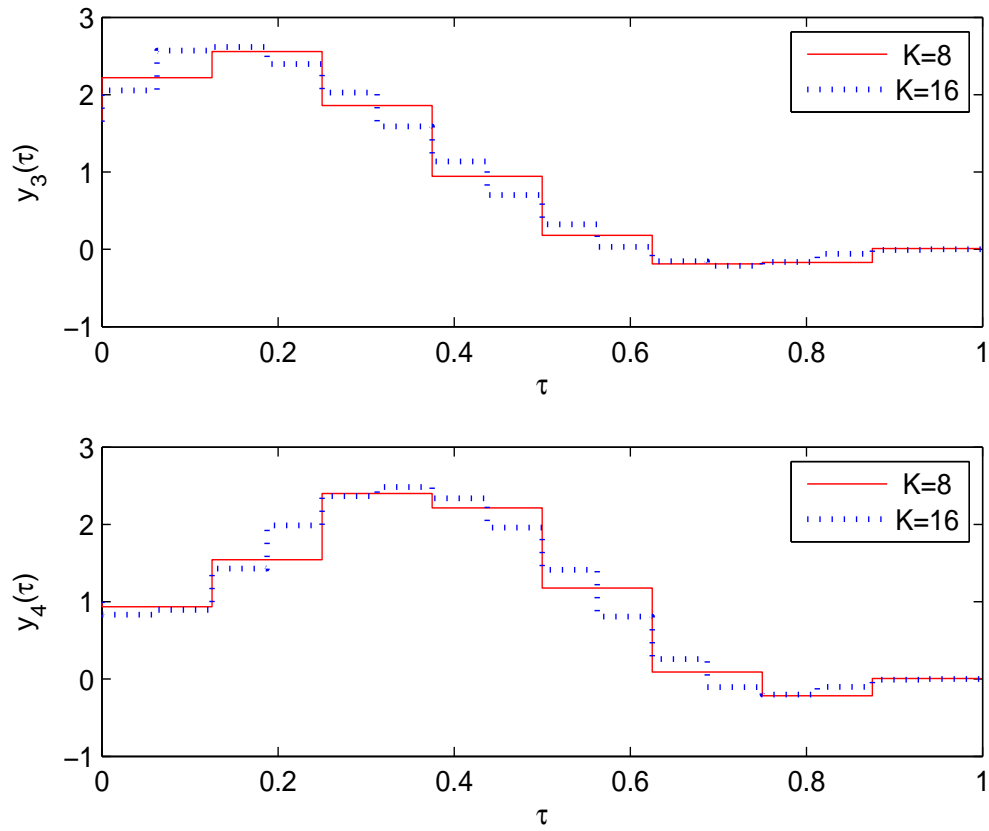
مساله کنترل بهینه افق متناهی (۵۳.۳)-(۵۶.۳) را با روش عددی موجک هار حل می‌کنیم. مقدار بهینه J برای

$K = 8, 16$ به ترتیب برابر $49/60033$ و $49/61009$ بدست می‌آید. نمودار کنترل بهینه $v(\tau)$ و مسیره‌های

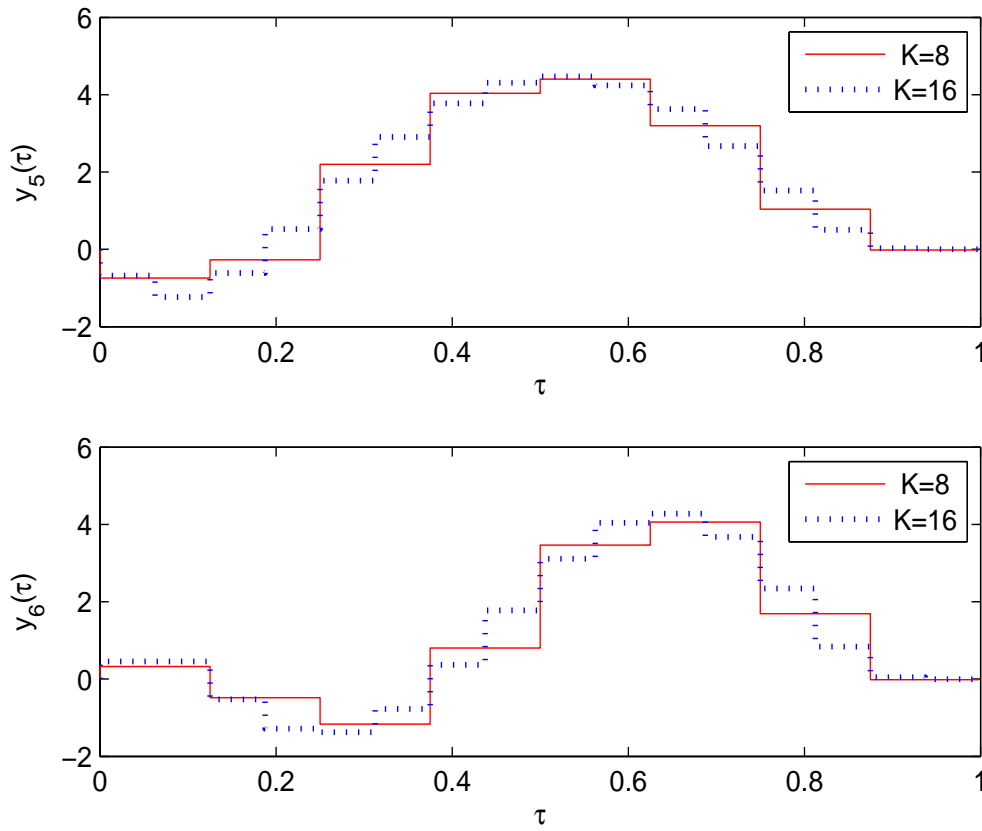
متناظر $y_1(\tau), y_2(\tau), y_3(\tau), y_4(\tau), y_5(\tau)$ و $y_6(\tau)$ در شکل‌های ۴.۳-۷.۳ رسم شده است.



شکل ۵.۳: نمودار مسیرهای $y_1(\tau)$ و $y_2(\tau)$ برای مثال ۲.۷.۳



شکل ۶.۳: نمودار مسیرهای $y_3(\tau)$ و $y_4(\tau)$ برای مثال ۲.۷.۳



شکل ۷.۳: نمودار مسیرهای $y_5(\tau)$ و $y_6(\tau)$ برای مثال ۲.۷.۳

فصل ۴

حل عددی مسائل کنترل بهینه غیرخطی با
اختلال برونی و کنترل تاخیری

۱.۴ مقدمه

در دو فصل قبل به حل مسائلی پرداختیم که زمان تاخیر مربوط به متغیر حالت بود. در این فصل به حل مسائلی می‌پردازیم که زمان تاخیر مربوط به متغیر کنترل $u(t)$ است، این مسائل دارای اختلال برونی^۱ هستند و تابع هدف آن از درجه دوم^۲ است. ابتدا با استفاده از تبدیل آرتستاین^۳ سیستم غیرخطی تاخیری^۴ را به یک سیستم بدون تاخیر^۵ تبدیل می‌کنیم. در انتها با استفاده از روش موجک هار به حل عددی آن می‌پردازیم.

۲.۴ معرفی مساله

تاخیر زمانی و مبحث غیرخطی در سیستم‌های کنترل شدنی مانند سیستم‌های کنترلی مشبک^۶، فرایندهای شیمیایی^۷ و سیستم‌های تبادل گرما^۸ رایج هستند. مسائل کنترل بهینه تاخیر زمانی غیرخطی بطور جدی مورد بررسی قرار گرفتند و برای مسائل کنترل بهینه با تاخیر در کنترل و تاخیر در حالت نتایج زیادی بدست آمده است [۵۰]-[۵۲]. سیستم غیرخطی بصورت زیر را در نظر می‌گیریم [۵۳]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \sigma) + Dv(t) + f(x), & t > 0, \\ x(0) = x_0, \quad u(t) = 0, & -\sigma \leq t < 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

که در آن $u \in \mathbb{R}^r, x \in \mathbb{R}^n$ بترتیب متغیرهای حالت و کنترل هستند. x بردار اولیه حالت و $\sigma > 0$ زمان تاخیر مربوط به متغیر کنترل است که مقدارش معلوم است. $f(x)$ عبارت غیرخطی A, B, D ماتریس‌های ثابت با بعدهای مناسب هستند. همچنین (A, B) کنترل پذیرند. اختلال برونی بصورت سیستم برونی^۹ زیر است:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = Gw(t), \\ v(t) = Fw(t), \end{cases} \quad (2.4)$$

^۱External disturbances

^۲Quadratic

^۳Artstein transformation

^۴Nonlinear Time-delay System

^۵Non-delay

^۶Networked Control Systems

^۷Chemical Processes

^۸Heat Exchange Systems.

