

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش المان‌های محدود برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

استاد مشاور

دکتر حجت احسنی طهرانی

پژوهشگر

آمنه اسمعیل وندی

شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: اسمعیل وندی

نام: آمنه

عنوان: روش المان‌های محدود برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی

استاد راهنما: دکتر علی مس‌فروش
استاد مشاور: دکتر حجت احسنی‌طهرانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۹۱
دانشکده ریاضی تعداد صفحات: ۸۹

واژگان کلیدی: همگرایی قوی، همگرایی ضعیف، اختلال سفید، اختلال رنگی

چکیده

در این پایان‌نامه به حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی می‌پردازیم. در فصل اول به بیان مفاهیم و تعاریف مورد نیاز می‌پردازیم. در فصل دوم معادلات دیفرانسیل تصادفی را معرفی می‌کنیم. در فصل سوم روش المان‌های محدود را معرفی می‌کنیم و اساس کار آن را بر روی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی توضیح می‌دهیم. در فصل آخر روش عددی برای این معادلات پیشنهاد می‌دهیم و رفتار سرعت همگرایی را در دو حالت اختلال سفید و اختلال رنگی با هم مقایسه می‌کنیم. رسم تمامی نمودارها در سر تا سر این پایان‌نامه با استفاده از نرم‌افزار Matlab انجام شده است.

تقدیم به همه آشنایی که

می خوانند بیشتر بدانند

خدایا...۱

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بدانند، روزی کن.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جان‌شین همه نداشتن هست...

سپاس گزارمی...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علی مس‌فروش، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر حجت احسنی‌طهرانی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده‌سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را، و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بود.

آمنه اسمعیل‌وندی
شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

۱	مفاهیم و تعاریف مقدماتی	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۱۰	معادلات دیفرانسیل تصادفی (SDE)	۲
۱۰	۱.۲ مقدمه	۱۰
۱۰	۲.۲ معادلات دیفرانسیل تصادفی (SDE)	۱۰
۱۱	۱.۲.۲ روش اویلر برای حل یک (SDE)	۱۱
۲۵	روش المان‌های محدود برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی	۳
۲۸	۱.۳ معرفی دسته‌ای دیگر از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی	۲۸
۳۴	۲.۳ برآورد خطا در حالت گسسته‌سازی ناقص	۳۴
۳۴	۱.۲.۳ برآورد خطا برای مسایل قطعی	۳۴
۴۰	۲.۲.۳ همگرایی بر مبنای نرم قوی برای حالت گسسته‌سازی ناقص	۴۰
۴۲	۳.۲.۳ همگرایی بر مبنای نرم ضعیف برای حالت گسسته‌سازی ناقص	۴۲
۴۳	۳.۳ برآورد خطا در حالت گسسته‌سازی کامل	۴۳
۴۳	۱.۳.۳ برآورد خطا برای مسایل قطعی	۴۳
۵۰	۲.۳.۳ همگرایی بر مبنای نرم قوی برای حالت گسسته‌سازی کامل	۵۰
۵۳	۳.۳.۳ همگرایی بر مبنای نرم ضعیف برای حالت گسسته‌سازی کامل	۵۳
۵۵	راه‌حل عددی	۴
۵۵	۱.۴ مقدمه	۵۵
۵۵	۲.۴ صورت ماتریسی روش عددی ارایه شده	۵۵
۵۶	۳.۴ محاسبه اختلال	۵۶

۵۷	آزمایش‌های عددی	۴.۴
۵۹	نتایج عددی	۵.۴
۵۹	سرعت همگرایی قوی در k برای اختلال سفید	۱.۵.۴
۶۰	سرعت همگرایی قوی در h برای اختلال سفید	۲.۵.۴
۶۰	سرعت همگرایی قوی در h برای اختلال رنگی	۳.۵.۴
۶۱	تحلیل نتایج عددی	۶.۴
۶۲	حالت اختلال سفید	۱.۶.۴
۶۳	حالت اختلال رنگی	۲.۶.۴
۶۷	تعاریف مهم و کد Matlab	آ
۶۷	تعاریف	۱.آ
۷۰	کد Matlab	۲.آ
۸۰	مراجع	
۸۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۸۵	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این پایان‌نامه روش المان‌های محدود^۱ را برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی خطی^۲ (SPDE) به فرم

$$du + Au dt = dW, \quad u(0) = u_0, \quad (1.1)$$

به کار می‌بریم، در اینجا $H = L_2(D)$ فضای هیلبرت با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و نرم $\| \cdot \|$ است، که D ناحیه کراندار در \mathbf{R}^d برای $d = 1, 2, 3$. $u(t)$ یک فرایند تصادفی با مقادیری در H روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ است، $A = -\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ عملگر لاپلاس با دامنه $D(A) = H^2 \cap H^1$ می‌باشد، $W(t)$ یک فرایند وینر با مقادیری در H روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ با عملگر کواریانس $Q : H \rightarrow H$ می‌باشد.

معادلات از ابزارهای کلیدی در مدل‌سازی ریاضی در بسیاری از زمینه‌ها مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، فیزیولوژی اعصاب^۳، آنالیز تصاویر^۴ و ریاضیات مالی^۵ هستند. وجود، یکتایی و خواص جواب‌های SPDEها با عملگر نیم‌گروه، به‌طور کامل بررسی شده است [۱۲]. همچنین تقریب‌های عددی برای معادلات در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است [۲]، [۲۴]، [۳۲]، [۱۵]، [۱]، [۷]، [۶]، [۸]، [۲۲]، [۳۱]، [۱۹]، [۲۹]، [۳۰]، [۳۵]، [۳۴] و [۳۳]. هدف

^۱Finite element method

^۲Linear stochastic partial differential equation

^۳Neurophysiology

^۴Image analysis

^۵Mathematical finance

اصلی از این پایان نامه ارایه یک روش المان محدود برای حل (۱.۱) است، که $D = (0, 1) \in \mathbb{R}^1$ از این حل کننده برای بررسی نتایج سرعت همگرایی استفاده می کنیم [۱]. یک جواب ضعیف (۱.۱) به صورت

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s) dW(s), \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

است، که در آن $E(t) = e^{-At}$ نیم گروه تحلیلی^۶ تولید شده توسط $-A$ می باشد. فرض کنید عملگر کواریانس Q دارای مقادیر ویژه $\gamma_l > 0$ و e_l توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه باشند که تشکیل پایه یک متعامد برای H می دهند، آنگاه

$$W(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l^{-\frac{1}{2}} \beta_l(t) e_l, \quad (3.1)$$

یک فرایند وینر^۷ گفته می شود، که $\beta_l(t)$ ، $l = 1, 2, \dots$ ، یک حرکت براونی^۸ حقیقی مقدار، مستقل، و با توزیع نرمال یکسان روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ است. اگر $Q = I$ (عملگر همانی) آنگاه فرایند وینر به فرایند وینر استوانه ای^۹ (حالت خاص اختلال سفید^{۱۰}) موسوم است و به صورت

$$W(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l(t) e_l,$$

خواهد بود.

در روش المان های محدود برای (۱.۱) به دنبال پیدا کردن جواب تقریبی $u_h(t)$ برای معادله

$$du_h + A_h u_h = P_h dW, \quad u_h(0) = P_h u_0, \quad (4.1)$$

هستیم. که $S_h \subset H^1_0(D)$ فضای توابع خطی قطعه ای پیوسته، $0 < h < 1$ و $A_h : S_h \rightarrow S_h$ عملگر لاپلاس گسسته می باشد که

$$(A_h \Psi, \chi) = (\nabla \Psi, \nabla \chi), \quad \forall \chi \in S_h.$$

^۶ Analytic semigroup

^۷ Wiener process

^۸ Brownian motion

^۹ Cylindrical wiener process

^{۱۰} White noise

و $P_h : L_2 \rightarrow S_h$ یک تصویر قائم^{۱۱} به صورت

$$(P_h f, \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in S_h,$$

است، به علاوه

$$u_h(t) = E_h(t)P_h u_0 + \int_0^t E_h(t-s)P_h dW(s), \quad E_h(t) = e^{-A_h t}, \quad (5.1)$$

را محاسبه می‌کنیم.

بعد از گسسته‌سازی (۱.۱) در فضا و به کار بردن روش اویلر پسرو به‌عنوان گام زمانی، مساله گسسته شده به صورت ماتریسی زیر را بدست می‌آوریم.

$$\mathbf{B}\xi^n + k_n \mathbf{A}\xi^n = \mathbf{B}\xi^{n-1} + \eta.$$

که در آن $\mathbf{A} = \int_{\mathcal{D}} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx$ ، ماتریس سفتی^{۱۲}، $\mathbf{B} = \int_{\mathcal{D}} \varphi_i \varphi_j dx$ ماتریس جرم^{۱۳}، ξ^n بردار مجهول^{۱۴}، $(\eta)_j = (\Delta W, \varphi_j)$ اختلال که در اینجا $\Delta W = W^n - W^{n-1}$.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید \mathbf{R} یک مجموعه از اعداد حقیقی باشد

$$\mathbf{R}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d), x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, d\},$$

$\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ ، یک دامنه گفته می‌شود اگر باز و محدب باشد. برای $d = 1$ دامنه یک بازه، برای $d = 2$ قسمتی از صفحه، برای $d = 3$ قسمتی از فضا می‌باشد. مرز دامنه را با $\partial\Omega = \Gamma$ نشان می‌دهیم و بستار دامنه را به صورت $\bar{\Omega} = \Gamma \cup \Omega$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۱. فضای همه توابعی که مربع آن‌ها انتگرال‌پذیر باشد را فضای $L_2(\Omega)$ می‌گوییم، ضرب داخلی و نرم در فضای $L_2(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle v, w \rangle = \langle v, w \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} vw \, dx \quad \bullet$$

$$\|v\| = \|v\|_{L_2(\Omega)} = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} v^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \bullet$$

تعریف ۳.۱.۱. یک فضای نرم‌دارکامل را، یک فضای باناخ^{۱۵} می‌گوییم.

^{۱۱}Orthogonal projection

^{۱۲}Stiffness matrix

^{۱۳}Mass matrix

^{۱۴}Load vector

^{۱۵}Banach space

تعریف ۴.۱.۱. یک فضای ضرب داخلی کامل را، یک فضای هیلبرت^{۱۶} می‌گوییم.

تعریف ۵.۱.۱. یک فضای سوبولف^{۱۷} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^k = H^k(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| < k\},$$

که $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ بردار d تایی از عناصر صحیح نامنفی است و یک چنداندیس^{۱۸} گفته می‌شود. مشتق مرتبه n ام و طول آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i.$$

ضرب داخلی، نرم و نیم‌نرم روی فضای سوبولف به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle v, w \rangle_k = \langle v, w \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha v D^\alpha w \, dx \quad \bullet$$

$$\|v\|_k = \|v\|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^\alpha v)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \bullet$$

$$\|v\|_k = \|v\|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (D^\alpha v)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \bullet$$

در این فضا

$$\langle H^0 = H = L^2, \quad \|v\|_{H^0} = \|v\| : k = 0 \text{ اگر } \bullet$$

$$\langle H^1 = \{v \in L^2, D^\alpha v \in L^2, |\alpha| \leq 1\} : k = 1 \text{ اگر } \bullet$$

$$\langle H^1_0 = \{v \in H^1, v|_{\Gamma} = 0\} \bullet$$

تعریف ۶.۱.۱. فضای \dot{H} به صورت

$$\dot{H} = \{v \in H : \langle v, v \rangle = 0\},$$

تعریف می‌شود. فرض کنید $A = -\Delta$ (عملگر لاپلاس) با دامنه $\mathcal{D}(A) = H^2 \cap H^1_0$ ، فضای \dot{H}^β در واقع بستار H می‌باشد و به صورت

$$\dot{H}^\beta = \mathcal{D}(A) = \{v \in H, \|v\|_{\dot{H}^\beta} < \infty, \beta \in \mathbf{R}\},$$

^{۱۶} Hilbert space

^{۱۷} Sobolev space

^{۱۸} Multi index

تعریف می‌شود. برای هر $\beta \in \mathbf{R}$ ، فرض کنید $\dot{H}^\beta = \dot{H}^\beta(\mathcal{D}) = \mathcal{D}(A^{\frac{\beta}{2}})$ ، نرم تعریف شده روی \dot{H}^β به صورت

$$|v|_\beta = \|A^{\frac{\beta}{2}}v\|, \quad |v|_\beta^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\beta (v, \varphi_j)^2,$$

است. که φ_j ها توابع پایه‌ای متناظر با مقادیر ویژه λ_j هستند.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید Ω یک مجموعه ناتهی باشد، یک σ -جبر \mathcal{F} روی Ω ، مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های Ω است به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

$$1. \Omega \in \mathcal{F}$$

$$2. \text{ اگر } f \in \mathcal{F} \text{ باشد آنگاه } f^c \in \mathcal{F} \text{ که } f^c = \Omega - f$$

$$3. \text{ اگر } f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{F} \text{ آنگاه } \bigcup_{i=1}^n f_i \in \mathcal{F}$$

تعریف ۸.۱.۱. اندازه احتمال (Ω, \mathcal{F}) ، تابع $\mathbf{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ است به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

$$1. \mathbf{P}(\Omega) = 1, \mathbf{P}(\emptyset) = 0$$

$$2. \text{ اگر } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \text{ مجموعه‌های دو به دو مجزا باشند آنگاه}$$

$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

تعریف ۹.۱.۱. مجموعه $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ که Ω دامنه، \mathcal{F} یک σ -جبر و $\mathbf{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ یک اندازه احتمال است را، یک فضای احتمال می‌گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱. یک دنباله از σ -جبرهای $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ را یک فیلتریشن می‌گوییم، فضای $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_{t \geq 0})$ را یک فضای احتمال مجهز به فیلتریشن می‌گوییم.

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر w یک متغیر تصادفی در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ باشد، امید ریاضی $E(w)$ به صورت

$$E(w) = \int_{\Omega} w \, d\mathbf{P}.$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. برای هر فضای هیلبرت H ، تعریف می‌کنیم:

$$L^2(\Omega; H) = \{v : \Omega \rightarrow H; E\|v\|_H^2 = \int_{\Omega} \|v\|_H^2 dP < \infty\},$$

$$\cdot \|v\|_{L^2(\Omega; H)} = (E\|v\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$$

و برای هر فضای $\dot{H}^{\beta} = D(A^{\frac{\beta}{2}})$ ، تعریف می‌کنیم:

$$L^2(\Omega; \dot{H}^{\beta}) = \{v : \Omega \rightarrow \dot{H}^{\beta}; E|v|_{\beta}^2 = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{D}} \|A^{\frac{\beta}{2}}\|^2 dx dP < \infty\},$$

$$\cdot |v|_{L^2(\Omega; \dot{H}^{\beta})} = (E|v|_{\beta}^2)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف ۱۳.۱.۱. عملگر خطی کراندار $\Psi : H \rightarrow H$ را عملگر هیلبرت اشمیت^{۱۹} روی H می‌گوییم اگر $\Psi \in L_2 = \text{HS}(H, H)$ ،

$$\|\Psi\|_{\text{HS}} = \|\Psi\|_{L_2} = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \|\Psi \varphi_l\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

که $\{\varphi_l\}$ ، $l = 1, 2, \dots$ ، یک پایه یکه متعامد دلخواه در H است.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید فضای توابع خطی کراندار باشد. فرایند $\{\Phi(t)\}_{t \in [0, T]}$ با مقادیری در $L(U, H)$ مقدماتی گفته می‌شود اگر

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, N \in \mathbb{N},$$

وجود داشته باشد به طوری که

$$\Phi(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \Phi_m \mathbf{1}_{(t_m, t_{m+1}]}(t), \quad t \in [0, T],$$

که

• $\Phi_m : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow L(U, H)$ ، \mathcal{F}_{t_m} -اندازه‌پذیر قوی می‌باشد،

• Φ_m فقط دارای یک مقدار متناهی در $L(U, H)$ می‌باشد.

در اینجا فضای خطی توابع مقدماتی را با \mathcal{E} نشان می‌دهیم.

^{۱۹}Hilbert shmidt

تعریف ۱۵.۱.۱. (Itô integral) برای $\Phi \in \mathcal{E}$ انتگرال تصادفی^{۲۰} را به صورت

$$\int_0^t \Phi dW := \sum_{m=0}^{N-1} \Phi_m(\Delta W_m(t)), \quad t \in [0, T],$$

تعریف می‌کنیم، که

$$\Delta W_n(t) = W(t_n + 1 \wedge t) - (t_n \wedge t), \quad t \wedge s = \min(t, s).$$

علاوه بر این انتگرال تصادفی دارای ویژه‌گی ایزومتري

$$\mathbf{E} \left\| \int_0^t \Psi(s) dW(s) \right\|^2 = \int_0^t \|\mathbf{E} \Psi(s) Q^\dagger\|_{\text{HS}}^2 ds,$$

است، که \mathbf{E} امید ریاضی می‌باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. یک خانواده از متغیرهای تصادفی $\beta(t)$ که $\mathbf{P} - a.s.$ به‌طور پیوسته به $t \in [0, T]$ وابسته باشند را یک حرکت براونی^{۲۱} روی $[0, T]$ می‌گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$1. \quad \mathbf{P}(\beta(0) = 0) = 1$$

۲. $\beta(t)$ یک نمو مستقل است یعنی برای بازه‌های زمانی مجزای (t_1, t_2) و (s_1, s_2) ، $\beta(t_2) - \beta(s_2)$ مستقل از $\beta(s_1) - \beta(s_2)$ است،

۳. برای $0 \leq s \leq t \leq T$ ، $\beta(t) - \beta(s)$ یک توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sqrt{t-s}$ می‌باشد یعنی

$$\beta(t) - \beta(s) \sim N(0, \sqrt{t-s}),$$

۴. $\beta(t)$ پیوسته است اما دیفرانسیل پذیر نیست.

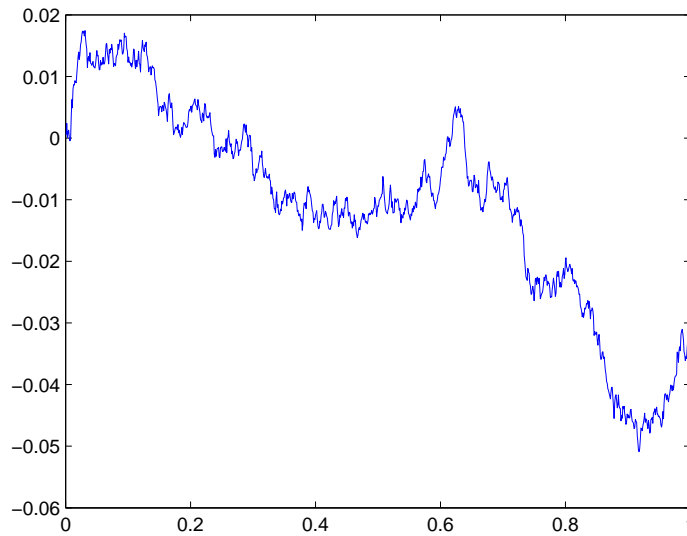
شبه‌سازی حرکت براونی با پیدا کردن مقادیر آن در فاصله‌های زمانی گسسته بدست می‌آید، N امین تقریب حرکت براونی تحت بازه $[0, T]$ به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$1. \quad t_n = \frac{n}{N} T$$

$$2. \quad \Delta = t_n - t_{n-1} = \frac{T}{N}$$

^{۲۰} Stochastic integral

^{۲۱} Brownian motion



شکل ۱.۱: شبیه‌سازی حرکت براونی

$$۳. W_n = \beta(t_n) - \beta(t_{n-1}) = \sqrt{\Delta} \text{Rand}N$$

$$۴. \beta(t_n) = \beta(t_{n-1}) + \sum_{j=1}^n W_j = \sum_{j=1}^n W_j = \beta(t_{n-1}) + W_n$$

مثال ۱۷.۱.۱. در شکل ۱.۱ یک حرکت براونی ساده را شبیه‌سازی کرده‌ایم. (۲.آ)

مثال ۱۸.۱.۱. در شکل ۲.۱ حرکت براونی را روی تابع نمایی

$$u(W(t)) = \exp\left(t + \frac{1}{\gamma} W(t)\right),$$

شبیه‌سازی کرده‌ایم.

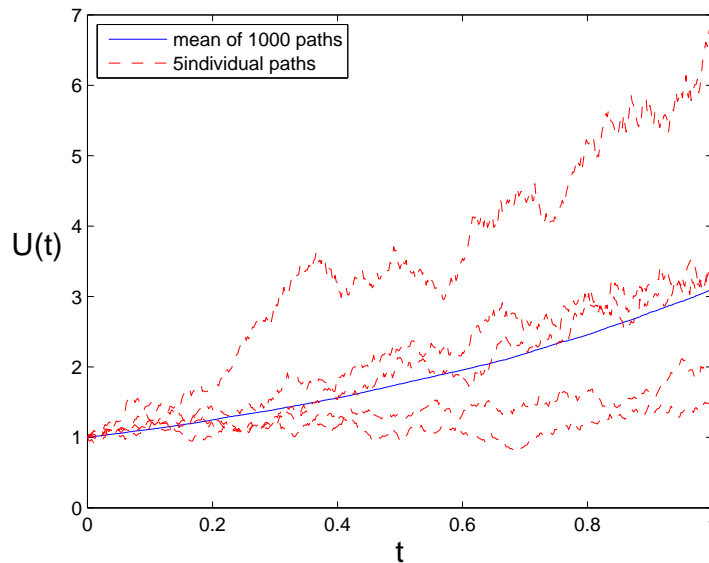
تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ با نرم $\|\cdot\|$ باشد، یک خانواده $\{E(t)\}_{t \geq 0}$ از عملگرهای خطی کراندار روی X ، یک نیم‌گروه از عملگرهای خطی کراندار گفته می‌شود اگر:

$$E(0) = I \quad \bullet$$

$$E(t+s) = E(t)E(s) \quad \forall s, t \geq 0 \quad \bullet$$

نیم‌گروه پیوسته قوی گفته می‌شود اگر

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} E(t)x = x \quad \forall x \in X.$$



شکل ۲.۱: حرکت براونی روی یک تابع نمایی (۱۸.۱.۱)

فرض کنید $A = -\Delta$ یک عملگر غیرکرناندار روی $L_2(\Omega)$ با دامنه $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ باشد، آنگاه A یک عملگر بسته، چگال، معین مثبت و خودالحاق روی $L_2(\Omega)$ با معکوس فشرده می‌باشد. عملگر جواب $E(t) = e^{-At}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E(t)v = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} (v, \varphi_j) \varphi_j, \quad v \in L_2(\Omega),$$

که $\lambda_j > 0$ و φ_j مقادیر ویژه و پایه یکه متعامد از بردارهای ویژه، از A هستند.

تعریف ۲.۱.۱. نیم گروه $E(t)$ تحلیلی گفته می‌شود اگر بتوان آن را به صورت یک تابع مختلط تحلیلی $E(z)$ برای z هایی که در یک بخش از صفحه مختلط شامل محور t مثبت هستند گسترش داد.

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل تصادفی (SDE)

۱.۲ مقدمه

معادلات دیفرانسیل تصادفی در زمینه‌های وسیعی چون زیست‌شناسی^۱، شیمی، امراض‌شناسی^۲، مکانیک، ریزالکترونیک^۳، اقتصاد و تجارت کاربرد دارد. یکی از کاربردهای مهم این معادلات، ارزیابی مدلی برای نوسانات قیمت در بازار سهام است [۲۸]. فهم کامل SDEها نیازمند آشنایی با احتمال و فرایندهای تصادفی پیشرفته می‌باشد. برای شبیه‌سازی عددی SDEها، کافی است آشنایی مختصری با روش اویلر^۴ برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی^۵ و درک مستقیمی از متغیرهای تصادفی داشته باشیم. در اینجا توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان روش‌های عددی ساده را برای حل SDEها به کار برد و به بحث در مورد مفاهیمی چون همگرایی، خطی بودن و پایداری می‌پردازیم.

