دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

عنوان

مترهای فینسلری ناوردا روی منیفلدهای همگن

نگارش
سمیه قلاسی

استاد راهنما

دکتر کامران شریفی
دکتر حمیدرضا سلیمی مقدم

شهریور ۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

در اینجا می‌خواهم از اساتید محترم جناب آقای دکتر شریفی، دکتر حجازی، استاد موسوی و بالاخص
استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر سلیمی مقدم که با لطف بی کرانشان مرا در تهیه و تنظیم این پایان نامه یاری رساندند،
خانواده مهربانم که همواره همراه و حامی من بودند،
و دوستان و هم کلاسی های عزیزم،
نرگس فتحی، سکینه مارزلو، هاجر بدر زاده، رویا حاتمی، الهام علیزاده، عذرا رستمی، فاطمه عسکری، آسیه حسینی، معصومه رستمی، هادی نوروزی، مجتبی پرهیزکار، علی جمالی،
کمال تشکر و قدر دانی را داشته باشم.

سمیه قلاسی
شهریور ۱۳۹۱

تقدیم

تقدیم به مهربان فرشتگانی که:

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست.

تقدیم به خانواده عزیزم ...

چکیده

در این پایان نامه، مترهای فینسلری ناوردا روی منیفلدهای همگن را بررسی می کنیم. ابتدا مقدماتی درباره ساختارهای ریمانی و فینسلری همگن و متقارن بیان کرده و سپس توصیفی از مترهای فینسلری ناوردا روی منیفلد های همگن ارائه می دهیم و شرایط لازم و کافی که یک منیفلد همگن باید داشته باشد که چنین متری را بپذیرد به دست می آوریم و در حالت خاص شرایط لازم و کافی که یک گروه لی باید داشته باشد تا متر فینسلری دوسو ناوردا بپذیرد را بررسی می کنیم. در نهایت به صورت یک مورد خاص شرایطی که یک منیفلد همگن برای پذیرفتن یک متر فینسلری غیر ریمانی باید داشته باشد را بدست آورده و مثال هایی را در این مورد بیان می کنیم.

واژه‌های کلیدی: متر فینسلری، نرم مینکوفسکی، فضای همگن، جبر لی، گروه لی

مقالات مستخرج

۱- مترهای فینسلری غیر ریمانی ناوردا روی منیفلدهای همگن ، چهل و سومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه تبریز ۶ الی ۹ شهریور ماه ۱۳۹۱.

۲- متر های فینسلری ناوردا روی فضاهای فینسلری مختلط متقارن، چهل و سومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه تبریز ۶ الی ۹ شهریور ماه ۱۳۹۱.

پیشگفتار

علاوه بر متر های اقلیدسی و ریمانی برای محاسبه طول یک بردار مترهای دیگری نیز موجودند که نظر به کاربرد بسیار زیاد آنها در علوم فنی مهندسی و فیزیک، مورد توجه بسیاری از ریاضی دانان کاربردی و محض قرار گرفته اند. یکی از این مترها متر فینسلری است که می توان از آن به عنوان طبیعی ترین تعمیم متر ریمانی نام برد.

مطالعه متر فینسلری ابتدا توسط جی اف بی ریمان [۱] در سال ۱۸۵۴ آغاز گردید، ولی از آنجائیکه او عقیده داشت که مفهوم متری که بعدها به نام ریمان معروف شد برای مطالعه مفاهیم هندسی و ادامه کارهای گاوس [۲] مناسب تر است به مطالعات خود ادامه نداد. اما نظر به اینکه این تابع در تعابیر پدیده های فیزیکی نقش موثری داشت بعدها توسط دیگران مورد مطالعه قرار گرفت. از جمله این افراد پل فینسلر [۳] بود که در سال ۱۹۱۸ با استفاده از نتایج بدست آمده از استاد خودش کنستانتین کاراتئودوری [۴] و قضیه اولر توانست تعریف مدونی از این متر ارائه نماید.

او در حقیقت شرایطی برای یک تابع مانند $F(x,y)$ روی کلاف مماس TM ارائه نمود که در عین حالی که از تابع ریمان جامع تر بود خواص اصلی آن را نیز داشت. وی ثابت کرد که این تابع در هر نقطه $x \in M$ یک ضرب داخلی به صورت $F^۲ = g_{ij}(x,y)y^iy^j$ روی T_xM تعریف می کند. لذا می توان گفت که دوران شکوفایی هندسه پس از افلاطون و اقلیدس در اسکندریه توسط دانشمندان آلمانی گاوس، ریمان و ... صورت پذیرفت.

مطالعه فضاهای فینسلری نقش مهمی در فیزیک دارد. برای مثال همانطور که در [۳] می بینیم، با در نظر گرفتن متر فینسلری $F(x,y)$ ، $\int F(x,y)$ علاوه بر تعبیر هندسی تعابیر فیزیکی مهمی نیز خواهد داشت. به عنوان نمونه در اپتیک، در یک میانگین ناهمسانگرد، سرعت نور وابسته به جهت حرکت آن است. در هر نقطه x ، با در نظر گرفتن y به صورت جهتی بیرون آمده از x ، $F(x,y)$ نمایانگر زمانی است که نور لازم دارد تا در جهت فلش به سمت سر فلش y برود و $\int_b^a F(x,y)$ نمایانگر کل زمانی است که نور می گیرد تا ناحیه داده شده در این میانه را طی کند.

---

[۱] Georg Friedrich Berhnard Riemann
[۲] Carl Friedrich Gouss
[۳] Paul Finsler
[۴] Constantin Caratheodory

از طرف دیگر مطالعه ساختارهای ناوردا بر فضاهای تحویلی مسئله مهمی در هندسه است. تحقیقات نومیزو [۵] در باره خواص مترهای ریمانی ناوردا بر $\frac{G}{H}$ نتایج مهم و جالبی بدست آورد. او التصاق این نوع مترها را محاسبه نمود و فرمولی برای ژئودزیک و انحنای آنها بدست آورد. این تحقیقات باعث بوجود آمدن مثال های خیلی مهمی از منیفلدهای ریمانی با ویژگی های خاص شد. بنابراین مطالعه مترهای فینسلری ناوردا روی منیفلدهای همگن و به طور خاص منیفلدهای همگن تحویلی بسیار حائز اهمیت می باشد.

در این پایان نامه ما پس از ارائه مقدماتی از هندسه فینسلری و ریمانی در دو بخش اول، در بخش سوم ابتدا توصیفی از مترهای فینسلری ناوردا روی منیفلدهای همگن می آوریم و با تعریف جفت لی مینکوفسکی نشان میدهیم که، یک متر فینسلری ناوردا روی $\frac{G}{H}$ یک جفت لی مینکوفسکی را ایجاد می کند، و برعکسش نیز اگر H همبند باشد درست است. در بخش چهارم فرمولی برای ژئودزیک و انحنای پرچمی مترهای فینسلری ناوردا روی منیفلدهای همگن در حالتی خاص، بدست می آوریم و به همراه معرفی مفهوم جبر لی مینکوفسکی به بررسی مترهای فینسلری دوسو ناوردا روی گروه های لی می پردازیم و در آخر شرایطی که باید موجود باشد که یک مترفینسلری غیر ریمانی ناوردا روی $\frac{G}{H}$ داشته باشیم را بدست آورده و مثال هایی را در این مورد بیان می کنیم.

---
[۵]Katsumi Numizu

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مقدمات هندسه ریمانی

۱.۱ مقدمه

هندسه ای که ریمان برای اولین بار مطرح ساخت و بنام هندسه ریمانی معروف گردید در واقع تعمیم مطالبی به نام هندسه دیفرانسیل رویه هاست که توسط گاوس مورد مطالعه قرار گرفته بود. در هندسه دیفرانسیل رویه ها یک ضرب داخلی روی خانواده بردارهای مماس بر رویه تعریف می گردد که توسط این ضرب می توان طول بردارهای مماس بر رویه در $R^۳$ را بدست آورد. این ضرب داخلی را معمولا توسط $< . ,. >$ نمایش می دهند.

از خواص جالب توجه این ضرب آن است که کلیه خواص هندسی رویه از جمله طول قوس یک منحنی $\gamma(t)$ در روی هر رویه را نیز می توان با استفاده از آن بدست آورد.

$$L = \int_a^b < \gamma'(t), \gamma'(t) >^{\frac{۱}{۲}} \, dt$$

در حقیقت اولین کار ریمان تعمیم این ضرب بود که بعدها منجر به تعریف انتگرال ریمان و متر ریمان [۱] گردیده، موجبات تعریف هندسه ریمانی را پس از هندسه اقلیدسی فراهم نمود. در فیزیک نیز مشابه این کار یعنی تعریف هندسه فضا توسط شکل خاصی از انتگرال بالا و عبارت زیر آن صورت می گیرد که اساس کارهای فیزیک نظری است.

طبق قضیه فیثاقورث مربع طول یک بردار بی نهایت کوچک در $R^۳$ ، با مولفه هایی به صورت dx و dy و dz به صورت $dx^۲ + dy^۲ + dz^۲$ خواهد بود. بنابر این طول خم پارامتری $C(t) = (x(t), y(t), z(t))$ با انتگرال زیر به دست می آید:

[۱] Riemannian metric

$$\int dc = \int (x'^{۲} + y'^{۲} + z'^{۲})^{\frac{۱}{۲}} dt$$

تعریف ۱.۱.۱. دستگاه مختصات کروی یک دستگاه برای نمایش حساب ها و اعداد هندسی در فضای سه بعدی با استفاده از سه مختصه است: فاصله شعاعی یک نقطه از یک مبدا ثابت (ρ یا r)

زاویه سمت الراس از قسمت مثبت محور z ها (θ)

زاویه گرایی از قسمت مثبت محور x ها (ϕ)

مختصات دکارتی را با روابط زیر می توان به مختصات کروی برد:

$$\begin{aligned} x &= \rho Sin\phi Cos\theta \\ y &= \rho Sin\phi Sin\theta \\ z &= \rho Cos\phi \end{aligned}$$

حال برای یک خم در کره واحد در $R^{۳}$ که در مختصات کروی پارامتری به صورت:

$$C(t) = (Sin\theta(t)Cos\phi(t), Sin\theta(t)Sin\phi(t), Cos\theta(t))$$

طول خم برابر است با:

$$(\theta'^{۲} + Sin^{۲}\theta\phi'^{۲})^{\frac{۱}{۲}} dt$$

حال اگر کره را نه به صورت فضای ۳ بعدی بلکه به صورت منیفلدی با چارت (θ, ϕ) در نظر بگیریم، خواهیم دید که مشتق به صورت زیر بیان می شود:

$$ds^{۲} = d\theta^{۲} + Sin^{۲}\theta d\phi^{۲}$$

این روشی برای محاسبه طول خم روی یک کره یا به عبارتی همان متر ریمانی است [۱۳] .

۲.۱ ساختارهای ریمانی همگن

تعریف ۱.۲.۱. یک متر ریمان روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M عبارتست از یک تانسور g از نوع $\binom{۲}{۰}$ روی M بطوریکه در هر نقطه p از M متقارن ($\forall X,Y \in T_pM \quad g_p(X,Y) = g_p(Y,X)$) و مثبت معین ($\forall X \neq ۰ \quad g_p(X,X) > ۰$)باشد.

به راحتی می توان بررسی نمود که این تانسور در هر نقطه M یک ضرب داخلی روی T_pM تعریف می کند. این ضرب داخلی را توسط $< X,Y >_p$ یا تانسور $g_p(x,y)$ نمایش می دهیم. اگر (x,u) چارتی در همسایگی نقطه p از منیفلد M ، $x(p) = (x^۱, x^۲, ..., x^n)$ مختصات موضعی وابسته به آن و $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ پایه ای در همسایگی p روی T_pM باشد، داریم:

$$X = \sum_{i=۱}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \quad , \quad Y = \sum_{i=۱}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

آنگاه در مختصات موضعی تانسور ریمان به صورت زیر نوشته می شود:

$$g_p(X,Y) = \sum_{i,j=۱}^n g_{ij}(p) dx^i \otimes dx^j (X,Y)$$

چون g متقارن است، رابطه فوق را می توان به صورت $g = \sum_{i,j=۱}^n g_{ij}(p) dx^i dx^j$ نوشت که در آن $g_{ij}(x^۱, ..., x^n)$ توابعی روی چارت (x,u) در همسایگی نقطه $p \in M$ هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$g_{ij}(p) = g(\frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p)) =< \frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p) >$$

و در رابطه $g_{ij} = g_{ji}$ صدق می کنند.

منیفلد دیفرانسیل پذیر M همراه با متر ریمانی g را یک منیفلد ریمانی نامیده، توسط (M,g) نمایش می دهیم [۲۳] .

تعمیم هایی از مترهای ریمانی

روش هایی برای اندازه گیری طول با استفاده از بردارهای مماس روی منیفلدهای هموار وجود دارد. در اینجا سه روش را که نقش

مهمی را در ریاضیات بازی می کنند بیان می کنیم، مترهای شبه ریمانی [۲]، مترهای زیر- ریمانی [۳] و مترهای فینسلری [۴] که هر کدام از آنها یکی از شرایط مترهای ریمانی را ندارند [۲۳] .

تعریف ۲.۲.۱. متر شبه ریمانی با صرف نظر کردن از اینکه این متر باید معین مثبت باشد بدست می آید. به عبارتی میدان تانسوری از نوع $\binom{۲}{۰}$ است که:

$$g(X,Y)=g(Y,X) \quad , \quad \forall p\in M \quad , \quad \forall X,Y\in T_pM$$

$$X\in T_pM \quad , \quad \forall Y\in T_pM \quad , \quad g(X,Y)=۰ \Longleftrightarrow X=۰$$

با فرض اینکه g یک متر شبه ریمانی است و $p\in M$ باشد به وسیله توسیعی از الگوریتم گرام اشمیت می توان پایه $(E_۱,...,E_n)$ برای T_pM ساخت به طوریکه :

$$g=-(\varphi^۱)^۲-...-(\varphi^r)^۲+(\varphi^{r+۱})^۲+...+(\varphi^n)^۲ \quad , \quad ۱\leq r\leq n$$

که در آن r را شاخص g می نامیم و برابر با ماکسیمم بعد زیر فضایی از T_pM می باشد که g منفی معین است.

از مهمترین مترهای شبه ریمانی می توان به مترهای لورنتز [۵] اشاره کرد که متر شبه ریمانی با شاخص یک می باشند. یک مثال مهم از مترهای لورنتز، متر مینکوفسکی است که یک متر m روی $R^{n+۱}$ در مختصات موضعی $(\xi^۱,...,\xi^n,\mathcal{T})$ است.

$$m=(d\xi^۱)^۲+...+(d\xi^n)^۲-(d\mathcal{T})^۲$$

تعریف ۳.۲.۱. در متر زیر- ریمانی الزام اینکه متر روی کل فضای مماس تعریف شود برداشته می شود. یک ساختار زیر- ریمانی بر منیفلد هموار $n-$ بعدی M، جفت (D,g) است که در آن D یک توزیع و g یک متر ریمانی بر D است. منیفلد زیر- ریمانی (M,D,g) یک منیفلد هموار M به همراه یک ساختار زیر- ریمانی (D,g) است.

[۲] Pseudo-Riemannian metric
[۳] Sub-Riemannian metric
[۴] Finsler metric
[۵] Lorentz metric

انگیزه پیدایش مترهای زیر- ریمانی از تئوری کنترل نشات گرفته است که در آن یک منیفلد هموار با یک میدان برداری وابسته به پارامترهایی که کنترل نامیده می شوند در اختیار داریم و هدف بدست آوردن منحنی جواب با شرایط مطلوب که اغلب مینیمم سازی تابعی با عنصر طول قوس است، می باشد.

مترهای فینسلری را در فصل بعدی به طور کامل بررسی می کنیم.

مثال ۴.۲.۱. فضای R^n با مختصات اقلیدسی و پایه $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ را برای فضای مماس در نظر می گیریم. اگر مختصات نقطه p توسط $(x^1, ..., x^n)$ داده شود، داریم:

$$g_{ij}(p) =< \frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p) >= \delta_{ij}$$

متر ریمان حاصل

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} dx^i dx^j = (dx^1)^2 + ... + (dx^n)^2$$

را متریک طبیعی، متریک کانونی فضای اقلیدسی یا متریک اقلیدسی می نامند.

اگر $X, Y \in T_pM$ ، آنگاه متریک ریمانی $g(X, Y)$ یا ضرب داخلی بین دو بردار X و Y را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} < X, Y > &= < \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} > \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} X^i Y^j < \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} > \end{aligned}$$

$$g(X, Y) =< X, Y >= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} X^i Y^j$$

در حالت خاص فضای اقلیدسی $g_{ij} = \delta_{ij}$ ، ضرب فوق به ضرب داخلی عادی در R^n تبدیل می شود.

مثال ۵.۲.۱. با انجام محاسبات به طور موضعی روی متر اقلیدسی در چارت استاندارد داریم:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r,\theta) = (Cos\theta, Sin\theta) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(r,\theta) = (-rSin\theta, rCos\theta)$$

بنابراین:

$$g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = ۱ \quad , \quad g(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}) = r^{۲} \quad , \quad g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}) = ۰$$

که در آن:

$$g = dr^{۲} + r^{۲}d\theta^{۲}$$

دارای ساختار ریمانی است [۱۳] .

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم (M,g) و $(\bar{M},\bar{g})$ دو منیفلد ریمانی بوده و $f : M \longrightarrow \bar{M}$ یک دیفئومورفیسم (یعنی f دوسویی و f و $f^{-۱}$ دیفرانسیل پذیر)بین آنها باشد. نگاشت f را یک ایزومتری [۶] گوئیم اگر $g = f^{*}\bar{g}$ ، یا به عبارت معادل:

$$g_p(X,Y) = \bar{g}_{f(p)}((f_*)_pX, (f_*)_pY) \quad , \quad \forall p \in M \quad , \quad \forall X,Y \in T_pM$$

در این صورت گوئیم دو منیفلد M و $\bar{M}$ با هم ایزومتر هستند.

نگاشت f را در نقطه p یک ایزومتری موضعی گوئیم اگر یک همسایگی u شامل p موجود باشد به طوری که

$$f : u \longrightarrow f(u) \subset \bar{M}$$

هم متری یا ایزومتری باشد. اگر به ازاء هر نقطه p از M ، یک ایزومتری موضعی موجود باشد، می گوئیم M و $\bar{M}$ به طور موضعی طول پا، به طو موضعی هم متر یا به طور موضعی ایزومتریک هستند.

قضیه ۷.۲.۱. روی هر منیفلد دیفرانسیل پذیر M (هاسدروف و با پایه شمارا) می توان یک متر ریمانی تعریف نمود.

اثبات. در حقیقت می خواهیم شرایطی فراهم نمائیم که متریک القایی توسط چارتهای موضعی، تشکیل یک متر ریمانی روی M بدهد.