^۹Exo-system

بطوریکه $w(t) \in \mathbb{R}^r$ و G و F ماتریس‌های ثابت از بعدهای مناسب هستند. تابع هدف این مساله از درجه دوم و بصورت زیر است:

$$\text{minimize } J = \frac{1}{2} [x^T(t_f)Q_f x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt], \quad (3.4)$$

که در آن زمان نهایی t_f معلوم است. ماتریس‌های $Q_f, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $R \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ثابت و نیمه‌معین مثبت هستند.

۳.۴ تبدیل مساله تاخیری به یک مساله بدون تاخیر

برای تبدیل سیستم کنترل بهینه تاخیری (۱.۴) به یک سیستم بدون تاخیر تعریف می‌کنیم:

$$z(t) = x(t) + \int_{t-\sigma}^t e^{A(t-h)} B_1 u(h) dh \quad (4.4)$$

که در آن

$$B_1 = e^{-A\sigma} B, \quad (5.4)$$

برای $k(x) = \int_{s(x)}^{n(x)} k(t, x) dt$ داریم:

$$\dot{k}(x) = \dot{n}(x)k(n(x), x) - \dot{s}(x)k(s(x), x) + \int_{s(x)}^{n(x)} k_x(t, x) dt, \quad (6.4)$$

که (\cdot) مشتق نسبت به متغیر x را نشان می‌دهد.

با استفاده از (۴.۴) و (۶.۴) سیستم (۱.۴) به سیستم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + B_1 u(t) + Dv(t) + f(x), \\ z(\circ) = z_\circ = x_\circ. \end{cases}$$

بنابراین مساله کنترل بهینه (۱.۴)-(۳.۴) به مساله زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{minimize } J = \frac{1}{2} [z^T(t_f)Q_f z(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t)] dt] \quad (7.4)$$

subject to

$$\dot{z}(t) = Az(t) + B_1 u(t) + Dv(t) + f(x), \quad (۸.۴)$$

$$\dot{w}(t) = Gw(t),$$

$$v(t) = Fw(t),$$

با شرط اولیه

$$z(0) = z_0.$$

۱.۳.۴ روش گسسته‌سازی هار

در این بخش مانند مسائل فصل دوم و سوم چگونگی تقریب توابع با موجک هار و ماتریس عملگر انتگرال‌گیری متناظر با آن را توضیح خواهیم داد. مشتق متغیر حالت $\dot{z}(\tau)$ و متغیر کنترل $u(\tau)$ و متغیرهای سیستم برونی

(۲.۴) را با موجک هار با K نقطه کالوکیشن بصورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\begin{cases} \dot{z}(\tau) \approx C_z^T \Phi(\tau), \\ u(\tau) \approx C_u^T \Phi(\tau), \\ \dot{w}(\tau) \approx C_w^T \Phi(\tau), \\ v(\tau) \approx C_v^T \Phi(\tau), \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{cases} C_z^T = [C_{z1}, C_{z2}, \dots, C_{zK}], \\ C_w^T = [C_{w1}, C_{w2}, \dots, C_{wK}], \\ C_u^T = [C_{u1}, C_{u2}, \dots, C_{uK}], \\ C_v^T = [C_{v1}, C_{v2}, \dots, C_{vK}]. \end{cases}$$

با استفاده از ماتریس عملگر انتگرال‌گیری P تعریف شده در (۱۳.۱) متغیر حالت و $w(\tau)$ بصورت زیر بیان می‌شود:

$$z(\tau) = \int_0^\tau \dot{z}(\tau') d\tau' + z_0 = \int_0^\tau C_z^T \Phi(\tau') d\tau' + z_0 = C_z^T P \Phi(\tau) + z_0,$$

$$w(\tau) = \int_0^\tau \dot{w}(\tau') d\tau' + w_0 = \int_0^\tau C_w^T \Phi(\tau') d\tau' + w_0 = C_w^T P \Phi(\tau) + w_0,$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \dot{z}(\tau_l) = C_z^T \Phi(\tau_l), \\ u(\tau_l) = C_u^T \Phi(\tau_l), \\ z(\tau_l) = C_z^T P \Phi(\tau_l) + z_*, \\ \dot{w}(\tau_l) = C_w^T \Phi(\tau_l), \\ v(\tau_l) = C_v^T \Phi(\tau_l), \\ w(\tau_l) = C_w^T P \Phi(\tau_l) + w_*, \end{cases}$$

که در آن $l = 1, 2, \dots, K$ است. با استفاده از توضیح بالا می‌توانیم متغیرها را در نقاط کالوکیشن با استفاده از ضرب بردار ضرایب در بردار ستونی متناظر آن در ماتریس‌ها تقریب بزنیم.

۲.۳.۴ برنامه‌ریزی غیرخطی

هنگامی که از روش کالوکیشن‌ها در مسائل کنترل بهینه استفاده می‌کنیم، متغیرهای برنامه‌ریزی غیرخطی مجموعه‌ای شامل بردار ضرایب مجهول مشتق متغیرهای حالت، متغیرکنترل و متغیرهای مربوط به سیستم برونی است؛

$$x = [C_{z1}, C_{z2}, \dots, C_{zK}, C_{w1}, C_{w2}, \dots, C_{wK}, C_{u1}, C_{u2}, \dots, C_{uK}, C_{v1}, C_{v2}, \dots, C_{vK}].$$

بنابراین تابع هدف (۷.۴) بصورت زیر است:

$$\text{minimize } J = \frac{1}{\gamma} [z^T(\tau_K) Q_f z(\tau_K) + (t_f - t_*) \int_0^1 [(C_z^T P \Phi(\tau) + z_*)^T Q (C_z^T P \Phi(\tau) + z_*) + (C_u^T \Phi(\tau))^T R (C_u^T \Phi(\tau))] d\tau],$$

از آن‌جا که توابع‌ها در هر زیر بازه دارای مقادیر ثابت هستند می‌توانیم تابع هدف مساله را بصورت زیر بنویسیم:

$$\text{minimize } J = \frac{1}{\gamma} [z^T(\tau_K) Q_f z(\tau_K) + \frac{t_f - t_*}{K} \sum_{l=1}^K [(C_z^T \Phi(\tau_l) + z_*)^T Q (C_z^T P \Phi(\tau_l) + z_*) + (C_u^T \Phi(\tau_l))^T R (C_u^T \Phi(\tau_l))]],$$

و قید (۸.۴) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$C_z^T \Phi(\tau_l) = A(C_z^T P \Phi(\tau_l) + z_*) + B_1(C_u^T \Phi(\tau_l)) + D(C_v^T \Phi(\tau_l)) + f((C_z^T P \Phi(\tau_l) + z_*) - \frac{\sigma}{K} \sum_{l=1}^K e^{A(-\sigma\tau_l + \sigma)} B_1 C_u^T \Phi(\tau_l)),$$

سیستم برونی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} C_w^T \Phi(\tau_l) = G(C_w^T P \Phi(\tau_l) + w_*), \\ C_v^T \Phi(\tau_l) = F(C_w^T P \Phi(\tau_l) + w_*), \end{cases}$$

مجموعه نقاط کالوکیشن شامل زمان اولیه و نهایی t_0 و t_f نیستند، بنابراین متغیرهای حالت و $w(t)$ مربوط به

آن‌ها را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} z_* &= z(\tau_1) - \frac{\dot{z}(\tau_1)}{2K}, & z_1 &= z(\tau_K) + \frac{\dot{z}(\tau_K)}{2K}, \\ w_* &= w(\tau_1) - \frac{\dot{w}(\tau_1)}{2K}, & w_1 &= w(\tau_K) + \frac{\dot{w}(\tau_K)}{2K}. \end{aligned}$$

در این روش مساله کنترل بهینه به مساله بهینه‌سازی غیرخطی تبدیل می‌شود، که با استفاده از نرم‌افزار لینگو ۱۱

قابل حل است.

۴.۴ مثال عددی

در این جا کارایی موجک هار برای حل مسائل کنترل بهینه غیر خطی با اختلال برونی و کنترل بهینه تاخیری با

یک مثال عددی نشان داده شده است.