۲.۲ معادلات دیفرانسیل تصادفی (SDE)

در این بخش، به معرفی معادلات دیفرانسیل تصادفی و حل عددی آنها به‌عنوان پیش‌زمینه‌ای برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی می‌پردازیم [۱۰].

فرض کنید $\beta(t), t \geq 0$ یک حرکت براونی یا یک فرایند وینر روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

^۱Biology

^۲Epidemiology

^۳Micro electronic

^۴Euler

^۵Ordinary differential equation

باشد، معادلاتی به فرم

$$dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) d\beta(t), \quad (1.2)$$

معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌گوییم، $\mu(X(t), t)$ و $\sigma(X(t), t)$ ضرایب معادله و وابسته به زمان هستند. روش‌های زیادی چون روش اویلر^۶، روش تیلور^۷، روش مونت کارلو^۸، روش گوسی و ... برای حل یک SDE به کار برده می‌شود، در اینجا شرح مختصری از روش اویلر به همراه حل عددی آن را ارائه می‌دهیم.

۱.۲.۲ روش اویلر برای حل یک (SDE)

معادله دیفرانسیل تصادفی

$$dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) d\beta(t), \quad (2.2)$$

را روی بازه $[0, T]$ که در آن $\mu : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times m$ و $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times m$ تقریب \hat{X} گسسته زمانی از X است را در نظر بگیرید، ابتدا بازه $[0, T]$ را به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = T,$$

و $\hat{X}(0) = X(0)$ ، حال با استفاده از فرمول اویلر پسرو^۹ معادله دیفرانسیل تصادفی به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + \mu(t_i, \hat{X}(t_i))\Delta t_i + \sigma(t_i, \hat{X}(t_i))\sqrt{\Delta t_i}Z_{i+1}, \quad (3.2)$$

که Z_1, Z_2, \dots بردارهای نرمال استاندارد تصادفی هستند، $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = h$ ، بنابراین معادله (۳.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + \mu(\hat{X}(t_i))h + \sigma(\hat{X}(t_i))\sqrt{h}Z_{i+1}. \quad (4.2)$$

تعریف ۱.۲.۲. فرایند

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s), s) ds + \int_0^t \sigma(X(s), s) ds,$$

^۶Euler

^۷Tylore

^۸Monto carlo

^۹Backward Euler

یک جواب قوی^{۱۰} از SDE (۱.۲) است اگر برای همه $t > 0$ انتگرال‌های $\int_0^t \mu(X(s), s) ds$ و $\int_0^t \sigma(X(s), s) ds$ موجود و عبارت دوم یک ایتو انتگرال باشد.

تذکر ۲.۲.۲. ۱. یک جواب قوی، برخی توابع $\mathbf{F}(t, (\beta(s), s \leq t))$ از حرکت براونی $\beta(t)$ داده شده می‌باشد.

۲. اگر در (۱.۲) $\sigma = 0$ باشد، آنگاه معادله دیفرانسیل تصادفی تبدیل به یک معادله دیفرانسیل معمولی^{۱۱} می‌شود.

مثال ۳.۲.۲. فرایند $X(t)$ را که در $dX(t) = a(t)d\beta(t)$ صدق می‌کند در نظر بگیرید، $a(t)$ غیر تصادفی می‌باشد. واضح است که

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s) d\beta(s).$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز داریم:

$$X(t) = X(0) + a(t)\beta(t) - \int_0^t \beta(s)a'(s) ds,$$

فرض می‌کنیم $a(t)$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، در این صورت

$$\mathbf{F}(t, (x(s), s \leq t)) = X(0) + a(t)x(t) - \int_0^t x(s)a'(s) ds.$$

مثال ۴.۲.۲. SDE زیر را در نظر بگیرید:

$$dX(t) = \mu X(t) dt + \sigma X(t) d\beta(t), \quad X(0) = 1.$$

قرار می‌دهیم $f(x) = \ln x$ ، آنگاه $f'(x) = \frac{1}{x}$ و $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ، با استفاده از ایتو انتگرال و انتگرال‌گیری جز به جز یک جواب قوی بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} d(\ln X(t)) &= \frac{1}{X(t)} dX(t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X(t)^2} \right) \sigma^2 X(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{X(t)} \left(\mu X(t) dt + \sigma X(t) d\beta(t) \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma d\beta(t), \end{aligned}$$

^{۱۰} Strong solution

^{۱۱} Ordinary differential equation

بنابراین $Y(t) = \ln X(t)$ در

$$dY(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma d\beta(t),$$

صدق می‌کند. لذا خواهیم داشت:

$$Y(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\beta(t),$$

و

$$X(t) = X(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\beta(t)}.$$

تعریف ۵.۲.۲. اگر یک فضای احتمال با یک فیلتریشن، یک حرکت براونی $\hat{\beta}(t)$ ، یک فرایند $\hat{X}(t)$ سازگار با فیلتریشن موجود باشد، به طوری که:

• $\hat{X}(0)$ دارای توزیع احتمال باشد،

• برای همه t ها انتگرال‌های زیر موجود باشند،

• و $\hat{X}(t)$ در

$$\hat{X}(t) = \hat{X}(0) + \int_0^t \mu(\hat{X}(u), u) du + \int_0^t \sigma(\hat{X}(u), u) d\hat{\beta}(u),$$

صدق کند، آنگاه $\hat{X}(t)$ یک جواب ضعیف^{۱۲} برای SDE (۱.۲) خواهد بود.

مثال ۶.۲.۲. (Tanaka's SDE) معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$dX(t) = \text{sign}(X(t)) d\beta(t),$$

که

$$\text{sign} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0, \\ -1 & \text{if } x < 0, \end{cases}$$

نشان می‌دهیم حرکت براونی یک جواب ضعیف یکتا از Tanaka's SDE است. فرض کنید $X(t)$ تعدادی حرکت براونی باشد، در فرایند

$$Y(t) = \int_0^t \frac{1}{\text{sign}(X(s))} dX(s) = \int_0^t \text{sign}(X(s)) dX(s),$$

^{۱۲}Weak solution

• $\text{sign}(X(t))$ سازگار می‌باشد،

• $\int_0^T (\text{sign}(X(t)))^2 dt = T < \infty$

• $Y(t)$ خوش تعریف و یک مارتینگل پیوسته است.

$$[Y, Y](T) = \int_0^T (\text{sign}^2(X(S))) d[x, x](s) = \int_0^T ds = t.$$

لذا $Y(t)$ یک حرکت براونی است،

$$\hat{\beta}(t) = \int_0^t \frac{dX(s)}{\text{sign}(X(s))}.$$

بنابراین هر جواب ضعیف، یک حرکت براونی است.

نتیجه ۷.۲.۲. فرض کنید $X(t)$ و $\hat{X}(t)$ جواب‌های واقعی و تقریبی (۲.۲) با مقدار اولیه $X(0)$ باشند، گوییم جواب معادله SDE با مقدار اولیه $X(0)$ یکتا است اگر هر دو جواب $X(t)$ و $\hat{X}(t)$ روی بازه $[0, T]$ معادل باشند یعنی:

$$P(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - \hat{X}(t)|) = 0.$$

لم ۸.۲.۲. اگر $X(t)$ و $\hat{X}(t)$ جواب‌های تقریبی و واقعی در روش اویلر باشند آنگاه داریم:

$$\|X(t) - \hat{X}(t)\| = \sqrt{E(X(t) - \hat{X}(t))^2} \sim O(\sqrt{\Delta t}) \quad \text{(i)} \quad \text{(همگرایی قوی)}$$

$$\|X(t) - \hat{X}(t)\| = E(X(t) - \hat{X}(t)) \sim O(\Delta t) \quad \text{(ii)} \quad \text{(همگرایی ضعیف)}$$

لم ۹.۲.۲. *Gronwall inequality* فرض کنید اعداد صحیح و مثبت A و F وجود دارند به طوری که تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در

$$f(t) \leq F + A \int_0^t f(s) ds,$$

صدق کند. آنگاه:

$$f(t) \leq Fe^{At}.$$

برهان. فرض کنید $I(t) = \int_0^t f(s) ds$ ، لذا داریم:

$$\frac{dI}{dt} \leq F + AI, \quad (5.2)$$

با ضرب دو طرف (۵.۲) در e^{-At} داریم:

$$\frac{d}{dt}(Ie^{-At}) \leq Fe^{-At}, \quad (۶.۲)$$

با انتگرال گرفتن از دو طرف (۶.۲) و با توجه به اینکه $I(0) = 0$ خواهیم داشت:

$$I \leq F \frac{(e^{-At} - 1)}{A}.$$

□

قضیه ۱۰.۲.۲. فرض کنید $W(t)$ یک فرایند وینر روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ باشد $\mu : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ توابع اندازه‌پذیر باشند که در شرط:

$$|\mu(x, t)| + |\sigma(x, t)| \leq C(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T],$$

و شرط لپشیتز^{۱۳}:

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T],$$

صدق کنند، که $D \geq 0$ و $C \geq 0$ ثابت، $|\sigma|^2 = \sum_{i,j} |\sigma_{ij}|^2$. فرض کنید Z یک متغیر تصادفی مستقل از σ -جبر $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$ باشد به طوری که:

$$\mathbf{E}[|Z|^2] < \infty.$$

آنگاه معادله دیفرانسیل تصادفی

$$dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) d\beta(t), \quad (۷.۲)$$

دارای یک جواب واحد $X = (X(t))_{0 \leq t \leq T}$ است و

$$E \left[\int_0^T |X(t)|^2 dt \right] < \infty.$$

برهان. ابتدا یکتایی را اثبات می‌کنیم، فرض کنید $X_1(t, w) = X_t(w)$ و $X_2(t, w) = \hat{X}_t(w)$ جواب‌هایی با مقدار اولیه Z و \hat{Z} باشند، به طوری که $X_1(t, w) = Z(w)$ و $X_2(t, w) = \hat{Z}(w)$ که

^{۱۳}Lipschitz

$w \in \Omega$. باید نشان دهیم $Z = \hat{Z}$.

قرار می‌دهیم $a(s, w) = \mu(s, X_s) - \mu(s, \hat{X}_s)$ و $\gamma(s, w) = \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s)$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[|X_t - \hat{X}_t|^2] &= \mathbf{E}\left[\left(Z - \hat{Z} + \int_0^t a \, ds + \int_0^t \gamma \, d\beta_s\right)^2\right] \\ &\leq \mathfrak{V}\mathbf{E}[|Z - \hat{Z}|^2] + \mathfrak{V}\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t a \, ds\right)^2\right] + \mathfrak{V}\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \gamma \, ds\right)^2\right] \\ &\leq \mathfrak{V}\mathbf{E}[|Z - \hat{Z}|^2] + \mathfrak{V}t\mathbf{E}\left[\int_0^t a^2 \, ds\right] + \mathfrak{V}\mathbf{E}\left[\int_0^t \gamma^2 \, ds\right] \\ &\leq \mathfrak{V}\mathbf{E}[|Z - \hat{Z}|^2] + \mathfrak{V}(1+t)D^2 \int_0^t \mathbf{E}[|X_s - \hat{X}_s|^2] \, ds. \end{aligned}$$

بنابراین تابع

$$v(t) = \mathbf{E}[|X_t - \hat{X}_t|^2]; \quad 0 \leq t \leq T$$

در

$$v(t) \leq F + A \int_0^t v(s) \, ds,$$

صدق می‌کند، که $F = \mathfrak{V}\mathbf{E}[|Z - \hat{Z}|^2]$ و $A = \mathfrak{V}(1+t)D^2$. با استفاده از لم (۹.۲.۲) داریم:

$$v(t) \leq Fe^{At}.$$

اکنون فرض کنید $Z = \hat{Z}$ ، آنگاه $F = 0$ و برای همه $t \geq 0$ ، $v(t) = 0$ خواهد بود و بنابراین:

$$\mathbf{P}[|X_t - \hat{X}_t| = 0, \quad \forall t \in \mathbf{Q} \cap [0, T]] = 1,$$

که \mathbf{Q} مجموعه اعداد گویا است. لذا

$$\mathbf{P}[|X_1(t, w) - X_1(t, w)| = 0, \quad \forall t \in \mathbf{Q} \cap [0, T]] = 1,$$

اثبات یکتایی کامل شد.

برای اثبات وجود، تعریف می‌کنیم $Y_t^{(0)} = X_0$ و $Y_t^{(k)} = Y_t^{(k)}(w)$ و با استقرا روی k داریم:

$$Y_t^{(k+1)} = X_0 + \int_0^t \mu(s, Y_s^{(k)}) \, ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(k)}) \, d\beta_s.$$

به روش مشابه اثبات یکتایی داریم:

$$\mathbf{E}[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2] \leq \mathfrak{V}(1+T)D^2 \int_0^t \mathbf{E}[|Y_t^{(k)} - Y_t^{(k-1)}|^2] \, ds \quad k \geq 1, t \leq T,$$

و

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[|Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)}|^p] &\leq \nu C^\nu t^\nu (1 + \mathbf{E}[|X_\bullet|^p]) + \nu C^\nu t (1 + \mathbf{E}[|X_\bullet|^p]) \\ &\leq A_1 t, \end{aligned}$$

که A_1 فقط وابسته به C ، T و $\mathbf{E}[|X_\bullet|^p]$ می باشد. بنابراین با استقرار روی k بدست می آوریم:

$$\mathbf{E}[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^p] \leq \frac{A_1^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}; \quad k \geq 0, t \in [0, T],$$

A_2 فقط وابسته به C ، T و D می باشد. از اینرو اگر λ اندازه لبگ روی $[0, T]$ باشد و $m > n \geq 0$ داریم:

$$\begin{aligned} \|Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)}\|_{L^p(\lambda \times P)} &= \left\| \sum_{k=n}^{m-1} Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)} \right\|_{L^p(\lambda \times P)} \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}\|_{L^p(\lambda \times P)} = \sum_{k=n}^{m-1} \left(\mathbf{E} \left[\int_0^T |Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^p dt \right] \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left(\int_0^T \frac{A_1^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!} \right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{A_1^{k+1} T^{k+1}}{(k+1)!} \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

بنابراین $\{Y_t^n\}_{n=0}^\infty$ یک دنباله کوشی در $L^p(\lambda \times P)$ می باشد. از اینرو $\{Y_t^n\}_{n=0}^\infty$ در $L^p(\lambda \times P)$ همگرا است. X_t را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X_t := \lim_{n \rightarrow \infty} Y_t^n,$$

در این صورت X_t ، \mathcal{F}_t^z -اندازه پذیر است و این برای هر Y_t^n برقرار است. ثابت می کنیم X_t در (۷.۲) صدق می کند. برای همه n و $t \in [0, T]$ داریم:

$$Y_t^{(n+1)} = X_\bullet + \int_\bullet^t \mu(s, Y_s^{(n)}) ds + \int_\bullet^t \sigma(s, Y_s^{(n)}) d\beta_s.$$

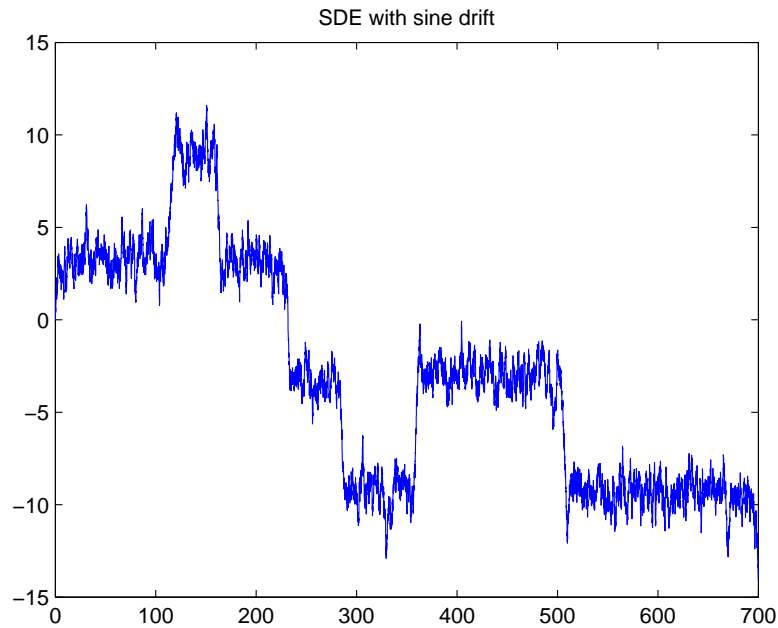
اکنون فرض می کنیم $n \rightarrow \infty$. سپس با استفاده از نامساوی هولدر^{۱۴} داریم:

$$\int_\bullet^t \mu(s, Y_s^{(n)}) ds \rightarrow \int_\bullet^t \mu(s, X_s) ds \quad \text{in } L^p(P),$$

همچنین با استفاده از ایتو ایزومتری داریم:

$$\int_\bullet^t \sigma(s, Y_s^{(n)}) ds \rightarrow \int_\bullet^t \sigma(s, X_s) d\beta_s \quad \text{in } L^p(P),$$

^{۱۴}Hölder



شکل ۱.۲: جواب تقریبی برای مثال (۱۱.۲.۲)

بنابراین برای همه $t \in [0, T]$ خواهیم داشت:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) d\beta_s.$$

□

مثال ۱۱.۲.۲. معادله دیفرانسیل تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

$$dX(t) = \sin(X(t)) dt + \sigma d\beta(t). \quad (۸.۲)$$

با فرض $\sigma = 1$ و $X(0) = 0$.

حل: با استفاده از روش اویلر جواب تقریبی معادله به صورت زیر است:

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + \sin(\hat{X}(t_i))\Delta t + \sigma\Delta\beta(t).$$

با اجرای جواب تقریبی در نرم افزار Matlab شکل ۱.۲ را خواهیم داشت.

مثال ۱۲.۲.۲. معادله دیفرانسیل تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

$$dX(t) = \lambda X(t) dt + \mu X(t) dW(t).$$

فرض کنید $\lambda = 2, \mu = 1, X(0) = 1$ باشد.

حل: با افراز بازه $[0, T]$ به صورت

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = T,$$

جواب تقریبی معادله با استفاده از روش اویلر به صورت زیر خواهد بود:

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \lambda X(t_i) \Delta t + \mu X(t_i) \sqrt{\Delta t} \Delta W(t).$$

برای بدست آوردن جواب واقعی قرار می‌دهیم $g(x) = \ln x$ ، آنگاه $g'(x) = \frac{1}{x}$ و $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$.
با استفاده از انتگرال تصادفی و انتگرال گیری جز به جز داریم:

$$\begin{aligned} d(\ln X(t)) &= \frac{1}{X(t)} dX(t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X(t)^2} \right) \mu^2 X(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{X(t)} \left(\lambda X(t) dt + \mu X(t) dW(t) \right) - \frac{1}{2} \mu^2 dt \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{2} \mu^2 \right) dt + \mu dW(t), \end{aligned}$$

بنابراین $Y(t) = \ln X(t)$ در

$$dY(t) = \left(\lambda - \frac{1}{2} \mu^2 \right) dt + \mu dW(t),$$

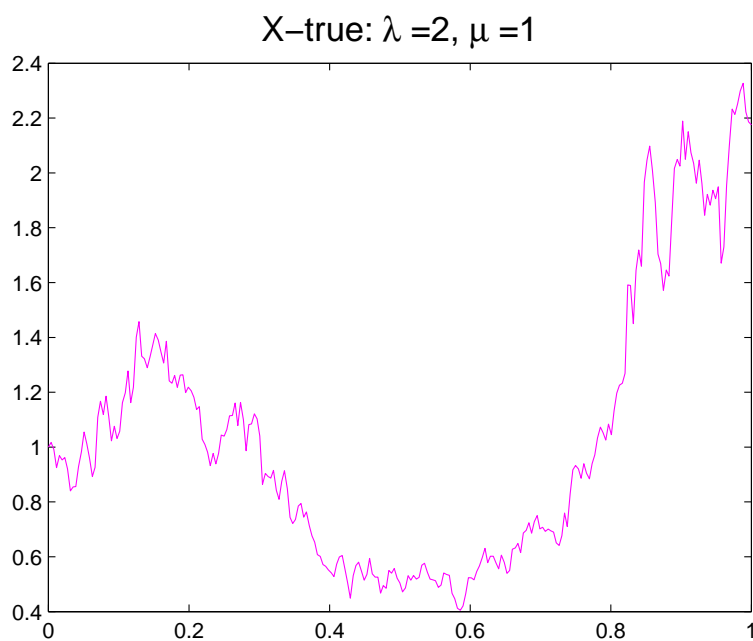
صدق می‌کند. لذا خواهیم داشت:

$$Y(t) = \left(\lambda - \frac{1}{2} \mu^2 \right) t + \mu W(t),$$

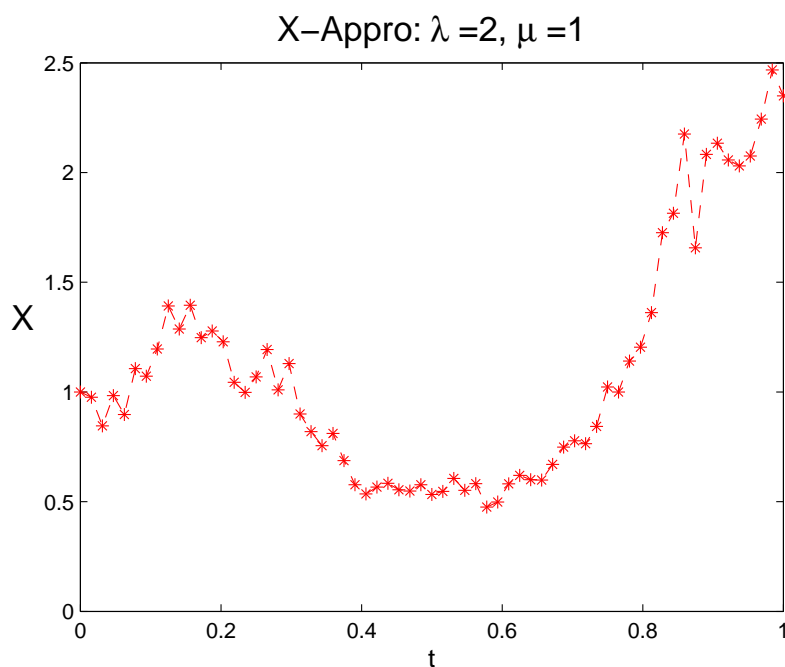
و

$$X(t) = X(0) e^{(\lambda - \frac{1}{2} \mu^2)t + \mu W(t)}.$$

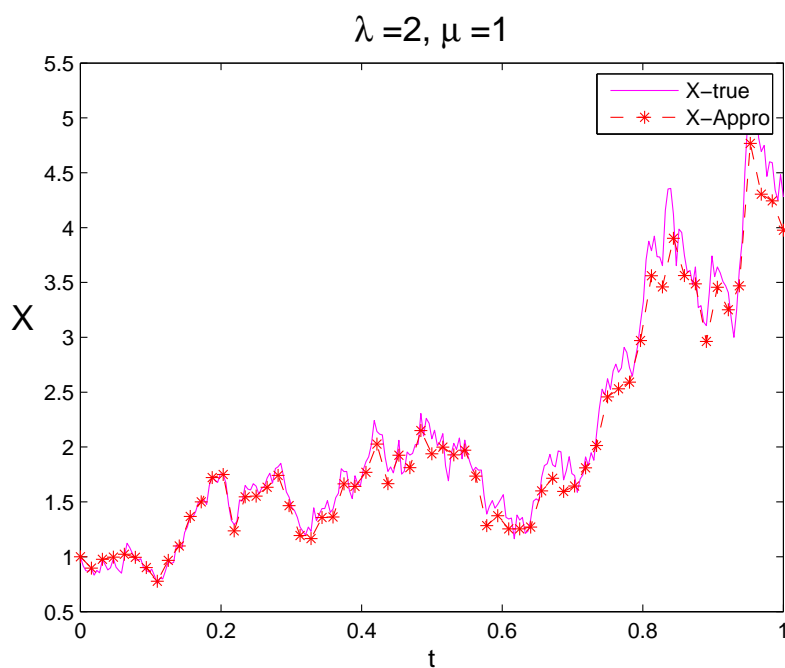
که با اجرای این جواب‌ها در نرم‌افزار Matlab (۲.آ)، جواب واقعی در شکل ۲.۲، جواب تقریبی در شکل ۳.۲، مقایسه جواب واقعی و جواب تقریبی در شکل ۴.۲، همگرایی قوی و ضعیف در شکل ۵.۲ و شکل ۶.۲، پایداری در شکل ۷.۲ و شکل ۸.۲ خواهیم داشت. مشاهده می‌کنیم که در بازه‌های زمانی کوتاه‌تر، در شکل ۷.۲ و شکل ۸.۲ سیستم به سمت پایداری میل می‌کند.