[۶] Isometry

یک پوشش از M توسط چارتهای موضعی $(u_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\subset A}$ را در نظر گرفته، فرض می کنیم، $(v_\beta, \varphi_\beta)_{\beta\subset B}$ افراز واحد وابسته به این پوشش باشد. چون M دارای پایه شماراست افراز واحد وجود دارد. روی $x_\beta(v_\beta)$ که بازی از R^n است متر کانونی یا ضرب اسکالر $<.,.>$ را در نظر گرفته توسط نگاشت برگردان این چارت x_β یک متر ریمانی به v_β القا نموده آنرا با g_β نمایش می دهیم. بنا بر تعریف متریک القایی داریم $g_\beta = x_\beta^* <.,.>$ یا به عبارت معادل:

$$g_\beta(X,Y)_p =< (x_\beta)_*X, (x_\beta)_*Y >_{x(p)}$$

حال با استفاده از افراز واحد و این متر ریمانی موضعی یک متر ریمانی سراسری روی M تعریف می کنیم. برای اینکار کافی است فرض کنیم:

$$g_p(X,Y) = \sum_{\beta\in B} \varphi_\beta g_\beta(X,Y)_p \quad , \quad \forall p\in M, \forall X,Y\in T_pM$$

به راحتی می توان بررسی نمود که در هر نقطه $p\in M$، g_p یک متر ریمانی روی M تعریف می کند. $\square$

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید G یک منیفلد هموار با ساختار گروهی باشد، G را گروه لی [۷] می نامیم هرگاه نگاشت

$$G\times G \longrightarrow G$$

$$(g,h)\longmapsto gh^{-1}$$

هموار باشد.

تعریف ۹.۲.۱. عمل گروه G روی مجموعه M را متعددی گوئیم هرگاه:

$$\forall p,q\in M \quad \exists g\in G \quad s.t \quad gp=q$$

تعریف ۱۰.۲.۱. منیفلد هموار M به همراه عمل متعددی تولید شده توسط گروه لی G را $G-$ فضای همگن یا منیفلد همگن گوئیم.

[۷] Lie group

تعریف ۱.۲.۱۱. یک فضای ریمانی همگن یک منیفلد ریمانی (M,g) است که گروه ایزومتری های آن روی M به طور متعددی عمل می کند [۱۳] .

قضیه ۱.۲.۱۲. گروه ایزومتری های یک منیفلد ریمانی، یک گروه لی است [۱۳] .

تعریف ۱.۲.۱۳. اگر V یک فضای برداری روی میدان F باشد، تابع: $[,] : V \times V \longrightarrow V$ با خواص زیر را براکت لی [۸] می نامیم:

دو خطی:

$$[ax+by, z] = a\,[x,z] + b\,[y,z]\,, [z, ax+by] = a\,[z,x] + b\,[z,y] \quad , \quad \forall a,b \in F, x,y,z \in V$$

پاد تقارنی:

$$[x,x] = \circ \quad , \quad \forall x \in V$$

اتحاد ژاکوبی:

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = \circ \quad , \quad \forall x,y,z \in V$$

$(V,[,])$ را یک جبر لی [۹] می نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۴. فرض کنید $M = \dfrac{G}{H}$ یک فضای همگن باشد، که در آن G یک گروه لی و H یک زیر گروه بسته از G است. G در حالت کلی به طور متعددی روی M عمل می کند:

$$G \times M \longrightarrow M$$

$$f \times f'H \longmapsto ff'H$$

[۸] Lie bracket
[۹] Lie algebra

فرض کنید مجموعه N شامل عناصری از G باشد که به صورت انتقال همانی بر M عمل می کند، N زیر گروه بسته ای از G خواهد بود که در H قرار می گیرد. در حقیقت N بزرگترین چنین زیر گروه هایی است.

عمل G بر M را موثر گوئیم اگر N فقط شامل عنصر همانی باشد [۱۷] .

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی البعد و G یک گروه لی باشد، نمایش [۱۰] (π, V) از G روی V یک هomomorفیسم گروه های لی به صورت زیر است:

$$\pi : G \longrightarrow GL(V)$$

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنید G یک گروه لی و $\mathfrak{g}$ جبر لی آن باشد. برای هر $g \in G$ نگاشت ترکیبی

$$C_g : G \longrightarrow G$$
$$C_g(h) = ghg^{-1}$$

یک هomomorفیسم گروه لی است. حال تعریف می کنیم:

$$Ad(g) = (C_g)_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

که $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ هموار است. Ad را نمایش الحاقی از G می نامیم.

برای هر $\mathfrak{g}$ نگاشت زیر را تعریف می کنیم:

$$ad(X) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$
$$ad(X)Y = [X, Y]$$

در نتیجه نگاشت هموار $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{GL}(\mathfrak{g})$ را داریم و می توان نشان داد این دو تعریف توسط رابطه زیر به هم مربوط می شوند:

[۱۰] Representation

$$Ad_* = ad$$

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنیم (E,π,M) یک کلاف برداری روی منیفلد M باشد و $\mathcal{T}(M)$ فضای میدان های برداری روی M و $\varepsilon(M)$ فضای برشهای هموار کلاف (E,π,M) باشد. منظور از یک التصاق [۱۱] در E نگاشتی مانند ∇ است:

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \varepsilon(M) \longrightarrow \varepsilon(M)$$

$$(X,Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

که در شرایط زیر صدق کند:

(a) ∇ روی $C^\infty(M)$ نسبت به X خطی است:

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y \quad , \quad \forall f,g \in C^\infty(M)$$

(b) $\nabla_X Y$ روی R نسبت به Y خطی است:

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \quad , \quad \forall a,b \in R$$

(c) ∇ در قاعده لایب- نیتزی زیر صدق کند:

$$\nabla_X (fY) = (Xf)\,Y + f\nabla_X Y$$

منظور از یک التصاق خطی، التصاقی روی منیفلد M در کلاف مماس TM است. یعنی:

$$\nabla : \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \longrightarrow \mathcal{T}M$$

[۲۳]

تعریف ۱.۲.۱۸. برای هر التصاق روی TM ، نگاشت

$$T : (X,Y) \longrightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

[۱۱] Connection

یک تانسور تعریف می کند که تانسور تاب [۱۲] التصاق ∇ نامیده می شود.

تعریف ۱۹.۲.۱. یک التصاق روی TM را تاب آزاد [۱۳] گوئیم هرگاه:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید M منیفلدی دیفرانسیل پذیر با متر ریمانی $<,>$ و التصاق ∇ باشد. التصاق ∇ را با متر $<,>$ سازگار [۱۴] گوئیم هرگاه:

$$\nabla_X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >$$

قضیه ۲۱.۲.۱. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی (شبه ریمانی)باشد. در این صورت یک التصاق تاب آزاد منحصر به فرد سازگار با متر g روی M وجود دارد [۲۳] .

اثبات. ابتدا نشان می دهیم چنین التصاقی در صورت وجود منحصر به فرد است. فرض کنید ∇ چنین التصاقی باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \nabla_X < Y, Z > &= X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z > && (۱.۱) \\ Y < Z, X > &= < \nabla_Y Z, X > + < Z, \nabla_Y X > && (۲.۱) \\ Z < X, Y > &= < \nabla_Z X, Y > + < X, \nabla_Z Y > && (۳.۱) \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از شرط $T = ۰$ داریم:

$$\nabla_X Z - \nabla_Z X - [X, Z] = ۰$$

[۱۲] Torsion tensor

[۱۳] Torsion freeness

[۱۴] Compatibility

پس:

$$\nabla_X Z = \nabla_Z X + [X, Z] \tag{۴.۱}$$

$$\nabla_Y Z = \nabla_Z Y + [Y, Z] \tag{۵.۱}$$

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y] \tag{۶.۱}$$

با جایگذاری روابط (۴.۱) و (۵.۱) و (۶.۱) در (۱.۱) و (۲.۱) و (۳.۱) داریم:

$$X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_Z X > + < Y, [X, Z] > \tag{۷.۱}$$

$$Y < Z, X > = < \nabla_Y Z, X > + < Z, \nabla_X Y > + < Z, [Y, X] > \tag{۸.۱}$$

$$Z < X, Y > = < \nabla_Z X, Y > + < X, \nabla_Y Z > + < X, [Z, Y] > \tag{۹.۱}$$

اکنون با جمع کردن دو رابطه (۷.۱) و (۸.۱) و کم کردن رابطه (۹.۱) از حاصل جمع آنها داریم:

$$\begin{aligned} X < Y, Z > + Y < Z, X > - Z < X, Y > &= ۲ < \nabla_X Y, Z > + < Y, [X, Z] > \\ &+ < Z, [Y, X] > - < X, [Z, Y] > \end{aligned}$$

پس:

$$\begin{aligned} < \nabla_X Y, Z > &= \frac{۱}{۲}(X < Y, Z > + Y < Z, X > - Z < X, Y > \\ &- < Y, [X, Z] > - < Z, [Y, X] > + < X, [Z, Y] >) \end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

حال فرض می کنیم $\nabla^۱$ و $\nabla^۲$ دو التصاق خطی با شرایط قضیه باشند بنابراین هر دو باید در رابطه (۱۰.۱) صدق کند، به عبارت دیگر باید داشته باشیم:

$$< \nabla^۱_X Y - \nabla^۲_X Y, Z > = ۰ \quad , \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$$

پس از آنجا که رابطه بالا برای هر Z برقرار است با توجه به شرط ناتباهیده بودن متر ریمانی (شبه ریمانی) داریم:

$$\nabla^{1}_{X}Y = \nabla^{2}_{X}Y \quad , \quad \forall X, Y \in \mathcal{T}(M)$$

یعنی $\nabla^{2} = \nabla^{1}$ اکنون برای بررسی وجود چنین التصاقی از مختصات موضعی استفاده می کنیم، اکنون رابطه (۱۰.۱) را برای $X = \partial_i$ و $Y = \partial_j$ و $Z = \partial_l$ بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} < \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l > \quad &= \quad \frac{1}{2}(\partial_i < \partial_j, \partial_l > + \partial_j < \partial_l, \partial_i > - \partial_l < \partial_i, \partial_j > - < \partial_l, [\partial_i, \partial_j] > \\ & - < \partial_j, [\partial_i, \partial_l] > + < \partial_j, [\partial_l, \partial_i] > + < \partial_i, [\partial_l, \partial_j] > \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \Gamma^k_{ij} < \partial_k, \partial_l >= \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$$

$$\Gamma^k_{ij} g_{kl} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) \tag{۱۱.۱}$$

با ضرب طرفین تساوی فوق در ماتریس معکوس $[g_{kl}]$ یعنی $[g^{lk}]$ داریم:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{lk}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) \tag{۱۲.۱}$$

ضرایب Γ^k_{ij} روی هر چارت می تواند یک التصاق خطی تعریف کند.

همچنین با توجه به فرمول (۱۲.۱) می بینیم که:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$$

که با استفاده از آن می توان دید که $T = 0$. اکنون کافیست نشان دهیم $\nabla g = 0$.

$$g_{ij;k} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{il}$$

با استفاده از فرمول (۱۱.۱) داریم:

$$\begin{aligned}\Gamma^l_{ki}g_{lj} - \Gamma^l_{kj}g_{il} &= \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}) + \frac{1}{2}(\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) \\ &= \partial_k g_{ij}\end{aligned}$$

که نشان می دهد $g_{ij;k} = 0$. $\square$

تعریف ۲۲.۲.۱. التصاق بیان شده در قضیه قبل را التصاق لویی- چوی ویتا [15] از متر ریمانی g می نامیم.

تعریف ۲۳.۲.۱. منظور از یک میدان برداری در امتداد خم $\gamma : I \longrightarrow M$ نگاشتی هموار مانند $\nu : I \longrightarrow TM$ است طوریکه

$$\nu(t) \in T_{\gamma(t)} \quad , \quad \forall t \in I$$

در این حالت $\mathcal{T}(\gamma)$ بیانگر فضای همه میدان های برداری در امتداد خم γ است.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنید ∇ یک التصاق خطی روی M باشد، برای هر خم $\gamma : I \longrightarrow M$ یک عملگر منحصر به فرد توسط ∇ بصورت زیر تعریف می شود:

$$D_t : \mathcal{T}(\gamma) \longrightarrow \mathcal{T}(\gamma)$$

که دارای خواص زیر است:

(۱) نسبت به R خطی است:

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW \quad , \quad \forall a, b \in R$$

(۲) در قاعده ضربی زیر صدق میکند:

[15] Levi-Civita connection

$$D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV \quad , \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

اگر V قابل گسترش به $\tilde{V}$ باشد آنگاه:

$$D_tV(t) = \nabla_{\gamma(t)}\tilde{V}$$

برای هر $V \in \mathcal{T}(\gamma)$ ، D_tV مشتق کواریانت V در امتداد γ نامیده می شود [۲۳] .

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد، ∇ یک التصاق خطی روی M و C یک خم در M باشد. در این صورت میدان برداری در امتداد C ، $D_t\dot{C}$ شتاب C نامیده می شود.

خم C را یک ژئودزیک نامند هرگاه $\nabla_{\dot{C}}\dot{C} = D_t\dot{C} = 0$ (شتاب آن برابر صفر باشد).

منحنی $C(t)$ را روی منیفلد (M, g) ژئودزیک گوئیم هرگاه بردار سرعت آن در امتداد خودش موازی باشد. به عبارت دیگر $\frac{Dc}{dt} = 0$ یا $\nabla_{\acute{c}(t)}\acute{c}(t) = 0$.

با توجه به فرمول مشتق گیری همگرد در طول منحنی C از میدان برداری دلخواه $X = X^k\partial_k$ داریم:

$$\frac{DX}{dt} = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\frac{dC^i}{dt}X^j\partial_k$$

فرض کنیم s پارامتر طول قوس منحنی $C = (C^i(s))$ باشد، در این صورت معادله ژئودزیک ها با توجه به پارامتر طول قوس عبارت است از:

$$\frac{d^2C^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dC^i}{ds}\frac{dC^j}{ds} = 0$$

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{T}(M)$ مجموعه همه میدان های برداری هموار روی M و $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$ باشد. تانسور انحنای R روی منیفلد ریمانی M نگاشتی به صورت زیر است:

$$R : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_{[X,Y]}Z$$

مولفه های تانسور انحنا در چارت موضعی به صورت زیر است:

$$R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l} := R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k}$$

گزاره ۲۷.۲.۱. برای هر $X, Y, Z, T \in T_m M$ داریم:

(الف) $R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$

(ب) $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$

(ج) $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد n - بعدی باشد، منظور از کنج خطی u در نقطه $x \in M$ ، پایه مرتب $X_1, X_2, ..., X_n$ از فضای مماس $T_x M$ است. مجموعه همه کنج های خطی u در همه نقاط M ، با $L(M)$ نمایش داده می شود [۱۶] .

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنید M منیفلدی هموار با بعد n و G یک زیر گروه لی از $GL(n, R)$ باشد. منظور از یک G - ساختار روی M ، زیر کلاف اصلی از کلاف $L(M)$ با ساختار گروهی $G \subset GL(n, R)$ است [۱۶] .

تعریف ۳۰.۲.۱. فرض کنید $M = \frac{G}{H}$ یک فضای همگن باشد، وقتی G یک گروه لی و H یک زیر گروه بسته از G است. منظور از نمایش ایزوتروپی های خطی، هومومورفیسم از H به گروهی از انتقال های خطی از $T_0 M$ است که به هر نقطه $h \in H$ ، مشتق h در 0 را اختصاص می دهد.

تصویر H تحت نمایش ایزوتروپی خطی، گروه ایزوتروپی خطی در صفر نامیده شده و بوسیله $\tilde{H}$ نمایش داده می شود.

حال فرض کنید M فضای همگن به صورت $\frac{G}{H}$ با گروه لی همبند H و نمایش ایزوتروپی خطی [۱۶] از H موجود باشد و P یک K - ساختار بر M باشد که تحت G ناورداست، یعنی G روی P بصورت یک گروه اتومورفیسم عمل می کند. تحت این مفروضات، کنج خطی $u_0 \in P$ در 0 را ثابت در نظر می گیریم.

[۱۶] Linear isotropy representation

اگر $T_\circ M$ را با R^n تحت ایزومورفیسم خطی $u_\circ : R^n \longrightarrow T_\circ M$ یکی بگیریم، آنگاه نمایش ایزوتروپی های خطی از H می تواند با هومومورفیسم $\lambda : H \longrightarrow K$ تعریف شده به صورت:

$$\lambda(h) = u_\circ^{-1} \circ h_* \circ u_\circ$$

که در آن $h_* : T_\circ M \longrightarrow T_\circ M$ نشان دهنده مشتق h در ۰ است، یکی گرفته شود [۱۷] .

قضیه ۳۱.۲.۱. فرض کنید P یک $K-$ ساختار G ناوردا بر $M = \dfrac{G}{H}$ باشد، آنگاه یک تناظر یک به یک بین مجموعه التصاق های $G-$ ناوردا بر P و مجموعه نگاشت های خطی $\Lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{k}$ چنان موجود است که:

$$\begin{aligned} \Lambda(X) &= \lambda(X) \quad , \quad \forall X \in \mathfrak{h} \\ \Lambda(ad(h)X) &= ad(\lambda(h))(\Lambda(X)) \quad , \quad \forall h \in H, X \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

که λ نه تنها نمایش ایزوتروپی های خطی از H به K است بلکه نمایانگر هومورفیسم جبرهای لی $\mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{h}$ است و $ad(h)$ نمایش الحاقی از H در $\mathfrak{g}$ و $ad(\lambda(h))$ نمایش الحاقی از K در $\mathfrak{k}$ است [۱۷] .

تعریف ۳۲.۲.۱. فرض کنید $\mathfrak{T}_s^r(M)$ مجموعه میدان های تانسوری از نوع (r,s) تعریف شده بر M و

$$\mathfrak{T}(M) = \sum_{r,s=\circ}^{\infty} \mathfrak{T}_s^r(M)$$

که $\mathfrak{T}(M)$ یک جبر روی میدان اعداد حقیقی R است [۱۶] .

تعریف ۳۳.۲.۱. مشتق لی [۱۷] $L_X K$ از یک میدان تانسوری K روی M نسبت به میدان برداری X بصورت زیر است:

$$(L_X K)_x = \lim \frac{1}{t}[K_x - (\tilde{\varphi_t} K)_x]$$

که در آن برای هر t ، φ_t گروه ۱-پارامتری از انتقال های M و $\tilde{\varphi}_t$ اتومورفیسمی از جبر $\mathfrak{T}(M)$ است:

[۱۷] Covariant defferentiation

$$L_X : \mathfrak{T}(M) \longrightarrow \mathfrak{T}(M)$$

$$K \longmapsto L_X K$$

. [۱۶]

تعریف ۳۴.۲.۱. اگر ∇ مشتق کواریانت نسبت به یک التصاق خطی از M باشد و X یک میدان برداری روی M باشد، آنگاه تانسور A_X از نوع $(۱, ۱)$ بر M ، تعریف شده به صورت:

$$A_X = L_X - \nabla_X$$

را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$A_X Y = -\nabla_X Y - T(X, Y) \quad , \quad \forall Y \in M$$

که در آن T تانسور تاب است [۱۷] .