مثال ۱.۴.۴. سیستم‌های غیرخطی تاخیری (۱.۴) با اختلال برونی (۲.۴) و تابع هدف (۳.۴) با مقادیر زیر را در

نظر می‌گیریم [۵۳]:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ F &= [1 \quad 0], \quad w(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}, \\ R &= 1. \end{aligned}$$

زمان اولیه، نهایی و تاخیر به ترتیب برابر 0 ، 20 و 10 است. بنابراین مساله کنترل بهینه زیر را داریم:

$$\text{minimize } J = \frac{1}{2} \int_0^{20} \{x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)\} dt$$

subject to

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_2(t) + v(t) + x_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) + u(t - 10) + x_1^2(t) - x_2^2(t), \\ \dot{w}_1(t) = -0.4w_1(t) + 0.5w_2(t), \\ \dot{w}_2(t) = -0.1w_1(t), \\ v(t) = w_1(t), \end{cases}$$

با شرایط اولیه

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad w_1(0) = 1, \quad w_2(0) = 0.$$

با استفاده از (۵.۴) ماتریس B_1 بدست می‌آید. بنابراین داریم:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.7488 \\ 1.2214 \end{bmatrix}.$$

با استفاده از تبدیل آرتستاین (۴.۴) داریم:

$$\text{minimize } J = \frac{1}{2} \int_0^{20} \{z_1^2(t) + z_2^2(t) + u^2(t)\} dt \quad (9.4)$$

subject to

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0.7488 \\ 1.2214 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t) + f(z(t) -$$

$$\int_{t-0.1}^t e^{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}(t-h)} \begin{bmatrix} 0.7488 \\ 1.2214 \end{bmatrix} u(h) dh) \quad (10.4)$$

$$\dot{w}(t) = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix} w(t), \quad (11.4)$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} w(t), \quad (12.4)$$

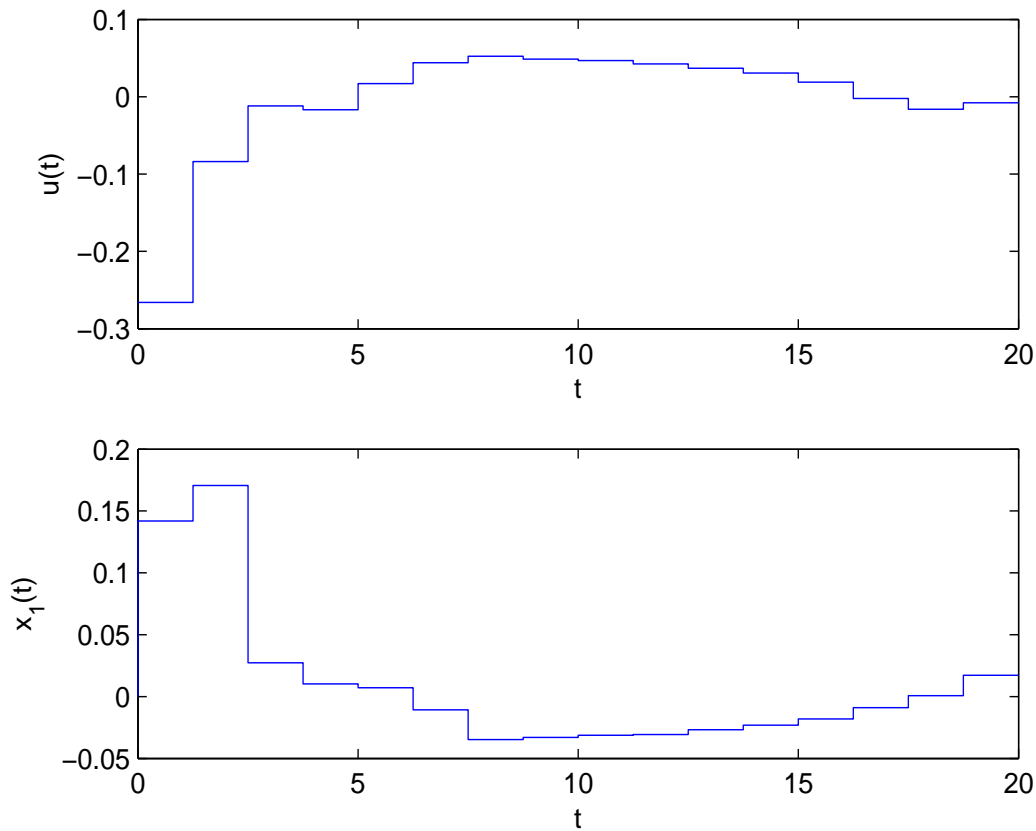
با شرایط اولیه

$$z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 0, \quad w_1(0) = 1, \quad w_2(0) = 0. \quad (13.4)$$

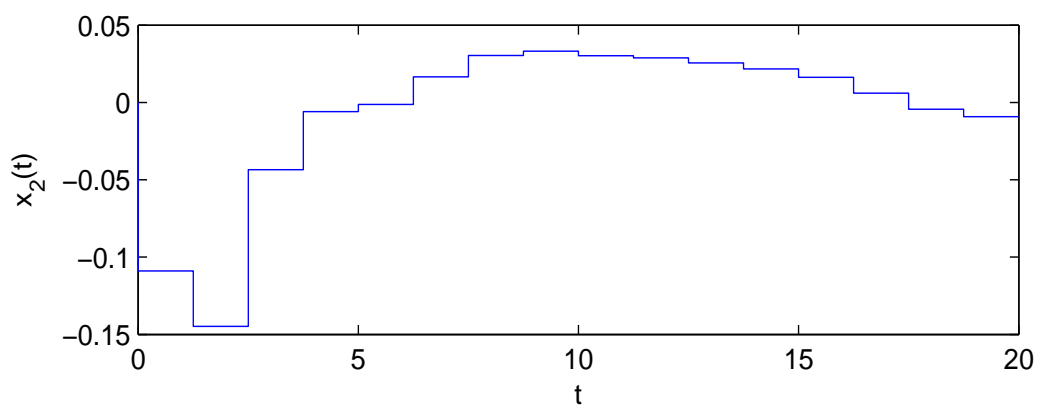
حالا مساله کنترل بهینه بدون تاخیر زمانی با تابع هدف درجه دوم (۹.۴) تحت قیود غیرخطی و شرایط اولیه (۱۳.۴)

را با روش عددی موجک هار حل می‌کنیم. مقدار بهینه J برای $K = 16$ برابر 1175.042 بدست می‌آید.

نمودار کنترل بهینه $u(t)$ و مسیرهای متناظر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در شکل‌های ۱.۴-۲.۴ رسم شده است.



شکل ۱.۴: نمودار کنترل $u(t)$ و مسیر $x_1(t)$ برای مثال ۱.۴.۴

شکل ۲.۴: نمودار مسیر $x_2(t)$ برای مثال ۱.۴.۴

فصل ۵

حل عددی مساله کنترل بهینه تاخیری سیستم
ایمنی بدن

۱.۵ مقدمه

در این فصل ابتدا روند عامل بیماری‌زا^۱ بصورت یک مساله کنترل بهینه تاخیری با چندین متغیر حالت مدل‌بندی می‌شود. همچنین این سیستم واکنش ایمنی طبیعی بدن^۲ را توصیف می‌کند و شامل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل تاخیری است. بطوریکه تاخیر ثابت و برای هر بیماری دارای مقدار معینی است. با استفاده از روش تقریب پاده مساله را به یک مساله بدون تاخیر تبدیل می‌کنیم و در انتها با استفاده از روش تقریبی موجک هار به حل آن می‌پردازیم.

۲.۵ معرفی مساله

هنگامی که سیستم ایمنی توسط یک عامل بیماری‌زا تهدید شود، شروع به تولید سلول‌های پلاسمایی^۳ می‌کند. این سلول‌ها برای تولید پادتن^۴های خاص هر بیماری که می‌توانند عامل بیماری‌زا را از بین ببرند، مورد نیاز است. این مبحث را می‌توانیم بصورت یک مساله کنترل بهینه تاخیری که شامل معادلات دیفرانسیل معمولی و تاخیری است مدل‌بندی کنیم. زمان تاخیر σ به این علت مورد توجه قرار می‌گیرد که هنگامی که سیستم ایمنی توسط عامل بیماری‌زا مورد حمله قرار می‌گیرد به زمان σ نیاز است تا دسته‌ای از سلول‌های پلاسمایی را که تولید پادتن می‌کنند ایجاد شود. این زمان تاخیر σ به بیماری وابسته است. اگر غلظت ویروس در زمان عفونت کم باشد سیستم ایمنی قادر به از بین بردن ویروس و ترمیم خودش است. در زمانی که غلظت ویروس زیاد است به دارو مورد نیاز است تا روند درمان را پشتیبانی کند و از مرگ بیمار جلوگیری کند. انتخاب داروی بهینه با حل مساله کنترل بهینه