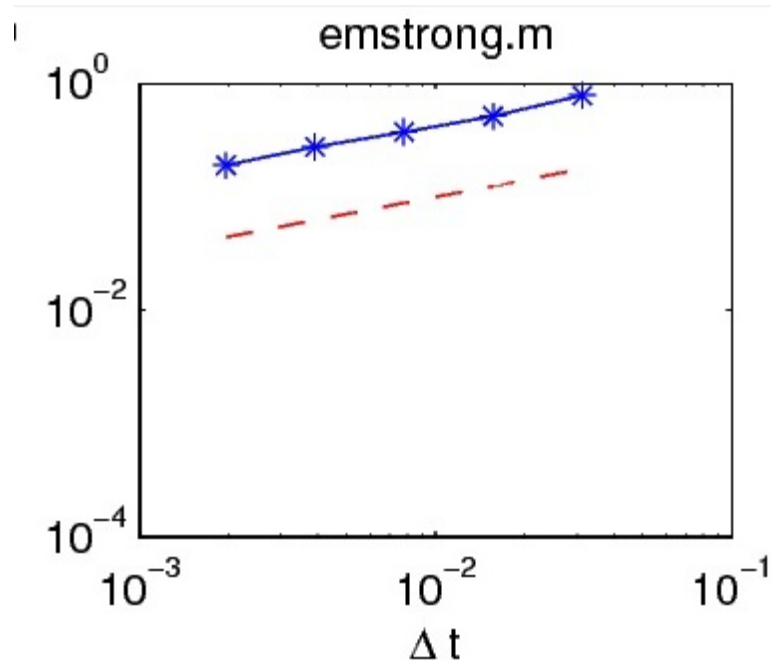
شکل ۲.۲: جواب واقعی برای مثال (۱۲.۲.۲)



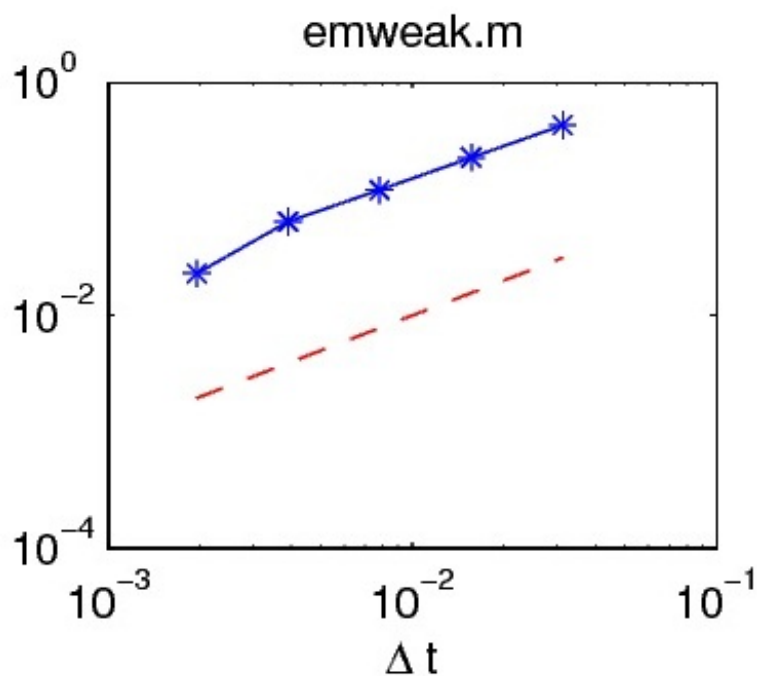
شکل ۳.۲: جواب تقریبی برای مثال (۱۲.۲.۲)



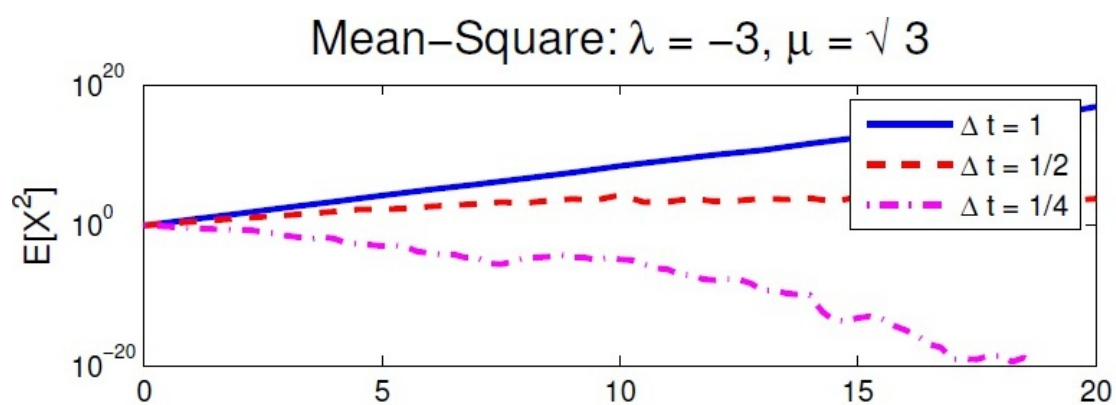
شکل ۴.۲: مقایسه جواب واقعی و جواب تقریبی برای مثال (۱۲.۲.۲)



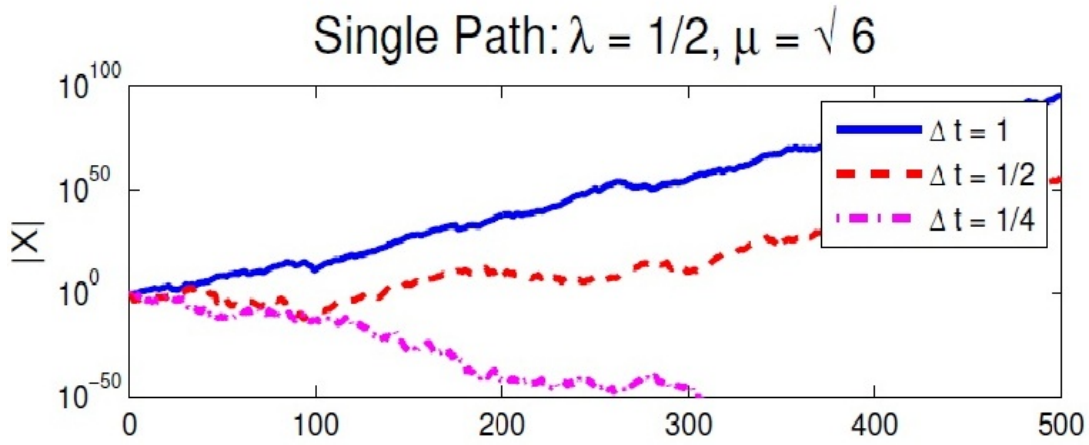
شکل ۵.۲: همگرایی قوی برای مثال (۱۲.۲.۲)



شکل ۶.۲: همگرایی ضعیف برای مثال (۱۲.۲.۲)



شکل ۷.۲: پایداری برای مثال (۱۲.۲.۲)



شکل ۸.۲: پایداری برای مثال (۱۲.۲.۲)

مثال ۱۳.۲.۲. معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$dX(t) = -X(t) dt + \sigma d\beta(t).$$

در این مثال می‌خواهیم رابطه بین طول گام ($h = \Delta t$) و اختلال (noise) را بررسی کنیم.

حل: جواب تقریبی معادله با استفاده از روش اویلر به صورت زیر است:

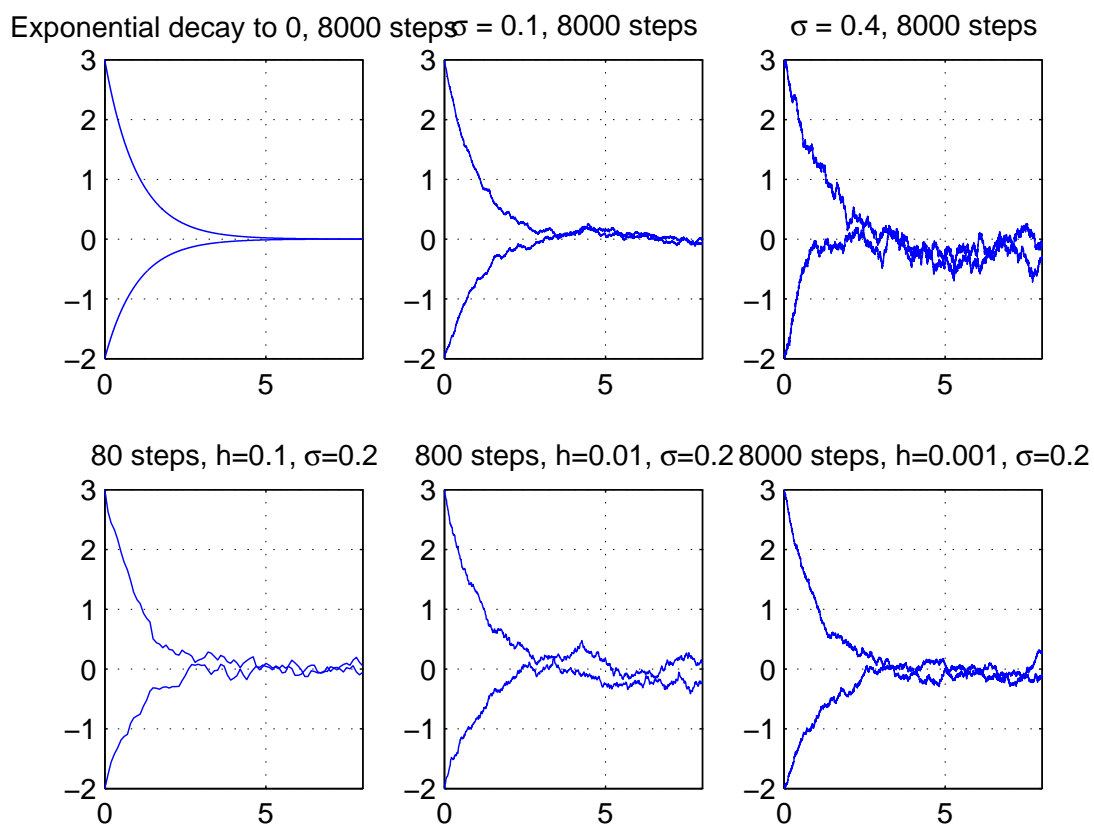
$$X(t_{i+1}) = X(t_i) - \lambda X(t_i) \Delta t + \sigma X(t_i) \sqrt{\Delta t} \Delta \beta(t).$$

و جواب واقعی آن

$$X(t) = X(0) e^{-(\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \beta(t)}.$$

با اجرای جواب‌ها برای σ و $h = \Delta t$ های مختلف در نرم‌افزار Matlab نتایج شکل ۹.۲ را خواهیم داشت.

مشاهده می‌کنیم که در بازه‌های زمانی کوتاه‌تر در شکل ۹.۲ دامنه نوسانات ما بیشتر و در نتیجه پایداری بهتر خواهد بود.



شکل ۹.۲: بررسی رابطه بین طول گام و اختلال برای مثال (۱۳.۲.۲)

فصل ۳

روش المان‌های محدود برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی

تعریف ۱۴.۰.۳. فرض کنید $Q : H \rightarrow H$ یک عملگر معین مثبت، خطی و کراندار روی H باشد، و $\{\beta_l(t)\}_{l=1}^{\infty}, t \geq 0$ یک خانواده از حرکت براونی حقیقی مقدار و مستقل روی فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) باشد، فرض کنید σ, \mathcal{F}_t -جبر تولید شده توسط $\beta_l(s), s \leq t, l = 1, 2, \dots$ آنگاه:

۱. فرایند وینر هسته‌ای^۱ (اختلال رنگی^۲)

اگر $Tr(Q) = \sum_{k=1}^{\infty} (Qf_k, f_k) < \infty$ ، که f_k ها توابع پایه‌ای یکه متعامد در H هستند. فرض کنید $\{\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ مقادیر ویژه متناظر با توابع ویژه $\{e_l\}_{l=1}^{\infty}$ باشند در این صورت

$$W(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l^{\frac{1}{2}} e_l \beta_l(t),$$

در $L_2(\Omega; H)$ همگرا خواهد بود زیرا

$$\mathbf{E} \left\| \sum_{l=m}^n \gamma_l^{\frac{1}{2}} e_l \beta_l(t) \right\|^2 = \sum_{l=m}^n \gamma_l^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \beta_l(t)^2 = t \sum_{l=m}^n \gamma_l \rightarrow 0, \text{ as } m, n \rightarrow \infty.$$

که $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ یک خانواده از متغیرهای تصادفی گوسی با مقادیری در H و سازگار با فیلتریشن $\{\mathcal{F}\}_{t \geq 0}$ می‌باشد. در این حالت $W(t)$ یک فرایند وینر هسته‌ای (در حالت خاص اختلال رنگی) گفته می‌شود.

^۱ Nuclear wiener process

^۲ Coior noise

۲. فرایند وینر استوانه‌ای^۳ (اختلال سفید^۴)

اگر $Q = I$ (عملگر همانی) آنگاه

$$W(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l e_l, \quad (1.3)$$

در $L_2(\Omega; H)$ همگرا نیست، زیرا $Tr(Q) = Tr(I) = \infty$. از طرفی

$$(s_n, h) = \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l(t)(e_l, h) \quad h \in H,$$

در $L_2(\Omega; \mathbb{R})$ همگرا خواهد بود و $(W(t), h)$ یک فرایند وینر حقیقی مقدار می‌باشد. با وجود این اگر $Q = I$ ، آنگاه (۱.۳) یک فرایند وینر استوانه‌ای (در حالت خاص اختلال سفید) گفته می‌شود.

در روش المان‌های محدود برای حل معادله (۱.۱) چون معادله به زمان و مکان بستگی دارد لذا دو حالت در نظر می‌گیریم، ابتدا زمان را ثابت نگه می‌داریم و معادله را نسبت به مکان حل می‌کنیم که به گسسته‌سازی ناقص^۵ موسوم است، اگر معادله را هم نسبت به زمان و هم نسبت مکان حل کنیم گسسته‌سازی کامل^۶ انجام شده است.

حال می‌خواهیم جواب تقریبی $u_h(x, t)$ که زمان ثابت نگه داشته شده است را برای معادله (۱.۱) بدست آوریم. اساس کار روش المان‌های محدود به این صورت است که ابتدا در ناحیه $\Omega = \mathbb{R}^d$ که یک چند ضلعی می‌باشد مثلثی‌سازی^۷ می‌کنیم. در این مثلثی‌سازی باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$.1 \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

$$.2 \quad h_K = \text{diam}(K)$$

$$.3 \quad h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$$

در این صورت یک ناحیه با اجزای مثلثی $\mathcal{T}_h = \{K_j\}_{j=1}^{m_h}$ خواهیم داشت، که هر K خود یک مثلث است. m_h تعداد نقاط داخل چند ضلعی می‌باشد. رئوس P از مثلث‌های $K \in \mathcal{T}_h$ ، گره گفته

^۳Cylindrical wiener process

^۴White noise

^۵Semi discretization

^۶Fully discretization

^۷Triangulation

می‌شود. اشتراک هر دو مثلث از T_h یا باید تهی باشد یا یک گره و یا یک لبه مشترک باشد. و اینکه هیچ گره‌ای داخل یک لبه از T_h ، قرار نگیرد. حال اگر Ω یک ناحیه محدب و هموار باشد اما چند ضلعی نباشد، برای مش‌بندی باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱. تعدادی نقاط روی مرز دامنه مشخص کنیم.

۲. این نقاط را به وسیله خطوط راست بهم وصل کنیم، ناحیه جدید یک چند ضلعی خواهد بود.

۳. تعدادی نقاط دلخواه در داخل چند ضلعی در نظر می‌گیریم و مثلثی‌سازی را انجام می‌دهیم.

خواهیم دید که در این مش‌بندی هر چقدر مش ظریفتر انتخاب شود، جواب تقریبی ما دقیق‌تر خواهد بود.

فرض کنید $\{P_j\}_{j=1}^{m_h}$ مجموعه‌ای از گره‌های داخلی باشد و S_h فضای توابع خطی قطعه‌ای پیوسته باشد:

$$S_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_{\Gamma} = 0, \text{ در } K \in T_h \text{ خطی است}\}.$$

حال معادله (۴.۱) را در تابعی مانند $\chi \in S_h$ ضرب می‌کنیم و روی ناحیه مورد نظر انتگرال‌گیری می‌کنیم داریم:

$$\begin{aligned} (u_{h,t}, \chi) + (A_h u_h, \chi) &= (P_h dW, \chi), & \forall \chi \in S_h, \\ (u_{h,t} + A_h u_h - P_h dW, \chi) &= 0, & \forall \chi \in S_h, \end{aligned}$$

لذا خواهیم داشت:

$$du_h + A_h u_h = P_h dW, \quad u_h(0) = P_h u_0. \quad (2.3)$$

که این در واقع حالت گسسته‌سازی شده معادله (۱.۱) در مکان (گسسته‌سازی ناقص) است. یک جواب ضعیف برای معادله (۲.۳) به صورت

$$u_h(t) = E_h(t) P_h u_0 + \int_0^t E_h(t-s) P_h dW(s), \quad E_h(t) = e^{-A_h t}. \quad (3.3)$$

است، در حالت گسسته‌سازی کامل به روش المان‌های محدود برای معادله (۱.۱)، فرض کنید $U^n \in S_h$ جواب تقریبی از $u(t)$ باشد و $t = t_n = nk$ ، با استفاده از روش اویلر پسرو داریم:

$$\partial_t U^n = \frac{U^n - U^{n-1}}{k}, \quad \partial_t W^n = \frac{W^n - W^{n-1}}{k},$$

معادله (۲.۳) را در نظر می‌گیریم و عبارت $u_{h,t} = U^n$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$(\partial_t U^n, \chi) + A_h(U^n, \chi) = (\partial_t W^n, \chi), \quad \forall \chi \in S_h,$$

$$\left(\frac{U^n - U^{n-1}}{k}, \chi\right) + A_h(U^n, \chi) = \left(\frac{W^n - W^{n-1}}{k}, \chi\right) \quad \forall \chi \in S_h,$$

$$\frac{1}{k}(U^n, \chi) - \frac{1}{k}(U^{n-1}, \chi) + A_h(U^n, \chi) = \frac{1}{k}(\Delta W^n, \chi), \quad \forall \chi \in S_h,$$

$$(U^n - U^{n-1} + kA_h U^n - \Delta W^n, \chi) = 0, \quad \forall \chi \in S_h,$$

لذا داریم:

$$U^n - U^{n-1} + kA_h U^n = \Delta W^n, \quad U^\circ = P_h u_\circ, \quad U^n \in S_h. \quad (۴.۳)$$

با $\tau(\lambda) = (1 + \lambda)^{-1}$ ، (۴.۳) به شکل

$$U^n = \tau(kA_h)U^{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \tau(kA_h)P_h dW(s), \quad U^\circ = P_h u_\circ, \quad U^n \in S_h.$$

است. یک جواب ضعیف برای (۴.۳) به صورت

$$U^n = E_{k,h}^n P_h u_\circ + \sum_{j=1}^n E_{k,h}^{n-j+1} P_h \Delta W^j. \quad (۵.۳)$$

است، که $\Delta W^n = W^n - W^{n-1}$ و $E_{k,h} = (I + kA_h)^{-1}$.

۱.۳ معرفی دسته‌ای دیگر از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی

۱. یکی دیگر از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی خطی، معادله موج تصادفی^۸

می‌باشد که به فرم

^۸Stochastic wave equation

$$\begin{cases} \ddot{u} - \Delta u dt = dW, & \text{in } \mathcal{D} \times (0, \infty) \\ u = 0, & \text{in } \partial\mathcal{D} \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) = u_0, \dot{u}(\cdot, 0) = v_0, & \text{in } \mathcal{D} \end{cases}$$

تعریف می‌شود، که $\mathcal{D} = \mathbf{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$)، یک چند ضلعی کراندار، محدب با مرز $\partial\mathcal{D}$ می‌باشد. $W(t)$ یک فرایند وینر با مقادیری در $L^2(\mathcal{D})$ روی یک فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ مجهز به فیلتر است. فرض می‌کنیم u_0 و v_0 متغیرهای تصادفی \mathcal{F}_0 -اندازه‌پذیر باشند. یک جواب ضعیف برای معادله موج به صورت

$$u(t) = \int_0^t A^{-\frac{1}{2}} \sin((t-s)A^{\frac{1}{2}}) dW(s),$$

است، برای راحتی شرایط اولیه را $u_0 = v_0 = 0$ قرار می‌دهیم، $-A = \Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ عملگر لاپلاس با دامنه $D(A) = H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})$ است، $A^{-\frac{1}{2}} \sin(tA^{\frac{1}{2}})f$ جوابی از معادله

$$\begin{cases} \ddot{v} + Av = 0 & t \geq 0, \\ v(0) = 0, \dot{v}(0) = f, \end{cases}$$

می‌باشد.

۲. معادلاتی به فرم

$$du + Au dt = \sigma(u) dW, \quad 0 < t \leq T, u(0) = u_0, \quad (6.3)$$

را معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی غیر خطی^۹ می‌گوییم. $H = L^2(\mathcal{D})$ فضای هیلبرت، $\mathcal{D} = \mathbf{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) ناحیه کراندار می‌باشد. $u(t)$ یک فرایند تصادفی با مقادیری در H روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ، $-A = \Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ، یک عملگر کراندار، معین مثبت، خودالحاق^{۱۰} و خطی با دامنه $D(A) = H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})$ می‌باشد، $W(t)$ یک فرایند وینر با مقادیری در H روی یک فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ است.

^۹Nonlinear stochastic partial differential equation

^{۱۰}Self-adjoint

فرض کنیم $\sigma : H \rightarrow L^2_0$ در شرایط زیر صدق کند:

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\|_{L^2_0} \leq C\|x - y\|, \forall x, y \in H, \quad (\text{i})$$

$$\|\sigma(x)\|_{L^2_0} \leq C\|x\|, \forall x \in H. \quad (\text{ii})$$

یک جواب ضعیف برای معادله (۶.۳) به شکل

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)\sigma(u(s))dW(s), \quad E(t) = e^{-At}.$$

است، که $E(t) = e^{-At}$ نیم‌گروه تولید شده توسط $-A$ می‌باشد. به علاوه

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E}\|u(t)\|^2 \leq C\|(1 + \mathbf{E}\|u_0\|^2)^2\|.$$

برای حل این مسایل با استفاده از روش المان‌های محدود، از آنجایی که معادله (۶.۳) به زمان و مکان بستگی دارد، گسسته‌سازی نسبت به زمان و مکان انجام می‌شود. اگر زمان را ثابت نگه داریم و معادله را نسبت به مکان حل کنیم گسسته‌سازی ناقص گفته می‌شود.

$$du_h + A_h u_h = P_h \sigma(u_h) dW, \quad 0 \leq t \leq T, u_h(0) = P_h u_0,$$

یک جواب ضعیف این معادله به صورت

$$u_h(t) = E_h(t)P_h u_0 + \int_0^t E_h(t-s)P_h \sigma(u_h(s))dW(s).$$

است. اگر معادله را نسبت به زمان و مکان حل کنیم گسسته‌سازی کامل گفته می‌شود.

$$\begin{cases} \frac{U^n - U^{n-1}}{K} + A_h U^n = \frac{1}{K} \int_{t_{n-1}}^{t_n} P_h \sigma(U^n) dW(s) & n \geq 1, \\ U^0 = P_h u_0, \end{cases} \quad (\text{۷.۳})$$

با $\tau(\lambda) = (1 + \lambda)^{-1}$ می‌توانیم معادله (۷.۳) را به شکل

$$\begin{cases} U^n = \tau(kA_h)U^{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \tau(kA_h)P_h \sigma(U^n) dW(s) & n \geq 1, \\ U^0 = P_h u_0, \end{cases}$$

بنویسیم.