گزاره ۳۵.۲.۱. در قضیه قبل، تناظر یک به یک بین نگاشت های خطی $\tilde{X} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{k}$ که در شرایط (۱) و (۲) صدق می کند و مجموعه التصاق های K -ناوردا در P می تواند به صورت زیر داده شود:

$$u_۰ \circ (\Lambda(X)) \circ u_۰^{-۱} = -(AX)_۰ \quad , \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

. [۱۷]

تعریف ۳۶.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه لی و H یک زیر گروه بسته G باشد. فضای $\frac{G}{H}$ را تحویلی [۱۸] نامیم اگر زیر فضای $\mathfrak{m}$ از جبر لی $\mathfrak{g}$ چنان موجود باشد که:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$$

وقتی : $\mathfrak{h} = LieH$ و برای $h \in H \quad , \quad ad\,(h)\,\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ یا به طور معادل: $[h, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ [۵] .

[۱۸] Reductive

قضیه ۳۷.۲.۱. فرض کنید P یک $K-$ ساختار G ناوردا بر یک فضای همگن تحویلی $M = \dfrac{G}{H}$ باشد. با تجزیه $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$. آنگاه یک تناظر یک به یک بین مجموعه التصاق های G ناوردا بر P و مجموعه نگاشت های خطی

$$\Lambda_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{k}$$

چنان موجود است که :

$$\Lambda_{\mathfrak{m}}(ad(h)X) = ad(\lambda(h))(\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)) \quad , \quad \forall h \in H, X \in \mathfrak{m}$$

وقتی که λ نمایش ایزوتروپی های خطی $K \longrightarrow H$ است. طبق قضیه ۳۰.۲.۱ داریم:

$$\Lambda(X) = \begin{cases} \lambda(X) & \forall X \in \mathfrak{h} \\ \Lambda_{\mathfrak{m}}(X) & \forall X \in \mathfrak{m} \end{cases}$$

. [۱۷]

گزاره ۳۸.۲.۱. تناظر موجود در قضیه ۳۴.۲.۱ می تواند اغلب به صورت زیر نیز بیان می شود:

$$u_{\circ} \circ (\Lambda_m(X)) \circ u_{\circ}^{-۱} = -(AX)_{\circ} \quad , \quad \forall X \in \mathfrak{m}$$

قضیه ۳۹.۲.۱. در قضیه۱۵.۲.۱ تانسور تاب T و تانسور انحنای R از التصاق ناوردای متناظر با $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ حول صفر می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$T(X,Y)_{\circ} = \Lambda_{\mathfrak{m}}(X)Y - \Lambda_{\mathfrak{m}}(Y)X - [X,Y]_{\mathfrak{m}} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}$$

$$R(X,Y)_{\circ} = [\Lambda_{\mathfrak{m}}(X), \Lambda_{\mathfrak{m}}(Y)] - \Lambda_{\mathfrak{m}}([X,Y]_{\mathfrak{m}}) - \lambda([X,Y]_{\mathfrak{h}}) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}$$

. [۱۷]

بوضوح اگر $\Lambda_{\mathfrak{m}} = ۰$ باشد، برای همه $X \in \mathfrak{m}$ ، آنگاه $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ در شرایط قضیه صدق می کند. بنابراین اگر $\dfrac{G}{H}$ تحویلی باشد، P یک التصاق K ناوردا می پذیرد. این التصاق K ناوردا در P ، تعریف شده بوسیله $\Lambda_{\mathfrak{m}} = ۰$ را التصاق کانونی (نسبت به تجزیه $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$) می گوئیم.

قضیه ۴۰.۲.۱. فرض کنید P یک $K-$ ساختار G ناوردا بر فضای همگن تحویلی $M=\dfrac{G}{H}$ با تجزیه ای به صورت $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ باشد. التصاق کانونی روی P را در نظر بگیرید و برای هر $X\in\mathfrak{m}$ ، مجموعه $f_t=\exp tX$ در G و $x_t=f_t(\circ)$ در $\dfrac{G}{H}$ را در نظر بگیرید. انحنای x_t یک ژئودزیک است و بر عکس، هر ژئودزیک با شروع از صفر به صورت $f_t(\circ)$ برای بعضی $X\in\mathfrak{m}$ است [۱۷] .

گزاره ۴۱.۲.۱. برای هر التصاق کانونی، هر ژئودزیک با شروع از صفر به فرم $f_t(\circ)$ است که در آن $f_t=\exp tX$ برای بعضی $X\in\mathfrak{m}$ می باشد [۱۷] .

قضیه ۴۲.۲.۱. هر فضای همگن تحویلی $M=\dfrac{G}{H}$ یک التصاق خطی $G-$ ناوردای تاب آزاد منحصر به فرد می پذیرد که دارای التصاق کانونی است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)Y=\frac{۱}{۲}[X,Y]_{\mathfrak{m}}\quad,\quad\forall X,Y\in\mathfrak{m}$$

اثبات. به مرجع [۱۷] مراجعه کنید. □

تعریف ۴۳.۲.۱. فضای همگن $M=\dfrac{G}{H}$ با متر ریمانی $G-$ ناوردای g را به طور طبیعی تحویلی می گوئیم اگر تجزیه $ad(H)$ ناوردای $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ با شرط زیر را بپذیرد:

$$B(X,[Z,Y]_{\mathfrak{m}})+B([Z,X]_{\mathfrak{m}},Y)=\circ\quad,\quad\forall X,Y,Z\in\mathfrak{m}$$

قضیه ۴۴.۲.۱. فرض کنید $M=\dfrac{G}{H}$ یک فضای همگن به طور طبیعی تحویلی با تجزیه $ad(H)$ ناوردای $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ و مجهز به یک متر ریمانی نامتناهی $G-$ ناوردای g باشد. فرض کنید B فرم دوخطی روی $\mathfrak{m}$ متناظر با g باشد. آنگاه :

$$g(R(X,Y)Y,X)_\circ=\tfrac{۱}{۴}B([X,Y]_{\mathfrak{m}},[X,Y]_{\mathfrak{m}})-B([[X,Y]_{\mathfrak{h}},Y],X)\quad,\quad\forall X,Y\in\mathfrak{m}$$

اثبات. به مرجع [۱۷] مراجعه کنید. □

۳.۱ ساختارهای ریمانی متقارن

تعریف ۱.۳.۱. یک نگاشت σ تضامنی [۱۹] نامیده می شود هرگاه مربع آن $(\sigma \circ \sigma)$ و نه خود آن همانی باشد.

تعریف ۲.۳.۱. یک فضای متقارن سه تایی (G, H, σ) ، شامل گروه لی همبند G ، زیرگروه بسته H از G و اتومورفیسم تضامنی σ از G است چنانکه H بین G_σ و عناصر همانی G_σ قرار می گیرد، که در آن G_σ زیر گروه بسته ای از G شامل همه عناصر ناوردای چپ تحت σ است.

$$G_\sigma = \{g \in G | \sigma(g) = g\}$$

$$G_\sigma^e \subset H \subset G_\sigma$$

[۶]

تعریف ۳.۳.۱. یک منیفلد ریمانی (M, g) فضای متقارن نامیده می شود هرگاه برای هر $p \in M$ ، ایزومتری σ_p از (M, g) چنان موجود باشد که:

$$\sigma_p(p) = p \quad (۱)$$

$$d\sigma_p = -idT_pM \quad (۲)$$

که این ایزومتری ایزومتری تضامنی در $p \in M$ است.

تعریف ۴.۳.۱. یک جبر لی متقارن، سه تایی $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ شامل یک جبر لی $\mathfrak{g}$ ، یک زیر جبر $\mathfrak{h}$ از $\mathfrak{g}$ و یک اتومورفیسم تضامنی σ از $\mathfrak{g}$ است، چنانچه $\mathfrak{h}$ شامل همه عناصری از $\mathfrak{g}$ است که تحت σ ناوردای چپ هستند.

$$\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

داریم $\sigma^۲ = Id$ در نتیجه $\sigma = \pm ۱$. چون $\mathfrak{h}$ تحت σ ثابت است پس ۱ مقدار ویژه برای $\mathfrak{h}$ می باشد و $\mathfrak{m}$ را زیر جبر با مقدار ویژه ۱- در نظر می گیریم. پس تجزیه ای به صورت زیر برای $\mathfrak{g}$ داریم:

[۱۹] Involutive

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$$

که تجزیه کانونی از $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ نامیده می شود [۱۷] .

قضیه ۵.۳.۱. اگر $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ یک تجزیه کانونی از جبر لی متقارن $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ باشد آنگاه:

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \quad , \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m} \quad , \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$$

اثبات. داریم:

$$\sigma[X,Y] = [\sigma(X), \sigma(Y)] = [X,Y] \quad , \quad \forall X, Y \in \mathfrak{h}$$

$$\Longrightarrow [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$$

$$\sigma[X,Y] = [\sigma(X), \sigma(Y)] = [X,-Y] = -[X,Y] \quad , \quad \forall X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{m}$$

$$\Longrightarrow [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$$

$$\sigma[X,Y] = [\sigma(X), \sigma(Y)] = [-X,-Y] = [X,Y] \quad , \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}$$

$$\Longrightarrow [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$$

□

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنید (G, H, σ) یک فضای متقارن و $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ یک جبر لی متقارن باشد، اگر $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ تجزیه کانونی از $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ ، آنگاه:

$$ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$$

اثبات. داریم:

$$\sigma(ad\, h_\circ X) = ad(\sigma(h)_\circ \sigma(X)) = ad(h)_\circ(-X) = -ad\, h_\circ X \quad , \quad \forall X \in \mathfrak{m}, h \in H$$

$$\Longrightarrow ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$$

□

تعریف ۷.۳.۱. یک منیفلد ریمانی تخت نامیده می شود هرگاه تانسور انحنای آن صفر باشد [۱۵] .

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنید M یک فضای کاملا متقارن ریمانی باشد. رتبه M ، بعد بزرگترین زیر منیفلد تخت M است [۱۵] .

مثال ۹.۳.۱. فرض کنید G یک گروه لی همبند و $\triangle G$ قطر $G \times G$ باشد، به عبارتی:

$$\triangle G = \{(g, g) \in G | g \in G\}$$

آنگاه تعریف می کنیم:

$$\sigma : G \times G \longrightarrow G \times G$$

$$\sigma(g, g') = (g', g)$$

پس $(G \times G, \triangle G, \sigma)$ یک فضای متقارن است. فضای خارج قسمتی $\dfrac{G \times G}{\triangle G}$ با G دیفئومورفیسم است:

$$\frac{G \times G}{\triangle G} \longrightarrow G$$

$$(g_۱, g_۲)\triangle G \longmapsto g_۱ g_۲^{-۱}$$

حال دو گروه لی همبند G و G' با هومورفیسم $\alpha : G' \longrightarrow G$ را در نظر بگیرید. هومورفیسم $\alpha \times \alpha : G' \times G' \longrightarrow G \times G$ منجر به یک هومورفیسم $\alpha \times \alpha : (G' \times G', \triangle G', \sigma') \longrightarrow (G \times G, \triangle G, \sigma)$ خواهد شد.

حال اگر G' یک زیر گروه از G باشد، $(G' \times G', \triangle G', \sigma')$ زیر فضای متقارن از $(G \times G, \triangle G, \sigma)$ خواهد بود. به طور مشابه هر جبر لی $\mathfrak{g}$ یک جبر لی متقارن $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \triangle \mathfrak{g}, \sigma)$ را ایجاب می کند [۱۷] .

فصل ۲

پیشینه پژوهش و مقدمات هندسه فینسلری

۱.۲ مقدمه

متر فینسلری طبیعی ترین تعمیم متر ریمانی است که استفاده زیادی در مسائل کاربردی داشته و مورد توجه بسیاری از ریاضی دانان کاربردی و محض قرار گرفته است.

برای محاسبه طول برداری مانند X در فضای اقلیدسی از ضرب داخلی $< X, X >^{\frac{1}{2}}$ استفاده می کنیم. این ضرب داخلی یک متر موسوم به متر ریمانی در فضای R^n تعریف میکند $< X, Y >= \delta_{ij} X^i Y^j$ که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر است. به همین صورت در منیفلد ریمانی (M, g) طول یک بردار مماس X با ارائه یک ضرب داخلی روی فضای مماس T_pM محاسبه می گردد. این ضرب داخلی برخاسته از متر ریمانی g را توسط

$$g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j$$

نمایش می دهیم که در آن $g_{ij}(X)$ ها توابع حقیقی روی M هستند، که بستگی به نقطه $x \in M$ دارند یعنی

$$g_{ij} : M \longrightarrow R$$

حال می خواهیم یک ضرب داخلی تعریف کنیم که در آن طول یک بردار علاوه بر نقطه $x \in M$ به جهت آن $y \in T_xM$ نیز بستگی دارد. متر برخاسته از این ضرب داخلی را متر فینسلری می نامیم و با

$$g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j$$

نمایش می دهیم که در آن $g_{ij}(x,y)$ ها توابع حقیقی روی TM هستند، که علاوه بر نقطه $x \in M$ به جهت آن یعنی $y \in T_pM$ نیز بستگی دارد. فرض کنیم M یک منیفلد C^∞ و T_xM فضای مماس در نقطه $x \in M$ باشد کلاف مماس بر M را با

$$TM := \cup_{x\in M} T_xM$$

نمایش می دهیم. نگاشت تصویر طبیعی عبارتند از :

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

که در آن $\pi(x,y) = x$. فضای دوگان T_xM توسط T_x^*M نمایش داده شده و فضای کتانژانت در نقطه $x \in M$ نامیده می شود. کلاف

$$T^*M := \cup_{x\in M} T_x^*M$$

کلاف کتانژانت نام دارد.

تعریف ۱.۱.۲. یک نرم مینکوفسکی [۱] بر فضای برداری V تابع نامنفی $F : V \longrightarrow [\circ, \infty)$ با خواص زیر است:

(۱) F روی $V \setminus \{\circ\}$، C^∞ است.

(۲) برای هر $\lambda > \circ$ و $y \in V$، $F(\lambda y) = \lambda F(y)$.

(۳) برای هر $y \in V \setminus \{\circ\}$ فرم دوخطی متقارن g_y تعریف شده به صورت:

$$g_y(u,v) := \frac{۱}{۲}\frac{\partial^۲}{\partial s \partial t}\left[F^۲(y+su+tv)\right]|_{s=t=\circ}, \quad \forall u,v \in V$$

مثبت معین باشد.

در اینجا مثبت معین بودن به این معنی است که ماتریس (g_{ij}) ناتبهگون-یعنی با دترمینان مخالف صفر - بوده وبرای هر بردار

[۱] Minkowski norm

$y \neq 0$ داشته باشیم $g_{ij}(x,y)y^iy^j > 0$.

برای یک نرم مینکوفسکی F می توان نشان داد که :

$$F(U) > 0, \quad \forall U \neq 0$$

علاوه بر این، نا مساوی مثلثی را به صورت زیر داریم:

$$F(U_1 + U_2) \leq F(U_1) + F(U_2)$$

در اینجا تساوی در حالتی برقرار است که $U_1 = \alpha U_2$ و یا $U_2 = \alpha U_1$ برای بعضی $\alpha \geq 0$.

و از نامساوی مثلثی، نا مساوی اساسی به صورت زیر نتیجه می شود:

$$F(w) \geq w^i F_{y^i}(y) \quad \forall y \neq 0$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\alpha \geq 0$ چنان موجود باشد که $w = \alpha y$ [۳] .

تعریف ۲.۱.۲. یک متر فینسلری روی منیفلد M عبارتند از یک تابع پیوسته $F : TM \longrightarrow [0, \infty)$ با خواص زیر:

(۱) F روی $TM_0 := TM \setminus \{0\}$ هموار (C^∞) است.

(۲) برای هر $x \in M$، $F\mid_{T_xM}$ یک نرم مینکوفسکی روی T_xM باشد.

دوتایی (M, g) را منیفلد فینسلری می نامند.

مثال هایی از متر فینسلری

مثال ۳.۱.۲. ساده ترین مثال از یک متر فینسلری یک متر ریمانی است. R^n را همراه با متر ریمانی a_{ij} در نظر می گیریم در این صورت منیفلد ریمانی (R^n, a_{ij}) را می توان به عنوان یک منیفلد فینسلری در نظر گرفت که تابع اساسی آن توسط $F(x,y) = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ تعریف می شود.

مثال ۲.۱.۴. فرض می کنیم $(M,a_{ij}(x))$ یک منیفلد ریمانی بوده و $w=w_i(x)dy^i$ یک میدان یک فرمی روی M باشد. همچنین فرض می کنیم $\alpha(x,y)=\sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ و $\beta=w_i(x)y^i$. آنگاه می توان نشان داد $F=\alpha+\beta$ در شرایط تابع اساسی فینسلری صدق می کند. در این صورت F را راندرزی [۲] و منیفلد (M,F) را یک فضای راندرزی یا منیفلد راندرزی می نامیم. فضای راندرزی کاربرد زیادی در ارائه مدل های هندسی در نظریه نسبیت دارد.

مثال ۲.۱.۵. فرض کنیم α معرف یک متر ریمانی و β یک ۱-فرم روی منیفلد M باشد. زیر فضایی از $TM_{\circ}:=TM\setminus\{\circ\}$ را در نظر می گیریم که در آن ۱-فرم β مخالف صفر باشد. می توان نشان داد که $F(x,y)=\dfrac{\alpha^{۲}}{\beta}$ در شرایط تابع اساسی فینسلری صدق می کند. در این صورت آن را از نوع کروپینا [۳] گفته و فضای $(M,\dfrac{\alpha^{۲}}{\beta})$ را فضای کروپینا می نامند.

مثال ۲.۱.۶. فرض کنیم α معرف یک متر ریمانی و β یک ۱-فرم روی منیفلد M باشد. زیر فضایی از $TM_{\circ}$ را در نظر می گیریم که در آن تابع $F(x,y)=\dfrac{\alpha^{۲}}{a\alpha-b\beta}$ تعریف شود. میتوان نشان داد که $F(x,y)$ در شرایط تابع اساسی فینسلری صدق می کند. در این صورت $F(x,y)$ را از نوع ماتسوموتو [۴] گفته و فضای $(M,\dfrac{\alpha^{۲}}{a\alpha-b\beta})$ را فضای ماتسوموتو می گوئیم.

تعریف ۲.۱.۷. فرض کنید $F=F(y)$ یک نرم مینکوفسکی روی یک فضای برداری V باشد. برای یک بردار $y\in V\setminus\{\circ\}$ فرض کنید:

$$C_y(u,v,w):=\frac{۱}{۴}\frac{\partial^{۳}}{\partial s\partial t\partial r}F^{۲}(y+su+tv+rw)|_{s=t=r=\circ}$$

وقتی $u,v,w\in V$ و هر C_y یک فرم سه خطی متقارن روی V است. خانواده

$$C:=\{C_y|y\in V\setminus\{\circ\}\}$$

[۲] Randers metric
[۳] Kropina metric
[۴] Matsumoto

را تانسور کارتان [۵] می نامیم.