صورت می‌گیرد. مدل سیستم ایمنی طبیعی بدن بصورت زیر است [۵۴، ۵۵]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (\alpha_{11} - \alpha_{12}x_3(t))x_1(t) + \beta_1u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = A(x_4(t))\alpha_{21}x_1(t - \sigma)x_3(t - \sigma) - \alpha_{22}(x_2(t) - \hat{x}_2) + \beta_2u_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = \alpha_{31}x_2(t) - (\alpha_{32} + \alpha_{33}x_1(t))x_3(t) + \beta_3u_3(t), \\ \dot{x}_4(t) = \alpha_{41}x_1(t) - \alpha_{42}x_4 + \beta_4u_4(t), \end{cases} \quad (1.5)$$

^۱Pathogen,

^۲Innate Immune Response

^۳Plasma Cells

^۴Antibody

که در آن متغیرهای حالت بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} x_1(t) & \text{غلظت عامل بیماری‌زا:} \\ x_2(t) & \text{غلظت سلول‌های پلاسمایی:} \\ x_3(t) & \text{غلظت پادتن‌های خاص هر بیماری:} \\ x_4(t) & \text{میزان سلامتی عضو آسیب‌دیده:} \end{cases} \begin{cases} x_4 = 0, & \text{عضو به‌طور کامل سالم است} \\ x_4 = 1, & \text{عضو به‌طور کامل مرده است} \end{cases}$$

\hat{x}_2 نشان‌دهنده غلظت سلول‌های پلاسمایی در حالت تعادل است. همچنین داریم:

$$A(x_4(t)) = -\frac{1}{\tau} \tanh(\epsilon x_4(t) - \gamma / \delta) + \sigma / \delta,$$

و شرایط اولیه بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{0}}, \quad -\sigma \leq t < 0. \quad (2.5)$$

و مقادیر $\beta_4, \beta_3, \beta_2, \beta_1, \alpha_{42}, \alpha_{41}, \alpha_{33}, \alpha_{32}, \alpha_{31}, \alpha_{22}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{11}$ هدف ما پیدا

کردن کنترل‌های بهینه $u_i, i = 1, \dots, 4$ است بطوریکه تابع هدف درجه دوم زیر را مینیمم کند:

$$\begin{aligned} F(x, u) &= p_1 x_1(T)^2 + p_4 x_4(T)^2 \\ &+ \int_0^T \{q_1 x_1(t)^2 + q_4 x_4(t)^2 + r_1 u_1(t)^2 + r_2 u_2(t)^2 + r_3 u_3(t)^2 + r_4 u_4(t)^2\} dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

که در آن

$$\begin{cases} u_1(t) & \text{کشنده عامل بیماری‌زا:} \\ u_2(t) & \text{تقویت سلول‌های پلاسما:} \\ u_3(t) & \text{تقویت پادتن:} \\ u_4(t) & \text{عامل شفا‌دهنده عضو:} \end{cases}$$

زمان نهایی T و وزن‌های $p_1, p_4, q_1, q_4, r_i, i = 1, \dots, 4$ دارای مقادیر معلوم هستند. در این مساله $\mathbf{u} \geq \bar{\mathbf{0}}$

است. $\bar{\mathbf{0}} \geq \mathbf{x}$ ، زیرا غلظت‌ها نمی‌توانند کمتر از صفر باشند و $x_4 \leq 1$ ، زیرا حداکثر مقدار برای x_4 ، زمانی است

که عضو بطور کامل از بین رفته است.

۳.۵ تبدیل مساله تاخیری به یک مساله بدون تاخیر

برای حذف متغیر حالت دارای تاخیر زمانی مانند مسائل فصل دوم روابط زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_1(t) \triangleq x_1(t - \sigma), \\ y_2(t) \triangleq x_2(t - \sigma), \end{cases}$$

و با توجه به روابط (۷.۲)–(۱۶.۲) داریم:

$$\dot{y}_1(t) = \frac{\gamma}{\sigma}[x_1(t) - y_1(t)] - \dot{x}_1(t),$$

$$\dot{y}_2(t) = \frac{\gamma}{\sigma}[x_2(t) - y_2(t)] - \dot{x}_2(t).$$

بنابراین مساله کنترل بهینه (۱.۵) با تابع هدف (۳.۵) و شرایط اولیه (۲.۵) به مساله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{minimize } F(x, u) &= p_1 x_1(T)^\gamma + p_f x_f(T)^\gamma \\ &+ \int_0^T q_1 x_1(t)^\gamma + q_f x_f(t)^\gamma + r_1 u_1(t)^\gamma + r_2 u_2(t)^\gamma + r_3 u_3(t)^\gamma + r_f u_f(t)^\gamma dt \end{aligned}$$

subject to

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (\alpha_{11} - \alpha_{12} x_2(t)) x_1(t) + \beta_1 u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = A(x_f) \alpha_{21} y_1(t) y_2(t) - \alpha_{22} (x_2(t) - \hat{x}_2) + \beta_2 u_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = \alpha_{31} x_2(t) - (\alpha_{32} + \alpha_{33} x_1(t)) x_3(t) + \beta_3 u_3(t), \\ \dot{x}_f(t) = \alpha_{f1} x_1(t) - \alpha_{f2} x_f(t) + \beta_f u_f(t), \\ \dot{y}_1(t) = \frac{\gamma}{\sigma} [x_1(t) - y_1(t)] - ((\alpha_{11} - \alpha_{12} x_2(t)) x_1(t) + \beta_1 u_1(t)), \\ \dot{y}_2(t) = \frac{\gamma}{\sigma} [x_2(t) - y_2(t)] - (\alpha_{31} x_2(t) - (\alpha_{32} + \alpha_{33} x_1(t)) x_3(t) + \beta_3 u_3(t)), \\ \mathbf{x}(t) \geq \bar{0}, \quad \mathbf{u}(t) \geq \bar{0}, \quad \mathbf{y}(t) \geq \bar{0}, \quad x_f(t) \leq 1. \end{cases}$$

با شرایط اولیه

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{y}(0) = \bar{0}.$$

برای تقریب بهتر همان طور که در فصل دوم بیان شد تاخیر زمانی σ را به $\frac{\sigma}{\nu}$ تقسیم می‌کنیم و تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}y_1(t) &\triangleq x_1\left(t - \frac{\sigma}{\nu}\right), \\y_2(t) &\triangleq x_2\left(t - \frac{\sigma}{\nu}\right), \\z_1(t) &\triangleq y_1\left(t - \frac{\sigma}{\nu}\right) = x_1(t - \sigma), \\z_2(t) &\triangleq y_2\left(t - \frac{\sigma}{\nu}\right) = x_2(t - \sigma).\end{aligned}$$

با استفاده از روابط (۲۳.۲)–(۲۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= \frac{\nu}{\sigma}[x_1(t) - y_1(t)] - \dot{x}_1(t), \\ \dot{y}_2(t) &= \frac{\nu}{\sigma}[x_2(t) - y_2(t)] - \dot{x}_2(t), \\ \dot{z}_1(t) &= \frac{\nu}{\sigma}[\nu y_1(t) - z_1(t) - x_1(t)] + \dot{x}_1(t), \\ \dot{z}_2(t) &= \frac{\nu}{\sigma}[\nu y_2(t) - z_2(t) - x_2(t)] + \dot{x}_2(t).\end{aligned}$$

بنابراین مساله کنترل بهینه تحت قیود (۱.۵) با تابع هدف (۳.۵) و شرایط اولیه (۲.۵) به مساله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}\text{minimize } & F(x, u) = p_1 x_1(T)^2 + p_2 x_2(T)^2 \\ & + \int_0^T q_1 x_1(t)^2 + q_2 x_2(t)^2 + r_1 u_1(t)^2 + r_2 u_2(t)^2 + r_3 u_3(t)^2 + r_4 u_4(t)^2 dt \\ \text{subject to } & \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = (\alpha_{11} - \alpha_{12}x_3(t))x_1(t) + \beta_1 u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = A(x_f)\alpha_{21}z_1(t)z_2(t) - \alpha_{22}(x_2(t) - \hat{x}_2) + \beta_2 u_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = \alpha_{31}x_2(t) - (\alpha_{32} + \alpha_{33}x_1(t))x_3(t) + \beta_3 u_3(t), \\ \dot{x}_f(t) = \alpha_{f1}x_1(t) - \alpha_{f2}x_f(t) + \beta_f u_f(t), \\ \dot{y}_1(t) = \frac{f}{\sigma}[x_1(t) - y_1(t)] - ((\alpha_{11} - \alpha_{12}x_3(t))x_1(t) + \beta_1 u_1(t)), \\ \dot{y}_2(t) = \frac{f}{\sigma}[x_3(t) - y_2(t)] - (\alpha_{31}x_2(t) - (\alpha_{32} + \alpha_{33}x_1(t))x_3(t) + \beta_3 u_3(t)), \\ \dot{z}_1(t) = \frac{f}{\sigma}[2y_1(t) - x_1(t) - z_1(t)] + ((\alpha_{11} - \alpha_{12}x_3(t))x_1(t) + \beta_1 u_1(t)), \\ \dot{z}_2(t) = \frac{f}{\sigma}[2y_2(t) - x_3(t) - z_2(t)] + (\alpha_{31}x_2(t) - (\alpha_{32} + \alpha_{33}x_1(t))x_3(t) + \beta_3 u_3(t)), \\ \mathbf{x}(t) \geq \bar{0}, \quad \mathbf{u}(t) \geq \bar{0}, \quad \mathbf{y}(t) \geq \bar{0}, \quad \mathbf{z}(t) \geq \bar{0}, \quad x_f(t) \leq 1. \end{array} \right. \quad (۴.۵)$$