لم ۱.۱.۳. فرض کنید $E(t) = e^{-At}$ یک نیم‌گروه تولید شده توسط $-A$ روی H باشد، برای هر

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $l > 0$ ، ثابتی مانند $C > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$|D_t^l E(t)v|_\beta \leq Ct^{-\frac{(\beta-v)}{\gamma-l}} |v|_\alpha, \quad t > 0, \gamma l + \beta \geq \alpha. \quad (i)$$

$$\int_0^t s^\alpha |D_t^l E(s)v|_\beta^2 ds \leq C|v|_{\dot{V}_{l-\alpha-1}}^2, \quad t \geq 0, \alpha \geq 0. \quad (ii)$$

لم ۲.۱.۳. برای $\alpha \geq 0$ و $0 \leq \beta \leq 1$ دلخواه، داریم:

$$\|A^\alpha E(t)\| \leq Ct^{-\alpha}, \quad t \geq 0. \quad (i)$$

$$\|A^{-\beta}(I - E(t))\| \leq t^\beta, \quad t \geq 0. \quad (ii)$$

قضیه ۳.۱.۳. اگر $\|A^{\frac{\beta-1}{\gamma}}\|_{L^2} < \infty$ و $u_0 \in L_\gamma(\Omega; \dot{H}^\beta)$ برای $\beta \geq 0$ ، آنگاه جواب ضعیف (۳.۳) از (۱.۱)، در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\|u(t)\|_{L_\gamma(\Omega; \dot{H}^\beta)} \leq C(\|u_0\|_{L_\gamma(\Omega; \dot{H}^\beta)} + \|A^{\frac{\beta-1}{\gamma}}\|_{L^2}).$$

همچنین در حالت خاص اگر $W(t)$ یک فرایند وینر با مقادیری در H با عملگر کواریانس Q باشد به‌طوری‌که $Tr(Q) < \infty$ ، آنگاه برای $u_0 \in L_\gamma(\Omega; \dot{H}^1)$ خواهیم داشت:

$$\|u(t)\|_{L_\gamma(\Omega; \dot{H}^1)} \leq C(\|u_0\|_{L_\gamma(\Omega; \dot{H}^1)} + Tr(Q)^{\frac{1}{\gamma}}).$$

برهان. از (۲.۱) نرم می‌گیریم و با استفاده از لم (۱.۱.۳) و ویژه‌گی ایزومتري خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|u(t)|_\beta^2 &\leq C\left(\mathbf{E}|E(t)u_0|_\beta^2 + \mathbf{E}\left|\int_0^t E(t-s)dW(s)\right|_\beta^2\right) \\ &= C\left(\mathbf{E}\|A^{\frac{\beta}{\gamma}}E(t)u_0\|^2 + \mathbf{E}\left\|\int_0^t A^{\frac{\beta}{\gamma}}E(t-s)dW(s)\right\|^2\right) \\ &= C\left(\mathbf{E}\|A^{\frac{\beta}{\gamma}}E(t)u_0\|^2 + \int_0^t \|A^{\frac{\beta}{\gamma}}E(t-s)Q^{\frac{1}{\gamma}}\|_{L^2}^2 ds\right) \\ &= C\left(\mathbf{E}\|E(t)A^{\frac{\beta}{\gamma}}u_0\|^2 + \sum_l \int_0^t \|A^{\frac{1}{\gamma}}E(t-s)A^{\frac{(\beta-1)}{\gamma}}Q^{\frac{1}{\gamma}}\varphi_l\|^2 ds\right) \\ &= C\left(\mathbf{E}\|A^{\frac{\beta}{\gamma}}u_0\|^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \|A^{\frac{(\beta-1)}{\gamma}}Q^{\frac{1}{\gamma}}\varphi_l\|^2\right) \\ &= C\left(\mathbf{E}|u_0|_\beta^2 + \|A^{\frac{(\beta-1)}{\gamma}}Q^{\frac{1}{\gamma}}\|_{L^2}^2\right). \end{aligned}$$

در حالت خاص اگر $W(t)$ یک فرایند وینر با مقادیری در H و با عملگر کواریانس Q باشد و $Tr(Q) < \infty$ ، آنگاه $\beta = 1$ ، زیرا

$$\|I\|_{L^2_\dagger} = \sum_{l=1}^{\infty} \|Q^{\frac{1}{2}} e_l\|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l^{\frac{1}{2}} = \text{Tr}(Q) < \infty.$$

□

نتیجه ۴.۱.۳. فرض کنید $u(t)$ جوابی از (۱.۱) باشد، $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ عملگر لاپلاس با دامنه $D(A) = H^2_0(0, 1) \cap H^1(0, 1)$ فرض کنید $W(t)$ یک فرایند وینر استوانه‌ای با $Q = I$. آنگاه برای هر $\beta \in [0, \frac{1}{2})$ داریم:

$$\|u(t)\|_{L^2_\dagger(\Omega; \dot{H}^\beta)} \leq C(1 + \|u_0\|_{L^2_\dagger(\Omega; \dot{H}^\beta)}), \quad u_0 \in L^2_\dagger(\Omega; \dot{H}^\beta).$$

برهان. کافی است نشان دهیم که در چه حالتی $\|A^{\frac{\beta-1}{2}}\|_{L^2_\dagger} < \infty$ ، واضح است که A دارای مقادیر ویژه $\lambda_j = j^2 \pi^2, j = 1, 2, \dots$ و لذا توابع ویژه $\varphi_j = \sqrt{2} \sin j\pi x, j = 1, 2, \dots$ که تشکیل یک پایه یک‌متعامد در $H = L^2(0, 1)$ می‌دهند، است. بنابراین

$$\|A^{\frac{\beta-1}{2}}\|_{L^2_\dagger} = \sum_{j=1}^{\infty} \|A^{\frac{\beta-1}{2}} \varphi_j\| = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{(\beta-1)/2} \approx \sum_{j=1}^{\infty} j^{\frac{\beta-1}{2}} < \infty \iff d = 1, 0 \leq \beta < \frac{1}{2}.$$

□

در لم زیر نشان می‌دهیم که شرط $\|A^{\frac{\beta-1}{2}}\|_{L^2_\dagger} < \infty$ در قضیه (۳.۱.۳) معادل این است که بگوییم $W(t)$ دارای مقادیری در $\dot{H}^{\beta-1}$ می‌باشد. در حالت خاص $W(t) \in \dot{H}^{-1}$.

لم ۵.۱.۳. فرض کنید $W(t)$ یک فرایند وینر با عملگر کواریانس Q باشد. همچنین فرض کنید A و Q بردار ویژه‌های یکسان دارند، آنگاه:

(i) اگر $\|A^{\frac{\beta-1}{2}}\|_{L^2_\dagger} < \infty$ برای $\beta \in [0, 1]$ ، آنگاه

$$W(t) = \sum_{l=1}^{\infty} Q^{\frac{1}{2}} e_l \beta_l(t), \quad t \geq 0,$$

یک فرایند وینر با مقادیری در $\dot{H}^{\beta-1}$ با عملگر کواریانس \tilde{Q} می‌باشد که $\text{Tr}(\tilde{Q}) < \infty$ ، و در حالت خاص $Q = \tilde{Q}$ اگر $\text{Tr}(Q) < \infty$.

(ii) اگر

$$W(t) = \sum_{l=1}^{\infty} Q^{\frac{1}{2}} e_l \beta_l(t), \quad t \geq 0,$$

یک فرایند وینر با مقادیری در $\dot{H}^{\beta-1}$ با عملگر کواریانس \tilde{Q} باشد که $Tr(\tilde{Q}) < \infty$ ، آنگاه

$$\|A^{\frac{\beta-1}{\tau}}\|_{L^2} < \infty, \quad \forall \beta \in [0, 1].$$

برهان. (i)

سیستم ویژه ویژه $\{e_l, \gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ از Q در H را در نظر می‌گیریم، واضح است که $g_l = Q^{\frac{1}{\tau}} e_l = \gamma_l^{\frac{1}{\tau}} e_l$ یک پایه یکه متعامد از $Q^{\frac{1}{\tau}}(H)$ است. در حقیقت

$$(g_l, g_k)_{Q^{\frac{1}{\tau}}(H)} = (Q^{\frac{1}{\tau}} g_l, Q^{\frac{1}{\tau}} g_k) = (e_l, e_k) = \delta_{k,l}.$$

لذا

$$\sum_{l=1}^{\infty} |g_l|_{\beta-1}^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \|A^{\frac{\beta-1}{\tau}} Q^{\frac{1}{\tau}} e_l\|^2 = \|A^{\frac{\beta-1}{\tau}}\|_{L^2}^2 < \infty,$$

بنابراین $W(t)$ یک فرایند وینر با مقادیری در $\dot{H}^{\beta-1}$ با عملگر کواریانس \tilde{Q} می‌باشد که $Tr(\tilde{Q}) < \infty$. واضح است که $Q = \tilde{Q}$ اگر $Tr(Q) < \infty$.

(ii)

از آنجایی که

$$W(t) = \sum_{l=1}^{\infty} Q^{\frac{1}{\tau}} e_l \beta_l(t), \quad t \geq 0,$$

یک فرایند وینر با مقادیری در $\dot{H}^{\beta-1}$ با عملگر کواریانس \tilde{Q} می‌باشد که $Tr(\tilde{Q}) < \infty$ ، لذا خواهیم داشت:

$$E|W(t)|_{\beta-1}^2 < \infty.$$

با در نظر گرفتن سیستم ویژه $\{e_l, \gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ از A به H ، داریم:

$$\begin{aligned} E|W(t)|_{\beta-1}^2 &= E \left| \sum_{l=1}^{\infty} Q^{\frac{1}{\tau}} e_l \beta_l(t) \right|_{\beta-1}^2 \\ &= E \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l^{\beta-1} \gamma_l \beta_l(t) = t \|A^{\frac{\beta-1}{\tau}}\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

□

و این نشان می‌دهد که برای $\beta \in [0, 1]$ ، $\|A^{\frac{\beta-1}{\tau}}\| < \infty$ خواهد بود.

قضیه ۶.۱.۳. (*Lax-Milgram*) فرض کنید $l(v)$ یک تابع خطی کراندار روی H باشد و $a(u, v)$ یک فرم دوخطی کراندار و بیضوی روی H باشد، آنگاه تابع یکتا $u \in v$ وجود دارد به گونه‌ای که:

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H,$$

• کراندار بودن یعنی: $\|a(u, v)\| \leq \beta \|u\| \|v\|$ برای $\beta \geq 0$.

• بیضوی بودن یعنی: $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$ برای $\alpha \geq 0$.

۲.۳ برآورد خطا در حالت گسسته‌سازی ناقص

در این بخش برآوردهای خطا برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی خطی در حالت گسسته‌سازی ناقص را در نظر می‌گیریم.

۱.۲.۳ برآورد خطا برای مسایل قطعی

برای اثبات برآوردهای خطا برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی خطی در حالت گسسته‌سازی ناقص، به برآورد خطای برخی داده‌های ناهموار برای مسایل قطعی همگن نیاز داریم. مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \mathcal{D}, \\ u = 0 & \text{in } \partial\mathcal{D}, \end{cases} \quad (۸.۳)$$

که $f \in \dot{H}^{-1}$.

شکل تغییرپذیر یا شکل ضعیف برای این مساله به صورت

$$\exists u \in H_0^1 \quad \text{s.t.} \quad (\nabla u, \nabla \varphi) = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1, \quad (۹.۳)$$

است. فرض کنید $S_h \subset H_0^1$ فضای المان‌های محدود باشد، مساله گسسته‌سازی ناقص از (۸.۳) به فرم

$$\exists u_h \in S_h \quad \text{s.t.} \quad (\nabla u_h, \nabla \chi) = \langle f, \chi \rangle, \quad \forall \chi \in S_h. \quad (۱۰.۳)$$

است. با استفاده از قضیه Lax-Milgram جواب‌های یکتای $u \in H_0^1$ و $u_h \in S_h$ وجود دارند به طوری که (۹.۳) و (۱۰.۳) برقرار هستند. به علاوه نتایج پایداری

$$|u|_1 \leq C|f|_{-1}, \quad \forall f \in \dot{H}^{-1}, \quad (11.3)$$

$$\|u_h - u\| \leq Ch^s |u|_s, \quad s = 1, 2. \quad (12.3)$$

را داریم. فرض کنید $G : \dot{H}^{-1} \rightarrow H_0^1$ عملگر جواب دقیق (۸.۳) باشد به طوری که $u = Gf$. عملگر خطی $G_h : \dot{H}^{-1} \rightarrow S_h$ را به وسیله $u_h = G_h f$ تعریف می‌کنیم، بنابراین $u_h = G_h f \in S_h$ جواب تقریبی از (۹.۳) می‌باشد. واضح است که G_h خود الحاق، نیمه‌معین مثبت روی H و معین مثبت روی S_h می‌باشد. عملگر $R_h : H_0^1 \rightarrow S_h$ (نگاشت بیضوی^{۱)} را به صورت

$$(\nabla R_h v, \nabla \chi) = (\nabla v, \nabla \chi), \quad v \in H_0^1.$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین $G_h = R_h G$ و $R_h v$ تقریب المان محدود متناظر با جواب دقیق v می‌باشند. از (۱۲.۳) داریم:

$$\|R_h v - v\| \leq Ch^s |v|_s, \quad s = 1, 2.$$

بنابراین با استفاده از (۹.۳) و (۱۰.۳) و (۱۱.۳) داریم:

$$\|(G_h - G)f\| = \|(R_h - I)Gf\| \leq Ch^s |Gf|_s = Ch^s |f|_{s-2}, \quad s = 1, 2. \quad (13.3)$$

لم ۱.۲.۳. فرض کنید $E_h(t) = e^{-A_h t}$ با $A_h = G_h^{-1}$ ، $E(t) = e^{-At}$ با $A = G^{-1}$ باشد. همچنین فرض کنید $F_h v = E_h(t)P_h - E(t)$ آنگاه داریم:

$$\|F_h v\|_{L_\infty([0, T]; H)} \leq Ch^\beta |v|_\beta, \quad \forall v \in \dot{H}^\beta, 0 \leq \beta \leq 1, \quad (i)$$

$$\|F_h v\|_{L_\gamma([0, T]; H)} \leq Ch^\beta |v|_{\beta-1}, \quad \forall v \in \dot{H}^{\beta-1}, 0 \leq \beta \leq 1, \quad (ii)$$

(iii) به علاوه در نرم ضعیف،

$$\|F_h v\|_{L_\infty([0, T]; \dot{H}^{-1})} \leq Ch^\beta |v|_{\beta-1}, \quad \forall v \in \dot{H}^{\beta-1}, 1 \leq \beta \leq 2,$$

(iv) و با $l_h = \log(\frac{T}{h})$

$$\|F_h v\|_{L_\gamma([0, T]; \dot{H}^{-1})} \leq Ch^\beta l_h |v|_{\beta-2}, \quad \forall v \in \dot{H}^{\beta-2}, 1 \leq \beta \leq 2.$$

^۱elliptic projection

(i) برهان.

قرار می‌دهیم $u(t) = E(t)v$ و $u_h(t) = E_h(t)v$ و $e(t) = u_h(t) - u(t) = F_h(t)$ با استفاده از ویژه‌گی پایداری عملگر P_h و عملگر جواب‌های $E(t)$ و $E_h(t)$ داریم:

$$\|e(t)\| = \|E_h(t)P_hv - E(t)v\| \leq 2\|v\|, \quad t \geq 0, v \in H. \quad (14.3)$$

باید نشان دهیم

$$\|e(t)\| \leq Ch|v|_1, \quad t \geq 0, v \in H^1. \quad (15.3)$$

به این منظور معادله خطا

$$G_h e_t + e = \rho, \quad (16.3)$$

را در نظر می‌گیریم، که $\rho = (G_h - G)u_t$ و توجه داریم که $G_h e(0) = 0$ برای

$$(G_h e(0), w) = (P_h v - v, G_h w) = 0, \quad w \in H,$$

بنابراین $G_h w \in S_h$.با استفاده از روش انرژی^{۱۲} می‌توانیم نشان دهیم که:

$$\|e(t)\| \leq C \sup_{s \leq t} (s \|\rho_t(s)\| + \|\rho(s)\|), \quad t \geq 0,$$

با استفاده از (۱۳.۳) و لم (۱.۱.۳) داریم:

$$\|\rho(s)\| = \|(G_h - G)u_t\| \leq Ch|u_t|_{-1} \leq Ch|v|_1,$$

و

$$s \|\rho_t(s)\| \leq Chs|u_t(s)|_1 \leq Ch|v|_1,$$

$$\|e(t)\| \leq Ch|v|_1. \quad \text{لذا}$$

(ii)

با استفاده از نظریه درونیابی کافی است نشان دهیم:

$$\|e(t)\|_{L^2([0, T]; H)} \leq Ch|v|_{-1}, \quad (17.3)$$

$$\|e(t)\|_{L^2([0, T]; H)} \leq Ch\|v\|. \quad (18.3)$$

^{۱۲}Energy method

با گرفتن ضرب داخلی از (۱۶.۳) نسبت به e داریم:

$$(G_h e_t, e) + (e, e) = (\rho, e).$$

با انتگرال‌گیری نسبت به t و استفاده از نامساوی $(\rho, e) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(\|e\|^2 + \|\rho\|^2)$ و با توجه به اینکه $G_h e(0) = 0$ ، داریم:

$$(G_h e(T), e(T)) + \int_0^T \|e\|^2 dt \leq \int_0^T \|\rho\|^2 dt. \quad (19.3)$$

با استفاده از (۱۳.۳) و لم (۱.۱.۳) داریم:

$$\int_0^T \|\rho\|^2 dt \leq \|(G_h - G)u_t\|^2 dt \leq Ch^2 \int_0^T |u|^2 \leq Ch^2 \|v\|^2, \quad (20.3)$$

لذا (۱۸.۳) برقرار است.

برای نشان دادن (۱۷.۳) با استفاده از لم (۱.۱.۳) داریم:

$$\int_0^T \|e\|^2 dt \leq 2 \int_0^T (\|u_h\|^2 + \|u\|^2) dt \leq 2|v|_{-1,h}^2 + 2|v|_{-1}^2, \quad (21.3)$$

که $|v|_{-1,h}$ نیم‌نرم گسسته می‌باشد که به صورت

$$|v|_{-1,h} = (G_h v, v)^{\frac{1}{2}} = \|G_h^{\frac{1}{2}} v\|.$$

تعریف می‌شود. لذا

$$|v|_{-1} = \sup \left\{ \frac{(v, w)}{|w|_1} ; w \in \dot{H}^1 \right\}.$$

با $w = G_h v$ ، $v \in \dot{H}^{-1}$ داریم:

$$|v|_{-1} = \sup_{w \in \dot{H}^1} \frac{(v, w)}{|w|_1} \geq \frac{(v, G_h v)}{|G_h v|_1} = \frac{(v, G_h v)}{(v, G_h v)^{\frac{1}{2}}} = |v|_{-1,h},$$

بنابراین

$$|G_h v|_1^2 = (A G_h v, G_h v) = A(G_h v, G_h v) = (A_h G_h v, G_h v) = (v, G_h v),$$

که $A_h = G_h^{-1}$ ، از اینرو با استفاده از (۲۱.۳) داریم:

$$\int_0^T \|e\|^2 dt \leq 4|v|_{-1}^2.$$

لذا (۱۷.۳) برقرار است.

(iii)

کافی است نشان دهیم:

$$|e(t)|_{-1} \leq Ch \|v\|, \quad (22.3)$$

$$|e(t)|_{-1} \leq Ch^2 |v|_1. \quad (23.3)$$

از (۱۹.۳) و (۲۰.۳) داریم:

$$(G_h e, e) = |e|_{-1,h}^2 \leq Ch^2 \|v\|^2.$$

با توجه به روابط بالا داریم:

$$|e|_{-1} \leq |e|_{-1,h} + Ch \|e\|. \quad (24.3)$$

و با استفاده از (۱۳.۳) داریم:

$$|e|_{-1}^2 = (G_h e, e) + ((G_h - G)e, e) \leq |e|_{-1,h}^2 + Ch^2 \|e\|^2.$$

همچنین از (۱۴.۳) داریم:

$$|e|_{-1} \leq |e|_{-1,h} + Ch \|e\| \leq Ch \|v\|,$$

و از (۱۳.۳) و (۱۹.۳) خواهیم داشت:

$$|e|_{-1,h}^2 = (G_h e(t), e(t)) \leq \frac{1}{\gamma} \int_0^t \|\rho\|^2 ds \leq Ch^4 \int_0^t |u_t|^2 ds \leq Ch^4 |v|_1^2.$$

که با ترکیب این عبارت با (۱۵.۳) و (۲۴.۳)، نامساوی (۲۳.۳) بدست می‌آید.

(iv)

با انتگرال‌گیری از (۱۴.۳) نسبت به t داریم:

$$G_h e + \tilde{e} = \tilde{\rho}, \quad \tilde{e}(0) = 0. \quad (25.3)$$

که

$$\tilde{e}(t) = \int_0^t e(s) ds, \quad \tilde{\rho}(t) = \int_0^t \rho(s) ds.$$

با گرفتن ضرب داخلی از (۲۵.۳) نسبت به e و با توجه به $e = \tilde{e}_t$ داریم:

$$(G_h e, e) + \frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \|\tilde{e}\|^2 = (\tilde{\rho}, e) = \frac{d}{dt} (\tilde{\rho}, \tilde{e}) - (\rho, \tilde{e}). \quad (26.3)$$

با انتگرال‌گیری از (۲۶.۳) و با توجه به اینکه $\tilde{e}(0) = 0$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^T |e|_{-1,h}^2 ds + \frac{1}{\nu} \|e(T)\|^2 &= \int_0^T (\tilde{\rho}, e) ds = [(\tilde{\rho}, \tilde{e})]_0^T - \int_0^T (\rho, \tilde{e}) ds \\ &\leq \|\tilde{\rho}(T)\| \|\tilde{e}(T)\| + \left(\int_0^T \|\rho\| ds \right) \sup_{0 \leq s \leq T} \|\tilde{e}\| \\ &\leq 2 \left(\int_0^T \|\rho\| ds \right) \sup_{0 \leq s \leq T} \|\tilde{e}(s)\|. \end{aligned}$$

با انتقال عبارت سمت چپ به راست خواهیم داشت:

$$\int_0^T |e|_{-1,h}^2 ds \leq C \left(\int_0^T \|\rho\| ds \right)^2.$$

توجه داریم که

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\rho\| ds &= \int_0^{h^\nu} \|\rho\| ds + \int_{h^\nu}^T \|\rho\| ds \\ &\leq C \int_0^{h^\nu} s^{-\frac{1}{\nu}} |v|_{-1} ds + C \int_{h^\nu}^T h |u|_{-1} ds \leq Ch l_h |v|_{-1}, \end{aligned}$$

و به‌طور مشابه

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\rho\| ds &= \int_0^{h^\nu} \|\rho\| ds + \int_{h^\nu}^T \|\rho\| ds \\ &\leq Ch^\nu \|v\| + Ch^\nu \int_{h^\nu}^T |u|_{-1} ds \\ &\leq Ch^\nu \|v\| + Ch^\nu \log\left(\frac{T}{h^\nu}\right) \|v\| \leq Ch^\nu l_h \|v\|, \end{aligned}$$

و بنابراین داریم:

$$\int_0^T |e|_{-1,h}^2 ds \leq Ch^\nu l_h^\nu |v|_{-1}^2,$$

و

$$\int_0^T |e|_{-1,h}^2 ds \leq Ch^\nu l_h^\nu \|v\|^2,$$

از (۲۰.۳) و (۲۱.۳) و (۲۴.۳) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \int_0^T |e|_{-1}^2 ds &\leq \int_0^T |e|_{-1,h}^2 ds + Ch^2 \int_0^T \|e\|^2 ds \\ &\leq Ch^2 l_h^2 |v|_{-1}^2 + Ch^2 |v|_{-1}^2 \leq Ch^2 l_h^2 |v|_{-1}^2, \end{aligned}$$

و

$$\int_0^T |e|_{-1}^2 ds \leq Ch^4 l_h^2 \|v\|^2 + Ch^4 \|v\|^2 \leq Ch^4 l_h^2 \|v\|^2.$$

□

لذا (iv) برقرار است.