و به همین ترتیب:

$$g_y(u,v) := \frac{۱}{۲}\frac{\partial^۲}{\partial s\partial t}F^۲(y+su+tv)|_{s=t}$$

فرم دو خطی است و خانواده:

$$g := \{g_y | y \in V \setminus \{۰\}\}$$

را تانسور اساسی می گوییم. اگر $\{b_i\}$ پایه ای برای V باشد، فرض کنید

$$g_{ij} := g_y(b_i, b_j) \quad , \quad C_{ijk} := C_y(b_i, b_j, b_k)$$

آنگاه:

$$g_{ij} = \frac{۱}{۲}[F^۲]_{y^iy^j}$$
$$C_{ijk} = \frac{۱}{۴}[F^۲]_{y^iy^jy^k} = \frac{۱}{۲}\frac{\partial}{\partial y^k}(g_{ij})$$

که در آن C_{ijk} نسبت به هر سه اندیس i, j, k متقارن می باشد و همه ی این توابع همگن از درجه صفر هستند [۳] .

تعریف ۸.۱.۲. فرض کنید (M, F) یک منیفلد فینسلری باشد. کلاف π^*TM یک التصاق خطی منحصر به فرد طوری می پذیرد که در شرایط زیر صدق کند :

- تاب آزادی:

$$d(dx^i) - dx^j \wedge \omega_j^i = -dx^j \wedge \omega_j^i = ۰$$

- تقریبا g سازگاری:

$$dg_{ij} - g_{kj}\omega_i^k - g_{ik}\omega_j^k = ۲A_{ijs}\frac{\partial y^s}{F}$$

[۵] Cartan tensor

که این التصاق، التصاق چرن [۶] نامیده می شود.

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Gamma^l_{jk} &= \gamma^l_{jk} - g^{li}(A_{ijs}\frac{N^s_k}{F} - A_{jks}\frac{N^s_i}{F} + A_{kis}\frac{N^s_j}{F})\\ &= \frac{g^{is}}{۲}(\frac{\delta g_{sj}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^s} + \frac{\delta g_{ks}}{\delta x^j})\end{aligned}$$

که این ضرایب روی هر چارت التصاق چرن را مشخص می کند. در اینجا g متر ریمانی روی π^*TM و

$$\gamma^l_{jk} := g^{is}\frac{۱}{۲}(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j})$$

نماد کریستوفل نوع دوم است. همچنین:

$$\begin{aligned}N^i_j &:= \gamma^i_{jk}y^k - C^i_{jk}\gamma^k_{rs}y^r y^s\\ \frac{\delta}{\delta x^j} &:= \frac{\partial}{\partial x^j} - N^i_j\frac{\partial}{\partial y^j}\\ \delta y^i &:= dy^i + N^i_j dx^j\end{aligned}$$

[۳]

تعریف ۹.۱.۲. فرض کنیم $v \in T_eG$ و X_v میدان برداری ناوردای چپ متناظر با v باشد ($X_v(e) = v$). اگر C بیانگر خم انتگرال ماکسیمال میدان برداری X_v آغازی از نقطه e آنگاه تابع :

$$\exp : T_eG \longrightarrow G$$

$$v \longmapsto C(۱)$$

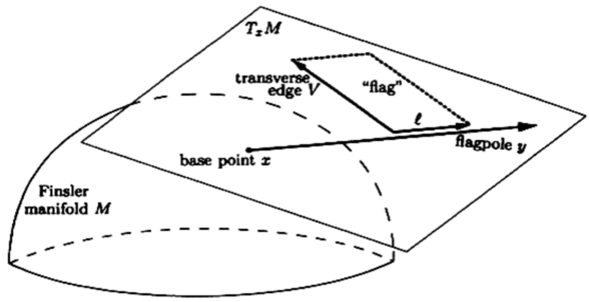
را نگاشت نمایی برای گروه لی G می نامیم [۲۳] .

تعریف ۱۰.۱.۲. فرض کنید (M, F) یک منیفلد فینسلری و پرچم (π, y) شامل بردار هیچ جا ناصفر y و یک صفحه ۲− بعدی $\pi \subset T_xM$ باشد که توسط دو بردار y, u تولید شده باشد. انحنای پرچمی (π, y) به صورت زیر تعریف می شود.

[۶] Chern connection

$$K(\pi, y) = \frac{g_y(R_y(u), u)}{g_y(y, y)g_y(u, u) - [g_y(y, u)]^{۲}}.$$

شکل ۲.۱: انحنای پرچمی.



تعریف ۱۱.۱.۲. با در نظر گرفتن میدان برداری مخالف صفر V روی منیفلد فینسلری (M, F) با التصاق ∇^V ، تانسور انحنای R^V به صورت زیر تعریف می شود:

$$R^V(X, Y)Z = \nabla^V_X \nabla^V_Y Z - \nabla^V_Y \nabla^V_X Z - \nabla^V_{[X,Y]} Z$$

[۲۱]

۲.۲ فضاهای فینسلری همگن

قضیه ۱.۲.۲. (قضیه ساخت فضاهای همگن) فرض کنیم G یک گروه لی و H زیر گروه بسته از G باشد، همدسته های چپ $\frac{G}{H}$ یک ساختار منیفلدی هموار منحصر به فرد دارند، به طوریکه نگاشت خارج قسمتی $\pi : G \longrightarrow \frac{G}{H}$ یک سابمرشن هموار است. با تعریف عمل چپ G روی $\frac{G}{H}$ به صورت:

$$G \times \frac{G}{H} \longrightarrow \frac{G}{H}$$

$$g_۱(g_۲H) \longmapsto (g_۱g_۲)H$$

$(\forall g_۱, g_۲ \in G)$ $\frac{G}{H}$ به یک فضای همگن تبدیل می شود.

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید G یک گروه لی و H زیر فضای بسته از G باشد. متر فینسلری F را روی فضای همگن $\frac{G}{H}$ ناوردای چپ گوئیم هرگاه:

$$F\left(X_{eH}\right) = F\left(\mathfrak{l}_{g_*}X\left(eH\right)\right) \quad , \quad \forall g \in G$$

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنید (M, F) یک فضای فینسلری باشد که در آن F همگن مثبت از درجه یک است، آنگاه دو تعریف برای ایزومتری های (M, F) وجود دارد.

اول اینکه یک دیفئومورفیسم σ از M به خودش را ایزومتری می نامیم اگر:

$$F(d\sigma_x(y)) = F(y) \quad \forall x \in M, y \in T_xM$$

و دوم اینکه، یک ایزومتری از (M, F) را می توانیم به صورت یک نگاشت یک به یک از M به خودش در نظر بگیریم که فاصله هر جفت از نقاط را حفظ می کند. در حالت ریمانی هر دو تعریف باهم معادلند و معادل بودن آنها در حالت فینسلری در [۱۲] بررسی شده است.

گروه ایزومتری های فضای فینسلری (M, F) را با $I(M, F)$ نشان می دهیم [۲۲] .

تعریف ۴.۲.۲. فضای فینسلری (M, F) فضای فینسلری همگن نامیده می شود، اگر گروه ایزومتری های (M, F) روی M به طور متعددی عمل کند [۲۲] .

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید (M, F) یک فضای فینسلری همگن باشد، آنگاه فضاهای مماس مینکوفسکی (T_xM, F_x) ، باهم ایزومتری خطی می باشند [۲۲] .

گزاره ۶.۲.۲. هر متر فینسلری همگن $M = \frac{G}{H}$ ، یک فضای همگن تحویلی است.

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنید G یک گروه لی همبند با یک متر فینسلری ناوردای چپ باشد، آنگاه موارد زیر باهم معادلند:

(۱) F ناوردای راست و در نتیجه دوسو ناورداست.

(۲) F ، $Ad(G)$ ناورداست.

(۳) برای هر $x, u, v \in \mathfrak{g}$ و $y \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$

$$g_y([x,u],v) + g_y(u,[x,v]) + 2C_y([x,y],u,v) = 0$$

که C_y تانسور کارتان F در y است [۱۹] .

گزاره ۸.۲.۲. اگر G یک گروه لی با یک متر فینسلری دوسو ناوردا باشد، آنگاه ژئودزیک های حول عنصر همانی G ، همان زیر گروه های یک پارامتری هستند [۱۹] .

۳.۲ فضاهای فینسلری متقارن

تعریف ۱.۳.۲. یک فضای فینسلری (M, F) به طور موضعی متقارن نامیده می شود اگر برای هر $p \in M$ ، s_p (تقارن ژئودزیک [۷])[۱۵] یک ایزومتری موضعی از متر فینسلری باشد [۱۰] .

تعریف ۲.۳.۲. یک فضای فینسلری (M, F) را فضای فینسلری به طور سراسری متقارن می نامیم اگر برای هر $x \in M$ یک ایزومتری تضامنی σ_x (که $\sigma_x^2 = 1$ اما $\sigma_x \neq 1$) وجود داشته باشد چنانچه x نقطه ی ثابتی تحت σ_x باشد.

تعریف ۳.۳.۲. فرض کنید G یک گروه لی و H یک زیر گروه بسته از G باشد، آنگاه فضای همدسته های $\frac{G}{H}$ متقارن نامیده می شود اگر یک اتومورفیسم تضامنی σ از G چنان موجود باشد که:

$$G_\sigma^e \subset H \subset G_\sigma$$

وقتی که G_σ زیر گروهی از G شامل نقاط ثابت G تحت σ است و G_σ^e عنصر همانی G_σ است [۱۰] .

تعریف ۴.۳.۲. فرض کنید (V, F) یک فضای مینکوفسکی باشد. نرم مینکوفسکی F ، برگشت پذیر [۸] گفته می شود اگر:

[۷] Geodesic symmetry
[۸] Reversible

$$F(-y) = F(y), \quad \forall y \in V$$

[۴]

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنید $\frac{G}{H}$ یک فضای همدسته های متقارن باشد، آنگاه هر متر فینسلری G ناوردای F بر $\frac{G}{H}$ (در صورت وجود)، باعث می شود که $(\frac{G}{H}, F)$ یک فضای فینسلری به طور سراسری متقارن باشد [۱۴] .

اثبات. ابتدا دیفئومورفیسم هایی از $\frac{G}{H}$ به خودش تعریف می کنیم. فرض کنید $eH = \circ$ ناحیه ای از $\frac{G}{H}$ باشد. نگاشت $\sigma_\circ$ از $\frac{G}{H}$ به خودش را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sigma_\circ(aK) = \sigma(a)K, \quad a \in G$$

آنگاه برای هر $x \in \frac{G}{H}$ ، $a \in G$ دلخواه را چنان انتخاب می کنیم که $x = \pi(a)$ که در آن π نگاشت تصویر طبیعی از G به $\frac{G}{H}$ است. حال نگاشت σ_x از $\frac{G}{H}$ به خودش را نیز به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sigma_x = \tau_a \circ \sigma_\circ \circ \tau_a^{-1}$$

جائیکه τ_a بصورت

$$\tau_a : gk \longrightarrow agk \quad , \quad \forall g \in G$$

تعریف می شود. طبق تعریف فضای همدسته های متقارن، می توان دید که σ_x مستقل از انتخاب a است و همچنین اتومورفیسم تضامنی از $\frac{G}{H}$ است که x تنها نقطه ثابت تحت آن است. حال نشان می دهیم ایزومتری است.

چون F ، G - ناورداست، τ_a به ازای هر $a \in G$ ، تحت F ناورداست، بنابراین کافی است فقط درباره $\sigma_\circ$ اثبات کنیم.

فرض کنید $\mathfrak{g}$ و $\mathfrak{h}$ جبرهای لی از G و H باشند، σ یک اتومورفیسم تضامنی از $\mathfrak{g}$ معرفی می کند. طبق تعریف، $\mathfrak{h}$ با مجموعه نقاط ثابت تحت σ یکی است، حال فرض کنید $\mathfrak{m}$ زیر فضایی از $\mathfrak{g}$ باشد که تحت σ دارای مقدار ویژه ۱- باشد، پس داریم:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$$

در نتیجه ما می توانیم $T_\circ(\dfrac{G}{H})$ را با $\mathfrak{m}$ یکی بگیریم. پس F با نرم مینکوفسکی بر $\mathfrak{m}$ که H -ناورداست متناظر است، پس تنها کافی است بررسی کنیم:

$$F(\sigma(y)) = F(y) \quad , \quad \forall y \in \mathfrak{m}$$

یا به عبارتی

$$F(-y) = F(y) \quad , \quad \forall y \in \mathfrak{m}$$

که این نیز طبق برگشت پذیر بودن F برقرار است. $\square$

قضیه ۶.۳.۲. فرض کنید (M, F) یک فضای فینسلری به طور سراسری متقارن باشد، برای هر $x \in M$ ایزومتری تضامنی از (M, F) در x را با s_x نمایش می دهیم، داریم:

(۱) برای هر $x \in M$ ، $(ds_x)_x = -I$

(۲) (M, F) همگن است بنابراین گروه ایزومتری های (M, F) ، $I(M, F)$ روی M به طور متعددی عمل می کند [۱۰] .

قضیه ۷.۳.۲. فرض کنید (M, F) یک فضای فینسلری به طور سراسری متقارن باشد، آنگاه یک جفت متقارن ریمانی (G, H) چنان موجود است که M با $\dfrac{G}{H}$ دیفئومورفیسم بوده و F تحت G ناورداست.

تعریف ۸.۳.۲. یک فضای فینسلری (M, F) فضای بروالد نامیده می شود اگر در هر چارت مختصاتی استاندارد

$$(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$$

مولفه های التصاق چرن $\Gamma^i_{jk}(x, y)$ به بردار y وابسته نباشند [۲۰] .

قضیه ۹.۳.۲. فرض کنید (M, F) یک فضای فینسلری به طور سراسری متقارن باشد، آنگاه (M, F) فضای بروالد است. بنابراین التصاق های F با التصاق لویی - چوی ویتا از متر ریمانی g یکسان است که (M, g) فضای ریمانی به طور سراسری متقارن است [۱۰] .

مثال ۱۰.۳.۲. فرض کنید $\frac{G_1}{H_1}$ و $\frac{G_2}{H_2}$ دو فضای همدسته های متقارن با H_1 و H_2 فشرده باشند (در این همدسته همه فضاها متقارن ریمانی است) و g_1 و g_2 مترهای ریمانی ناوردا به ترتیب روی $\frac{G_1}{H_1}$ و $\frac{G_2}{H_2}$ باشند. فرض کنید $M = \frac{G_1}{H_1} \times \frac{G_2}{H_2}$ و o_1 و o_2 به ترتیب نواحی از $\frac{G_1}{H_1}$ و $\frac{G_2}{H_2}$ باشند و $o = (o_1, o_2)$ (ناحیه ای از M) حال برای

$$y = y_1 + y_2 \in T_o(M) = T_{o_1}(\frac{G_1}{H_1}) + T_{o_2}(\frac{G_2}{H_2})$$

تعریف می کنیم :

$$F(y) = \sqrt{g_1(y_1, y_2) + g_2(y_1, y_2) + \sqrt[s]{g_1(y_1, y_2)^s + g_2(y_1, y_2)^s}}$$

که در آن s اسکالری بزرگتر از ۲ است. آنگاه $F(y)$ یک نرم مینکوفسکی بر $T_o(M)$ که تحت $H_1 \times H_2$ ناورداست. بنابراین یک متر فینسلری G ناوردا بر M تعریف می کند. طبق قضیه ۵.۳.۲ یک فضای به طور سراسری متقارن است که بوضوح غیر ریمانی است [۱۰] .

تعریف ۱۱.۳.۲. فرض کنید $(\mathfrak{g}, \sigma)$ یک جبر لی متقارن و $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ تجزیه کانونی از $\mathfrak{g}$ نسبت به ایزومتری تضامنی σ باشد، اگر F یک نرم مینکوفسکی بر $\mathfrak{m}$ باشد و شرایط زیر برقرار باشد:

$$g_y([x,u],v) + g_y(u,[x,v]) + 2C_y([x,y],u,v) = 0 \quad , \quad \forall y(\neq 0), u, v \in \mathfrak{m}, x \in \mathfrak{h}$$

که g_y و C_y به ترتیب تانسور اساسی و تانسور کارتان از F در g هستند، آنگاه $(\mathfrak{g}, \sigma, F)$ جبر لی متقارن مینکوفسکی نامیده می شود [۶] .

گزاره ۱۲.۳.۲. فرض کنید $(\mathfrak{g}, \sigma)$ یک جبر متقارن متعامد از نوع فشرده با رتبه یک و $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ تجزیه کانونی متناظر با آن باشد. آنگاه هر نرم مینکوفسکی F بر $\mathfrak{m}$ که $(\mathfrak{g}, \sigma, F)$ جبر لی متقارن مینکوفسکی باشد، اقلیدسی است. در حالت خاص، فرض کنید $\frac{G}{H}$ یک فضای به طور سراسری متقارن ریمانی با رتبه یک باشد، آنگاه هیچ متر فینسلری غیر ریمانی بر $\frac{G}{H}$ وجود ندارد که $G-$ ناوردا باشد [۶] .

گزاره ۱۳.۳.۲. فرض کنید $(\mathfrak{g}, \sigma)$ یک جبر لی متقارن متعامد از نوع فشرده با رتبه $\leq$ **۲** باشد. آنگاه تعداد نا متناهی نرم مینکوفسکی غیر اقلیدسی F بر $\mathfrak{m}$ وجود دارد چنانکه $(\mathfrak{g}, \sigma, F)$ جبر لی متقارن مینکوفسکی [۹] باشد.

تعریف ۱۴.۳.۲. فرض کنید (M, F) و (M_1, F_1) و (M_2, F_2) فضاهای فینسلری به طور سراسری متقارن باشند، آنگاه (M, F) حاصلضرب (M_1, F_1) و (M_2, F_2) نامیده می شود هرگاه $M \simeq M_1 \times M_2$ و

$$F_i = F \mid_{M_i} \quad , \quad \forall i = 1, 2$$

یک فضای به طور سراسری متقارن فینسلری، تحویل ناپذیر نامیده می شود اگر نتوان آنرا به صورت حاصلضرب دو فضای فینسلری به طور سراسری متقارن نوشت [۶] .

[۹] Minkowski Lie algebra

فصل ۳

مترهای فینسلری ناوردا روی منیفلدهای همگن

۱.۳ مقدمه

فرض کنید G یک گروه لی همبند با جبر لی $\mathfrak{g} = T_eG$ باشد. طبق دیفئومورفیسم

$$(g, X) \longrightarrow (L_g)_*X \in T_gG$$

می توانیم فضای مماس TG را با $G \times \mathfrak{g}$ یکی بگیریم.

تعریف ۱.۱.۳. تابع فینسلری $F : TG \longrightarrow R_+$ ، G ناوردا نامیده می شود اگر :

$$F(g, X) = F(e, X) \quad , \quad \forall g \in G, X \in \mathfrak{g}$$

تابع فینسلری G ناوردا بر TG می تواند با نرم مینکوفسکی بر $\mathfrak{g}$ یکی گرفته شود.

اگر $F : TG \longrightarrow R_+$ یک تابع فینسلری G -ناوردا باشد، می توانیم نرم مینکوفسکی $\tilde{F}$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\tilde{F} : \mathfrak{g} \longrightarrow R_+$$

$$\tilde{F}(X) = F(e, X)$$

وقتی e نمایانگر عنصر همانی G است. برعکس اگر نرم مینکوفسکی $\tilde{F} : \mathfrak{g} \longrightarrow R_+$ را داشته باشیم آنگاه $\tilde{F}$ می تواند به تابع فینسلری G ناوردای F به صورت زیر توسیع یابد:

$$F : TG \longrightarrow R_+$$

$$F(g, X) = \tilde{F}(X)$$

که در آن $(g, X) \in G \times \mathfrak{g}$.