با شرایط اولیه

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{y}(0) = \bar{0}, \quad \mathbf{z}(0) = \bar{0}. \quad (۵.۵)$$

برای تقریب توابع با موجک هار مانند مسائل فصل دوم مشتق متغیرهای حالت و کنترل را در نقاط کالوکیشن تقریب می‌زنیم سپس با استفاده از ماتریس عملگر انتگرال‌گیری P تعریف شده در (۱۳.۱) متغیرهای حالت را بدست می‌آوریم و در قیود مساله و تابع هدف جایگزین می‌کنیم. همچنین برای متغیرهای حالت در زمان اولیه و نهایی از روابط (۳۷.۲) استفاده می‌کنیم. بنابراین مساله کنترل بهینه به مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود که با استفاده از نرم‌افزار لینگو ۱۱ قابل حل است.

۴.۵ مثال عددی

در این جا کارایی موجک هار برای حل مسائل کنترل بهینه تاخیری سیستم ایمنی بدن با یک مثال عددی نشان داده شده است.

مثال ۱.۴.۵. مساله را برای حالتی در نظر می‌گیریم که [۵۵]:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = 1, p_f = 1, q_1 = 1, q_f = 1, r_i = 1, i = 1, 2, 3, 4, \\ \alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = 1, \alpha_{21} = 3, \alpha_{22} = -1, \\ \alpha_{32} = 1/5, \alpha_{33} = 0/5, \alpha_{f1} = 1, \alpha_{f2} = 1, \\ \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \beta_3 = 1, \beta_f = -1, \\ T = 10, \sigma = 2/5, \hat{x}_2 = 2, \\ x_1(0) = 3, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1/3, x_f(0) = 0, x_1(t) = 0, x_3(t) = 0, \quad -2/5 \leq t < 0. \end{array} \right.$$

مقادیر داده شده در بالا را در دستگاه (۱.۵) و تابع هدف (۳.۵) جایگذاری می کنیم. برای حذف متغیر حالت دارای تاخیر از روش گفته شده در بخش ۳.۳ استفاده می کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \text{minimize } F(x, u) = & x_1(10)^2 + x_4(10)^2 + \\ & \int_0^{10} \{x_1(t)^2 + x_4(t)^2 + u_1(t)^2 + u_2(t)^2 + u_3(t)^2 + u_4(t)^2\} dt \end{aligned} \quad (6.5)$$

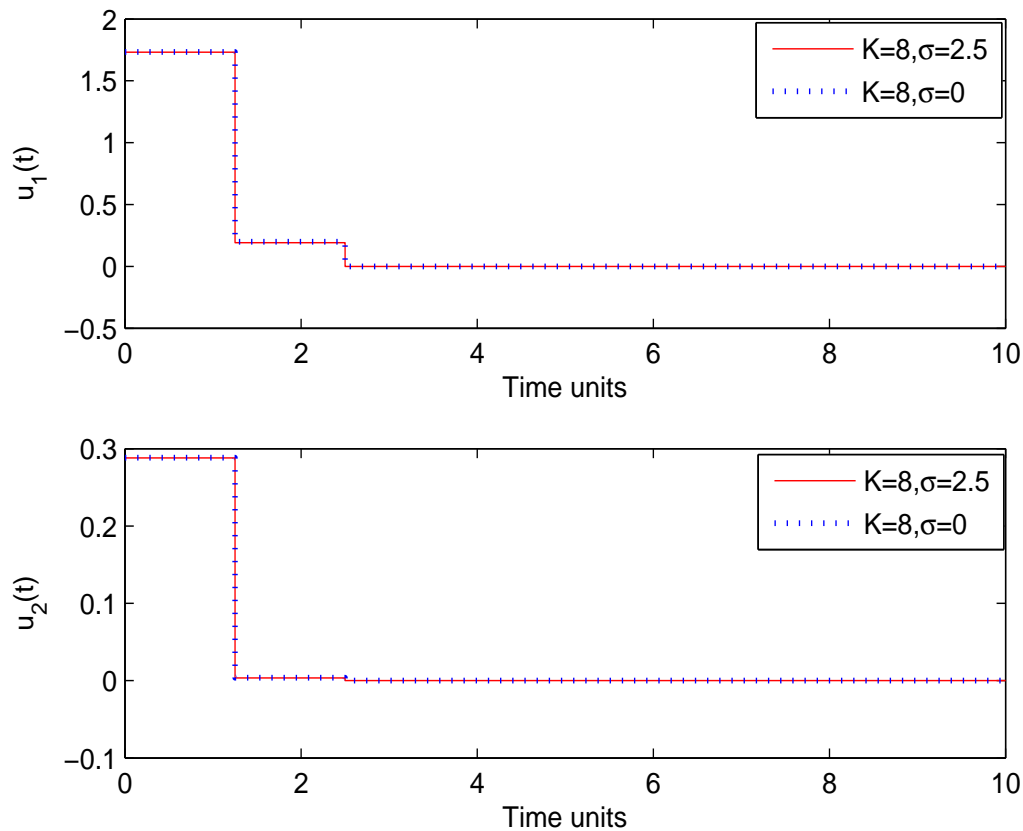
subject to

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (1 - x_3(t))x_1(t) - u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = 3 \left(-\frac{1}{4} \tanh(6x_4(t) - 2/5) + 0/5 \right) x_2(t)x_8(t) - x_2(t) + u_2(t) + 2, \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - 1/5x_3(t) + 0/5x_1(t)x_3(t) + u_3(t), \\ \dot{x}_4(t) = x_1(t) - x_4(t) - u_4(t), \\ \dot{x}_5(t) = \frac{4}{\sqrt{5}} [x_1(t) - x_5(t)] - ((1 - x_3(t))x_1(t) - u_1(t)), \\ \dot{x}_6(t) = \frac{4}{\sqrt{5}} [2x_5(t) - x_6(t) - x_1(t)] + ((1 - x_3(t))x_1(t) - u_1(t)), \\ \dot{x}_7(t) = \frac{4}{\sqrt{5}} [x_3(t) - x_7(t)] - (x_2(t) - 1/5x_3(t) + 0/5x_1(t)x_3(t) + u_3(t)), \\ \dot{x}_8(t) = \frac{4}{\sqrt{5}} [2x_7(t) - x_3(t) - x_8(t)] + (x_2(t) - 1/5x_3(t) + 0/5x_1(t)x_3(t) + u_3(t)), \\ \mathbf{x}(t) \geq \bar{0}, \quad \mathbf{u}(t) \geq \bar{0}, \quad x_4(t) \leq 1. \end{cases} \quad (7.5)$$

با شرایط اولیه:

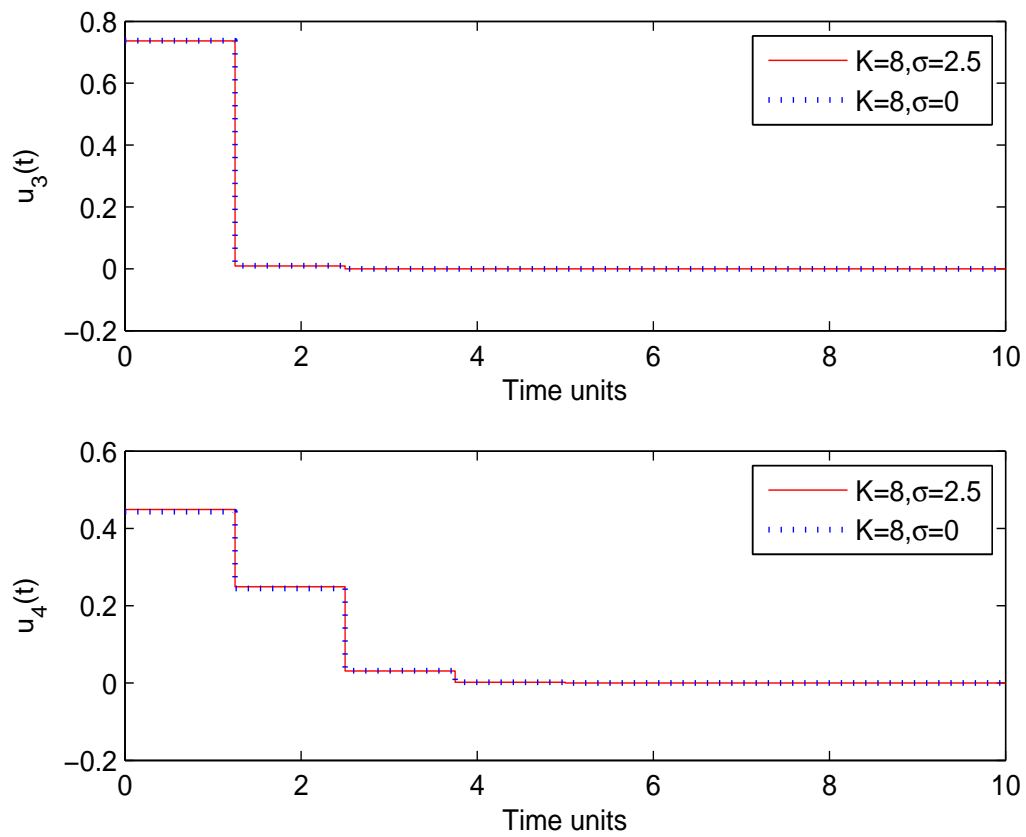
$$\begin{aligned} x_1(0) = 3, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1/3, x_4(0) = 0, x_5(0) = 0, \\ x_6(0) = 0, x_7(0) = 0, x_8(0) = 0. \end{aligned} \quad (8.5)$$

مساله کنترل بهینه بدون تاخیر زمانی با تابع هدف درجه دوم (۶.۵) تحت قیود غیرخطی (۷.۵) و شرایط اولیه (۸.۵) را با روش عددی موجک هر حل می کنیم. مقدار بهینه F برای $K = 8$ برابر $9/397768$ بدست می آید. نمودار کنترل بهینه $u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)$ و مسیرهای متناظر $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ بترتیب در شکل های ۱.۵-۴.۵ رسم شده است. همان طور که در نمودارها ملاحظه می کنیم در زمان $t = 5$ همه کنترل ها به صفر و مسیرهای متناظر به مقادیر اولیه خود می رسند. این مساله را با زمان تاخیر $\sigma = 0$ با روش موجک هر برای $K = 8$ حل می کنیم. مقدار بهینه F برای $K = 8$ برابر $8/994768$ بدست می آید. همچنین

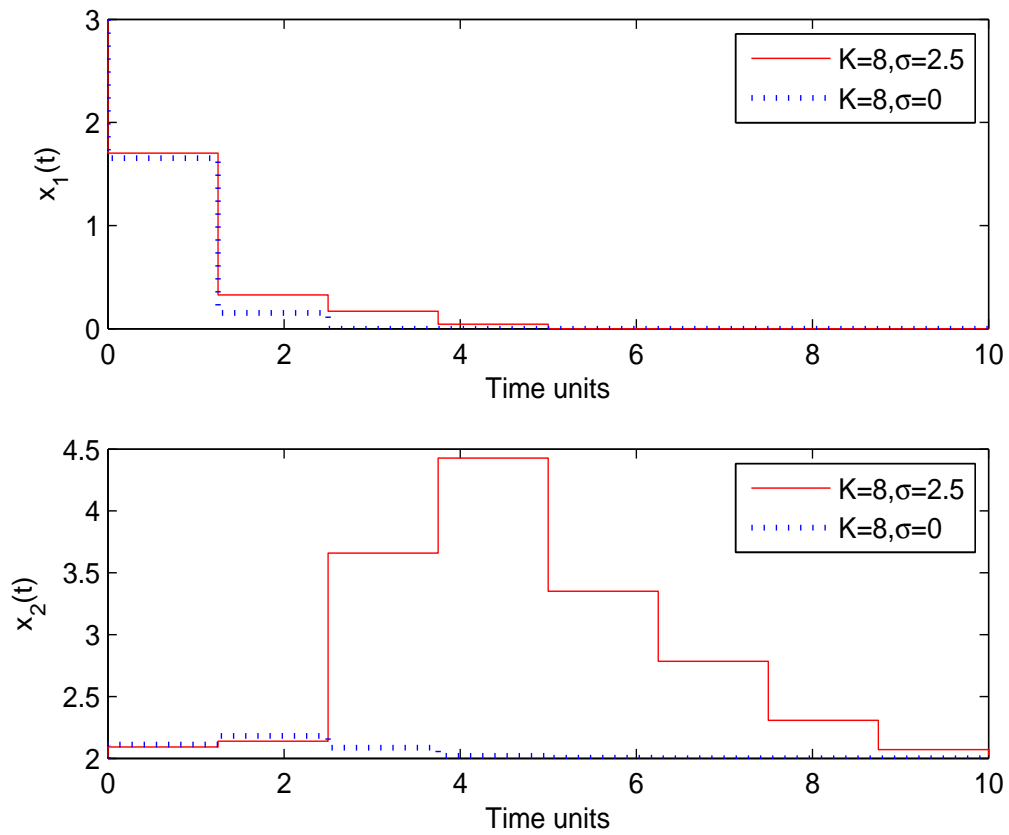


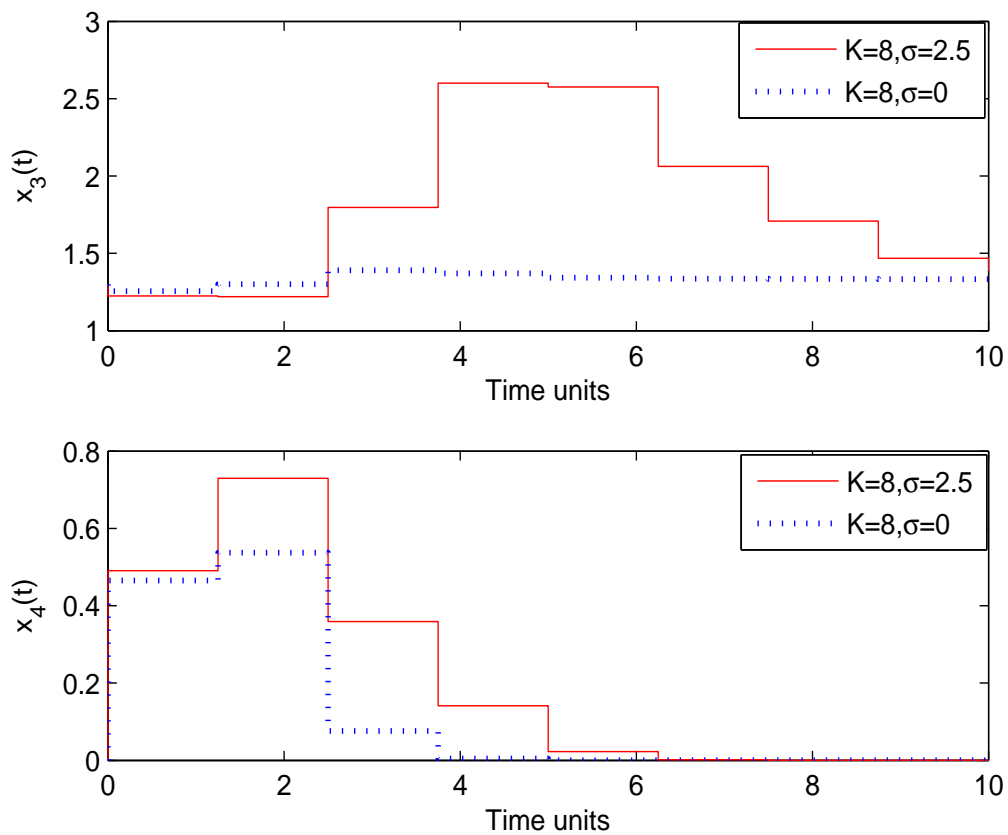
شکل ۱.۵: نمودار کنترل‌های $u_1(t)$ و $u_2(t)$ برای مثال ۱.۴.۵

نمودار کنترل بهینه $u_1(t)$ ، $u_2(t)$ ، $u_3(t)$ ، $u_4(t)$ و مسیرهای متناظر $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ ، $x_3(t)$ و $x_4(t)$ بترتیب در شکل‌های ۱.۵-۴.۵ رسم شده است. در نمودار $x_2(t)$ ، $x_3(t)$ می‌بینیم که مانند حالت قبل غلظت سلول‌های پلاسمایی و غلظت پادتن‌های خاص هر بیماری افزایش نمی‌یابد، بنابراین زمان تاخیر برای عملکرد سیستم ایمنی بدن لازم است و نباید از آن چشم‌پوشی کرد.