۲.۲.۳ همگرایی بر مبنای نرم قوی برای حالت گسسته‌سازی ناقص

در این بخش برآورد خطا برای (۱.۱) در حالت گسسته‌سازی ناقص را روی یک نرم قوی بدست می‌آوریم.

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید u و u_h جواب‌هایی از (۱.۱) و (۴.۱) باشند، اگر $\|A^{\frac{\beta-1}{\nu}}\|_{L_1^*} < \infty$ برای هر $\beta \in [0, 1]$ ، آنگاه برای $t \geq 0$ و $u_0 \in L_2(\Omega; \dot{H}^\beta)$ داریم:

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L_2(\Omega; H)} \leq Ch^\beta \left(\|u_0\|_{L_2(\Omega; \dot{H}^\beta)} + \|A^{\frac{\beta-1}{\nu}}\|_{L_1^*} \right). \quad (27.3)$$

در حالت خاص اگر $W(t)$ یک فرایند وینر با مقادیری در H با $Tr(Q) < \infty$ باشد، آنگاه برای $t \geq 0$ و $u_0 \in L_2(\Omega; \dot{H}^1)$ خواهیم داشت:

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L_2(\Omega; H)} \leq Ch \left(\|u_0\|_{L_2(\Omega; \dot{H}^1)} + Tr(Q)^{\frac{1}{\nu}} \right). \quad (28.3)$$

برهان. فرض کنید u و u_h جواب تقریبی و دقیق معادله (۱.۱) باشند که:

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s) dW(s), \quad E(t) = e^{-At},$$

و

$$u_h(t) = E_h(t)P_h u_0 + \int_0^t E_h(t-s)P_h dW(s), \quad E_h(t) = e^{-A_h t}.$$

قرار می‌دهیم $F_h(t) = E_h(t)P_h - E(t)$ ، لذا داریم:

$$\begin{aligned} e(t) &= E_h(t)P_h u_0 - E(t)u_0 + \int_0^t \left(E_h(t-s)P_h - E(t-s) \right) dW(s) \\ &= F_h(t)u_0 + \int_0^t F_h(t-s) dW(s) = I + II, \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|e(t)\|_{L_{\nu}(\Omega;H)} \leq \sqrt{\|I\|_{L_{\nu}(\Omega;H)} + \|II\|_{L_{\nu}(\Omega;H)}}.$$

برای I با استفاده از قسمت (i) لم (۱.۲.۳) با $v = u_0$ داریم:

$$\|I\| = \|F_h(t)u_0\| \leq Ch^{\beta}|u_0|_{\beta}, \quad 0 \leq \beta \leq 1,$$

لذا

$$\|I\|_{L_{\nu}(\Omega;H)} \leq Ch^{\beta}|u_0|_{L_{\nu}(\Omega;H)}, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

برای II با استفاده از ویژه‌گی ایزومتری داریم:

$$\begin{aligned} \|II\|_{L_{\nu}(\Omega;H)} &= \left\| \mathbf{E} \int_0^t F_h(t-s) dW(s) \right\|_{L_{\nu}^2} = \int_0^t \|F_h(t-s)\|_{L_{\nu}^2}^2 ds \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t \|F_h(t-s)Q^{\frac{1}{\nu}}e_l\|_{L_{\nu}^2}^2 ds, \end{aligned}$$

که e_l هر پایه یکه متعامد در H می‌باشد.

با استفاده از قسمت (ii) لم (۱.۲.۳) با $v = Q^{\frac{1}{\nu}}e_l$ رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \|II\|_{L_{\nu}(\Omega;H)} &\leq C \sum_{l=1}^{\infty} h^{\nu\beta} \|Q^{\frac{1}{\nu}}e_l\|_{\beta-1}^2 = C \sum_{l=1}^{\infty} h^{\nu\beta} \|A^{\frac{\beta-1}{\nu}}Q^{\frac{1}{\nu}}e_l\|_{L_{\nu}^2}^2 \\ &= Ch^{\nu\beta} \|A^{\frac{\beta-1}{\nu}}\|_{L_{\nu}^2}^2, \end{aligned}$$

در حالت خاص، اگر $W(t)$ یک فرایند وینر با مقادیری در H با $Tr(Q) < \infty$ باشد، آنگاه می‌توانیم

□ $\beta = 1$ را در (۲۷.۳) قرار دهیم و (۲۸.۳) را بدست آوریم، زیرا $\|II\|_{L_{\nu}^2} = Tr(Q)$.

نتیجه ۳.۲.۳. فرض کنید u و u_h جواب‌های دقیق و تقریبی (۱.۱) و (۴.۱) باشند، فرض کنید که

$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ با دامنه $D(A) = H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$ باشد، اگر $W(t)$ یک فرایند وینر استوانه‌ای

با $Q = I$ باشد، آنگاه برای $t \geq 0$ و $u_0 \in L_{\nu}(\Omega; \dot{H}^{\beta})$ داریم:

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L_{\nu}(\Omega;H)} \leq Ch^{\beta} \left(1 + \|u_0\|_{L_{\nu}(\Omega; \dot{H}^{\beta})} \right), \quad 0 \leq \beta < \frac{1}{\nu}.$$

۳.۲.۳ همگرایی بر مبنای نرم ضعیف برای حالت گسسته‌سازی ناقص

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنید u و u_h جواب‌هایی از (۱.۱) و (۴.۱) باشند، اگر $\|A^{\frac{\beta-1}{\gamma}}\|_{L^2_\gamma} < \infty$ برای $\beta \in [0, 1]$ ، آنگاه برای $u_0 \in L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^\beta)$ و $0 \leq t \leq T$ ، با $l_h = \log(\frac{T}{h^\gamma})$ داریم:

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^{-1})} \leq Ch^{\beta+1} \left(\|u_0\|_{L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^\beta)} + l_h \|A^{\frac{\beta-1}{\gamma}}\|_{L^2_\gamma} \right). \quad (29.3)$$

در حالت خاص اگر $W(t)$ یک فرایند وینر با مقادیری در H با $Tr(Q) < \infty$ باشد، آنگاه برای $0 \leq t \leq T$ و $u_0 \in L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^1)$ خواهیم داشت:

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^{-1})} \leq Ch^\gamma \left(\|u_0\|_{L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^1)} + l_h Tr(Q)^{\frac{1}{\gamma}} \right). \quad (30.3)$$

برهان. برای اثبات مشابه قضیه (۲.۲.۳) عمل می‌کنیم،

$$\|e(t)\|_{L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^{-1})} \leq 2 \left(\|I\|_{L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^{-1})} + \|II\|_{L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^{-1})} \right).$$

برای I با استفاده از قسمت (iii) لم (۱.۲.۳) داریم:

$$\|I\|_{L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^{-1})} \leq Ch^{\beta+1} \|u_0\|_{L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^\beta)}, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad (31.3)$$

برای II با استفاده از ویژه‌گی ایزومتری و قسمت (iv) لم (۱.۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \|II\|_{L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^{-1})} &= \mathbf{E} \left\| \int_0^t F_h(t-s) dW(s) \right\|_{L^2_\gamma}^2 = \mathbf{E} \left\| \int_0^t A^{-\frac{1}{\gamma}} F_h(t-s) dW(s) \right\|_{L^2_\gamma}^2 \\ &= \int_0^t \|A^{-\frac{1}{\gamma}} F_h(t-s)\|_{L^2_\gamma}^2 ds \\ &\leq Ch^\gamma l_h^\gamma \sum_{l=1}^{\infty} \|A^{\frac{\beta-1}{\gamma}} Q^{\frac{1}{\gamma}} e_l\|^2 \leq Ch^{\gamma(\beta+1)} l_h^\gamma \|A^{\frac{\beta-1}{\gamma}}\|_{L^2_\gamma}^2, \end{aligned}$$

در حالت خاص، اگر $W(t)$ یک فرایند وینر با مقادیری در H با $Tr(Q) < \infty$ باشد، آنگاه می‌توانیم $\beta = 1$ را در (۲۹.۳) قرار دهیم و (۳۰.۳) بدست می‌آید. \square

نتیجه ۵.۲.۳. فرض کنید u و u_h بترتیب جواب‌های دقیق و تقریبی (۱.۱) و (۴.۱) باشند، فرض کنید که $A = -\frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma}$ با دامنه $D(A) = H^1_0(0, 1) \cap H^\gamma(0, 1)$ باشد، اگر $W(t)$ یک فرایند وینر استوانه‌ای با $Q = I$ باشد، آنگاه برای $u_0 \in L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^\beta)$ و $0 \leq t \leq T$ ، با $l_h = \log(\frac{T}{h^\gamma})$ داریم:

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^{-1})} \leq Ch^{\beta+1} \left(1 + l_h \|u_0\|_{L^2_\gamma(\Omega; \dot{H}^\beta)} \right), \quad 0 \leq \beta \leq \frac{1}{\gamma}.$$

۳.۳ برآورد خطا در حالت گسسته‌سازی کامل

در این بخش برآوردهای خطا برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی خطی در حالت گسسته‌سازی کامل را در نظر می‌گیریم.

۱.۳.۳ برآورد خطا برای مسایل قطعی

برای اثبات برآوردهای خطا برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی خطی در حالت گسسته‌سازی کامل به برخی برآوردهای خطا برای مسایل قطعی نیاز داریم.

فرض کنید $E_{k,h} = \tau(kA_h)$ و $E(t_n) = e^{-t_n A}$ که $\tau(\lambda) = \frac{1}{\lambda+1}$ ، آنگاه لم زیر را خواهیم داشت:

لم ۱.۳.۳. فرض کنید $F_n = E_{k,h}^n P_h - E(t_n)$ آنگاه:

$$\|F_n v\| \leq C(k^{\frac{\beta}{\nu}} + h^\beta) |v|_\beta, \quad v \in \dot{H}^\beta, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad (i)$$

$$\left(k \sum_{j=1}^n \|F_j v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(k^{\frac{\beta}{\nu}} + h^\beta) |v|_{\beta-1}, \quad v \in \dot{H}^{\beta-1}, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad (ii)$$

(iii) به علاوه برای نرم ضعیف

$$|F_n v|_{-1} \leq C(k^{\frac{\beta}{\nu}} + h^\beta) |v|_{\beta-1}, \quad v \in \dot{H}^{\beta-1}, \quad 1 \leq \beta \leq 2,$$

(iv) و با $l_k = \log(\frac{T}{K})$ که $T = t_n$

$$\left(k \sum_{j=1}^n |F_j v|_{-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(k^{\frac{\beta}{\nu}} + h^\beta) l_k |v|_{\beta-2}, \quad v \in \dot{H}^{\beta-2}, \quad 1 \leq \beta \leq 2,$$

برهان. (i)

فرض می‌کنیم $u(t_n) = u^n = E(t_n)v$, $U^n = E_{k,h}^n P_h v$, $e^n = F_n v$

با استفاده از ویژه‌گی پایداری عملگر P_h و عملگر جواب‌های $E_h(t)$ و $E(t)$ داریم:

$$\|e^n\| = \|E_{k,h}^n P_h v - E(t_n)v\| \leq 2\|v\|, \quad t \geq 0, v \in H. \quad (32.3)$$

نشان می‌دهیم:

$$\|e^n\| \leq C(k^{\frac{1}{\nu}} + h) |v|_1, \quad v \in \dot{H}^1. \quad (33.3)$$

برای اثبات (۳۳.۳) معادله خطا را در نظر می‌گیریم:

$$G_h \partial_t e^n + e^n = \rho^n + G_h \tau^n. \quad (34.3)$$

که $\partial_t e^n = \frac{(e^n - e^{n-1})}{k}$, $\rho^n = (G_h - G)u_t(t_n)$, $\tau^n = u_t(t_n) - \partial_t u^n$ با استفاده از روش انرژی داریم:

$$t_n \|e^n\|^2 \leq t_n \|\rho^n\|^2 + k \sum_{j=1}^n \left(\|\rho^j\|^2 + t_{j-1}^2 \|\partial_t \rho^j\|^2 + \|G_h \tau^j\|^2 + t_{j-1}^2 \|\tau^j\|^2 \right).$$

حال از (۱۳.۳) و لم (۱.۱.۳) داریم:

$$\|\rho^j\| = \|(G_h - G)u_t(t_j)\| \leq Ch |u_t(t_j)|_{-1} \leq Ch |v|_1,$$

و

$$\begin{aligned} t_{j-1} \|\partial_t \rho^j\| &= \left\| \frac{1}{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} t_{j-1} \rho_t(s) ds \right\| \leq \left\| \frac{1}{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} s \rho_t(s) ds \right\| \\ &\leq \sup_{0 \leq s \leq t_n} \|s \rho_t(s)\| \leq Ch \sup_{0 \leq s \leq t_n} |s u_t(s)|_1 \leq Ch |v|_1. \end{aligned}$$

به‌علاوه:

$$\|G_h \tau^j\| = \|(G_h - G)\tau^j\| + \|G\tau^j\|.$$

با استفاده از (۱۳.۳) و لم (۱.۱.۳) داریم:

$$\|(G_h - G)\tau^j\| \leq Ch |\tau^j|_{-1} \leq Ch \sup_{0 \leq s \leq t_n} |u_t(s)|_1 \leq Ch |v|_1.$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\|e^n\|^2 \leq Ch^2 |v|_1^2 + Ckt_n^{-1} \sum_{j=1}^n \left(\|G\tau^j\|^2 + t_{j-1}^2 \|\tau^j\|^2 \right).$$

با استفاده از فرمول تیلور داریم:

$$\begin{aligned} \|G\tau^j\|^2 &= \left\| G \frac{1}{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds \right\|^2 = \left\| \frac{1}{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_t(s) ds \right\|^2 \\ &\leq \left\| \frac{1}{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} u_t(s) ds \right\|^2 \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) \|u_t(s)\|^2 ds \\ &\leq t_n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_t(s)\|^2 ds, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} t_{j-1}^\nu \|\tau^j\|^\nu &= t_{j-1}^\nu \left\| \frac{1}{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u_{tt}(s) ds \right\|^\nu \leq t_{j-1}^\nu \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) \|u_{tt}(s)\|^\nu ds \\ &\leq t_n \int_{t_{j-1}}^{t_j} s^\nu \|u_{tt}(s)\|^\nu ds. \end{aligned}$$

و با استفاده از لم (۱.۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned} kt_n^{-\nu} \sum_{j=1}^n t_{j-1}^\nu \|\tau^j\|^\nu &\leq k \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_t(s)\|^\nu ds \\ &= k \int_0^{t_n} \|u_t(s)\|^\nu ds \leq Ck|v|_1, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} kt_n^{-\nu} \sum_{j=1}^n t_{j-1}^\nu \|\tau^j\|^\nu &\leq k \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} s^\nu \|u_{tt}(s)\|^\nu ds \\ &= k \int_0^{t_n} s^\nu \|u_{tt}(s)\|^\nu ds \leq Ck|v|_1, \end{aligned}$$

لذا برهان i کامل می‌شود.

(ii)

با استفاده از نظریه درونیابی کافی است نشان دهیم:

$$\left(k \sum_{j=1}^n \|F_j v\|^\nu \right)^{\frac{1}{\nu}} \leq C|v|_{-1}. \quad (۳۵.۳)$$

$$\left(k \sum_{j=1}^n \|F_j v\|^\nu \right)^{\frac{1}{\nu}} \leq C(k^{\frac{1}{\nu}} + h)\|v\|. \quad (۳۶.۳)$$

با گرفتن ضرب داخلی از (۳۶.۳) نسبت به e^n داریم:

$$(G_h \partial_t e^n, e^n) + (e^n, e^n) = (\rho^n, e^n) + (G_h \tau^n, e^n)$$

حال با جمع کردن کل عبارت روی n و استفاده از نامساوی $(\rho^n, e^n) \leq \frac{1}{\nu} (\|e^n\|^\nu + \|\rho^n\|^\nu)$ و با توجه به اینکه $G_h e^0 = 0$ ، داریم:

$$\begin{aligned} (G_h e^n, e^n) + k \sum_{j=1}^n \|e^j\|^\nu &\leq Ck \sum_{j=1}^n \|\rho^j\|^\nu + Ck \sum_{j=1}^n \|G_h \tau^j\|^\nu \\ &\quad + Ck \sum_{j=1}^n \|(G_h - G)\tau^j\|^\nu. \end{aligned} \quad (۳۷.۳)$$

با استفاده از لم (۱.۱.۳) و چون $\rho^j = \rho(s) + \int_s^{t_j} \rho_t(\tau) d\tau$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 k \sum_{j=1}^n \|\rho^j\|^2 &= k\|\rho\|^2 + \sum_{j=2}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\rho^j\|^2 ds & (۳۸.۳) \\
 &\leq k\|\rho\|^2 + 2 \sum_{j=2}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\|\rho(s)\|^2 + \left\| \int_s^{t_j} \rho_t(\tau) d\tau \right\|^2 \right) ds \\
 &\leq k\|\rho\|^2 + 2 \int_{t_1}^{t_n} \|\rho(s)\|^2 ds + 2 \sum_{j=2}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left((t_j - s) \int_s^{t_j} \|\rho_t(\tau)\|^2 d\tau \right) ds \\
 &\leq k\|\rho\|^2 + 2 \int_{t_1}^{t_n} \|\rho(s)\|^2 ds + 2k \sum_{j=2}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tau \|\rho_t(\tau)\|^2 d\tau \\
 &\leq k\|\rho\|^2 + 2 \int_{t_1}^{t_n} \|\rho(s)\|^2 ds + 2k \int_{t_1}^{t_n} \tau \|\rho_t(\tau)\|^2 d\tau \\
 &\leq Ck\|u\|^2 + Ch^2 \int_{\cdot}^{t_n} |u(s)|^2 ds + Ck \int_{\cdot}^{t_n} \tau \|u_t(\tau)\|^2 d\tau \leq C(k + h^2)\|v\|^2,
 \end{aligned}$$

و با استفاده از فرمول تیلور روابط زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 k \sum_{j=1}^n \|(G_h - G)\tau^j\|^2 &\leq Ckh^2 |\tau^1|_{-1}^2 + Ckh^2 \sum_{j=2}^n |\tau^j|_{-1}^2 \\
 &= Ckh^2 \left| u_t(k) - \frac{1}{k} \int_{\cdot}^k u_t(\tau) d\tau \right|_{-1}^2 \\
 &\quad + Ckh^2 \sum_{j=2}^n \left| \frac{1}{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds \right|_{-1}^2 \\
 &\leq Ch^2 \left(k |u_t(k)|_{-1}^2 + \int_{\cdot}^k |u_t(\tau)|_{-1}^2 d\tau \right) \\
 &\quad + Ch^2 \sum_{j=2}^n \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})^{\frac{1}{2}} u_{tt}(s) ds \right|_{-1}^2 \\
 &\leq Ch^2 \|v\|^2 + Ch^2 \sum_{j=2}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} k(s - t_{j-1}) |u_{tt}(s)|_{-1}^2 ds \\
 &\leq Ch^2 \|v\|^2 + Ch^2 \sum_{j=2}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} s^{\frac{1}{2}} |u_{tt}(s)|_{-1}^2 ds \leq Ch^2 \|v\|^2,
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} k \sum_{j=1}^n \|G\tau^j\|^2 &= k \sum_{j=1}^n \left\| \frac{1}{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_t(s) ds \right\|^2 \\ &\leq k \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) \|u_t(s)\|^2 ds \\ &\leq Ck \int_0^{t_n} s \|u_t(s)\|^2 ds \leq k \|v\|^2. \end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(G_h e^n, e^n)^{\frac{1}{2}} + \left(k \sum_{j=1}^n \|e^j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(k^{\frac{1}{2}} + h) \|v\|, \quad (39.3)$$

با توجه به (۳۹.۳) واضح است که:

$$\left(k \sum_{j=1}^n \|e^j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(k^{\frac{1}{2}} + h) \|v\|,$$

لذا (۳۶.۳) برقرار است.

برای اثبات (۳۵.۳) با توجه به اینکه:

$$k \sum_{j=1}^n \|e^j\|^2 \leq Ck \sum_{j=1}^n \|U^j\|^2 + Ck \sum_{j=1}^n \|u(t_j)\|^2, \quad (40.3)$$

لذا با دنبال کردن روند (۳۸.۳) و با قرار دادن u به جای ρ داریم:

$$k \sum_{j=1}^n \|u(t_j)\|^2 \leq k \|u(t_1)\|^2 + 2 \int_{t_1}^{t_n} \|u(s)\|^2 ds + 2 \int_{t_1}^{t_n} s^2 \|u_t(s)\|^2 ds \leq C|v|_{-1}^2,$$

و

$$k \sum_{j=1}^n \|U^j\|^2 \leq C|v|_{-1,h}^2 \leq C|v|_{-1}^2.$$

لذا

$$\left(k \sum_{j=1}^n \|e^j v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(k^{\frac{1}{2}} + h) |v|_{-1},$$

و در اینجا برهان (۳۵.۳) کامل می‌شود.

(iii)

کافی است نشان دهیم:

$$|e^n|_{-1} \leq C(k^{\frac{1}{\nu}} + h)\|v\|. \quad (۴۱.۳)$$

$$|e^n|_{-1} \leq C(k + h^{\nu})\|v\|. \quad (۴۲.۳)$$

برای اثبات (۴۱.۳)، از (۱۴.۳) و (۲۴.۳) و (۳۹.۳) استفاده می‌کنیم. برای (۴۲.۳) با استفاده از لم (۱.۱.۳) و از آنجایی که $\rho^j = \rho(s) + \int_0^{t_j} \rho_t(\tau) d\tau$ داریم:

$$\begin{aligned} k \sum_{j=1}^n \|\rho^j\|^{\nu} &\leq C \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\|\rho(s)\|^{\nu} + \left\| \int_s^{t_j} \rho_t(\tau) d\tau \right\|^{\nu} \right) ds \\ &\leq C \int_0^{t_n} \|\rho(s)\|^{\nu} ds + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} k^{\nu} \|\rho_t(\tau)\|^{\nu} d\tau \\ &\leq \int_0^{t_n} \|\rho(s)\|^{\nu} ds + Ck^{\nu} \int_0^{t_n} \|\rho_t(\tau)\|^{\nu} d\tau \\ &\leq Ch^{\nu} \int_0^{t_n} |u|^{\nu} ds + Ck^{\nu} \int_0^{t_n} \|u_t\|^{\nu} ds \leq C(h^{\nu} + k^{\nu})\|v\|^{\nu}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} k \sum_{j=1}^n \|(G_h - G)\tau^j\|^{\nu} &\leq Ckh^{\nu} \sum_{j=1}^n \|\tau^j\|^{\nu} \\ &= Ckh^{\nu} \sum_{j=1}^n \left\| \frac{1}{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds \right\|^{\nu} \\ &\leq Ch^{\nu} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) \|u_{tt}(s)\|^{\nu} ds \\ &\leq Ch^{\nu} \int_0^{t_n} s^{\nu} \|u_{tt}(s)\|^{\nu} ds \leq Ch^{\nu} \|v\|, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} k \sum_{j=1}^n \|G\tau^j\|^{\nu} &= k \sum_{j=1}^n \left\| \frac{1}{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_t(s) ds \right\|^{\nu} \\ &\leq k^{-1} \sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) ds \right) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_t(s)\|^{\nu} ds \\ &\leq Ck^{\nu} \int_0^{t_n} \|u_t(s)\|^{\nu} ds \leq Ck^{\nu} \|v\|^{\nu}. \end{aligned}$$

از (۳۷.۳) داریم:

$$(G_h e^n, e^n) \leq Ck \sum_{j=1}^n \|\rho^j\|^2 + Ck \sum_{j=1}^n \|G\tau^j\|^2 + Ck \sum_{j=1}^n \|(G_h - G)\tau^j\|^2.$$

لذا (۴۲.۳) برقرار است.