فرض کنید G یک گروه لی همبند و $L : G \longrightarrow G$ عمل تعریف شده توسط انتقال های چپ

$$L_g : G \longrightarrow G \quad , \quad \forall g \in G$$

و $TL : G \times TG \longrightarrow TG$ عمل تعریف شده توسط نگاشت های خطی مماس

$$TL_g : TG \longrightarrow TG \quad , \quad \forall g \in G$$

از انتقال های چپ باشد.

میدان برداری هموار $X : TG \setminus \{۰\} \longrightarrow TTG$ را ناوردای چپ گوئیم هرگاه:

$$TTL_g \circ X \circ TL_g^{-۱} = X \quad , \quad \forall g \in G$$

. [۱۹]

۲.۳ مترهای فینسلری ناوردا

مطالب ارجاع داده نشده این فصل از مرجع [۵] می باشد.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید G یک گروه لی و H یک زیر گروه بسته از آن باشد و $LieG = \mathfrak{g}$ و $LieH = \mathfrak{h}$ آنگاه یک تناظر یک به یک متر های فینسلری $G-$ ناوردا بر $\frac{G}{H}$ و نرم مینکوفسکی بر فضای خارج قسمتی $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ وجود دارد چنانکه:

$$F(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(x)) = F(x) \quad , \forall h \in H, x \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$$

اثبات. ابتدا فرض می کنیم یک نرم مینکوفسکی بر فضای خارج قسمتی $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ موجود است، نشان می دهیم این نرم با متر فینسلری $G-$ ناوردای روی $\frac{G}{H}$ متناظر است. با توجه به تناظر $T_H\frac{G}{H} \simeq T_{eH}\frac{G}{H} \simeq \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ ، نرم مینکوفسکی F_{eH} را روی $T_{eH}\frac{G}{H}$ در نظر می گیریم و آن را به تابعی روی کل $T_{xH}\frac{G}{H}$ (برای همه x های متعلق به G) گسترش می دهیم. تعریف می کنیم:

$$F_{xH} : T_{xH}\frac{G}{H} \longrightarrow [0, \infty)$$

$$F_{xH}(X_{xH}) := F_{eH}(T_{xH}\mathfrak{l}_{x^{-1}}X_{xH})$$

بنابر این طبق تعریف بالا F_{xH} متر فینسلری $G-$ ناوردای متناظر با نرم مینکوفسکی F_{eH} است. حال فرض می کنیم متر فینسلری $G-$ ناوردای روی $\frac{G}{H}$ را داشته باشیم، نشان می دهیم این متر با نرم مینکوسکی $Ad(H)$ ناوردا روی $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ متناظر است چنانچه:

$$F(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(x)) = F(x) \quad , \quad \forall h \in H, x \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$$

متر فینسلری G ناوردای F را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$F_{xH} : T_{xH}\frac{G}{H} \longrightarrow [0, \infty)$$

$$F_{xH}(X_{xH}) := F_{yxH}(\mathfrak{l}_{y*}X_{xH})$$

طبق تعریف متر فینسلری، تحدید این متر به $T_{eH}\frac{G}{H}$ یک نرم مینکوفسکی روی $T_{eH}\frac{G}{H} \simeq \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ خواهد بود. حال کافیست نشان دهیم این نرم مینکوفسکی $Ad(H)-$ ناورداست، یعنی:

$$F(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(x)) = F(x) \quad , \quad \forall h \in H, x \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$$

طبق تعریف Ad داریم:

$$Ad(h)x = (C_h(x))_* \quad , \quad C_h(x) = l_h \circ r_{h^{-1}}(x)$$

و در اینجا چون $xH \in \frac{G}{H}$ و $h \in H$ پس می توان نوشت:

$$C_h(xH) = h(xH)h^{-1} = h(xH) = l_h(xH)$$

پس داریم:

$$F(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(xH)) = F(l_{h*} \circ r_{h^{-1}*}(xH) = F(l_{h*}(xH))$$

و چون طبق فرض F، $G-$ ناورداست، پس:

$$F(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(x)) = F(x)$$

و اثبات کامل است. □

گزاره ۲.۲.۳. فرض کنید $\frac{G}{H}$ یک منیفلد همگن تحویل پذیر با تجزیه ای به صورت: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ باشد. آنگاه یک تناظر یک به یک بین مترهای فینسلری $G-$ ناوردا بر $\frac{G}{H}$ و نرم مینکوفسکی بر $\mathfrak{m}$ چنان موجود است که:

$$F(Ad(h)x) = F(x) \quad , \quad \forall h \in H, x \in \mathfrak{m}$$

اثبات. با توجه به تناظر $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \simeq \mathfrak{m}$ این گزاره به طور مستقیم از قضیه قبل نتیجه می شود.

این تناظر به صورت زیر بدست می آید، با در نظر گرفتن نگاشت تصویر طبیعی:

$$\pi : G \longrightarrow \tfrac{G}{H}$$

$$g \longmapsto gH$$

داریم: $\pi_* : T_eG \longrightarrow T_{eH}\frac{G}{H}$ در نتیجه $ker\pi_* = T_eH$ و خواهیم داشت:

$$T_eG = T_eH + T_{eH}\frac{G}{H} \longrightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$$

حال چون می دانیم که جمع مستقیم دو زیر فضا که یک فضا می شود منحصر به فرد نیست مگر در حالتی که در آن فضا ضرب داخلی تعریف شده باشد. پس در اینجا خواهیم داشت:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m} \quad , \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \longrightarrow \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \simeq \mathfrak{m}$$

□

تعریف ۳.۲.۳. فرض کنید $\mathfrak{g}$ یک جبر لی حقیقی و $\mathfrak{h}$ یک زیر جبر آن باشد. اگر F نرم مینکوفسکی بر فضای خارج قسمتی $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ باشد چنانکه:

$$g_y\left(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\left(x\right)u,v\right)+g_y\left(u,ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\left(x\right)v\right)+۲C_y\left(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\left(x\right)\left(y\right),u,v\right)=۰$$

$$\forall y(\neq ۰),u,v\in\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}\quad ,x\in\mathfrak{h}$$

وقتی g_y ضرب داخلی معین مثبت تعریف شده بوسیله F روی y و C_y تانسور کارتان F است، آنگاه $\{\mathfrak{g},\mathfrak{h},F\}$ یا به طور خلاصه $\{\mathfrak{g},\mathfrak{h}\}$ جفت لی مینکوفسکی [1] نامیده میشود.

در حالت خاص اگر F یک نرم اقلیدسی $(\forall y\neq ۰, C_y=۰)$ باشد، آنگاه $\{\mathfrak{g},\mathfrak{h}\}$ جفت لی اقلیدسی نامیده می شود.

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنید G یک گروه لی ، H یک زیر گروه بسته ی G و $LieG=\mathfrak{g}$ و $LieH=\mathfrak{h}$. اگر یک متر فینسلری ناوردا بر منیفلد همگن $\frac{G}{H}$ داشته باشیم، آنگاه یک نرم مینکوفسکی F بر $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ چنان موجود است که $\{\mathfrak{g},\mathfrak{h}\}$ جفت لی مینکوفسکی باشد. برعکس، اگر H همبند باشد و نرم مینکوفسکی F بر $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ چنان موجود باشد که $\{\mathfrak{g},\mathfrak{h}\}$ جفت لی مینکوفسکی باشد، آنگاه یک متر فینسلری ناوردا بر $\frac{G}{H}$ وجود دارد.

اثبات. ابتدا فرض می کنیم متر فینسلری $G-$ ناوردای F روی $\frac{G}{H}$ را داریم. طبق تناظر قضیه قبل این متر متناظر با نرم مینکوفسکی بر فضای خارج قسمتی $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ است، چنانچه:

$$F(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(x))=F(x)\quad ,\quad \forall h\in H,x\in\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$$

حال کافیست نشان دهیم که $\{\mathfrak{g},\mathfrak{h}\}$ جفت لی مینکوفسکی است. چون g_y ضرب داخلی معرفی شده بوسیله متر F است، پس:

$$g_y(u,v)=g_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)y}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)u,Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)v),\quad \forall h\in H,u,v\in\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}},y\in\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}\setminus\{۰\}$$

چون برای هر $x\in\mathfrak{h}$ ، زیر گروه یک پارامتری $\exp tx$ از H را داریم، پس می توان رابطه ی بالا را به صورت زیر نوشت:

$$g_y(u,v)=g_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u,Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)v)$$

[1] Minkowski Lie pair

حال با مشتق گیری نسبت به t خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mid_{t=0} g_y(u,v) &= \frac{d}{dt}\mid_{t=0} g_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u, Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)v)\\ \Longrightarrow 0 &= \frac{d}{dt}\mid_{t=0} g_y(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u, v) + \frac{d}{dt}\mid_{t=0} g_y(u, vAd_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx))\\ &+ \frac{d}{dt}\mid_{t=0} g_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y}(u,v)\end{aligned}$$

حال با توجه به رابطه ی

$$\frac{d}{dt}\mid_{t=0} Ad(exptx) = Ad_*(x) = ad(x)$$

داریم:

$$g_y(ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)u, v) + g_y(u, ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)v) + \frac{d}{dt}\mid_{t=0} g_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y}(u,v)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mid_{t=0} g_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y}(u,v) &= \frac{d}{dt}\mid_{t=0} g_{y+tad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)y}(u,v)\\ &= \frac{d}{dt}\mid_{t=0} (\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\frac{d}{ds}\mid_{s=r=0} F^2(y + tad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)y + ru + sv))\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{d}{dr}\frac{d}{ds}\mid_{t=s=r=0} F^2(y + tad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)y + ru + sv))\\ &= 2C_y(ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)y, u, v)\end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$g_y(ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)u, v) + g_y(u, ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)v) + 2C_y(ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)y, u, v) = 0$$

پس $\{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}\}$ یک جفت لی مینکوفسکی است.

حال عکس این مطلب را ثابت می کنیم. فرض کنید F یک نرم مینکوفسکی روی $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ باشد چنانچه $\{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}\}$ جفت لی مینکوفسکی

باشد و H همبند باشد، نشان می دهیم شرایط قضیه ۱.۲.۲ برقرار است و در نتیجه متر فینسلری ناوردا روی $\frac{G}{H}$ موجود است.

تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$\psi(t) = g_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u, Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)v)$$

برای $t_\circ \in R$ داریم:

$$\begin{aligned}
\psi'(t_\circ) &= \frac{d}{dt}\mid_{t=t_\circ} g_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u, Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)v) \\
&= g_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y}(\frac{d}{dt}\mid_{t=t_\circ} Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u, Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)v) \\
&\quad + g_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u, \frac{d}{dt}\mid_{t=t_\circ} Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)v) \\
&\quad + g_{\frac{d}{dt}\mid_{t=t_\circ} Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u, Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)v)
\end{aligned}$$

برای محاسبه دو جمله اول داریم :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mid_{t=t_\circ} Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u &= \frac{d}{dt}\mid_{t=t_\circ} (\exp(ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(tx))u \\
&= \frac{d}{dt}\mid_{t=t_\circ} (\exp t(ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x))u \\
&= ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)(\exp t_\circ(ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}x))u \\
&= ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp t_\circ x)u)
\end{aligned}$$

و برای محاسبه جمله سوم:

$$\begin{aligned}
&g_{\frac{d}{dt}\mid_{t=t_\circ} Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u, Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)v) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\frac{d}{ds}\mid_{r=s=0} F^2(\frac{d}{dt}\mid_{t=t_\circ} Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y + rAd_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u + sAd_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)v) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{d}{dr}\frac{d}{ds}\mid_{t=r=s=0} F^2(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y + t(ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x))Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y \\
&\quad + rAd_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u + sAd_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)v)
\end{aligned}$$

$$= 2C_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y}(ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x))Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y, Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u, Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)v)$$

بنابر این چون $\{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}\}$ جفت لی مینکوفسکی است، مجموع سه جمله برابر صفر خواهد بود، یعنی $\psi'(t_0) = 0$ پس ψ یک تابع ثابت است و مقدار آن به t بستگی ندارد، پس می توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$g_y(u, v) = g_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)y}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)u, Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(\exp tx)v)$$

و چون H همبند است، هر کدام از عناصر آن به صورت $\exp tx$ که $x \in \mathfrak{h}$ و $t \in R$ است، قابل نمایش می باشد، پس:

$$g_y(u, v) = g_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)y}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)u, Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)v) \quad , \quad \forall h \in H$$

حال با استفاده از رابطه بالا نشان می دهیم:

$$F(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(x)) = F(x) \quad , \forall h \in H, x \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$$

فرض کنید $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ پایه های فضای خطی $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ باشند، پس داریم:

$$u = \sum u^i \alpha_i \quad , \quad \forall u \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \setminus \{0\}$$

و همچنین:

$$g_{ij}(u) = g_u(\alpha_i, \alpha_j)$$

و فرمول زیر را داریم:

$$F^2(u) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(u)u^i u^j \tag{1.3}$$

حال $F^2(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(u))$ را محاسبه می کنیم:

$$F^2(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(u)) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(u)\bar{u}^i \bar{u}^j$$

که در آن چون $Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(u) \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ پس:

$$Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(u) = \sum_{i=۱}^{n} \bar{u^i}\alpha_i$$

حال فرض می کنیم $(m_{ij})_{n\times n}$ ماتریس متناظر با $Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)$ تحت پایه ی $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n$ و $(m^{ij})_{n\times n}$ ماتریس معکوس آن باشد، طبق رابطه ی:

$$Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(u) = \sum_{i=۱}^{n} \bar{u^i}\alpha_i$$

خواهیم داشت:

$$\bar{u^i} = \sum_{j=۱}^{n} m_{ij}u^j$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} g_{ij}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)u) &= g_{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)u}(\alpha_i, \alpha_j) \\ &= g_u((Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h))^{-۱}\alpha_i, (Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h))^{-۱}\alpha_j)) \\ &= g_u(\sum_{k=۱}^{n} m^{ik}\alpha_k, \sum_{l=۱}^{n} m^{jl}\alpha_l) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow F^{۲}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(u)) &= \sum_{i,j=۱}^{n} g_{ij}(u)\bar{u}^i\bar{u}^j \\
&= \sum_{i,j=۱}^{n} g_u(\sum_{k=۱}^{n} m^{ik}\alpha_k, \sum_{l=۱}^{n} m^{jl}\alpha_l)\bar{u}^i\bar{u}^j \\
&= \sum_{i,j=۱}^{n} g_u(\sum_{k=۱}^{n} m^{ik}\alpha_k, \sum_{l=۱}^{n} m^{jl}\alpha_l)(\sum_{r=۱}^{n} m_{ir}u^r)(\sum_{s=۱}^{n} m_{is}u^s) \\
&= \sum_{i,j=۱}^{n} g_u(\sum_{k=۱}^{n} m^{ik}\alpha_k \sum_{r=۱}^{n} m_{ir}u^r, \sum_{l=۱}^{n} m^{jl}\alpha_l \sum_{s=۱}^{n} m_{is}u^s) \\
&= \sum_{i,j=۱}^{n} g_u(\sum_{k=۱}^{n} \delta_{kr}\alpha_k u^r, \sum_{l=۱}^{n} \delta_{ls}\alpha_l u^s) \\
&= \sum_{i,j=۱}^{n} g_u(\delta_{ik}\sum_{k=۱}^{n} \alpha_k u^k, \delta_{jl}\sum_{l=۱}^{n} \alpha_l u^l) \\
&= \sum_{i,j=۱}^{n} g_u(\alpha_i, \alpha_j)u^i u^j
\end{aligned}
$$

پس در نتیجه:

$$
F^{۲}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(u)) = \sum_{i,j=۱}^{n} g_u(\alpha_i, \alpha_j)u^i u^j
$$

و طبق رابطه (۱.۳) داریم:

$$
F^{۲}(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(u)) = F^{۲}(u)
$$

حال چون $F > ۰$ است پس:

$$
F(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)(u)) = F(u)
$$

در نتیجه شرایط قضیه ۱.۲.۳ برقرار است و متر فینسلری ناوردا روی $\frac{G}{H}$ داریم [۸] . $\square$

تعریف ۵.۲.۳. فرض کنید G یک گروه لی و (V, ρ) یک نمایش از G باشد. (V, ρ, F) را یک نمایش مینکوفسکی از G می نامیم هرگاه F نرم مینکوفسکی بر V باشد چنانکه:

$$F(\rho(g)v) = F(v), \quad \forall v \in V$$

تعریف ۶.۲.۳. اگر $\mathfrak{g}$ یک جبر لی باشد، آنگاه نمایش مینکوفسکی از $\mathfrak{g}$ ، نمایش (V, ϕ) از $\mathfrak{g}$ با نرم مینکوفسکی F بر فضای برداری V است، چنانکه:

$$g_y(\phi(x)u, v) + g_y(u, \phi(x)v) + ۲C_y(\phi(x)y, u, v) = ۰ \quad , \quad \forall y(\neq ۰), u, v \in V, x \in \mathfrak{g}$$

معمولا نمایش مینکوفسکی را به صورت (V, ϕ, F) نشان می دهیم.

مثال ۷.۲.۳. اگر G یک گروه لی و H یک زیر گروه بسته همبند از G باشد و $LieH = \mathfrak{h}$ و $LieG = \mathfrak{g}$ باشد و Fیک نرم مینکوفسکی بر فضای خارج قسمتی$\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ باشد، چنانکه $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, F)$ جفت لی مینکوفسکی باشد، یعنی:

$$g_y(ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)(u), v) + g_y(u, ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)v) + C_y(ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(x)y, u, v) = ۰, \quad \forall y(\neq ۰), u, v \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}, x \in \mathfrak{h}$$

آنگاه بوضوح $(\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}, ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}, F)$ نمایش مینکوفسکی از $\mathfrak{h}$ است.

۳.۳ مترهای ریمانی ناوردا

قضیه ۱.۳.۳. تناظر یک به یک بین مترهای ریمانی نامتناهی $G-$ ناوردا g بر $\frac{G}{H}$ و فرم دوخطی متقارن نا تباهیده $ad(H)$ ناوردای B بر $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ وجود دارد. این تناظر به صورت زیر بیان می شود:

$$B(\bar{X}, \bar{Y}) = g(X, Y)_۰ \quad , \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

که در آن $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ عناصری از $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ متناظر با X و Y در $\mathfrak{g}$ هستند.