شکل ۲.۵: نمودار کنترل‌های $u_3(t)$ و $u_4(t)$ برای مثال ۱.۴.۵

شکل ۳.۵: نمودار مسیرهای $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برای مثال ۱.۴.۵

شکل ۴.۵: نمودار مسیرهای $x_3(t)$ و $x_4(t)$ برای مثال ۱.۴.۵

نتایج و پیشنهاداتی برای کارهای آتی

مسائل کنترل بهینه سیستم‌های تاخیری، مسائل کنترل بهینه افق نامتناهی سیستم‌های تاخیری و الگوریتم بهینه‌سازی تابع بطور تقریبی حل می‌شوند. این نوع مسائل با استفاده از تقریب پاده و تبدیل آرتستاین به مساله متناظر بدون تاخیر تبدیل می‌شوند. بازه زمانی با استفاده از تغییر متغیر مناسب قابل تبدیل به بازه $(0, 1]$ است و در انتها با استفاده از موجک هار بطور تقریبی حل می‌شوند.

مزایای روش موجک هار:

- ماتریس هار و معکوس آن درایه‌های صفر زیادی دارند و در روش موجک هار از این ماتریس‌ها برای محاسبات استفاده می‌شود. بنابراین روش تقریبی موجک هار ساختار محاسباتی ساده‌ای دارد.
 - کاربرد حقیقی بسیار خوبی در مسائل کنترل بهینه دارد، بطوریکه بازه $(0, 1]$ را به زیربازه‌هایی با طول یکسان تقسیم می‌کند و توابع را بطور ثابت در هر زیربازه تقریب می‌زند. بنابراین در این روش پیچیدگی محاسبات کاهش می‌یابد.
 - با افزایش نقاط کالوکیشن سرعت همگرایی افزایش می‌یابد و جواب تقریبی به جواب دقیق مساله نزدیک می‌شود.
- برای کارهای آتی می‌توان این روش را در حل مسائل کنترل بهینه سیستم‌های تاخیری شامل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و مسائل کنترل بهینه سیستم‌های تاخیری چندگانه پیشنهاد داد.

مراجع و مآخذ

- [۱] حمیرا امیر محمدی ، سیمین مسروری ، مریم امیر محمدی، (۱۳۸۶)، ”حل معادله موج با استفاده از تقریب پاده”، مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، ۱۴، ۱-۱۲.
- [2] D. N. Burghes, A. Graham, (1980), ”**Introduction to Control Theory**”, E.Horward, Halsted Press: New Yourk.
- [3] D. R. Kincaid, E. Ward Cheney, (2001), ”**Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing**”, Cengage Learning.
- [4] R.T. Lynch, J. J. Reis, (1976), ”Haar transform image coding”, **in: Proceedings National Telecommun**, 44.3-1-44.3
- [5] H. R. Marzban and M. Razaghi, (2010), ”Rationalized Haar approach for non-linear constrained optimal control problems”, **Applied Mathematical Modelling**, 34, 174-183.
- [6] M. Razzaghi, Y. Ordokhani, (2001), ”Solution of differential equations via rationalized Haar functions”, **Mathematics and Computers in Simulation**, 56, 235-246.
- [7] R. Dai, J. E. Cochran, (2009), ”Wavelet collocation method for optimal control problems”, **Journal of Optimization Theory and Applications**, 143, 265-278.

- [8] M. Ohkita, Y. Kobayashi, (1986), "An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations", **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, 9, 853-862.
- [9] C.F.Chen, C.H.Hsiao, (1997), "Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems", **Control Theory and Applications**, 144, 87-94.
- [10] I. R. Horng, J. H. Chou, (1985), "Analysis, parameter estimation and optimal control of time-delay systems via Chebyshev series", **International Journal of Control**, 41, 1221-1234.
- [11] H. R. Karimi, P. Jabejdar Maralani, B. Lohmann, B. Moshiri, (2005), " H_∞ control of linear parameterdependent state-delayed systems using polynomial parameter-dependent quadratic functions", **International Journal of Control**, 78, 254-263.
- [12] H. R. Karimi, M. J. Yazdanpanah, (2005), "Robust control for a class of uncertain state-delayed singularly perturbed systems", **Asian Journal of Control**, 7, 202-208.
- [13] F. C. Kung, H. Lee, (1983), "Solution and parameter estimation of in linear time-invariant delay systems using Laguerre polynomial expansion", **Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems and Measurement Control**, 105, 297-301.
- [14] H. Lee, F. C. Kung, (1985), "Shifted Legendre series solution and parameter estimation of linear delayed systems", **International Journal of Systems Science**, 16, 1249-1256.

- [15] H. R. Marzban, M. Razzaghi, (2004), "Solution of time-varying delay systems by hybrid functions", **Mathematics and Computers in Simulation**, 64, 597-607.
- [16] G. P. Rao, L. Sivakumar, "Analysis and synthesis of dynamic systems containing time-delays via block-pulse functions", **Proceedings of the IEEE**, 125, 1064-1068.
- [17] A. E. Bryson, Y. C. Ho, (1975), **Applied optimal control, optimization, estimation and control**, Hemisphere, Washington.
- [18] H. T. Banks, (1978), "J. A. Burns, Hereditary control problem: numerical methods based on averaging approximations", **SIAM Journal on Control and Optimization**, 16, 169-208.
- [19] K. L. Teo, K. H. Wong, D. J. Clements, (1984), "Optimal control computation for linear time-lag systems with linear terminal constraints", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 44, 509-526.
- [20] A. Y. Lee, (1993), "Numerical solution of time-delayed optimal control problems with terminal inequality constraints", **Optimal Control Applications and Methods**, 14, 203-210.
- [21] H. T. Banks, (1979), "Approximation of nonlinear functional differential equation control systems", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 29, 383-408.
- [22] K. H. Wong, D. J. Clements, K. L. Teo, (1985), "Optimal control computation for nonlinear time-lag systems", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 47, 91-107.

- [23] H. R. Marzban, M. Razzaghi, (2004), "Optimal control of linear delay systems via hybrid of block-pulse and Legendre polynomials", **Journal of the Franklin Institute**, 341, 279-293.
- [24] J. Blot, (2009), "Infinite-horizon Pontryagin principles without invertibility", **Journal of Nonlinear and Convex Analysis**, 10, 177-189.
- [25] J. Blot, P. Cartigny, (2000), "Optimality in infinite-horizon variational problems under sign conditions", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 106, 411-419.
- [26] H. Jasso-Fuentes, O. Hernandez-Lerma, (2008), "Characterizations of overtaking optimality for controlled diffusion processes", **Applied Mathematics and Optimization**, 57, 349-369.
- [27] A. Leizarowitz, (1985), "Infinite horizon autonomous systems with unbounded cost", **Applied Mathematics and Optimization**, 13, 19-43.
- [28] B. Mordukhovich, (1990), "Minimax design for a class of distributed parameter systems", **Automatic Remote Control**, 50, 1333-1340.
- [29] B. Mordukhovich, I. Shvartsman, (2004), "Optimization and feedback control of constrained parabolic systems under uncertain perturbations. In: Optimal Control, Stabilization and Nonsmooth Analysis", **Lecture Notes in Control and Information Sciences**, 121–132. Springer, Berlin .
- [30] S. Pickenhain, V. Lykina, (2006), "Sufficiency conditions for infinite horizon optimal control problems. In:Recent Advances in Optimization", **Proceedings of the 12th French-German-Spanish Conference on Optimization**, Avignon, pp. 217-232. Springer, Berlin .

- [31] S. Pickenhain, V. Lykina, M. Wagner, (2008), "On the lower semicontinuity of functionals involving Lebesgue or improper Riemann integrals in infinite horizon optimal control problems", **Control and Cybernetics**, 37, 451-468.
- [32] T. Prieto-Rumeau, O. Hernandez-Lerma, (2005), "Bias and overtaking equilibria for zero-sum continuous-time Markov games", **Mathematical Methods of Operations Research**, 61, 437-454.
- [33] A. Rapaport, P. Cartigny, (2004), "Turnpike theorems by a value function approach", **ESIAM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, 10, 123-141.
- [34] A. Rapaport, P. Cartigny, (2007), "Nonturnpike optimal solutions and their approximations in infinite horizon", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 134, 1-14.
- [35] A. J. Zaslavski, (2006), "**Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control**", Springer, New York.
- [36] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, (1971), "**Linear Optimal Control. Prentice-Hall**", Englewood Cliffs.
- [37] A. Leizarowitz, (1985), "Tracking nonperiodic trajectories with the overtaking criterion", **Applied Mathematics and Optimization**, 14, 155-171.
- [38] A. J. Zaslavski, (2006), "**Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control**", Springer, New York.
- [39] D. Gale, (1967), "On optimal development in a multi-sector economy", **The Review of Economic Studies**, 34, 1-18.
- [40] V. L. Makarov, A. M. Rubinov, (1977), "**Mathematical Theory of Economic Dynamics and Equilibria**", Springer, Berlin.