(iv)

کافی است نشان دهیم:

$$\left(k \sum_{j=1}^n |e_j|_{-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(k + h^2)l_k \|v\|, \quad (43.3)$$

$$\left(k \sum_{j=1}^n |e_j|_{-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(k^{\frac{1}{2}} + h)l_k |v|_{-1}. \quad (44.3)$$

فرض کنید $\tilde{e}^n = k \sum_{j=1}^n e^j$ ، $\tilde{e}^0 = 0$ و $\partial_t \tilde{e}^n = \frac{(\tilde{e}^n - \tilde{e}^{n-1})}{k} = e^n$ ، معادله خطا را در نظر می‌گیریم:

$$G_h \partial_t \tilde{e}^n + \tilde{e}^n = \tilde{\rho}^n + G_h \tilde{\tau}^n, \quad n \geq 1, \quad (45.3)$$

که $\tilde{\rho}^n = k \sum_{j=1}^n \rho^j$ و $\tilde{\tau}^n = k \sum_{j=1}^n \tau^j$ از قبل تعریف شده‌اند. با گرفتن ضرب داخلی از (۴۵.۳) نسبت به $\partial_t \tilde{e}^n$ و از آنجایی که $\partial_t \tilde{e}^n = e^n$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (G_h \partial_t \tilde{e}^n, \partial_t \tilde{e}^n) + \frac{1}{4} \partial_t (\tilde{e}^n, \tilde{e}^n) + \frac{1}{k} (\partial_t \tilde{e}^n, \partial_t \tilde{e}^n) &= (\tilde{\rho}^n, \partial_t \tilde{e}^n) + (G_h \partial_t \tilde{\tau}^n, \partial_t \tilde{e}^n) \\ &= \partial_t (\tilde{\rho}^n, \tilde{e}^n) - (\partial_t \tilde{\rho}^n, \tilde{e}^{n-1}) + \partial_t (G_h \tilde{\tau}^n, \tilde{e}^n) - (\partial_t (G_h \tilde{\tau}^n), \tilde{e}^{n-1}). \end{aligned}$$

حال با جمع کردن کل عبارت روی n و با توجه به اینکه $\tilde{e}^0 = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} &k \sum_{j=1}^n (G_h \partial_t \tilde{e}^j, \partial_t \tilde{e}^j) + \frac{1}{4} (\tilde{e}^n, \tilde{e}^n) \\ &\leq \|\tilde{\rho}^n\| \|\tilde{e}^n\| + k \sum_{j=1}^n |(\rho^j, \tilde{e}^{j-1})| + \|G_h \tilde{\tau}^n\| \|\tilde{e}^n\| + k \sum_{j=1}^n |(G_h \tau^j, \tilde{e}^{j-1})| \\ &\leq \max_j \|\tilde{e}^j\| \left(\|\tilde{\rho}^n\| + k \sum_{j=1}^n \|\rho^j\| + k \sum_{j=1}^n \|G_h \tau^j\| + \|G_h \tilde{\tau}^n\| \right). \end{aligned}$$

با انتقال دادن جمله دوم عبارت سمت چپ به سمت راست داریم:

$$\left(k \sum_{j=1}^n (G_h \partial_t \tilde{e}^j, \partial_t \tilde{e}^j)\right)^{\frac{1}{2}} \leq Ck \left(\sum_{j=1}^n \|\rho^j\| + \sum_{j=1}^n \|(G_h - G)\tau^j\| + \|G\tau^n\| \right).$$

از طرفی از آنجایی که $l_k = \log(\frac{T}{k})$ که $T = t_n$ داریم:

$$\begin{aligned} k \sum_{j=1}^n \|\rho^j\| &= k\|\rho\| + k \sum_{j=2}^n \|\rho^j\| \leq Ck\|v\| + Ck \sum_{j=2}^n t_j^{-1} \|v\| \\ &\leq Ck\|v\| + Ckl_k\|v\| \leq Ckl_k\|v\|, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} k \sum_{j=1}^n \|(G_h - G)\tau^j\| &\leq Ckh^\gamma \sum_{j=1}^n \|\tau^j\| = Ckh^\gamma \|\tau^1\| + Ckh^\gamma \sum_{j=2}^n \|\tau^j\| \\ &= Ckh^\gamma \|u_t(k) - \partial_t u^1\| + Ch^\gamma \sum_{j=2}^n \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_j) u_{tt}(s) ds \right\| \\ &\leq Ch^\gamma (k\|u_t(k)\| + \|u(k)\| + \|v\|) + Ch^\gamma \sum_{j=2}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|su_{tt}(s)\| ds \\ &\leq Ch^\gamma \|v\| + Ch^\gamma \int_{t_1}^{t_n} \|su_{tt}(s)\| ds \leq Ch^\gamma l_k \|v\|, \end{aligned}$$

و

$$k \sum_{j=1}^n \|G\tau^j\| = k\|\tau^1\| + \sum_{j=2}^n \|G\tau^j\| \leq Ckl_k\|v\|.$$

لذا (۴۳.۳) برقرار است، به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که (۴۴.۳) نیز برقرار است، لذا برهان (iv) کامل می‌شود. \square

۲.۳.۳ همگرایی بر مبنای نرم قوی برای حالت گسسته‌سازی کامل

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید U^n و $u(t)$ جواب‌هایی از (۴.۳) و (۱.۱) باشند، اگر $\|A^{\frac{\beta-1}{\gamma}}\|_{L_{\dot{\gamma}}} < \infty$ برای $u_0 \in L_{\gamma}(\Omega; \dot{H}^{\beta})$ ، $\beta \in [0, 1]$ ، آنگاه برای $u_0 \in L_{\gamma}(\Omega; \dot{H}^{\beta})$ داریم:

$$\|U^n - u(t_n)\|_{L_{\gamma}(\Omega; H)} \leq C(k^{\frac{\beta}{\gamma}} + h^{\beta}) \left(\|u_0\|_{L_{\gamma}(\Omega; \dot{H}^{\beta})} + \|A^{\frac{\beta-1}{\gamma}}\|_{L_{\dot{\gamma}}} \right). \quad (۴۶.۳)$$

در حالت خاص اگر $W(t)$ یک فرایند وینر با مقادیری در H با $Tr(Q) < \infty$ باشد، آنگاه برای $u_0 \in L_{\gamma}(\Omega, \dot{H}^1)$ خواهیم داشت:

$$\|U^n - u(t_n)\|_{L_{\gamma}(\Omega; H)} \leq C(k^{\frac{1}{\gamma}} + h) \left(\|u_0\|_{L_{\gamma}(\Omega; \dot{H}^1)} + Tr(Q)^{\frac{1}{\gamma}} \right). \quad (۴۷.۳)$$

برهان. می‌دانیم که یک جواب ضعیف برای (۴.۳) به صورت

$$U^n = E_{kh}^n P_h u_0 + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} E_{kh}^{n-j+1} P_h dW(s), \quad E_{kh}^n = \tau(kA_h)^n.$$

می‌باشد. همچنین یک جواب ضعیف برای معادله (۱.۱) به صورت

$$u(t_n) = E(t_n)u_0 + \int_0^{t_n} E(t_n - s) dW(s), \quad E(t_n) = e^{-At_n}.$$

است.

قرار می‌دهیم $e^n = U^n - u(t_n)$ و $F_n = E_{kh}P_h - E(t_n)$ ، لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} e^n &= F_n u_0 + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_{n-j+1} dW(s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (E(t_n - t_{j-1}) - E(t_n - s)) dW(s) \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|e^n\|_{L_\nu(\Omega; H)} \leq C \left(\|I\|_{L_\nu(\Omega; H)} + \|II\|_{L_\nu(\Omega; H)} + \|III\|_{L_\nu(\Omega; H)} \right).$$

برای (I) با استفاده از لم (۱.۳.۳) با $v = u_0$ ، داریم:

$$\|I\| = \|F_n u_0\| \leq C(k^{\frac{\beta}{\nu}} + h^\beta) |u_0|_\beta,$$

که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\|I\|_{L_\nu(\Omega; H)} \leq C(k^{\frac{\beta}{\nu}} + h^\beta) \|u_0\|_{L_\nu(\Omega; \dot{H}^\beta)}.$$

برای (II) با استفاده از ویژه‌گی ایزومتری داریم:

$$\begin{aligned} \|II\|_{L_\nu(\Omega; H)} &= \mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_{n-j+1} dW(s) \right\|^\nu \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|F_{n-j+1}\|_{L_\nu^\nu}^\nu ds \\ &= \sum_{l=1}^\infty \left(k \sum_{j=1}^n \|F_{n-j+1} Q^{\frac{1}{\nu}} e_l\|^\nu \right). \end{aligned}$$

که هر e_l بردار یکه متعامد در H می‌باشد، با استفاده از قسمت (ii) لم (۱.۳.۳) با $v = Q^{\frac{1}{\nu}} e_l$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|II\|_{L^{\nu}(\Omega;H)} &\leq C \sum_{l=1}^{\infty} (k^{\beta} + h^{\nu\beta}) |Q^{\frac{1}{\nu}} e_l|_{\beta-1} \\ &= C \sum_{l=1}^{\infty} (k^{\beta} + h^{\nu\beta}) \|A^{\frac{\beta-1}{\nu}} Q^{\frac{1}{\nu}} e_l\|^{\nu} \\ &= C(k^{\beta} + h^{\nu\beta}) \|A^{\frac{\beta-1}{\nu}}\|_{L^{\nu}}^{\nu}. \end{aligned}$$

برای (III) نیز با استفاده از ویژه‌گی ایزومتری داریم:

$$\begin{aligned} \|III\|_{L^{\nu}(\Omega;H)} &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| \left(E(t_n - t_{j-1}) - E(t_n - s) \right) \right\|_{L^{\nu}}^{\nu} ds \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| A^{-\frac{\beta}{\nu}} \left(E(s - t_{j-1}) - I \right) A^{\frac{\beta}{\nu}} E(t_n - s) Q^{\frac{1}{\nu}} e_l \right\|_{L^{\nu}}^{\nu} ds. \end{aligned}$$

با استفاده از لم (۱.۱.۳) و لم (۲.۱.۳) با $v = A^{\frac{\beta-1}{\nu}} Q^{\frac{1}{\nu}} e_l$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|III\|_{L^{\nu}(\Omega;H)} &\leq C k^{\beta} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{t_n} \left\| A^{\frac{1}{\nu}} E(t_n - s) A^{\frac{\beta-1}{\nu}} Q^{\frac{1}{\nu}} e_l \right\|_{L^{\nu}}^{\nu} ds \quad (۴۸.۳) \\ &\leq C k^{\beta} \sum_{l=1}^{\infty} \|A^{\frac{\beta-1}{\nu}} Q^{\frac{1}{\nu}} e_l\|^{\nu} = C k^{\beta} \|A^{\frac{\beta-1}{\nu}}\|_{L^{\nu}}^{\nu}, \end{aligned}$$

در حالت خاص اگر $W(t)$ یک فرایند وینر با $Tr(Q) < \infty$ باشد، آنگاه می‌توانیم $\beta = 1$ را در (۴۶.۳) قرار دهیم و (۴۷.۳) بدست می‌آید. \square

نتیجه ۳.۳.۳. فرض کنید U^n و $u(t)$ بترتیب جواب‌هایی از (۴.۳) و (۱.۱) باشند، همچنین فرض کنید که $A = -\frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}}$ با $\mathcal{D}(A) \subset H^1_0(0, 1) \cap H^{\nu}(0, 1)$ ، اگر $W(t)$ یک فرایند وینر استوانه‌ای با $Q = I$ باشد، آنگاه برای $u_0 \in L^{\nu}(\Omega; \dot{H}^{\beta})$ داریم:

$$\|U^n - u(t_n)\|_{L^{\nu}(\Omega;H)} \leq C(k^{\frac{\beta}{\nu}} + h^{\beta}) \left(1 + \|u_0\|_{L^{\nu}(\Omega; \dot{H}^{\beta})} \right), \quad 0 \leq \beta < \frac{1}{\nu}.$$

۳.۳.۳ همگرایی بر مبنای نرم ضعیف برای حالت گسسته‌سازی کامل

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنید U^n و $u(t)$ جواب‌هایی از (۴.۳) و (۱.۱) باشند، اگر $\|A^{\frac{\beta-1}{\nu}}\|_{L^2_\nu} < \infty$ برای هر $\beta \in [0, 1]$ ، آنگاه برای $u_0 \in L^2_\nu(\Omega; \dot{H}^\beta)$ ، با $l_k = \log(\frac{T}{k})$ که $T = t_n$ ، داریم:

$$\|U^n - u(t_n)\|_{L^2_\nu(\Omega; \dot{H}^{-1})} \leq C(k^{\frac{(\beta+1)}{\nu}} + h^{\beta+1}) \left(\|u_0\|_{L^2_\nu(\Omega; \dot{H}^\beta)} + l_k \|A^{\frac{\beta-1}{\nu}}\|_{L^2_\nu} \right). \quad (۴۹.۳)$$

در حالت خاص اگر $W(t)$ یک فرایند وینر با مقادیری در H با $Tr(Q) < \infty$ باشد، آنگاه برای $u_0 \in L^2_\nu(\Omega; \dot{H}^1)$ خواهیم داشت:

$$\|U^n - u(t_n)\|_{L^2_\nu(\Omega; \dot{H}^{-1})} \leq C(k + h^\nu) \left(\|u_0\|_{L^2_\nu(\Omega; \dot{H}^1)} + l_k Tr(Q)^{\frac{1}{\nu}} \right). \quad (۵۰.۳)$$

برهان. برای اثبات مشابه قضیه (۲.۳.۳) عمل می‌کنیم، با استفاده از قسمت (iii) لم (۱.۳.۳) داریم:

$$\|I\|_{L^2_\nu(\Omega; \dot{H}^{-1})} \leq Ch^{\beta+1} \|u_0\|_{L^2_\nu(\Omega; \dot{H}^\beta)}, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

برای (II)، با استفاده از ویژه‌گی ایزومتری و قسمت (iv) لم (۱.۲.۳) و $v = Q^{\frac{1}{\nu}} e_l$ داریم:

$$\begin{aligned} \|II\|_{L^2_\nu(\Omega; \dot{H}^{-1})} &= \mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} A^{-\frac{1}{\nu}} F_{n-j+1} dW(s) \right\|_\nu^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|A^{-\frac{1}{\nu}} F_{n-j+1}\|_{L^2_\nu}^2 ds \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \left(k \sum_{j=1}^n \|A^{-\frac{1}{\nu}} F_{n-j+1} Q^{\frac{1}{\nu}} e_l\|_\nu^2 \right) \\ &\leq C(k^{\beta+1} + h^{\nu(\beta+1)}) l_k^2 \sum_{l=1}^{\infty} \|A^{\frac{(\beta-1)}{\nu}} Q^{\frac{1}{\nu}} e_l\|_\nu^2 \\ &\leq C(k^{\beta+1} + h^{\nu(\beta+1)}) l_k^2 \|A^{\frac{(\beta-1)}{\nu}}\|_{L^2_\nu}^2. \end{aligned}$$

برای (III) با استفاده از ویژه‌گی ایزومتری داریم:

$$\begin{aligned} \|III\|_{L^2_\nu(\Omega; \dot{H}^{-1})} &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| A^{-\frac{1}{\nu}} \left(E(t_n - t_{j-1}) - E(t_n - s) \right) \right\|_{L^2_\nu}^2 ds \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| A^{-\frac{(\beta-1)}{\nu}} \left(E(s - t_{j-1}) - I \right) A^{\frac{1}{\nu}} E(t_n - s) A^{\frac{(\beta-1)}{\nu}} Q^{\frac{1}{\nu}} e_l \right\|_\nu^2 ds. \end{aligned}$$

با دنبال کردن روند (۴۸.۳) خواهیم داشت:

$$\|III\|_{L^2(\Omega; \dot{H}^{-1})} \leq Ck^\beta \|A^{\frac{\beta-1}{\nu}}\|_{L^2}^2,$$

در حالت خاص اگر $W(t)$ یک فرایند وینر با $Tr(Q) < \infty$ باشد، آنگاه می‌توانیم $\beta = 1$ را در (۴۹.۳) قرار دهیم و (۵۰.۳) بدست می‌آید. \square

نتیجه ۵.۳.۳. فرض کنید U^n و $u(t)$ بترتیب جواب‌هایی از (۴.۳) و (۱.۱) باشند، همچنین فرض کنید که $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ با $\mathcal{D}(A) \subset H^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$ ، اگر $W(t)$ یک فرایند وینر استوانه‌ای با $Q = I$ باشد، آنگاه برای $u_0 \in L^2(\Omega; \dot{H}^\beta)$ با $l_k = \log(\frac{T}{k})$ که $T = t_n$ داریم:

$$\|U^n - u(t_n)\|_{L^2(\Omega; \dot{H}^{-1})} \leq C(k^{\frac{(\beta+1)}{\nu}} + h^{\beta+1}) \left(1 + l_k \|u_0\|_{L^2(\Omega; \dot{H}^\beta)}\right), \quad 0 \leq \beta < \frac{1}{\nu}.$$

فصل ۴

راه حل عددی

۱.۴ مقدمه

در این فصل راه حل عددی را برای بررسی برآورد سرعت همگرایی ارایه می‌دهیم. اول از همه، با استفاده از روش المان‌های محدود و روش اویلر پسرو یک فرم ماتریسی در بخش ۲.۴ ارایه می‌شود. سپس محاسبه اختلال (noise) در مسایل گسسته در بخش ۳.۴ ارایه می‌شود. بعد از آن آزمایش‌های عددی در بخش ۴.۴ ارایه می‌شود، در حالت خاص نشان می‌دهیم که اختلال موجود در حالت اختلال سفید (white noise) و اختلال رنگی (color noise) چگونه بوجود می‌آید و دو حالت مختلف برای اختلال رنگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. سرانجام نتایج و تحلیل عددی در بخش‌های ۵.۴ و ۶.۴ ارایه می‌شود.

۲.۴ صورت ماتریسی روش عددی ارایه شده

معادله (۴.۳) از فصل ۳ را در نظر بگیرید:

$$U^n - U^{n-1} + A_h U^n = \Delta W^n, \quad U^0 = P_h u_0, U^n \in S_h,$$

حال معادله را در تابعی مانند $\chi \in S_h$ ضرب می‌کنیم و روی ناحیه مورد نظر (Ω) انتگرال می‌گیریم، لذا خواهیم داشت:

$$(U^n, \chi) + k A_h (U^n, \chi) = (U^{n-1}, \chi) + (\Delta W^n, \chi), \quad \forall \chi \in S_h. \quad (1.4)$$

از آنجایی که $U^n \in S_h$ است لذا می توان آن را به صورت ترکیبی از توابع پایه ای نوشت یعنی:

$$U^n = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^n \varphi_j,$$

حال U^n را در معادله (۱.۴) جایگذاری می کنیم داریم:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^n \varphi_j, \chi \right) + k A_h \left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^n \varphi_j, \chi \right) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^{n-1} \varphi_j, \chi \right) + (\Delta W^n, \chi), \quad \forall \chi \in S_h,$$

از طرفی چون $\chi \in S_h$ است لذا می توان آن را به صورت تابع پایه ای مانند φ_i نوشت:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^n \varphi_j, \varphi_i \right) + k A_h \left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^n \varphi_j, \varphi_i \right) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^{n-1} \varphi_j, \varphi_i \right) + (\Delta W^n, \varphi_i), \quad \forall \chi \in S_h,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^n (\varphi_j, \varphi_i) + k \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^n (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^{n-1} (\varphi_j, \varphi_i) + (\Delta W^n, \varphi_i), \quad \forall \chi \in S_h,$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathbf{B} \xi^n + k_n \mathbf{A} \xi^n = \mathbf{B} \xi^{n-1} + \eta. \quad (2.4)$$

که در آن $\mathbf{B} = \int_D \varphi_i \varphi_j dx$ (Mass matrix)، $\mathbf{A} = \int_D \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx$ (Stiffness matrix)، $\eta_j = (\Delta W, \varphi_j)$ (load vector)، $\Delta W = W^n - W^{n-1}$ که در اینجا $\eta_j = (\Delta W, \varphi_j)$ اختلال یا نویز، که در اینجا $\Delta W = W^n - W^{n-1}$.

۳.۴ محاسبه اختلال

ضرب تنسور^۱ روی دو بردار به صورت

$$x \otimes y = xy^T.$$

تعریف می شود.

از اینرو، ضرب تنسور روی دو بردار به طول n یک ماتریس $n \times n$ است. از آنجایی که W گوسی است لذا η یک متغیر تصادفی گوسی با مقادیری در \mathbf{R}^M است.

$$\mathbf{E} \left((\eta \otimes \eta)_{ij} \right) = \mathbf{E} \left((\Delta W, \varphi_i) (\Delta W, \varphi_j) \right) = \Delta t (Q \varphi_i, \varphi_j).$$

^۱Tensor product

بنابراین، اگر

$$\eta = L\omega, \quad (3.4)$$

که L ماتریس پایین مثلثی در تجزیه چولسکی^۲ از ماتریس $(Q)_{ij} = (Q\varphi_i, \varphi_j)$ و ω یک متغیر تصادفی با مقادیری در \mathbf{R}^M با ماتریس کواریانس $\Delta t I$ می‌باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left((L\omega) \otimes (L\omega)\right) &= \mathbf{E}\left(L\omega(L\omega)^T\right) \\ &= L \mathbf{E}(\omega \otimes \omega) L^T = \Delta t L L^T = \delta t \tilde{Q}. \end{aligned}$$

۴.۴. آزمایش‌های عددی

در این بخش آزمایش‌های عددی ارایه می‌شود. از آنجایی که دو حالت اختلال سفید و اختلال رنگی را در نظر می‌گیریم، آزمایش‌های عددی به دو بخش اصلی جدا از هم تقسیم می‌شوند، یک حالت برای اختلال سفید و حالت دوم برای اختلال رنگی. در اینجا هدف بررسی سرعت همگرایی در زمان و مکان می‌باشد و این فقط هنگامی است که حالت اختلال سفید را در نظر گرفته باشیم. هنگامی که حالت اختلال رنگی را در نظر می‌گیریم سرعت همگرایی را فقط در مکان بررسی می‌کنیم.

۱. اختلال سفید (White noise)

در حالت اختلال سفید ماتریس کواریانس $Q = I$ است، از اینرو

$$(\tilde{Q})_{ij} = (Q\varphi_i, \varphi_j) = \mathbf{B}_{ij},$$

که \mathbf{B} همان ماتریس جرم می‌باشد، از اینرو فاکتور چولسکی L در (۳.۴) به فاکتور چولسکی ماتریس جرم تبدیل می‌شود. بنابراین (۲.۴) را می‌توان بوسیله ماتریس جرم، ماتریس سفیدی η شبیه‌سازی کرد.

در آزمایش‌های عددی برای حالت اختلال سفید، سرعت همگرایی قوی تحت زمان و مکان محاسبه می‌شود. از آنجایی که جواب دقیق SPDE خود یک فرایند تصادفی است لذا به صراحت شناخته شده نیست. بنابراین جواب المان‌های محدود را روی یک مش خیلی خوب (ظریف) محاسبه می‌کنیم و به‌عنوان جواب دقیق در نظر می‌گیریم، سپس جواب‌های المان‌های محدود روی مش‌های ضعیف را محاسبه می‌کنیم و برای محاسبه سرعت همگرایی

^۲Cholesky factorization

قوی با جواب دقیق بدست آمده مقایسه می کنیم. با توجه به طول زمان اجرای حل المان های محدود، بهترین مش را $h = 2^{-8}$, $k = 2^{-8}$ قرار می دهیم.