اثبات. ابتدا فرض می کنیم متر ریمانی $G-$ ناوردای g بر $\frac{G}{H}$ را داریم. نشان می دهیم این متر متناظر با فرم دوخطی متقارن ناتباهیده ی $Ad(H)-$ ناوردای B روی $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ است، g را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$g : T_{xH}\frac{G}{H} \times T_{xH}\frac{G}{H} \longrightarrow [۰, \infty)$$

$$\begin{aligned} g(x,y) &= < X_{xH}, Y_{xH} >_{xH} \\ &= < (l_y)_* X_{xH}, (l_y)_* Y_{xH} >_{yxH} \end{aligned}$$

که طبق تعریف متر ریمان فرم دوخطی متقارن ناتباهیده است، فقط کافی است نشان دهیم $Ad(H)-$ ناورداست، یعنی:

$$< Ad(h) X_{xH}, Ad(h) Y_{xH} >=< X_{xH}, Y_{xH} >$$

که :

$$Ad(h) = (C_h)_* = (l_h \circ r_h)_*$$

و

$$C_h(xH) = l_h \circ r_h(xH) = h(xH)h^{-۱} = l_h(xH)$$
$$\Longrightarrow Ad(h)(x) = l_{h*}(x) \quad , \quad \forall x \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$$

و چون متر ریمان g، $G-$ ناورداست پس:

$$< Ad(h)(x), Ad(h)(y) >=< l_{h*}(x), l_{h*}(y) >=< x, y > \quad , \forall x, y \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$$

حال بر عکس فرض می کنیم فرم دوخطی متقارن نا تباهیده $Ad(H)-$ ناوردای B روی $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ را داریم، نشان می دهیم این فرم متناظر با متر ریمانی $G-$ ناوردا روی $\frac{G}{H}$ است. فرم B را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$B : T_{eH}\frac{G}{H} \times T_{eH}\frac{G}{H} \longrightarrow [۰, \infty)$$

$$(X_{eH}, Y_{eH}) \longmapsto B(X_{eH}, Y_{eH})$$

حال متر ریمان g را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= < X_{xH}, Y_{xH} >_{xH} \\ &:= < (l_{x^{-۱}})_* X_{eH}, (l_{x^{-۱}})_* Y_{eH} >_{eH} \\ &= B((l_{x^{-۱}})_* X_{eH}, (l_{x^{-۱}})_* Y_{eH}) \end{aligned}$$

$\square$

[۱۷]

گزاره ۲.۳.۳. اگر $M = \dfrac{G}{H}$ تحویل پذیر با تجزیه $ad(H)$ ناوردای $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ باشد، آنگاه تناظر یک به یک بین مترهای ریمانی نا متناهی $G-$ ناوردای g بر $M = \dfrac{G}{H}$ و فرم دوخطی متقارن نا تباهیده $ad(H)$ ناوردای B بر $\mathfrak{m}$ وجود دارد.

$$B(X,Y) = g(X,Y)_\circ$$

[۱۷]

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنید G یک گروه لی و H زیر گروه بسته ای از آن باشد، اگر یک متر فینسلری ناوردا روی $\dfrac{G}{H}$ داشته باشیم، آنگاه یک متر ریمانی ناوردا نیز روی $\dfrac{G}{H}$ داریم.

اثبات. فرض می کنیم F یک متر فینسلری ناوردا روی $\dfrac{G}{H}$ باشد و فضای

$$T_\circ \frac{G}{H} = T_{eH} \frac{G}{H} = T_H \frac{G}{H} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$$

را در نظر می گیریم، طبق تعریف متر فینسلری $F \mid_{T_\circ \frac{G}{H}}$ یک نرم مینکوفسکی $Ad(H)-$ ناوردا بر $(\dfrac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}) T_\circ \dfrac{G}{H}$ است. تعریف می کنیم:

$$I_\circ = \left\{ x \in T_\circ \frac{G}{H} \mid F(x) = ۱ \right\}$$

گروه ایزومتری های خطی $Ad(H) = \left\{ Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h) \mid h \in H \right\}$ ، $I_\circ$ ناورداست، یعنی:

$$\begin{aligned} Ad(H)I_\circ &= \left\{ Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)x \mid h \in H, x \in I_\circ \right\} \\ &= \left\{ Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)x \mid h \in H, x \in T_\circ \frac{G}{H}, F(x) = ۱ \right\} \\ &= \left\{ Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)x \in T_\circ \frac{G}{H} \mid F(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)x) = F(x) = ۱ \right\} \\ &= I_\circ \end{aligned}$$

حال فرض کنید $G_۱$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$G_۱ = \left\{ g \in GL(T_\circ \frac{G}{H}) \mid gI_\circ = I_\circ \right\}$$

حال طبق قضیه می دانیم، یک زیر گروه $G \subset GL(n, C)$ فشرده است اگر و فقط اگر کراندار باشد، و در اینجا $G_۱$ طبق تعریفش کراندار و در نتیجه فشرده است. در نتیجه $G_۱$ یک گروه لی فشرده و $Ad(H)$ زیر گروه آن است و طبق قضیه داریم، اگر G یک گروه لی فشرده باشد، آنگاه $\mathfrak{g}$ یک ضرب داخلی ناوردا می پذیرد، بنابراین ما می توانیم یک ضرب داخلی $G_۱$-ناوردا بر $T_\circ \frac{G}{H}$ داشته باشیم که چون $Ad(H)$ زیرگروه $G_۱$ است پس این ضرب داخلی $Ad(H)$ ناورداست، حال طبق قضیه قبل این ضرب داخلی متناظر با متر ریمانی $G-$ ناوردا روی $\frac{G}{H}$ خواهد بود و اثبات کامل است [۸] [۱۸] . □

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنید G یک گروه لی، H یک زیر گروه بسته از G باشد، چنانچه G به طور موثر روی $\frac{G}{H}$ عمل کند. فرض کنید مرکز ساز H در G نامنفعل باشد، آنگاه یک متر فینسلری ناوردا بر $\frac{G}{H}$ وجود دارد اگر و فقط اگر نرم مینکوفسکی F بر جبر لی $\mathfrak{g}$ از G چنان موجود باشد که :

$$F(Ad(h)x) = F(x) \quad , \forall x \in H, x \in \mathfrak{g}$$

اثبات. فرض می کنیم متر فینسلری ناوردای F بر $\frac{G}{H}$ را داریم، طبق قضیه قبل متر ریمانی ناوردا بر $\frac{G}{H}$ وجود دارد و طبق قضیه ۱.۳.۳ این متر ریمانی ناوردا روی $\frac{G}{H}$ متناظر با ضرب داخلی $Ad(H)$ ناوردا روی $\mathfrak{m} \simeq \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ است که می توان این ضرب را روی $\mathfrak{g}$ توسیع داد، پس یک ضرب داخلی روی $\mathfrak{g}$ داریم چنانکه :

$$< Ad(h)(x), Ad(h)(y) >=< x, y >, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, \forall h \in H$$

تعریف می کنیم: $F(x) = \sqrt{< x, x >}$ و نشان می دهیم F یک نرم مینکوفسکی روی $\mathfrak{g}$ است.

طبق تعریف F روی $TG \setminus \{0\}$ هموار است و همچنین داریم:

$$F(\lambda y) = \sqrt{< \lambda y, \lambda y >} = \sqrt{\lambda^2 < y, y >} = \lambda\sqrt{< y, y >} = \lambda F(y)$$

حال نشان می دهیم فرم دو خطی متقارن زیر معین مثبت است:

$$\begin{aligned}
g_y(v, v) &= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{d}{dt}\,|_{s=t=0}\, F^2(y + sv + tv) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\,|_{s=0}\, (\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, F^2(y + sv + tv)) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\,|_{s=0}\, (\frac{d}{dt}\,|_{t=0} < y + sv + tv, y + sv + tv >) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\,|_{s=0}\, (< v, y + sv + tv > + < y + sv + tv, v >)\,|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\,|_{s=0}\, (< v, y + sv > + < y + sv, v >) \\
&= \frac{1}{2}(< 0, y + sv > + < v, v > + < v, v > + < y + sv, 0 >)\,|_{s=0} \\
&= \frac{1}{2}2 < v, v >=< v, v > \quad > 0
\end{aligned}$$

و از طرف دیگر:

$$F(Ad(h)x) = \sqrt{< Ad(h)x, Ad(h)x >} = \sqrt{< x, x >} = F(x)$$

بنابر این حکم ثابت است.

برعکس، فرض می کنیم نرم مینکوفسکی F بر $\mathfrak{g}$ چنان موجود باشد که:

$$F(Ad(h)x) = F(x) \quad , \forall h \in H, x \in \mathfrak{g}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
g_y(Ad(h)x, Ad(h)y) &= \frac{۱}{۲}\frac{d^۲}{dsdt}F^۲(y+sAd(h)x+tAd(h)y)\mid_{s=t=۰}\\
&= \frac{۱}{۲}\frac{d^۲}{dsdt}F(y+sAd(h)x+tAd(h)y)F(y+sAd(h)x+tAd(h)y)\mid_{s=t=۰}\\
&= \frac{۱}{۲}\frac{d^۲}{dsdt}F(Ad(h)(Ad(h^{-۱})y+sx+ty)F(Ad(h)(Ad(h^{-۱})y+sx+ty)\mid_{s=t=۰}\\
&= \frac{۱}{۲}\frac{d^۲}{dsdt}F(Ad(h^{-۱})y+sx+ty)F(Ad(h^{-۱})y+sx+ty)\mid_{s=t=۰}\\
&= \frac{۱}{۲}\frac{d^۲}{dsdt}F^۲(Ad(h^{-۱})y+sx+ty)\mid_{s=t=۰}\\
&= g_{Ad(h^{-۱})y}(x,y)
\end{aligned}$$

پس برای $x, y \in \mathfrak{g}$ داریم:

$$g_y(Ad(h)x, Ad(h)y) = g_{Ad(h^{-۱})y}(x,y)$$

از طرف دیگر چون مرکز ساز H در G نامنفعل است پس:

$$\exists ۰ \neq y \in G \quad s.t \quad hyh^{-۱} = y \quad ;\forall h \in H$$

$$\exists ۰ \neq y \in G \quad s.t \quad C_h(y) = y \quad ;\forall h \in H$$

$$\exists ۰ \neq y \in \mathfrak{g} \quad s.t \quad Ad(h)y = y \quad ;\forall h \in H$$

و چون $h^{-۱} \in H$ پس $y \in \mathfrak{g}$ وجود دارد که $Ad(h^{-۱})y = y$ و در نتیجه

$$g_y(Ad(h)x, Ad(h)y) = g_y(x,y)$$

حال فرض می کنیم $\mathfrak{m}$ مولفه متعامد $\mathfrak{h}$ در $\mathfrak{g}$ نسبت به g_y باشد، یعنی $g_y(\mathfrak{h},\mathfrak{m}) = ۰$ داریم:

$$۰ = g_y(\mathfrak{h},\mathfrak{m}) = g_y(Ad(h)\mathfrak{h}, Ad(h)\mathfrak{m}) = g_y(\mathfrak{h}, Ad(h)\mathfrak{m})$$

پس $Ad(h)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. در نتیجه منیفلد همگن $\dfrac{G}{H}$ تحویلی است و تجزیه ای به صورت $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ دارد، چون $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ است پس:

$$F(Ad(h)x) = F(x) \quad , \quad \forall h \in H, x \in \mathfrak{g}$$

$$F(Ad(h)x) = F(x) \quad , \quad \forall h \in H, x \in \mathfrak{m}$$

در نتیجه طبق گزاره ۲.۲.۳ متر فینسلری G ناوردای روی $\dfrac{G}{H}$ را داریم و اثبات کامل است. $\square$

فصل ۴

ژئودزیک ها و انحنای پرچمی

۱.۴ مقدمه

مطالعه ساختارهای ناوردا روی گروه های لی و فضاهای همگن مسئله مهمی در هندسه دیفرانسیل است. گروههای لی، یکی از جالبترین مثال های منیفلدها هستند و فضاهایی مناسب برای بررسی حدسیات موجود می باشند. از طرف دیگر در میان مترهای ناوردا، دو سو ناوردا ها از ساده ترین انواع هستند که دارای خواص هندسی ساده و زیبایی هستند.

ما در این فصل ابتدا توصیفی از مترهای فینسلری دو سو ناوردا روی گروههای لی می آوریم و سپس ژئودزیک ها و انحنای پرچمی این مترها و مترهای فینسلری ناوردا روی منیفلد های همگن را محاسبه می کنیم سپس در حالت خاص به بررسی مترهای فینسلری غیر ریمانی پرداخته و مثال هایی در این مورد بیان می کنیم.

۲.۴ مترهای فینسلری دوسو ناوردا روی گروه های لی

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید G یک گروه لی همبند با جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد. تابع فینسلری $F : TG \longrightarrow R_+$ روی گروه لی G ناوردای چپ نامیده می شود هرگاه:

$$F(x,y) = F(L_a(x), L_{a*x}(y)) \quad ,\forall a,x \in G, \quad y \in T_xG$$

که در آن

$$L_a : G \longrightarrow G$$

$$L_a(x) = ax$$

و به طور مشابه، یک متر فینسلری روی گروه لی G ناوردای راست است هرگاه $R_a : G \longrightarrow G$ ، یک ایزومتری باشد [۲۱] .

فرض کنید G یک گروه لی باشد، می توانیم G را به صورت منیفلد همگن $\frac{G}{H}$ بنویسیم که در آن $H = e$ و عمل را انتقال چپ روی G در نظر بگیریم:

$$L : G \times \frac{G}{H} \longrightarrow \frac{G}{H}$$

$$g_1(g_2H) \longmapsto (g_1g_2)H$$

پس طبق قضیه ۱.۲.۳ برای هر نرم مینکوفسکی بر $\mathfrak{g}$ می توانیم یک متر فینسلری ناوردای چپ روی G تعریف کنیم.

حال اگر عمل مورد نظر را انتقال راست در نظر بگیریم، این تناظر بین نرم مینکوفسکی بر $\mathfrak{g}$ و متر فینسلری ناوردای راست روی G وجود دارد. اما هدف ما در اینجا بررسی متر های فینسلری دوسو ناورداست، برای اینکار گروه حاصلضربی $G \times G$ و زیر گروه آن به صورت:

$$G^* = \{(g, g) \in G \times G | g \in G\}$$

را در نظر می گیریم، که در آن $\frac{G \times G}{G^*}$ تحت نگاشت زیر با G ایزومورف است:

$$\frac{G \times G}{G^*} \longrightarrow G$$

$$(g_1, g_2)G^* \longmapsto g_1g_2^{-1}$$

بنابر این تحت این ایزومورفیسم یک متر فینسلری روی G دوسو ناورداست اگر و فقط اگر متر فینسلری متناظر آن روی $\frac{G \times G}{G^*}$ ، $G \times G$ ناوردا باشد.

با در نظر گرفتن تجزیه زیر، $\frac{G \times G}{G^*}$ یک منیفلد همگن تحویلی خواهد بود:

$$(x, y) = (\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x + y)) + (\frac{1}{2}(x - y), -\frac{1}{2}(x - y))$$

در نظر می گیریم:

$$\mathfrak{h} = \{(x,x) \in \mathfrak{g}+\mathfrak{g} | x \in \mathfrak{g}\} \quad , \quad \mathfrak{m} = \{(x,-x) \in \mathfrak{g}+\mathfrak{g} | x \in \mathfrak{g}\}$$

گزاره ۲.۲.۴. فرض کنید G یک گروه لی همبند باشد، یک تناظر یک به یک بین مترهای فینسلری دوسو ناوردا روی G و نرم مینکوفسکی F بر $\mathfrak{m}$ چنانکه $\{\mathfrak{g}+\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, F\}$ جفت لی مینکوفسکی باشد وجود دارد.

اثبات. طبق آنچه گفتیم تناظر یک به یک بین مترهای فینسلری دوسو ناوردا روی G و مترهای فینسلری $G \times G$ ناوردا روی منیفلد همگن تحویلی $\frac{G \times G}{G^*}$ وجود دارد و طبق قضیه ۴.۲.۳ این متر متناظر با نرم مینکوفسکی F بر $\mathfrak{m}$ است چنانچه $\{\mathfrak{g}+\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, F\}$ جفت لی مینکوفسکی باشد که در آن $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{h}$ به صورت زیر می باشند:

$$\mathfrak{h} = \{(x,x) \in \mathfrak{g}+\mathfrak{g} | x \in \mathfrak{g}\} \quad , \quad \mathfrak{m} = \{(x,-x) \in \mathfrak{g}+\mathfrak{g} | x \in \mathfrak{g}\}$$

$\square$

تعریف ۳.۲.۴. فرض کنید $\mathfrak{g}$ یک جبر لی حقیقی و F یک نرم مینکوفسکی بر $\mathfrak{g}$ باشد، سپس $\{\mathfrak{g}, F\}$ جبر لی مینکوفسکی نامیده میشود اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$g_y\left([x,u], v\right) + g_y\left(u, [x,v]\right) + ۲C_y\left([x,y], u, v\right) = ۰ \quad , \quad \forall x,u,v \in \mathfrak{g}, \quad y \in \mathfrak{g} \setminus \{۰\}$$

گزاره ۴.۲.۴. فرض کنید $\mathfrak{g}$ و $\mathfrak{h}$ و $\mathfrak{m}$ بصورت تعریف شده در قبل باشد، آنگاه نرم مینکوفسکی F بر $\mathfrak{m}$ چنان موجود است که $\{\mathfrak{g}+\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, F\}$ جفت لی مینکوفسکی است اگر و فقط اگر نرم مینکوفسکی بر $\mathfrak{g}$ چنان موجود باشد که $\{\mathfrak{g}, F\}$ جبر لی مینکوفسکی باشد.

اثبات. فرض می کنیم نرم مینکوفسکی F بر $\mathfrak{m}$ چنان موجود باشد که $\{\mathfrak{g}+\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, F\}$ جفت لی مینکوفسکی باشد، طبق قضیه قبل این متناظر است با متر فینسلری دوسو ناوردا روی G و طبق قضیه ۱.۲.۳ این متناظر با نرم مینکوفسکی F بر جبر لی $\mathfrak{g}$ خواهد بود، پس کافی است نشان دهیم $\{\mathfrak{g}, F\}$ جبر لی مینکوفسکی است.

طبق ایزومتری های $\sigma : (x,x) \longmapsto x$ و $\tau : (x,-x) \longmapsto x$، $\mathfrak{g}$ با $\mathfrak{h}$ و $\mathfrak{m}$ ایزومورف است، در نتیجه با استفاده از رابطه زیر:

$$g_y\left(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\left(x\right)u,v\right)+g_y\left(u,ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\left(x\right)v\right)+۲C_y\left(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\left(x\right)\left(y\right),u,v\right)=۰$$

$$\forall y(\neq ۰), u,v\in\mathfrak{m}, x\in\mathfrak{h}$$

خواهیم داشت:

$$g_y\left(\left[x,u\right],v\right)+g_y\left(u,\left[x,v\right]\right)+۲C_y\left(\left[x,y\right],u,v\right)=۰,\quad \forall x,u,v\in\mathfrak{g}, y\in\mathfrak{g}\setminus\{۰\}$$

□

قضیه ۵.۲.۴. فرض کنید G یک گروه لی همبند باشد. آنگاه یک متر فینسلری ناوردا روی G وجود دارد اگر و تنها اگر نرم مینکوسکی F بر جبر لی $\mathfrak{g}$ چنان موجود باشد که $\{\mathfrak{g},F\}$ یک جبر لی مینکوفسکی باشد.