- [41] A. J. Zaslavski, (2007), "Turnpike results for a discrete-time optimal control system arising in economic dynamics", **Nonlinear Analysis**, 67, 2024-2049.
- [42] A. J. Zaslavski, (2009), "Two turnpike results for a discrete-time optimal control systems", **Nonlinear Analysis**, 71, 902-909.
- [43] S. Aubry, P. Y. Le Daeron, (1983), "The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions: I. Exact results for the ground-states", **Physica D**, 8, 381-422.
- [44] A. J. Zaslavski, (1987), "Ground states in Frenkel-Kontorova model", **Mathematics of the USSR, Izvestiya**, 29, 323-354.
- [45] B. D. Coleman, M. Marcus, V. J. Mizel, (1992), "On the thermodynamics of periodic phases", **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, 117, 321-347.
- [46] A. Leizarowitz, V. J. Mizel, (1989), "One dimensional infinite horizon variational problems arising in continuum mechanics", **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, 106, 161-194.
- [47] M. Marcus, A. J. Zaslavski, (1999), "The structure of extremals of a class of second order variational problems", **Annales de Institut Henri Poincaré, Analysis Non Linéaire**, 16, 593-629.
- [48] S. Effati, A. R. Nazemi, (2007), "A new approach for asymptotic stability of the nonlinear ordinary differential equations", **Journal of Applied Mathematics and Computing**, 25, 231-244.
- [49] S. Effati, A. V. Kamyad, R. A. Kamyabi-Gol, (2000), "On Infinite-Horizon Optimal Control Problems", **Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen**, 19, 269-278.
- [50] B. Chananeo, (1998) "Optimal control of nonlinear systems: a recursive approach", **Computers Mathematics with Applications**, 35, 29-33.

- [51] R. Sharma, A. Tewari, (2004), "Optimal nonlinear tracking of spacecraft attitude maneuvers", **IEEE Trans on Control Systems Technology**, 12, 677-682.
- [52] G-Y. Tang, (2005), "Suboptimal control for nonlinear systems: a successive approximation approach," **Systems**, 429-434.
- [53] G. De-xina, W. Ruia, (2011), "A non-delay optimal disturbance rejection control approach for nonlinear systems with external disturbances and control delay", **Procedia Engineering**, 15, 454-458.
- [54] R. F. Stengel, R. Ghigliazza, N. Kulkarni and O. Laplace, (2002), "Optimal control of innate immune response", **Optimal Control Applications and Methods**, 23, 91-104.
- [55] L. K. Poppe, (2006), "The immune response as an optimal control problem with time-delays", **Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics** , 6, 833-834.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Measurable	اندازه‌پذیر
Locally Integrable	انتگرال‌پذیر موضعی
Lebesgue Integral	انتگرال لبگ
Non-delay	بدون تاخیر
Characteristic Function	تابع مشخصه
Laplace Transformation	تبدیل لاپلاس
Variation of Variable	تغییر متغیر
First-order Páde Approximation	تقریب پاده مرتبه اول
Haar Functions	توابع هار
Rationalized Haar Functions	توابع هار گویا
Variational Calculus	حساب تغییرات
Quadratic	درجه دوم
Angle	زاویه
Subinterval	زیربازه
Subset	زیرمجموعه
Terminal Conditions	شرایط نهایی
Initial Condition	شرط اولیه
Scalar Multiplication	ضرب اسکالر
Complex Number	عدد مختلط
Neutral Element	عضو خنثی
Unique Element	عضو منحصر بفرد
Identity Element	عضو همانی
Vector Space	فضای برداری
State Space	فضای حالت
Hilbert Space	فضای هیلبرت
Terminal Inequality Constrain	قید نامساوی نهایی
Controllability	کنترل‌پذیری
Group	گروه
Two-sided Laplace	لاپلاس دوطرفه
Inverse Laplace	لاپلاس معکوس
Operational Integration Matrix	ماتریس عملگر انتگرال‌گیری

Semi-positive definite matrix	ماتریس نیمه‌معین مثبت
Real Variable	متغیر حقیقی
Symmetric	متقارن
Compact Set	مجموعه فشرده
Orthogonal Set	مجموعه متعامد
Finite-Horizon Problem	مساله افق متناهی
Infinite-Horizon Problems	مسائل افق نامتناهی
Optimal Control Problem	مساله کنترل بهینه
Time-delayed Optimal Control Problem	مساله کنترل بهینه تاخیری
Derivative	مشتق
Algebraic Equations	معادلات جبری
Differential Equations	معادلات دیفرانسیل
First-Order Differential Equations	معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
Haar Wavelet	موجک هار
Convergent	همگرا

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Algebraic Equations	معادلات جبری
Angle	زاویه
Characteristic Function	تابع مشخصه
Compact Set	مجموعه فشرده
Complex Number	عدد مختلط
Controllability	کنترل پذیری
Convergent	همگرا
Derivative	مشتق
Differential Equations	معادلات دیفرانسیل
Finite-Horizon Problem	مساله افق متناهی
First-Order Differential Equations	معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
First-order Páde Approximation	تقریب پاده مرتبه اول
Group	گروه
Haar Functions	توابع هار
Haar Wavelet	موجک هار
Hilbert Space	فضای هیلبرت
Identity Element	عضو همانی
Infinite-Horizon Problems	مسائل افق نامتناهی
Initial Condition	شرط اولیه
Inverse Laplace	لاپلاس معکوس
Laplace Transformation	تبدیل لاپلاس
Lebesgue Integral	انتگرال لبگ
Locally Integrable	انتگرال پذیر موضعی
Measurable	اندازه پذیر
Neutral Element	عضو خنثی
Non-delay	بدون تاخیر
Operational Integration Matrix	ماتریس عملگر انتگرال گیری
Optimal Control Problem	مساله کنترل بهینه
Orthogonal Set	مجموعه متعامد
Quadratic	درجه دوم

Rationalized Haar Functions	توابع هار گویا
Real Variable	متغیر حقیقی
Scalar Multiplication	ضرب اسکالر
Semi-positive Definite Matrix	ماتریس نیمه‌معین مثبت
State Space	فضای حالت
Subinterval	زیربازه
Subset	زیر مجموعه
Symmetric	متقارن
Terminal Conditions	شرایط نهایی
Terminal Inequality Constrain	قید نامساوی نهایی
Time-delayed Optimal Control Problem	مساله کنترل بهینه تاخیری
Two-sided Laplace	لاپلاس دوطرفه
Unique Element	عضو منحصر بفرد
Variational Calculus	حساب تغییرات
Variation of Variable	تغییر متغیر
Vector Space	فضای برداری

Abstract

In this thesis, we solve a class of time-delayed optimal control problems using Haar wavelets. In the first chapter, we introduce general optimal control problems, Haar wavelets and express the needed definitions and theorems. In the second chapter, we study Bolza optimal control problems with time-delayed. The problem is first transformed, using a Pade approximation, to one without a time-delayed argument. Then we approximate it using Haar wavelets. Numerical results are also given for four test examples. The third chapter consists of infinite-horizon time-delayed optimal control problem. The problem is first transformed, using a Pade approximation, to one without a time-delayed argument. Then by a suitable change of variable, we transformed the obtained non-delay optimal control problem to a finite-horizon optimal control problem. We solve it numerically using Haar wavelets. In fourth chapter, we express nonlinear optimal control problems with external disturbances and control delay. Using Artstein transformation, the problem is translated into simple nonlinear problem without delay. Then it is approximated by Haar wavelet. Numerical results are also given for one test examples to demonstrate the applicability and the efficiency of the method. In the fifth chapter, we consider the immune Response as an optimal control problem with time-delays. Similar to the second chapter, the problem is transformed into non-delay problem. Then it is approximated using Haar wavelet. In this thesis all graphs are plotted by matlab software.

Keywords: *Haar wavelets, Rationalized Haar functions, Páde approximation, Time-delayed optimal control problems, Infinite-horizon problems, Artstein transformation, Collocation points, Nonlinear optimal control problem with external disturbances, Immune Response.*



Shahrood University of Technology
Faculty of Mathematical
Department of Mathematics

M.S Thesis

**An application of collocation method for
solving time-delayed optimal control problems**

By:

Masoomeh Mansoori

Supervisor:

Dr Alireza Nazemi

16 September 2012