۲. اختلال رنگی (Color noise)

هنگامی که اختلال رنگی را در نظر می گیریم، فاکتور چولسکی L از ماتریس

$$(\tilde{Q})_{ij} = (Q\varphi_i, \varphi_j),$$

در (۳.۴) را محاسبه می کنیم. در اینجا برای عملگر کواریانس Q دو حالت در نظر می گیریم. اول، یک عملگر انتگرال با هسته گوسی^۳ به عنوان کواریانس گرفته می شود، سپس، $Q = A^{-1}$ که $A = -\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ با دامنه $H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$.

۱. هسته گوسی

$$(\tilde{Q})_{ij} = (Q\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y)\varphi_i(x)\varphi_j(y) dx dy,$$

که

$$K(x, y) = e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}},$$

هسته گوسی است.

۲. حالتی که $Q = A^{-1}$

$$(\tilde{Q})_{ij} = (Q\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 \int_0^1 G(x, y)\varphi_i(x)\varphi_j(y) dx dy,$$

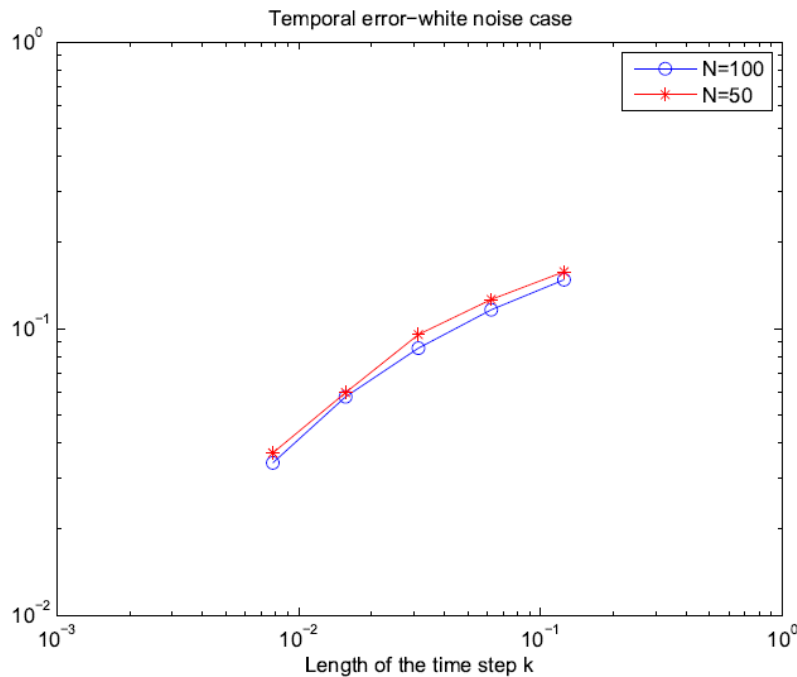
که

$$G(x, y) = \begin{cases} y(1-x), & 0 \leq y \leq x, \\ x(1-y), & x \leq y \leq 1, \end{cases}$$

تابع گرین^۴ است.

^۳Gaussian kernel

^۴ Green function



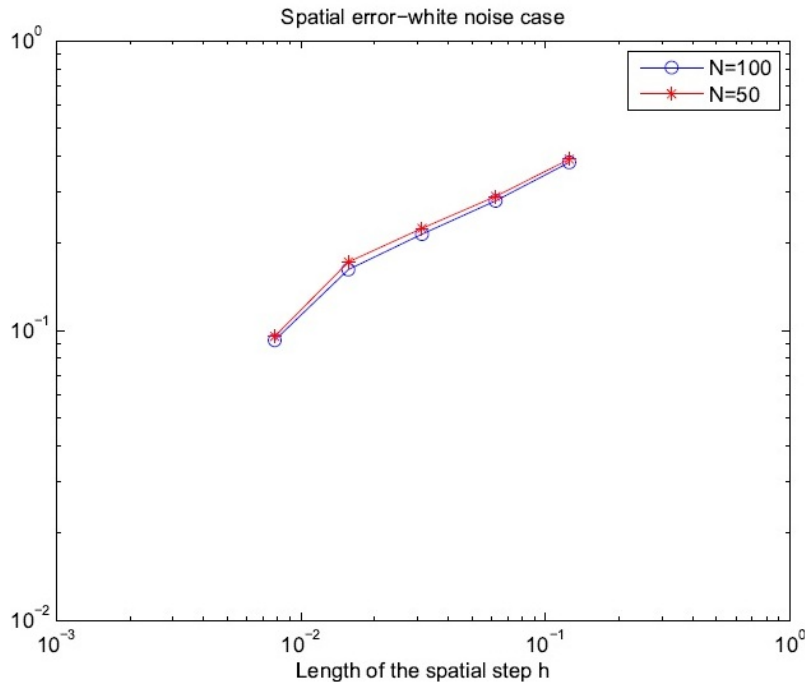
شکل ۱.۴: همگرایی قوی در k برای اختلال سفید

۵.۴ نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی برای سرعت همگرایی قوی تحت مکان و گام‌های زمانی برای دو حالت اختلال سفید و اختلال رنگی ارائه شده است. هدف از آزمایش‌های عددی، بررسی رفتار همگرایی روش عددی است در حالت خاص بررسی می‌کنیم که چگونه سرعت همگرایی روش عددی در زمان و مکان کاهش می‌یابد.

۱.۵.۴ سرعت همگرایی قوی در k برای اختلال سفید

برای محاسبه کردن سرعت همگرایی قوی در k ، ابتدا جواب دقیق u را روی یک مش خوب که $h = 2^{-8}$ ، $k = 2^{-8}$ است بدست می‌آوریم، سپس $h = 2^{-8}$ را ثابت نگه می‌داریم و جواب تقریبی U_k را برای افزایش‌های زمانی مختلف، در حالت خاص، 2^{-3} ، 2^{-4} ، 2^{-5} ، 2^{-6} ، 2^{-7} ، k بترتیب بدست می‌آوریم. در آخر $\|u - U_k\|_{L^2(\Omega, H)}$ را برای هر افزایش زمانی محاسبه می‌کنیم. نتایج بدست آمده از آزمایش‌های عددی در شکل ۱.۴ نشان داده شده است، خطا برای $N = 50$ ، $N = 100$ محاسبه شده است.



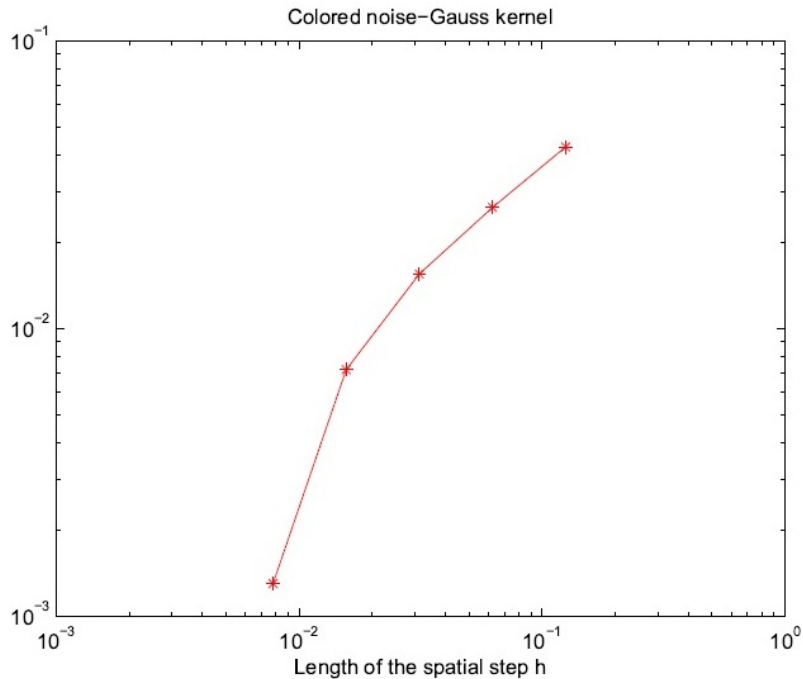
شکل ۲.۴: همگرایی قوی در h برای اختلال سفید

۲.۵.۴ سرعت همگرایی قوی در h برای اختلال سفید

در این حالت نیز برای محاسبه کردن سرعت همگرایی قوی ابتدا جواب دقیق u را روی یک مش خوب که $k = 2^{-8}$, $h = 2^{-8}$ است بدست می آوریم، سپس $k = 2^{-8}$ را ثابت نگه می داریم و جواب تقریبی U_h را برای افرازهای زمانی مختلف $2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}$ بدست می آوریم. در آخر $\|u - U_h\|_{L^2(\Omega, H)}$ را برای افرازهای زمانی مختلف محاسبه می کنیم. در شکل ۲.۴ خطا برای $N = 100$, $N = 50$ محاسبه شده است.

۳.۵.۴ سرعت همگرایی قوی در h برای اختلال رنگی

همان طور که در بخش ۴.۴ گفته شد در حالت اختلال رنگی، برای عملگر کواریانس دو حالت وجود دارد (۱) هسته گوسی $Q = A^{-1}$. در این حالت نیز مشابه حالات قبل ابتدا جواب دقیق u را روی یک مش خوب که $k = 2^{-8}$, $h = 2^{-8}$ است بدست می آوریم، سپس $k = 2^{-8}$ را ثابت نگه می داریم و جواب تقریبی U_h را برای افرازهای زمانی مختلف $2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}$ بدست می آوریم. در آخر $\|u - U_h\|_{L^2(\Omega, H)}$ را برای افرازهای مختلف محاسبه می کنیم:



شکل ۳.۴: همگرایی قوی در h برای اختلال رنگی با هسته گوسی

۱. هسته گوسی

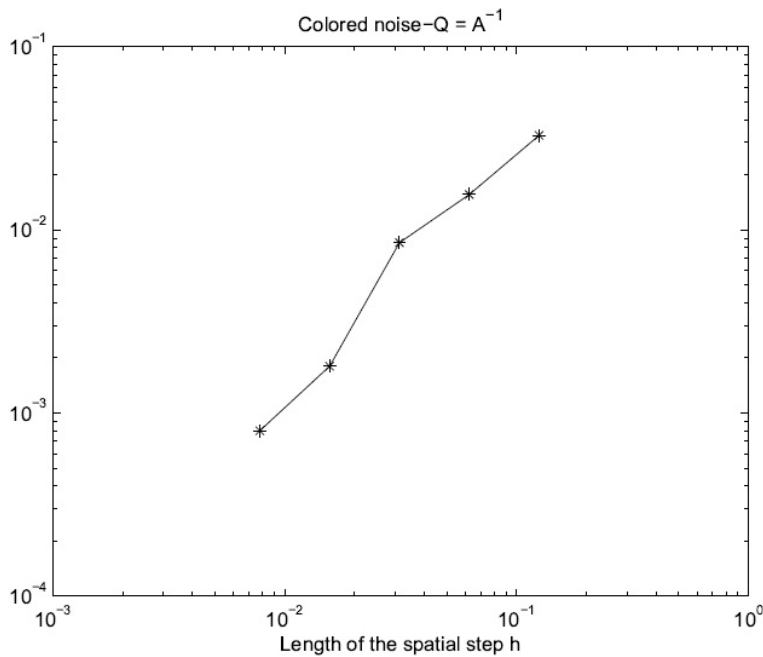
در شکل ۳.۴ سرعت همگرایی قوی در h در حالتی که عملگر کواریانس یک عملگر ناشی از هسته گوسی می‌باشد نشان داده شده است.

۲. $Q = A^{-1}$

در شکل ۴.۴ سرعت همگرایی قوی در h در حالتی که $Q = A^{-1}$ می‌باشد نشان داده شده است.

۶.۴ تحلیل نتایج عددی

در این بخش تحلیل نتایج عددی ارائه شده است. تحلیل آزمایش‌های عددی به دو بخش تقسیم می‌شود، اول تحلیل نتایج سرعت همگرایی قوی در k و h برای حالت اختلال سفید. سپس، تحلیل نتایج سرعت همگرایی قوی در h برای حالت اختلال رنگی.



شکل ۴.۴: همگرایی قوی در h برای اختلال رنگی هنگامی که $Q = A^{-1}$

۱.۶.۴ حالت اختلال سفید

همان طور که گفته شد در حالت اختلال سفید عملگر کواریانس، $Q = I$ خواهد بود بنابراین بنا بر قضیه (۲.۳.۳) سرعت همگرایی قوی تقریباً از مرتبه $O(k^{\frac{1}{4}})$ و $O(h^{\frac{1}{4}})$ می باشد. برای تخمین سرعت همگرایی در k همان طور که در بخش ۵.۴ گفته شد h را ثابت نگه می داریم و شبیه سازی را برای k های مختلف انجام می دهیم. برعکس برای تخمین سرعت همگرایی در h با صرف نظر کردن از جزئیات داریم:

$$\|U^n - u(t_n)\|_{L^2(\Omega, H)} := e_{strong}(k, h) \approx C(k^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{1}{4}}).$$

بنابراین متناظراً با ثابت نگه داشتن k و h خواهیم داشت:

$$\log e_{strong}(k) \approx \log C + \frac{1}{4} \log k.$$

و

$$\log e_{strong}(h) \approx \log C + \frac{1}{4} \log h.$$

جدول ۱.۴: سرعت همگرایی در k,h-white noise

h	k	β	k	h	β
2^{-8}	2^{-7}	۰/۷۶۵۸	2^{-8}	2^{-7}	۰/۸۱۰۹
2^{-8}	2^{-6}	۰/۵۶۲۴	2^{-8}	2^{-6}	۰/۴۰۷۵
2^{-8}	2^{-5}	۰/۴۴۵۶	2^{-8}	2^{-5}	۰/۳۸۱۶
2^{-8}	2^{-4}	۰/۳۴۶۶	2^{-8}	2^{-4}	۰/۴۳۹۷

بنابراین می‌توان انتظار داشت که نمودارهای ما در آزمایش‌های عددی برای سرعت همگرایی قوی در k و h ، با شیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ ظاهر شوند. شکل ۱.۴ و شکل ۲.۴ شیب مورد انتظار را تقریباً نشان داده‌اند. یک راه دیگر برای محاسبه سرعت همگرایی اطلاعات حاصل از خطای محاسباتی می‌باشد. بنابر قضیه (۲.۳.۳) مرتبه سرعت همگرایی باید در اطراف $O(k^{\frac{\beta}{4}} + h^{\beta})$ باشد. هنگامی که h خیلی کوچک است ($h = 2^{-8}$)، فرض بر این است که خطا توسط k محصور شده است. این بدان معنا است که سرعت همگرایی قوی باید از مرتبه $O(k^{\frac{\beta}{4}})$ باشد. بنابراین

$$\frac{U^{k_i}}{U^{k_{i+1}}} \approx \left(\frac{k_i}{k_{i+1}}\right)^{\frac{\beta}{4}} = 2^{\frac{\beta}{4}},$$

و لذا خواهیم داشت:

$$\beta = \frac{4}{\log 2} \log \left(\frac{U^{k_i}}{U^{k_{i+1}}}\right). \quad (4.4)$$

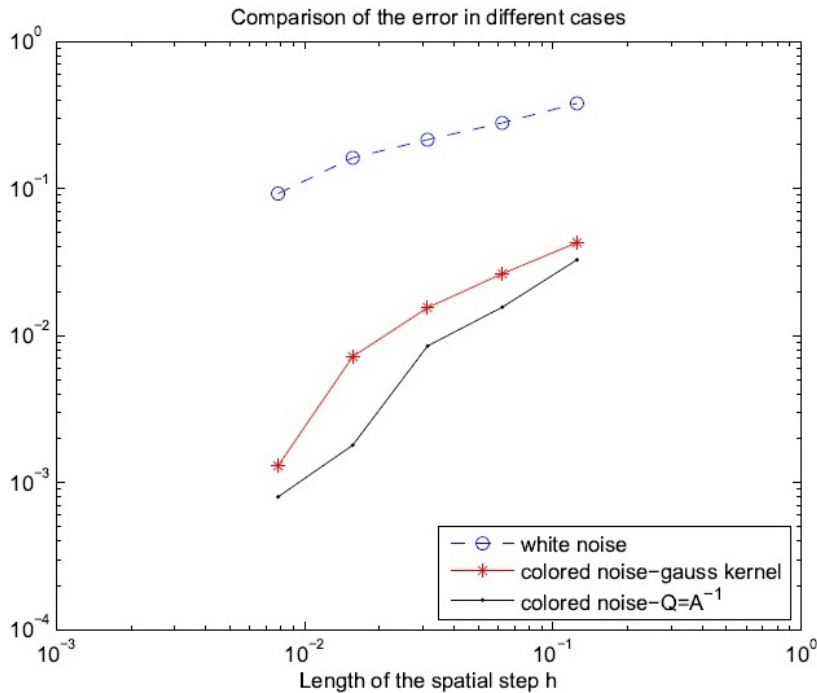
به‌طور مشابه هنگامی که k خیلی کوچک است ($k = 2^{-8}$)، فرض بر این است که خطا توسط h محصور شده است. بنابراین سرعت همگرایی قوی باید از مرتبه $O(h^{\beta})$ باشد. مشابه (۴.۴) داریم:

$$\beta = \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{U_{h_i}}{U_{h_{i+1}}}\right). \quad (5.4)$$

بنابراین با استفاده از (۴.۴) و (۵.۴)، نتایج نشان داده شده در جدول ۱.۴ را برای β بدست می‌آوریم. جدول نشان می‌دهد که مقدار متوسط β ها تقریباً در اطراف مقدار مورد انتظار $\frac{1}{4}$ است.

۲.۶.۴ حالت اختلال رنگی

در این حالت از آنجایی که سرعت همگرایی فقط در مکان بررسی می‌شود لذا بنابر قضیه (۲.۲.۳) اگر $\|Q\|_{L^2}^2 = \text{Tr}(Q) < \infty$ ، آنگاه سرعت همگرایی از مرتبه $O(h)$ می‌باشد. شکل ۳.۴ و شکل



شکل ۵.۴: مقایسه سرعت همگرایی در h برای اختلال سفید و رنگی

۴.۴ سرعت همگرایی بدست آمده با شیب مورد نظر را تایید می کنند. در شکل ۵.۴ سرعت همگرایی هنگامی که توسط h محصور شده است، برای دو حالت اختلال سفید و اختلال رنگی با هم مقایسه کرده ایم. می توان مشاهده کرد، همان طور که انتظار می رفت، همگرایی در حالت اختلال رنگی نسبت به حالت اختلال سفید سریع تر است. اگر (۵.۴) را برای بدست آوردن β در حالت اختلال رنگی به کار ببریم مقادیر ارایه شده در جدول ۲.۴ را بدست می آوریم. از آنجایی که اختلال گوسی نسبتاً هموار است لذا می توان انتظار داشت که سرعت همگرایی برای اختلال با هسته گوسی نسبت به اختلال با $Q = A^{-1}$ سریع تر باشد. به علاوه این سرعت هنگامی که h کوچک است نسبت به هنگامی که h بزرگ است، سریع تر خواهد بود. این نشان می دهد که به منظور بدست آوردن نتایج دقیق و قطعی، باید جواب ها را روی دستگاه های موازی یا زبان های برنامه نویسی دیگر برای h های کوچک به عنوان تخمین خطا اجرا کرد، به علاوه با نزدیک شدن h به صفر خطا رفتار مجانبی خواهد داشت.

به طور خلاصه، نتایج عددی در حالت اختلال رنگی بهتر است.

جدول ۲.۴: سرعت همگرایی در h-color noise

k	h	β (Gauss kernel)	$\beta (Q = A^{-1})$
2^{-8}	2^{-7}	۲/۴۶۹۵	۱/۱۶۹۹
2^{-8}	2^{-6}	۱/۱۰۶۲	۲/۲۳۹۵
2^{-8}	2^{-5}	۰/۷۶۸۳	۰/۸۷۶۰
2^{-8}	2^{-4}	۰/۷۶۰۴	۱/۰۷۲۱

نتیجه گیری و پیشنهاداتی برای کارهای آتی

در این پایان نامه، هدف ما بررسی حل عددی معادلات با مشتقات جزئی تصادفی بود. معادلات دیفرانسیل نقش بسیار مهم در ریاضیات کاربردی دارند. مسایل متنوعی از جمله در مهندسی، فیزیک و... وجود دارند که می توان به زبان معادلات دیفرانسیل بیان کرد. اما چون همیشه و به دلیل اینکه جواب تحلیلی این معادلات وجود ندارد ما از روش های عددی استفاده می کنیم تا جواب مورد نیاز در بازه های مختلف را بدست آوریم. در اینجا ما روش المان های محدد را برای بدست آوردن نتایج عددی معادله حرارت تصادفی^۵ در حالت خطی به کار بردیم. می توان این روش را برای معادلات دیگر از جمله معادله موج و معادله کان-هیلیارد^۶ در حالت خطی و غیر خطی به کار برد. روش های دیگری چون روش کالوکیشن تصادفی^۷ و روش حجم مکعب^۸ برای این معادلات به کار رفته است، اما نتایج نشان می دهد که روش المان های محدد نسبت به این دو روش هم از لحاظ هزینه و هم از لحاظ نتایج عددی بهتر است.

^۵Stochastic heat equation

^۶Cahn-Hilliard

^۷Stochastic collocation method

^۸Cubature method

پیوست آ

تعاریف مهم و کد Matlab

آ.۱ تعاریف

تعریف آ.۱.۱. یک تابع اندازه‌پذیر f که روی \mathbb{R} تعریف شده است را یک انتگرال لبگ می‌گوییم اگر یک دنباله از توابع (f_n) وجود داشته باشد به طوری که در دو شرط زیر صدق کند:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty$$

$$(b) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad s.t. \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$$

آنگاه انتگرال f به صورت

$$\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n,$$

تعریف می‌شود.

اگر یک تابع f و یک دنباله از توابع (f_n) در شرط (a) و (b) صدق کنند آنگاه داریم:

$$f \simeq \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

تعریف آ.۲.۱. یک تابع f که روی \mathbb{R} تعریف شده است، انتگرال‌پذیر موضعی گفته می‌شود اگر

$$\int_a^b f,$$

برای هر $-\infty < a < b < \infty$ موجود باشد.

تعریف ۳.۱.آ. یک مجموعه S اندازه‌پذیر گفته می‌شود اگر تابع مشخصه χ_S یک تابع انتگرال‌پذیر موضعی باشد.

تعریف ۴.۱.آ. فرض کنید S یک مجموعه اندازه‌پذیر باشد، اگر تابع مشخصه χ_S یک تابع انتگرال‌پذیر باشد آنگاه $\mu(S)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu(S) = \int \chi_S,$$

اگر χ_S انتگرال‌پذیر نباشد، آنگاه:

$$\mu(S) = \infty.$$

تعریف ۵.۱.آ. یک فرایند تصادفی $X(t), t \geq 0$ یک مارتینگل است اگر برای هر t ، انتگرال‌پذیر باشد. یعنی:

$$E|X(t)| < \infty,$$

و برای هر $s > 0$,

$$E(X(t+s) | \mathcal{F}_t) = X(t).$$

تعریف ۶.۱.آ. یک فرایند $f: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ سازگار است اگر $f(t, \cdot)$ فقط وابسته به پیشامدهایی باشد که توسط $W(s), s \leq t$ تولید شده‌اند.

تعریف ۷.۱.آ. فرض کنید $\{X_t | t \in T\}$ یک فرایند تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ باشد، که $\{\mathcal{F}_t | t \in T\}$ یک فیلتریشن، آنگاه فرایند تصادفی $\{X_t\}$ ، \mathcal{F}_t -adapted گفته می‌شود اگر برای هر $t \geq 0$ ، X_t, \mathcal{F}_t -اندازه‌پذیر باشد.

$$X_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t \quad \forall B \in \mathbb{R}.$$

$B: \sigma$ -جبر بورل.

یک فرایند تصادفی یک فرایند سازگار گفته می‌شود اگر با تعدادی فیلتریشن سازگار باشد.

تعریف ۸.۱.آ. فرض کنید X, Y دو فضای باناخ باشند. عملگر خطی A بسته است اگر برای هر دنباله $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ در $D(A)$ همگرا به $x \in X$ باشد به طوری که $Ax_n \rightarrow y \in Y$ وقتی $n \rightarrow \infty$.