اثبات. طبق گزاره ۲.۲.۴ داریم اگر G یک گروه لی همبند باشد، آنگاه تناظر یک به یک بین مترهای فینسلری دوسو ناوردا روی G و نرم مینکوفسکی F بر $\mathfrak{m}$ چنان موجود است که $\{\mathfrak{g}+\mathfrak{g},\mathfrak{h},F\}$ جفت لی مینکوفسکی باشد و طبق گزاره ۴.۲.۴ نرم مینکوفسکی F بر $\mathfrak{m}$ که $\{\mathfrak{g}+\mathfrak{g},\mathfrak{h},F\}$ جفت لی مینکوفسکی است متناظر است با نرم مینکوفسکی F بر $\mathfrak{g}$ که $\{\mathfrak{g},F\}$ جبر لی مینکوفسکی است. در نتیجه یک متر فینسلری دوسو ناوردا بر G وجود دارد اگر و فقط اگر نرم مینکوفسکی F بر $\mathfrak{g}$ چنان موجود باشد $\{\mathfrak{g},F\}$ جبر لی مینکوفسکی باشد. □

مثال ۶.۲.۴. فرض کنید $(\mathfrak{g},\sigma,F)$ یک جبر لی متقارن مینکوفسکی باشد که در آن $\mathfrak{g}$جبر لی حقیقی، σیک ایزومتری تضامنی از$\mathfrak{g}$ نسبت به تجزیه کانونی $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ و Fیک نرم مینکوفسکی بر$\mathfrak{m}$ با شرط زیر باشد:

$$g_y([x,u],v)+g_y(u,[x,v])+۲C_y([x,y],u,v)=۰\quad,\quad\forall y(\neq ۰),u,v\in\mathfrak{m},x\in\mathfrak{h}$$

پس می توان دید که $(\mathfrak{m},ad,F)$ یک نمایش از $\mathfrak{h}$ است وقتی که ad نمایش $\mathfrak{h}$ روی $\mathfrak{m}$ است.

گزاره ۷.۲.۴. فرض کنید G یک گروه لی با جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد. اگر (V,ρ,F) یک نمایش مینکوفسکی از G باشد، آنگاه $(V,d\rho,F)$ نمایش مینکوفسکی از $\mathfrak{g}$ خواهد بود. و برعکس اگر (V,ϕ,F) نمایش مینکوفسکی بر $\mathfrak{g}$ باشد و G همبند باشد، آنگاه یک نمایش مینکوفسکی (V,ρ,F) از G داریم که: $\phi = d\rho$.

۳.۴ ژئودزیک ها و انحنای پرچمی مترهای فینسلری ناوردا

در حالت کلی توصیف دقیق التصاق ها، ژئودزیک ها و انحنای پرچمی متر های فینسلری کار دشواری است. اما برای مثال های خاص از مترهای فینسلری ناوردا روی منیفلدهای همگن یا مترهای فینسلری دوسو ناوردا روی گروههای لی ما می توانیم فرمولی صریح بدست بیاوریم.

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنید $\frac{G}{H}$ منیفلد همگن با یک متر ریمانی ناوردای g باشد. $\frac{G}{H}$ را به طور طبیعی تحویلی گوئیم هرگاه یک تجزیه $Ad(H)-$ ناوردای $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ چنان موجود باشد که:

$$B_1\left(x,[z,y]_{\mathfrak{m}}\right)+B_1\left([z,x]_{\mathfrak{m}},y\right)=0, \quad \forall x,y,z\in\mathfrak{m}$$

که در آن B_1 فرم دو خطی القا شده به وسیله g بر $\mathfrak{m}$ و $[,]_{\mathfrak{m}}$ تصویر $\mathfrak{m}$ با توجه به تجزیه $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ می باشد.

منیفلد همگن $\frac{G}{H}$ با متر فینسلری ناوردای F به طور طبیعی تحویلی نامیده می شود اگر متر ریمانی ناوردای g بر $\frac{G}{H}$ چنان موجود باشد که $(\frac{G}{H},g)$ به طور طبیعی تحویلی باشد و التصاق های g و F یکسان باشند.

گزاره ۲.۳.۴. فرض کنید G یک گروه لی با یک متر فینسلری دوسو ناوردای F باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \frac{1}{2}[X,Y] \quad , \quad \forall X,Y\in\mathfrak{g}\\ R(X,Y)Z &= -\frac{1}{4}[[X,Y],Z] \quad , \quad \forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}\end{aligned}$$

فرض کنید (P,Y) یک پرچم در $\mathfrak{g}$ باشد بطوریکه (Y,U) پایه ای از P است، آنگاه انحنای پرچمی پرچم (P,Y) به صورت :

$$K(P,Y)=\frac{1}{4}\frac{g_Y([U,Y],[U,Y])}{g_Y(Y,Y)g_Y(U,U)-g_Y(Y,U)^2}$$

خواهد بود و ژئودزیک های G با شروع از e ، زیر گروه های یک پارامتری از G خواهند بود [۲۱] .

قضیه ۳.۳.۴. فرض کنید $\frac{G}{H}$ یک منیفلد همگن با یک متر فینسلری ناوردای F باشد چنانکه $\left(\frac{G}{H}, F\right)$ به طور طبیعی تحویلی با تجزیه ای به صورت $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ باشد. سپس:

(۱) ژئودزیک های $\frac{G}{H}$ در ۰ به صورت زیر است:

$$\exp(tx)\cdot ۰ \quad , \quad \forall x \in \mathfrak{m}$$

(۲) تانسور انحنای F هست:

$$(R(x,y)z)_۰ = \frac{۱}{۴}[x,[y,z]_\mathfrak{m}]_\mathfrak{m} - \frac{۱}{۴}[y,[x,z]_\mathfrak{m}]_\mathfrak{m} - \frac{۱}{۲}[[x,y]_\mathfrak{m},z]_\mathfrak{m} - \left[[x,y]_\mathfrak{h},z\right] \quad , \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{m}$$

(۳) فرض کنید $y \in \mathfrak{m}$ و P یک صفحه در $\mathfrak{m}$ حاوی y باشد. سپس انحنای پرچمی پرچم (P,y) هست:

$$K(P,y) = -\frac{۱}{۴}g_y\left([u,[v,u]_\mathfrak{m}]_\mathfrak{m}, v\right) - \frac{۱}{۲}g_y\left([[v,u]_\mathfrak{m},u]_\mathfrak{m}, v\right) - g_y\left(\left[[v,u]_\mathfrak{h},u\right]_\mathfrak{m}, v\right)$$

وقتی $u = \frac{y}{\sqrt{g_y(y,y)}}$ و u,v یک پایه یکا متعامد از P نسبت به g_y هست.

اثبات. اثبات ۱.فرض می کنیم $\frac{G}{H}$ یک منیفلد همگن به طور طبیعی تحویلی باشد، طبق قضیه داریم، هر فضای همگن تحویلی $\frac{G}{H}$ یک التصاق خطی G ناوردای بی تاب می پذیرد که ژئودزیک های آن به صورت التصاق کانونی است، در نتیجه ژئودزیک های $\frac{G}{H}$ به صورت التصاق کانونی می باشد. از طرف دیگر داریم برای التصاق های کانونی، هر ژئودزیک با شروع از صفر به فرم $f_t(۰)$ است که در آن

$$f_t = \exp tx \quad , \quad \forall x \in \mathfrak{m}$$

پس ژئودزیک های $\frac{G}{H}$ حول صفر به صورت زیر خواهند بود:

$$\exp tx \cdot ۰ \quad , \quad x \in \mathfrak{m}$$

اثبات ۲. طبق آنجه در فصل یک گفتیم داریم:

فرض کنید P یک $G-$ ساختار K ناوردا روی یک فضای همگن تحویلی $M = \dfrac{K}{H}$ با تجزیه ای به صورت $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ باشد،

آنگاه یک تناظر یک به یک بین مجموعه التصاق های خطی $K-$ ناوردا بر P و مجموعه نگاشت های خطی $\Lambda_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{g}$

موجود است چنانچه:

$$\Lambda_{\mathfrak{m}}(adh(x)) = ad(\lambda(h)(\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)))$$

وقتی که λ نمایش ایزوتروپی های خطی $G \longrightarrow H$ است و

$$\Lambda(X) = \begin{cases} \lambda(X) & ; x \in \mathfrak{h} \\ \Lambda_{\mathfrak{m}}(x) & ; x \in \mathfrak{m} \end{cases}$$

و همچنین تانسور انحنای التصاق خطی ناوردای متناظر با $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ در ناحیه صفر به صورت زیر است:

$$R(X,Y)_{\circ} = [\Lambda_{\mathfrak{m}}(x), \Lambda_{\mathfrak{m}}(y)] - \Lambda_{\mathfrak{m}}([x,y]_{\mathfrak{m}}) - \lambda([x,y]_{\mathfrak{h}}) \quad , \quad \forall x, y \in \mathfrak{m}$$

و داریم:

$$\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)y = \frac{۱}{۲}[x,y]_{\mathfrak{m}} \quad \forall x, y \in \mathfrak{m}$$

پس در اینجا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (R(x,y)z)_{\circ} &= [\Lambda_{\mathfrak{m}}(x), \Lambda_{\mathfrak{m}}(y)]z - \Lambda_{\mathfrak{m}}([x,y]_{\mathfrak{m}})z - \lambda([x,y]_{\mathfrak{h}})z \\ &= (\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)\Lambda_{\mathfrak{m}}(y))z - (\Lambda_{\mathfrak{m}}(y)\Lambda_{\mathfrak{m}}(x))z - \frac{۱}{۲}[[x,y]_{\mathfrak{m}}, z]_{\mathfrak{m}} - \lambda([x,y]_{\mathfrak{h}})z \\ &= \frac{۱}{۲}\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)[y,z]_{\mathfrak{m}} - \frac{۱}{۲}\Lambda_{\mathfrak{m}}(y)[x,z]_{\mathfrak{m}} - \frac{۱}{۲}[[x,y]_{\mathfrak{m}}, z]_{\mathfrak{m}} - ad([x,y]_{\mathfrak{h}})z \\ &= \frac{۱}{۴}[x,[y,z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{۱}{۴}[y,[x,z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{۱}{۲}[[x,y]_{\mathfrak{m}}, z]_{\mathfrak{m}} - [[x,y]_{\mathfrak{h}}, z] \end{aligned}$$

اثبات۳. داریم $P = Span\{u, v\}$ پس:

$$K(p,y)=K(u,v)=\frac{R(u,v,v,u)}{g_y(u,u)g_y(v,v)-g_y(u,v)^{۲}}$$

[۴] که چون u و v پایه های یکا متعامد نسبت به g_y هستند، پس با توجه به اینکه $g_y(u,u)=g_y(v,v)=۱$ و $g_y(u,v)=۰$ پس خواهیم داشت:

$$k(p,y)=K(u,v)=R(u,v,v,u)=g_y(R(u,v)v,u)$$

و با جایگذاری مقدار R از قسمت قبل خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}k(p,y)=g_y(R(u,v)v,u) &= \frac{۱}{۴}g_y([u,[v,v]_\mathfrak{m}]_\mathfrak{m},u)-\frac{۱}{۴}g_y([u,[u,v]_\mathfrak{m}]_\mathfrak{m},u)\\ &-\frac{۱}{۲}g_y([[u,v]_\mathfrak{m},v]_\mathfrak{m},u)-g_y([[u,v]_\mathfrak{h},v],u)\\ &-\frac{۱}{۴}g_y([u,[u,v]_\mathfrak{m}]_\mathfrak{m},u)-\frac{۱}{۲}g_y([[u,v]_\mathfrak{m},v]_\mathfrak{m},u)-g_y([[u,v]_\mathfrak{h},v],u)\end{aligned}$$

□

۴.۴ مترهای فینسلری غیر ریمانی

در فصل های قبلی ما به بررسی خواص هندسی مترهای فینسلری ناوردا روی فضای همگن $\frac{G}{H}$ پرداختیم.

حال مساله این است که چه مواقعی یک متر فینسلری غیر ریمانی ناوردا بر یک منیفلد همگن داده شده وجود دارد؟

در قضیه زیر جوابی خواص به این سوال می دهیم.

قضیه ۱.۴.۴. فرض کنید $\frac{G}{H}$ یک منیفلد همگن با H فشرده باشد. اگر نمایش الحاقی H بر $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ تحویل ناپذیر نباشد، آنگاه یک متر فینسلری غیر ریمانی ناوردا بر $\frac{G}{H}$ وجود دارد.

اثبات. در اینجا روند بیان شده در [۲۶] را پیش می گیریم.

طبق فرض چون H فشرده است، پس $Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(H)$ یک ضرب داخلی ناوردا می پذیرد و چون $Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(H)$ تحویل ناپذیر نیست پس می توانیم تجزیه ای به صورت زیر برای $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ داشته باشیم:

$$\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} = V_0 + V_1 + ... + V_n$$

که در آن V_0 زیر فضایی از $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ است که برای آن $Ad(H)V_0 = V_0$ و $V_i, i = 1, ..., n$ زیر فضاهایی تحویل ناپذیر ناوردا از $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ می باشند. [۹] حال قضیه را در دو حالت زیر بررسی می کنیم:

اگر $n \geq 1$ ، تعریف می کنیم:

$$F(X) = \sqrt{\mid X \mid^2 + \sqrt[s]{\mid X_0 \mid^{2s} + \mid X_1 \mid^{2s} + ... + \mid X_n \mid^{2s}}}, \quad \forall X \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$$

که در آن | . | نمایانگر فاصله نسبت به $<,>$ و $X = X_0 + X_1 + ... + X_n$ تجزیه X متناظر با تجزیه $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ داده شده در بالاست و s نیز اسکالری بزرگتر از ۲ می باشد. حال نشان می دهیم F نرم مینکوفسکی بر $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ است:

$$F : T\frac{G}{H} \longrightarrow [0, \infty)$$

F روی $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \setminus \{0\}$ هموار است، نشان می دهیم:

$$F(\lambda X) = \lambda F(X) \quad , \quad \forall \lambda \in F, X \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$$

$$\begin{aligned}
F(\lambda X) &= \sqrt{\mid \lambda X \mid^2 + \sqrt[s]{\mid \lambda X_0 \mid^{2s} + \mid \lambda X_1 \mid^{2s} + ... + \mid \lambda X_n \mid^{2s}}}, \forall X \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \\
&= \sqrt{< \lambda X, \lambda X > + \sqrt[s]{< \lambda X_0, \lambda X_0 >^s + ... + < \lambda X_n, \lambda X_n >^s}} \\
&= \sqrt{\lambda^2 < X, X > + \sqrt[s]{\lambda^{2s} < X_0, X_0 >^s + ... + \lambda^{2s} < X_n, X_n >^s}} \\
&= \sqrt{\lambda^2 < X, X > + \lambda^2 \sqrt[s]{< X_0, X_0 >^s + ... + < X_n, X_n >^s}} \\
&= \sqrt{\lambda^2 (< X, X > + \sqrt[s]{< X_0, X_0 >^s + ... + < X_n, X_n >^s})} \\
&= \lambda \sqrt{(< X, X > + \sqrt[s]{< X_0, X_0 >^s + ... + < X_n, X_n >^s})} \\
&= \lambda F(X)
\end{aligned}$$

و فرم دو خطی زیر معین مثبت می باشد:

$$g(V,V) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(y+sv+tv) \mid_{s=t=0} > 0$$

پس F تعریف شده نرم مینکوفسکی بر $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ است. حال نشان می دهیم:

$$F(Ad(h)X) = F(X)$$

طبق [۷] داریم، تناظر یک به یک بین میدان های برداری ناوردا بر $\frac{G}{H}$ و مجموعه

$$\{X \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} | Ad(h)X = X, \quad \forall h \in H\}$$

وجود دارد و همچنین طبق تعریف V_0، $Ad(h)X_0 = X_0$ و

$$\begin{aligned} F(Ad(h)X) &= \sqrt{\mid Ad(h)X \mid^2 + \sqrt[s]{\mid Ad(h)X_0 \mid^{2s} + \mid Ad(h)X_1 \mid^{2s} + ... + \mid Ad(h)X_n \mid^{2s}}}, \quad \forall X \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \\ &= \sqrt{\mid X \mid^2 + \sqrt[s]{\mid X_0 \mid^{2s} + \mid X_1 \mid^{2s} + ... + \mid X_n \mid^{2s}}}, \quad \forall X \in \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \\ &= F(X) \end{aligned}$$

پس شرایط گزاره ۲.۲.۳ برقرار است و این نرم متناظر با متر فینسلری ناوردا بر $\frac{G}{H}$ است که طبق تعریف F این متر ریمانی نیست. حال در نظر می گیریم $n = 0$ پس $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} = V_0$ و در نتیجه $dimV_0 \geq 2$ خواهد بود و چون V_0 زیر فضای $Ad(h)$ ناوردا در نظر گرفته شد، پس هر نرم مینکوفسکی غیر اقلیدسی F_0 بر V_0 که در نظر بگیریم $Ad(h)$ ناورداست، پس طبق گزاره ۲.۲.۳ این نرم متناظر با یک متر فینسلری G ناوردا بر $\frac{G}{H}$ خواهد بود که غیر ریمانی است. □

گزاره ۲.۴.۴. در حالت خاص از قضیه قبل، اگر G یک گروه لی فشرده همبند غیر ساده باشد، آنگاه یک متر فینسلری غیر ریمانی دوسو ناوردا بر G وجود دارد.

۵.۴ مثال ها

مثال ۱.۵.۴. فرض کنید $(\dfrac{G}{H}, g)$ یک فضای متقارن ریمانی تحویل ناپذیر باشد، آنگاه داریم:

-اگر رتبه $\dfrac{G}{H}$ یک باشد، آنگاه هیچ متر فینسلری غیر ریمانی روی آن وجود ندارد.

-اگر رتبه $\dfrac{G}{H} \geq ۲$ ، آنگاه نامتناهی تا متر فینسلری غیر ریمانی ناوردا روی $\dfrac{G}{H}$ موجود است که با هم ایزومورف نیستند و التصاقی به صورت g دارند.

حل

طبق آنچه در فصل اول گفتیم، وقتی رتبه $\dfrac{G}{H}$ یک باشد، هر نرم مینکوفسکی که روی $\dfrac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ در نظر بگیریم اقلیدسی خواهد بود، پس در حالت خاص نیز هر متر فینسلری که در نظر بگیریم ریمانی خواهد بود.

برای قسمت دوم نیز اگر رتبه $\dfrac{G}{H} \geq ۲$ باشد تعداد نا شمارا نرم مینکوفسکی غیر اقلیدسی می توان روی آن تعریف کرد که با هم ایزومورف نبوده و التصاقی به صورت g دارند. در حالت خاص نیز تعداد نا متناهی متر فینسلری غیر ریمانی ناوردا همچون روند اثبات قضیه قبل روی $\dfrac{G}{H}$ می توان پیدا کرد [۱۱] .

مثال ۲.۵.۴. فرض کنید $\dfrac{G}{H}$ یک منیفلد ریمانی کاملا متقارن با بعد ≤ ۲ باشد و $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ تجزیه $\mathfrak{g}$ متناظر با ایزومتری تضامنی از $\dfrac{G}{H}$ حول صفر باشد. فرض کنید $\mathfrak{m}_۱$ زیر فضای سره مخالف صفر از $\mathfrak{m}$ باشد و

$$H_۱ = \{h \in H | Ad(h)X = X, \quad \forall X \in \mathfrak{m}_۱\}$$

آنگاه طبق قضیه قبل متر فینسلری غیر ریمانی ناوردا بر $\dfrac{G}{H_۱}$ وجود دارد [۲۴] .