تعریف ۹.۱.آ. هر ماتریس معین مثبت می‌تواند به صورت

$$A = LL^T,$$

تجزیه شود. که L پایین مثلثی با عناصر قطری مثبت می‌باشد.

• L یک فاکتور چولسکی از A گفته می‌شود.

• L می‌تواند به‌عنوان ریشه دوم یک ماتریس معین مثبت تفسیر شود.

تعریف آ.۱۰.۱. فرمول اویلر پیشرو به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_{k+1} = y_k + hf(y_k, t_k) + O(h^2),$$

اگر $t = t_k$ آنگاه:

$$y(t_k + h) = y_{k+1} = y(t_k) + \frac{dy}{dt} \Big|_{t_k} h + O(h^2) = y_k + hf(y_k, t_k) + O(h^2).$$

• فرمول اویلر پسرو به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_{k+1} = y_k + hf(y_{k+1}, t_{k+1}),$$

اگر $t = t_k$ آنگاه:

$$y(t_{k+1} - h) = y_{k+1} = y(t_{k+1}) + \frac{dy}{dt} \Big|_{t_{k+1}} (-h) + O(h^2).$$

تعریف آ.۱۱.۱. (فرمول تیلور^۱) اگر f تابعی از x با مشتقات تا مرتبه $n + 1$ باشد، آنگاه:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^n(x_0)(x - x_0)^n + \mathbf{R}_n(x, x_0),$$

که \mathbf{R}_n باقیمانده و به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{R}_n = \frac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(\theta_n)(x - x_0)^{n+1}$$

برای $\theta_n \in (x, x_0)$.

^۱Taylor formula

آ.۲ کد Matlab

در اینجا کد مطلب مسایلی که در این پایان نامه استفاده شده است آورده ایم.

```
%simple brownian motion
T = 1;
num = 1000;
dt = T/num;
norms = randn(num, 1)*dt;
bm = cumsum(norms, 1);
plot( dt:dt:T, bm );

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
T = 1; N = 500; dt = T/N; t = (dt:dt:1);
M = 1000;
dW = sqrt(dt)*randn(M,N);
W = cumsum(dW,2);
U = exp(repmat(t,[M 1]) + 0.5*W);
Umean = mean(U);
plot([0,t],[1,Umean],'b-'),
plot([0,t],[ones(5,1),U(1:5,:)],'r--'),
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('U(t)','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
legend('mean of 1000 paths','5individual paths',2)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%sde_sine.m generates outcomes of solutions of the SDE dx(t)=sin(x(t))+dB(t)
N=10000; T=700; h=T/N; % number of steps to take & maximum time & time step
t=(0:h:T);           % t is the vector [0 1h 2h 3h ... Nh]
sigma=1.0;           % strength of noise
X=zeros(size(t)); % place to store locations
```

```

X(1)=0.0;          % initial location
for i=1:N          % take N steps
X(i+1)=X(i)+sin(X(i))*h+sigma*sqrt(h)*randn;
end;
plot(t,X);
title('SDE with sine drift');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%True solution for SDE :  $dX = \lambda X dt + \mu X dW$ ,  $X(0) = Xzero$ ,}
% where  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1$  and  $Xzero = 1$ .
lambda = 2; mu = 1; Xzero = 1;
T = 1; N = 2^8; dt = 1/N;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N); % Brownian increments
W = cumsum(dW); % discretized Brownian path
Xtrue = Xzero*exp((lambda-0.5*mu^2)*((dt:dt:T))+mu*W);
plot((0:dt:T),[Xzero,Xtrue],'m-'),
xlabel('t','FontSize',12)
ylabel('X','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Approximation solution for SDE :  $dX = \lambda X dt + \mu X dW$ ,  $X(0) = Xzero$ ,
% where  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1$  and  $Xzero = 1$ .
lambda = 2; mu = 1; Xzero = 1;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N); % Brownian increments
W = cumsum(dW); discretized Brownian path
R = 4; Dt = R*dt; L = N/R;
Xem = zeros(1,L); Xtemp = Xzero;
for j = 1:L
Winc = sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
Xtemp = Xtemp + Dt*lambda*Xtemp + mu*Xtemp*Winc;

```



```

% Solves  $dX = \lambda X dt + \mu X dW$ ,  $X(0) = X_{zero}$ ,
% where  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1$  and  $X_{zer0} = 1$ .
lambda = 2; mu = 0.1; Xzero = 1; T = 1; % problem parameters
M = 50000; % number of paths sampled
Xem = zeros(5,1); % preallocate arrays
for p = 1:5 % take various Euler timesteps
Dt = 2^(p-10); L = T/Dt; % L Euler steps of size Dt
Xtemp = Xzero*ones(M,1);
for j = 1:L
Winc = sqrt(Dt)*randn(M,1);
% Winc = sqrt(Dt)*sign(randn(M,1)); %% use for weak E-M %%
Xtemp = Xtemp + Dt*lambda*Xtemp + mu*Xtemp.*Winc;
end
Xem(p) = mean(Xtemp);
end
Xerr = abs(Xem - exp(lambda));
Dtvals = 2.^([1:5]-10);
subplot(222) % top RH picture
loglog(Dtvals,Xerr,'b*-'), hold on
loglog(Dtvals,Dtvals,'r--'), hold off % reference slope of 1
axis([1e-3 1e-1 1e-4 1])
xlabel('\Delta t'), ylabel('| E(X(T)) - Sample average of X_L |')
title('emweak.m', 'FontSize', 10)

%%%%%%%%%%%%%%
%strong convergence
% Solves  $dX = \lambda X dt + \mu X dW$ ,  $X(0) = X_{zero}$ ,
% where  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1$  and  $X_{zer0} = 1$ .
lambda = 2; mu = 1; Xzero = 1; % problem parameters
T = 1; N = 2^9; dt = T/N; %

```

```

M = 1000; % number of paths sampled
Xerr = zeros(M,5); % preallocate array
for s = 1:M, % sample over discrete Brownian paths
dW = sqrt(dt)*randn(1,N); % Brownian increments
W = cumsum(dW); % discrete Brownian path
Xtrue = Xzero*exp((lambda-0.5*mu^2)+mu*W(end));
for p = 1:5
R = 2^(p-1); Dt = R*dt; L = N/R; % L Euler steps of size Dt = R*dt
Xtemp = Xzero;
for j = 1:L
Winc = sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
Xtemp = Xtemp + Dt*lambda*Xtemp + mu*Xtemp*Winc;
end
Xerr(s,p) = abs(Xtemp - Xtrue); % store the error at t = 1
end
end
Dtvals = dt*(2.^([0:4]));
subplot(221) % top LH picture
loglog(Dtvals,mean(Xerr),'b*-'), hold on
loglog(Dtvals,(Dtvals.^(.5)),'r--'), hold off % reference slope of 1/2
axis([1e-3 1e-1 1e-4 1])
xlabel('\Delta t'), ylabel('Sample average of | X(T) - X_L |')
title('emstrong.m','FontSize',10)

%%%%%%%%%%%%%%
%STAB Mean-square and asymptotic stability test for E-M.
% SDE is dX = lambda*X dt + mu*X dW, X(0) = Xzero,
% where lambda and mu are constants and Xzero = 1.
T = 20; M = 50000; Xzero = 1;
ltype = {'b-','r--','m-.'};

```

```

subplot(211)
lambda = -3; mu = sqrt(3);
for k = 1:3
Dt = 2^(1-k);
N = T/Dt;
Xms = zeros(1,N); Xtemp = Xzero*ones(M,1);
for j = 1:N
dw= sqrt(Dt)*randn(M,1);
Xtemp = Xtemp + Dt*lambda*Xtemp + mu*Xtemp.*dw;
Xms(j) = mean(Xtemp.^2); % mean-square estimate
end
semilogy((0:Dt:T), [Xzero,Xms], ltype{k}, 'Linewidth',2), hold on
end
legend('\Delta t = 1', '\Delta t = 1/2', '\Delta t = 1/4')
title('Mean-Square: \lambda = -3, \mu = \surd 3', 'FontSize',16)
ylabel('E[X^2]', 'FontSize',12), axis([0,T,1e-20,1e+20]), hold off
subplot(212) %%%% Asymptotic: a single path %%%%
T = 500;
lambda = 0.5; mu = sqrt(6); % problem parameters
for k = 1:3
Dt = 2^(1-k);
N = T/Dt;
Xemabs = zeros(1,N); Xtemp = Xzero;
for j = 1:N
dw= sqrt(Dt)*randn;
Xtemp = Xtemp + Dt*lambda*Xtemp + mu*Xtemp*dw;
Xemabs(j) = abs(Xtemp);
end
semilogy([0:Dt:T], [Xzero,Xemabs], ltype{k}, 'Linewidth',2), hold on

```

```

end
legend('\Delta t = 1', '\Delta t = 1/2', '\Delta t = 1/4')
title('Single Path: \lambda = 1/2, \mu = \surd 6', 'FontSize', 16)
ylabel('|X|', 'FontSize', 12), axis([0, T, 1e-50, 1e+100]), hold off

%dx(t)=-x(t)dt+sigma*dB(t).
N=8000;           % number of steps to take
T=8;             % maximum time
h=T/N;           % time step
t=(0:h:T);       % t is the vector [0 1h 2h 3h ... Nh]
y=zeros(size(t)); % prepare place to store locations
subplot(2,3,1);
y(1)=3;          % initial height
for i=1:N        % start taking steps
y(i+1)=y(i)-y(i)*h;
end;
plot(t,y), hold on % plot more permanently
y(1)=-2;         % initial height
for i=1:N        % start taking step
y(i+1)=y(i)-y(i)*h;
end;
plot(t,y);       % plot more permanently
axis([0 T -2 3]); % set axis limits
grid on;
title('Exponential decay to 0, 8000 steps');
subplot(2,3,2);
s=0.1;          % \sigma
y(1)=3;         % initial height
for i=1:N       % start taking steps
y(i+1)=y(i)-y(i)*h+s*sqrt(h)*randn;

```

```
end;
plot(t,y), hold on % plot more permanently
y(1)=-2;          % initial height
for i=1:N         % start taking steps
y(i+1)=y(i)-y(i)*h+s*sqrt(h)*randn;
end;
plot(t,y);        % plot more permanently
axis([0 T -2 3]); % set axis limits
grid on;
title('\sigma = 0.1, 8000 steps');
subplot(2,3,3);
s=0.4;           % sigma
y(1)=3;          % initial height
for i=1:N         % start taking steps
y(i+1)=y(i)-y(i)*h+s*sqrt(h)*randn;
end;
plot(t,y), hold on % plot more permanently
y(1)=-2;          % initial height
for i=1:N         % start taking steps
y(i+1)=y(i)-y(i)*h+s*sqrt(h)*randn;
end;
plot(t,y);        % plot more permanently
axis([0 T -2 3]); % set axis limits
grid on;
title('\sigma = 0.4, 8000 steps');
subplot(2,3,4);
N=80;            % number of steps to take
T=8;             % maximum time
h=T/N;           % time step
```

```

t=(0:h:T);          % t is the vector [0 1h 2h 3h ... Nh]
y=zeros(size(t));  % prepare place to store locations
s=0.2;             % sigma
y(1)=3;           % initial height
for i=1:N          % start taking steps
y(i+1)=y(i)-y(i)*h+s*sqrt(h)*randn;
end;
plot(t,y), hold on % plot more permanently
y(1)=-2;          % initial height
for i=1:N          % start taking steps
y(i+1)=y(i)-y(i)*h+s*sqrt(h)*randn;
end;
plot(t,y);        % plot more permanently
axis([0 T -2 3]); % set axis limits
grid on;
title('80 steps, h=0.1, \sigma=0.2');
subplot(2,3,5);
N=800;            % number of steps to take
T=8;              % maximum time
h=T/N;            % time step
t=(0:h:T);        % t is the vector [0 1h 2h 3h ... Nh]
y=zeros(size(t)); % prepare place to store locations
y(1)=3;           % initial height
for i=1:N          % start taking steps
y(i+1)=y(i)-y(i)*h+s*sqrt(h)*randn;
end;
plot(t,y), hold on % plot more permanently
y(1)=-2;          % initial height
for i=1:N          % start taking steps

```

```
y(i+1)=y(i)-y(i)*h+s*sqrt(h)*randn;
end;
plot(t,y);          % plot more permanently
axis([0 T -2 3]);  % set axis limits
grid on;
title('800 steps, h=0.01, \sigma=0.2');
subplot(2,3,6);
N=8000;            % number of steps to take
T=8;              % maximum time
h=T/N;            % time step
t=(0:h:T);        % t is the vector [0 1h 2h 3h ... Nh]
y=zeros(size(t)); % prepare place to store locations
y(1)=3;           % initial height
for i=1:N         % start taking steps
y(i+1)=y(i)-y(i)*h+s*sqrt(h)*randn;
end;
plot(t,y), hold on % plot more permanently
y(1)=-2;          % initial height
for i=1:N        % start taking steps
y(i+1)=y(i)-y(i)*h+s*sqrt(h)*randn;
end;
plot(t,y);        % plot more permanently
axis([0 T -2 3]); % set axis limits
grid on;
title('8000 steps, h=0.001, \sigma=0.2');
orient landscape
saveas(gcf, 'langevin.pdf', 'pdf');
```

مراجع

- [1] A.Hall, (2006), "Finite Element Method For Stochastic partial Parabolic Problem", Master's Thesis, Chalmers University of Technology.
- [2] A. M. Davie and J. G. Gaines,(2001), "Convergence of Numerical Schemes for the Solution of Parabolic Stochastic Partial Differential Equations", **Math. Comp.** **70**, 121–134.
- [3] B.Øksendal, (1998), "**Stochastic Differential Equations**", 5th ed., Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [4] B. Øksendal, (2008), "**Stochastic partial differential equations driven by multiparameter white noise of L´evy processes**", *Quart. Appl. Math.*, 66, 521–537.
- [5] Desmond J. Higham,(2001), "An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Diffrential Equation" **Society for industrial and Applied Mattematica Philadelphia, PA, USA.**
- [6] E. Hausenblas, (2003), "Approximation for Semilinear Stochastic Evolution Equations", **Potential Anal.** **18**, 141–186.
- [7] E. Hausenblas, (2002), "Numerical Analysis of Semilinear Stochastic Evolution Equations in Banach Spaces", **J. Comput. Appl. Math.** **147**, 485–516.
- [8] E. Hausenblas, (2003), "Weak Approximation for Semilinear Stochastic Evolution Equations", *Stochastic Analysis and Related Topics VIII*, *Progr. Probab*, vol. 53, Birkhäuser, Basel, pp. 111–128.
- [9] F. E. Benth, (1995), "Stochastic partial differential equations and generalized stochastics", processes. Dr. Scient. Thesis, University of Oslo.
- [10] Fima C. Klebaner, (2004), "**Intruduction Stochastic Calculuse White Appli-cation**", Monash University Melbourne.
- [11] G. Da Prato and J. Zabaczyk, (2002), "Second Order Partial Diffrential Equation in Hillbert Space", **London Mathematical Society Lecture Note Series**, **293**, Cambridge University Press.

- [12] G. Da Prato and J. Zabczyk, (1992), "**Stochastic Equation in Infinite Dimensions**", Cambridge University Press, Cambridge.
- [13] Higham and N. J. Higham, (2000), "MATLAB Guide", **SIAM, Philadelphia**.
- [14] I. Karatzas and S. E. Shreve, (1991), "**Brownian Motion and Stochastic Calculus**", 2nd ed., Springer- Verlag, Berlin.
- [15] I. Gyöngy and D. Nualart, (1997), "**Implicit Scheme for Stochastic Parabolic Partial Differential Equations Driven by Space-Time White Noise**", Potential Anal. 7, 725–757.
- [16] J. B. Walsh, (2005), "On numerical solutions of the stochastic wave equation", **Illinois Journal of Mathematics**.preprint
- [17] J. B. Walsh, (1986), "An Introduction to Stochastic Partial Differential Equations", Lecture Notes in Math., vol. 1180, **Springer**, Berlin, pp. 265–439.
- [18] J. Potthoff, (1992), "White noise methods for stochastic partial differential equations", In B.L. Rozovskii and R.B. Sowers (editors): Stochastic Partial Differential Equations and Their Applications, **Springer**, New York, 238–251.
- [19] J. Printems, (2001), "On the Discretization in Time of Parabolic Stochastic Partial Differential Equations", **M2AN Math. Model. Numer. Anal.** 35, 1055–1078.
- [20] K. L. Chung and R. J. Williams, (1990), "Introduction to Stochastic Integration (Second Edition)", **Birkh auser**, Boston.
- [21] L. Debnath, P. Mikusinski, (2005), "**Intruduction Hillbert Space White Appli-cation**", University of Texas-Pan American, University of Central Florida.
- [22] Li Bin, (2004), "Numerical method for a parabolic stochastic partial differential equation", Master's thesis, Chalmers University of Technology.
- [23] P. E. Kloeden and E. Platen, (1999), "**Numerical Solution of Stochastic Dif-ferential Equations**", Springer-Verlag, Berlin.
- [24] Q. Du and T. Zhang, (2002),"Numerical Approximation of Some Linear Stochas-tic Partial Differential Equations Driven by Special Additive Noises", **SIAM J. Numer. Anal.** 40, 1421–1445.
- [25] S. Larsson and V. Thomée, (2003), "Partial Differential Equations With Numerical Methods", **Springer**.
- [26] S. Larsson. (2004), "Numerical Methods for Stochastic ODEs. Lecture Notes. De-partment of Mathematical" Sciences, Chalmers University of Technology, **Gothen-burg**.
- [27] S. M. Ross, (1999), "**Intrudaction to Mathematical Finance**", Cambridge.

-
- [28] T. C. Gard, (1988), "**Introduction to Stochastic Differential Equations**", Marcel Dekker, New York.
- [29] T. Shardlow, (1999), "Numerical Methods for Stochastic Parabolic PDEs", **Numer. Funct. Anal. Optim.** **20**, 121–145.
- [30] T. Shardlow, (2003), "Weak Convergence of a Numerical Method for a Stochastic Heat Equation, **BIT** **43**, 179–193.
- [31] T. Müller-Gronbach and K. Ritter, (2004), "**Non-Uniform Time-Discretization and Lower Bounds for Approximation of Stochastic Heat Equations**", preprint.
- [32] W. Grecksch and P. E. Kloeden, (1996), "Time-Discretised Galerkin Approximations of Parabolic Stochastic PDEs", **Bull. Austral. Math. Soc.** **54**, 79–85.
- [33] Y. Yan, (2003), "Error Analysis and Smoothing Properties of Discretized Deterministic and Stochastic Parabolic Problems", PhD thesis, Chalmers University of Technology.
- [34] Y. Yan, (2005), "Galerkin finite element methods for stochastic parabolic partial differential equations", **SIAM J. Numer. Anal.** **43**, 1363–1384.
- [35] Y. Yan, (2004), "Semi Discrete Galerkin Approximation for Linear Stochastic Parabolic Partial Differential Equation Driven by Additive Noise, **BIT** **44**.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Finite Element	المان محدود
Experiment	آزمایش
Noise	اغتشاش
Expecte Value	امید ریاضی
Probablity Measure	اندازه احتمال
Index	اندیس
Euler	اویلر
Eigen Vector	بردار ویژه
Elliptic	بیضوی
Stablility	پایداری
Backward	پسرو
Continous	پیوسته
Estimate	تخمین
Random	تصادفی
Projection	تصویر
Approximate	تقریب
Distribution	توزیع
Mass	جرم
Weak Solution	جواب ضعیف
Strong Solution	جواب قوی
Brownian Motion	حرکت بروانی
Self Adjoint	خودالحاق

Interpolation	درون‌یابی
Adapt	سازگار
Stiffness	سفتی
Parabolic	سه‌می‌وار
Simulation	شبیه‌سازی
Filter	صافی
Numerical	عددی
Operator	عملگر
Nonlinear	غیرخطی
Process	فرایند
Banch Space	فضای باناخ
Sobolev Space	فضای سوبولوف
Hillber Space	فضای هیلبرت
Dterministic	قطعی
Pice Wise	قطعه‌وار
Discrete	گسسته
Matrix	ماتریس
Eigen Value	مقدار ویژه
Elementry	مقدماتی
Spatial	مکان
Norm	نرم
Theory	نظریه
Semi	نیم
Orthonormal	یک‌امتعامد
Nucler	هسته
Convergence	همگرایی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adapt	سازگار
Approximate	تقریب
Backward	پسرو
Banch Space	فضای باناخ
Brownian Motion	حرکت بروانی
Continous	پیوسته
Convergence	همگرایی
Deterministic	قطعی
Discrete	گسسته
Distribution	توزیع
Eigen Value	مقدار ویژه
Eigen Vector	بردار ویژه
Elementry	مقدماتی
Elliptic	بیضوی
Estimate	تخمین
Euler	اویلر
Expecte Value	امید ریاضی
Experiment	آزمایش
Filter	صافی
Finite Element	المان محدود
Hillbert Space	فضای هیلبرت
Index	اندیس

Interpolation	درون‌یابی
Mass	جرم
Matrix	ماتریس
Noise	اغتشاش
Nonlinear	غیرخطی
Norm	نرم
Nucler	هسته
Numerical	عددی
Operator	عملگر
Orthonormal	یکامتعامد
Parabolic	سه‌می‌وار
Pice Wice	قطعه‌وار
Probablity Measure	اندازه احتمال
Process	فرایند
Projection	تصویر
Random	تصادفی
Self Adjoint	خودالحاق
Semi	نیم
Simulation	شبیه‌سازی
Sobolev Space	فضای سوبولوف
Spatial	مکان
Stablility	پایداری
Stiffness	سفتی
Strong Solution	جواب قوی
Theory	نظریه
Weak Solution	جواب ضعیف

نمایه

- ۱ فضای احتمال، ۱
اختلال رنگی، ۲۵، ۵۶، ۶۳
اختلال سفید، ۲۶، ۵۶، ۶۳
المان‌های محدود، ۱، ۲۶، ۵۹
انتگرال تصادفی، ۷
- ج
جواب ضعیف، ۱۲، ۱۳، ۲۸
جواب قوی، ۱۱
- چ
چندان‌دیده، ۴
- ح
حرکت براونی، ۷، ۱۰، ۱۲، ۲۵
- ض
ضرب تنسور، ۵۷
- ع
عملگر لاپلاس، ۱، ۲۹
- ف
فرایند تصادفی، ۱
فرایند وینر، ۱۵
فرایند وینر استوانه‌ای، ۲، ۲۶
فرایند وینر هسته‌ای، ۲۵
- گ
فضای احتمال، ۱
فیلتریشن، ۵، ۱۲، ۲۶، ۶۸
گسسته‌سازی کامل، ۲۶، ۲۸، ۴۳
گسسته‌سازی ناقص، ۲۶، ۲۷
- م
ماتریس جرم، ۳، ۵۸
ماتریس سفی، ۳، ۵۸
مثلی‌سازی، ۲۶
معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی
خطی، ۴۳
معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی خطی،
۱
معادلات دیفرانسیل تصادفی، ۱۰، ۱۱
- ن
نیم‌گروه، ۸، ۹
نیم‌گروه تحلیلی، ۲

Surname: Esmailvandi

Name: Amene

Title: Finite element method for stochastic partial differential equation

Supervisor: Dr.Ali mesforush

Advisor: Dr.Hojat ahsani tehrani

Degree: Master of Science

Subject: Application Mathematics

Field: Numerical Analysis

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical

Date: 2012

Number of pages: 89

Keywords: Strong convergence; Weak convergence; White noise; Color noise

Abstract

In this thesis, we present numerical solution for the stochastic partial differential equations. First of all, we review the necessary concepts and definitions. In the second chapter, the stochastic differential equations are studied. In the third chapter we present the finite element method of SPDE's. In the last chapter, we've suggested a method for solving such equations, and we've compared the convergence rate behavior in both white and colored noise. In this thesis all graphs are plotted by matlab software.



Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Application Mathematics

Finite element method for stochastic partial differential equation

Supervisor

Dr.Ali mesforush

Advisor

Dr.Hojat ahsani tehrani

by

Amene Esmailvandi

2012