تعریف ۳.۵.۴. یک کلاف تاری (E, P, M, S) شامل منیفلدهای E و M و S و نگاشت هموار $P : E \longrightarrow M$ است. چنانچه برای هر $x \in M$ همسایگی باز U چنان موجود باشد که $E|_U := P^{-۱}(U)$ با $U \times S$ دیفئومورفیسم باشد. که در آن E فضای کلی، M فضای پایه، P نگاشت تصویر و S تار نامیده می شود. اگر این دیفئومورفیسم به صورت زیر باشد:

$$\psi : E|_U \longrightarrow U \times S$$

(U,ψ) چارت تار نامیده می شود.

مثال ۴.۵.۴. مجموعه ماتریس های متعامد را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$O(n) = \{A \in GL|(n,R); A^T A = I_n\}$$

بوضوح داریم:

$$\forall A \in O(n) \quad ; \quad detA = \pm ۱$$

حال در نظر می گیریم:

$$O(n)^+ = \{A \in O(n); detA = ۱\}$$

$$O(n)^- = \{A \in O(n); detA = -۱\}$$

که $O(n)^+ \cap O(n)^- = \varnothing$ و مجموعه ماتریس های متعامد ویژه را نیز به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$SO(n) = O(n)^+$$

که جبر لی آن، $\mathfrak{so}(n)$ به صورت زیر است:

$$\mathfrak{so}(n) = T_I SO(n) = T_I O(n) = \mathfrak{o}(n) = Sk - Sym_n(R)$$

که در آن $Sk - Sym_n(R)$ مجموعه ماتریس های پادمتقارن روی R است.($A = -A^T$)

حال با در نظر گرفتن $S^n = \dfrac{So(n+۱)}{So(n)}$ که در آن ۲ $\geq n$، داریم:

$$S^n = \frac{So(n+۱)}{So(n)} = \frac{G}{H}$$

آنگاه $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+۱)$ و $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(n)$ و از طرفی طبق [۱۵] داریم اگر $I = \mathfrak{so}(p+q)$ آنگاه:

$$I = u + e$$

که در آن

$$u = \left\{ \begin{pmatrix} X_۱ & ۰ \\ ۰ & X_۳ \end{pmatrix} \middle| X_۱ \in Sk - Sym_p(R), X_۳ \in Sk - Sym_q(R) \right\}$$

و

$$e = \left\{ \begin{pmatrix} ۰ & X_۲ \\ -X_۲^t & ۰ \end{pmatrix} \right\}$$

که در آن $X_۲$ ماتریسی $p \times q$ دلخواه است.

در نتیجه در اینجا مجموعه $\mathfrak{m}$ را به صورت زیر داریم:

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} ۰ & \alpha \\ -\alpha^t & ۰ \end{pmatrix} \middle| \alpha \in R^n \right\} \tag{۱.۴}$$

حال با در نظر گرفتن زیر فضای $\mathfrak{m}_\mathfrak{q}$ از $\mathfrak{m}$ به ازای $۱ \leq q \leq n - ۱$ به صورتی که در رابطه (۱.۴) قرار دهیم

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{n-q} \\ ۰ \end{pmatrix}, \quad \alpha_{n-q} \in R^{n-q}$$

و زیر گروه $So(q)$ از $So(n)$ که تحت $\mathfrak{m}_\mathfrak{q}$ ثابت است و به صورت زیر تعریف می شود :

$$So(q) = \left\{ \begin{pmatrix} I & ۰ \\ ۰ & A \end{pmatrix} \middle| A \in So(q) \right\}$$

پس طبق آنچه که گفتیم متر فینسلری غیرریمانی ناوردا بر $M = \dfrac{So(n+۱)}{So(q)}$ وجود دارد. ما می توانیم ضابطه این متر را بر M به طور صریح بنویسیم. فضای مماس بر M را به صورت زیر به دست می آوریم: طبق آنچه که گفتیم

$$T_I So(n) = \mathfrak{so}(n) = Sk - Sym_n(R)$$

پس در اینجا داریم:

$$V = T(\frac{So(n+۱)}{So(q)}) = \frac{\mathfrak{so}(n+۱)}{\mathfrak{so}(q)}$$

از طرفی طبق [۱۵] می دانیم که:

$$SO(n) = SO(n, \circ) = SO(\circ, n)$$

و همچنین جبر لی مجموعه $SO(p,q)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathfrak{so}(p,q) = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ -X_2^t & X_3 \end{pmatrix} \middle| X_1 \in Sk - Sym_p(R), X_3 \in Sk - Sym_q(R) \right\}$$

و X_2 دلخواه است.

پس در اینجا داریم:

$$\mathfrak{so}(n+1) = A_{n+1 \times n+1}$$

که A ماتریس پاد متقارن است یعنی $A = -A^t$ و

$$\mathfrak{so}(q) = \begin{pmatrix} I_{n-q} & \circ \\ \circ & B_{q\times q} \end{pmatrix}$$

که B ماتریس پاد متقارن است و در نتیجه فضای مماس بر M به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{pmatrix} \beta & \circ & \alpha \\ \circ & \circ & \circ \\ -\alpha^t & \circ & \circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{n-q} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \gamma \\ \circ & -\alpha^t & \circ \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}-\mathfrak{q}), \alpha \in R^{n-q}, \gamma \in R^q \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \beta & \circ & \alpha \\ \circ & \circ & \gamma \\ -\alpha^t & -\gamma^t & \circ \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}-\mathfrak{q}), \alpha \in R^{n-q}, \gamma \in R^q \right\} \end{aligned}$$

حال مجموعه نقاط ثابت از V تحت $So(q)$ $(So(q)V_\circ = V_\circ)$ ، بصورت زیر خواهد بود:

$$V_\circ = \left\{ \begin{pmatrix} \beta & \circ & \alpha \\ \circ & \circ & \circ \\ -\alpha^t & \circ & \circ \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}-\mathfrak{q}), \alpha \in R^{n-q} \right\}$$

و زیر فضاهای ناوردای تحویل ناپذیر تحت $So(q)$ بصورت:

$$V_۱ = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \gamma \\ ۰ & -\gamma^t & ۰ \end{array} \right) \middle| \gamma \in R^q \right\}$$

حال ما ضرب داخلی $So(q)$-ناوردا را روی V به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$< A_۱, A_۲ >= Tr(A_۱^t A_۲), \quad \forall A_۱, A_۲ \in V$$

بنا به قبل داریم:

$$A = A_۱ + A_۲, V = V_۱ + V_۲$$

$$F(A) = \sqrt{< A, A > + \sqrt[s]{< A_۰, A_۰ >^s + < A_۱, A_۱ >^s}}, \quad \forall A \in V, A_۰ \in V_۰, A_۱ \in V_۱$$

$$\begin{aligned}
< A, A > &= Tr(A^t A) \\
&= Tr \left(\begin{array}{ccc} \beta & ۰ & \alpha \\ ۰ & ۰ & \gamma \\ -\alpha^t & -\gamma^t & ۰ \end{array} \right)^t \left(\begin{array}{ccc} \beta & ۰ & \alpha \\ ۰ & ۰ & \gamma \\ -\alpha^t & -\gamma^t & ۰ \end{array} \right) \\
&= Tr \left(\begin{array}{ccc} \beta^t & ۰ & -\alpha \\ ۰ & ۰ & -\gamma \\ \alpha^t & \gamma^t & ۰ \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} \beta & ۰ & \alpha \\ ۰ & ۰ & \gamma \\ -\alpha^t & -\gamma^t & ۰ \end{array} \right) \\
&= Tr \left(\begin{array}{ccc} \beta^t \beta + \alpha\alpha^t & \alpha\gamma^t & \alpha\beta^t \\ \gamma\alpha^t & \gamma\gamma^t & ۰ \\ \alpha^t \beta & ۰ & \alpha\alpha^t + \gamma\gamma^t \end{array} \right) \\
&= (Tr \beta^t \beta) + ۲\alpha\alpha^t + ۲\gamma\gamma^t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
< A_۰, A_۰ > &= Tr(A^t A) \\
&= Tr\begin{pmatrix} \beta & ۰ & \alpha \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -\alpha^t & ۰ & ۰ \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \beta & ۰ & \alpha \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -\alpha^t & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \\
&= Tr\begin{pmatrix} \beta^t & ۰ & -\alpha \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ \alpha^t & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & ۰ & \alpha \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -\alpha^t & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \\
&= Tr\begin{pmatrix} \beta^t\beta + \alpha\alpha^t & ۰ & \alpha\beta^t \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ \alpha^t\beta & ۰ & \alpha\alpha^t \end{pmatrix} \\
&= (Tr\beta^t\beta) + ۲\alpha\alpha^t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
< A_۱, A_۱ > &= Tr(A^t A) \\
&= Tr\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \gamma \\ ۰ & -\gamma^t & ۰ \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \gamma \\ ۰ & -\gamma^t & ۰ \end{pmatrix} \\
&= Tr\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -\gamma \\ ۰ & \gamma^t & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \gamma \\ ۰ & -\gamma^t & ۰ \end{pmatrix} \\
&= Tr\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \gamma\gamma^t & ۰ \\ ۰ & ۰ & \gamma\gamma^t \end{pmatrix} \\
&= ۲\gamma\gamma^t
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow F(A)=\sqrt{(Tr\beta^t\beta)+۲\alpha\alpha^t+۲\gamma\gamma^t+\sqrt[s]{((Tr\beta^t\beta)+۲\alpha\alpha^t)^s+(۲\gamma\gamma^t)^s}}$$

می توانیم M را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$M=\frac{So(n+۱)}{So(q)\times So(p)}\times So(p)$$

که وقتی $p=n+۱-q$ ، طبق تعریف منیفلد گراسمان

$$G_{k,n}(R):=\frac{O(n)}{O(k)\times O(n-k)}$$

[۲] ، M کلاف تاری روی منیفلد گراسمان [۱] به صورت :

$$G_{p,q}(R)=\frac{So(n+۱)}{So(q)\times So(p)}$$

با تار $So(p)$ خواهد بود.

[۱]Grassmannian manifold

مراجع

[1] M. Abate, G. Patrizio, (1994). "Finsler Metrics A Global Approach", Springer-verlag Berlin Heidelberg.

[2] A. Baker, (2001). "Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory", Springer Under granduate Mathematics Series.

[3] D. Bao, S.S.Chern, Z.Shen, (2000). "An Introduction to Riemann-Finsler Geometry", New York: Springer.

[4] SS. Chern, Z. Shen, (2004). "Riemann-Finsler Geometry", Singapore :World Scientific.

[5] S. Deng, Z. Hou, (2004). "Invariant Finsler Metrics on Homogeneous Manifold", J. Phy. A 37, 8245-8253.

[6] S. Deng, Z. Hou, (2006). "Invariant Finsler Metrics on Homogeneous Manifold2: Complex Structures", J. Phy. A: Math. Gen. 39. 2599-2609.

[7] S. Deng, Z. Hou, (2004). "Invariant Randers Metrics on Homogeneous Riemannian Manifold", J. Phy. A: Math. Gen. 37. 4353-60

[8] S. Deng, Z. Hou, (2005). "Minkowski Symmetric Lie Algebras and Symmetric Berwald Spaces", Geometriae Dedicate 113: 95-105.

[9] S. Deng, Z. Hou, (2009). "Naturally Reductive Homogeneous Finsler Spaces ", Manuscripta Math. 131 215-229.

[10] S. Deng, Z. Hou, (2007). "On Symmetric Finsler Spaces ", Isreal J. Math. 162 197-219.

[11] S. Deng, Z. Hou, (2008). "Positive Definite Minkowski Lie algebras and Bi-Invariant Finsler Metrics on Lie Groups", Geom Dedicata 136 191-201.

[12] S. Deng, Z. Hou, (2002). "The group of isometries of a Finsler space", Pac. J. Math. 207(1), 149-155 .

[13] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontanie, (2000). "Riemannian Geometry", Springer Berlin Heidelberg New York 1987, 1990, 2004.

[14] R. Chavosh Khatamy, R. Esmaili, (2011). "On Globally Symmetric Finsler Spaces", Mathematical Sciences Quaterly Journal.5(3), 299-305.

[15] S Helgason, (1978). "Differential Geometry, Lie groups and symmetric space ", Academic Press, New York.

[16] S. Kobayashi, K. Nomizu, (1969). ”Foundations of Differential Geometry” Vol1, New York: Interscience .

[17] S. Kobayashi, K. Nomizu, (1969). ”Foundations of Differential Geometry” Vol2, New York: Interscience .

[18] D. Latifi, (2007). ”Homogeneous Geodesics in Homogeneous Finsler Spaces”, J. Geom. Phys. 57 1421-1433.

[19] D. Latifi, (2007). ”Homogeneous Geodesics of Left Invariant Finsler Spaces”, .

[20] D. Latifi, A. Razavi, (2004). ”A Symmetric Finsler Space Wite Chern Connection”, Procee Dings of the 3rd Seminar on Geometry and Topology, Azerb. univ. Tarbiat Moallem, Tabriz, 231.

[21] D. Latifi, A. Razavi, (2011). ”Bi-Invariant Finsler Metrics on Lie Groups”, Australian Journal of Basic and Applied Sciences 5(12) 507-511.

[22] D. Latifi, A. Razavi, (2006). ”On Homogeneous Finsler Spaces”, Rep. Math. Phys, 57 357-366 .

[23] J. M. Lee, (1997). ”Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature”, Springer-Verlag New York. Inc.

[24] P. Michor, (2006). ”Topics in Defferential Geometry”,Graduate Studies in Mathematics, Vol 93.

[25] G. Munteanu, (2004). ”Complex Spaces in Finsler, Lagrange and Hamilton Geometries”, kluwer Academic Publishers.

[26] Z.I. Szabo, (1981). ”Positive Definite Berwald Spaces Tensor”, N S 35 25-39.

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الحاق	Adjoint
التصاق	Connection
التصاق چرن	Chern connection
التصاق لویی چیتا	Levi-Civita connection
انحنای برشی	Sectional curvature
انحنای پرچمی	Flag curvature
ایزومتری	Isometry
ایزومتری تضامنی	Involutive isometry
براکت لی	Lie bracket
پاد متقارن	Skew Symmetric
به طور سراسری متقارن	Globally symmetric
به طور طبیعی تحویلی	Naturally reductive
به طور موضعی متقارن	Locally symmetric
تاب آزادی	Torsion freeness
تار	Fibre
تانسور	Tensor
تانسور انحنا	Curvature tensor
تانسور تاب	Torsion tensor
تانسور کارتان	Cartan tensor
تحویل نا پذیر	Irreducible
تحویلی	Reductive
تخت	Flat
تضامنی	Involutive
جبر لی	Lie algebra
جبر لی مینکوفسکی	Minkowski Lie algebra
جفت لی مینکوفسکی	Minkowski Lie pair
چارت	Chart
خطی	Linear
دو خطی	Bilinear
دو سو ناوردا	Bi-invariant
رتبه	Rank
زیر ریمانی	Sub-riemannian

ژئودزیک .... Geodesic
سازگاری .... Compatibility
شبه ریمانی .... Pseudo-riemannian
فضای خارج قسمتی .... Quotient space
فضای همگن .... Homogeneous space
کلاف تاری .... Fibre bundle
کلاف مماس .... Tangent bundle
کنج خطی .... Linear Frame
گروه ایزوتروپی خطی .... Linear isotropy group
گروه لی .... Lie group
ماتسوموتو .... Matsumoto
متر بروالد .... Berwald metric
متر راندرز .... Randers metric
متر ریمانی .... Riemannian metric
متر فینسلری .... Finsler metric
متر لرنتز .... Lorentz metric
متقارن .... Symmetric
مشتق کواریانت .... Covariant derivative
مشتق لی .... Covariant defferentiation
منیفلد .... Manifold
منیفلد گراسمان .... Grassmannian manifold
ناوردا .... Invariant
نرم مینکوفسکی .... Minkowski norm
نمایش .... Representation
نمایش ایزوتروپی خطی .... Linear isotropy representation
یکا متعامد .... Orthonormal

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjoint .... الحاق
Berwald metric .... متر بروالد
Bi-invariant .... دو سو ناوردا
Bilinear .... دو خطی
Cartan tensor .... تانسور کارتان
Chart .... چارت
Chern connection .... التصاق چرن
Compatibility .... سازگاری
Connection .... التصاق
Covariant derivative .... مشتق کواریانت
Curvature tensor .... تانسور انحنا
Fibre .... تار
Fibre bundle .... کلاف تاری
Finsler metric .... متر فینسلری
Flag curvature .... انحنای پرچمی
Flat .... تخت
Geodesic .... ژئودزیک
Globally symmetric .... به طور سراسری متقارن
Grassmannian manifold .... منیفلد گراسمان
Homogeneous space .... فضای همگن
Invariant .... ناوردا
Involutive .... تضامنی
Involutive isometry .... ایزومتری تضامنی
Irreducible .... تحویل نا پذیر
Isometry .... ایزومتری
Levi-Civita connection .... التصاق لویی چیتا
Lie algebra .... جبر لی
Lie bracket .... براکت لی
Lie defferentiation .... مشتق لی
Lie group .... گروه لی
Linear frame .... کنج خطی
Linear isometry group .... گروه ایزومتری خطی

Linear isometry representation	نمایش ایزومتری خطی
Lie group	گروه لی
Locally symmetric	به طور موضعی متقارن
Lorentz metric	متر لرنتز
Manifold	منیفلد
Matsumoto	ماتسوموتو
Minkowski Lie algebra	جبر لی مینکوفسکی
Minkowski Lie pair	جفت لی مینکوفسکی
Minkowski norm	نرم مینکوفسکی
Naturally reductive	به طور طبیعی تحویلی
Orthonormal	یکا متعامد
Pseudo-riemannian	شبه ریمانی
Quotient space	فضای خارج قسمتی
Randers metric	متر راندرز
Rank	رتبه
Reductive	تحویلی
Representation	نمایش
Riemannian metric	متر ریمانی
Sectional curvature	انحنای برشی
Sub-riemannian	زیر ریمانی
Skew symmetric	پاد متقارن
Symmetric	متقارن
Tangent bundle	کلاف مماس
Tensor	تانسور
Torsion freeness	تاب آزادی
Torsion tensor	تانسور تاب

Abstract

In this thesis, we study invariant finsler metrics on homogeneous manifolds.
We first express preparations about homogeneous and symmetric Riemannian and Finsler structure and then give a description of invariant finsler metrics on homogeneous manifold and abtain a necessary and sufficient condition for a homogeneous manifold to have these metrics. as a special case, we study a necessary and sufficient condition for a lie group to have bi-invariant finsler metrics. Finally, we provide some condition for a homogeneous manifold to admit a invariant non-Riemannian Finsler metrics and present some interesting examples.

Keywords: *Finsler metric, Minkowski norm, homogeneous space, Lie algebra, Lie group.*

Shahrood University of Technology

Facualty of Methematical Sciences

Department of Mathematics

M.Sc. Thesis

Invariant Finsler Metrics on Homogeneous Manifolds

By:

Somaye Ghallasi

Supervisor:
Professor Kamran Sharifi
Professor Hamid Reza Salimi Moghaddam

September 2012