



دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

عنوان

بررسی نامساوی‌هایی برای چند جمله‌ای‌های
خود معکوس

نگارش

هاجر بدرزاده

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

کلیه حقوق اعم از چاپ و تکثیر، نسخه برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان نامه برای دانشگاه صنعتی شاهرود محفوظ است.
نقل مطالب با ذکر مأخذ آزاد است.

صفحه تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر احمد زیره، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همراه زندگی ام حسام الدین معصومی و برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

چکیده

یکی از چندجمله‌ای‌های مشهور در آنالیز مختلط، چندجمله‌ای خودمعکوس می‌باشد. بنابر اصل ماکزیمم قدرمطلق و نامساوی برنشتاین بر روی مشتق چندجمله‌ای مثلثاتی، می‌توان نامساوی‌هایی برای چندجمله‌ای‌های مختلط بدست آورد. در این پایان نامه تلاش می‌شود، تقریبی برای ماکزیمم قدرمطلق چندجمله‌ای‌های خودمعکوس، با در نظر گرفتن موقعیت صفرها، ارائه شود و همچنین شرایط کافی را بیان کرده که صفرهای چندجمله‌ای خودمعکوس درون دایره واحد قرار بگیرد.

واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای خودمعکوس-اصل ماکزیمم قدرمطلق-نامساوی برنشتاین-ریشه-تعمیم دادن-کران-مشتق چندجمله‌ای-نامساوی‌ها

پیشگفتار

فرض می‌کنیم $P(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد. از آنجایی که چندجمله‌ای‌ها، نقش مهمی در هر شاخه‌ای از ریاضیات دارند در این پایان نامه نوع خاصی از چندجمله‌ای‌ها را بررسی می‌کنیم که در شرط $P(z) = uQ(z)$ ، که در آن $|u| = 1$ و $Q(z) = z^n \overline{P(\frac{1}{\bar{z}})}$ صدق کنند. فراپیر، رحمان و راجویا چنین چندجمله‌ای‌هایی را، چندجمله‌ای‌های خود معکوس نامیدند. این چندجمله‌ای‌ها و توابع وابسته به آنها به مدت ۳۰ سال مورد مطالعه و بررسی پژوهشگران قرار گرفتند و توسط بزرگانی چون عزیز، زرگر، رحمان، لاکاتوس، گویل، ریولین، فراپیر، راجویا، کیم، آنکنی و لکس تلاشهای گسترده‌ای در جهت بدست آوردن نامساوی‌هایی برای چنین چندجمله‌ای‌ها و همچنین تخمین ماکزیمم قدرمطلق آنها بر روی دایره‌ی واحد، صورت گرفته است. ما نیز با ارائه این پایان نامه گامی در جهت تعمیم و بهبود آنها برمی‌داریم. برای این منظور، سعی می‌کنیم نامساوی‌هایی برای چندجمله‌ای‌های خود معکوس بدست آوریم و ماکزیمم قدر مطلق آنها را تخمین بزنیم. ابتدا رشد ماکزیمم قدرمطلق چندجمله‌ای‌های مختلط را بیان و سپس با توجه به آن، نامساوی‌های مشابهی برای رده چندجمله‌ای‌های ρ_n بدست می‌آوریم. در این راستا، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در فصل دوم با ارائه ۳ بخش، ماکزیمم قدر مطلق چند جمله‌ای‌های خودمعکوس را بررسی می‌کنیم و در فصل سوم، ریشه‌های از چندجمله‌ای‌های خودمعکوس را تخمین می‌زنیم. در فصل چهارم با ارائه دو بخش، به بررسی نامساوی‌های L^p برای چندجمله‌ای‌های خودمعکوس می‌پردازیم.

فهرست مطالب

۱	پیش نیازها و تعاریف مقدماتی
۱	۱.۱ نماد گذاری و تعاریف
۳	۲.۱ قضایای مقدماتی
۵	۲ ماکزیمم قدر مطلق چند جمله‌ای‌های خود معکوس
۵	۱.۲ ماکزیمم قدر مطلق چند جمله‌ای‌های خود معکوس بر روی دایره واحد
۱۱	۲.۲ بررسی چند جمله‌ای‌های خود معکوس که به رده $\prod_n$ تعلق دارند
۱۶	۳.۲ تعمیم نامساوی برنشتاین در رابطه با ماکزیمم قدر مطلق چند جمله‌ای‌ها و مشتق آن‌ها
۲۹	۳ ریشه‌های چند جمله‌ای‌های خود معکوس
۲۹	۱.۳ ریشه‌هایی از خانواده چند جمله‌ای خود معکوس
۳۶	۲.۳ بررسی چند جمله‌ای مینیمال بر یک نقطه روی دایره واحد
۴۵	۴ نامساوی‌های L^p برای چند جمله‌ای‌های خود معکوس
۴۵	۱.۴ میانگین انتگرالی برای مشتق چند جمله‌ای‌های خود معکوس
۵۴	۲.۴ میانگین انتگرالی برای چند جمله‌ای‌های خود معکوس بر روی $ z = R$ هنگامی که $R \rightarrow \infty$
۶۴	مراجع
۶۶	فهرست الفبایی
۶۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۶۹	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فصل ۱

پیش نیازها و تعاریف مقدماتی

در این فصل تعاریف و مفاهیم مقدماتی و چند قضیه پایه، آورده شده است.

۱.۱ نماد گذاری و تعاریف

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می شود.

$\mathbb{R}$: مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{C}$: مجموعه اعداد مختلط

U : دایره یکه

P_n : رده تمام چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر n

ρ_n : رده تمام چندجمله‌ای‌های خود معکوس از درجه n

این بخش شامل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصول بعد می باشد.

تعریف ۱.۱.۱. یک چندجمله‌ای باضرایب مختلط، چندجمله‌ای مختلط نام دارد.

تعریف ۲.۱.۱. چندجمله‌ای

$$T(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + i \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

با $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ چندجمله‌ای مثلثاتی^۱ مختلط از درجه n نامیده می شود. چندجمله‌ای‌های مثلثاتی را می توان بصورت نمایی زیر نشان داد.

$$T(x) = \sum_{-N}^N c_n e^{inx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

تعریف ۳.۱.۱. چندجمله‌ای $P(z) = \sum_{i=1}^n a_i z^i$ ($a_n \neq 0$) چندجمله‌ای خود معکوس^۲ نامیده می شود اگر داشته باشیم

$$P(z) = uQ(z) \quad , \quad |u| = 1$$

جایی که

$$Q(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

تعریف ۴.۱.۱. تابع f در z تحلیلی گفته می شود هرگاه در یک همسایگی z مشتق پذیر باشد.

تعریف ۵.۱.۱. مجموعه X در $\mathbb{R}^n$ محدب نامیده می شود، هرگاه به ازای هر دو نقطه دلخواه x_1 و x_2 متعلق به X ، و هر

$\lambda \in (0, 1)$ داشته باشیم

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$$

در اصطلاح گفته می شود $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$ ترکیب محدبی از x_1 و x_2 است.

^۱Trigonometric polynomials

^۲self inversive

تعریف ۶.۱.۱. چندجمله‌ای مینیمال^۳ از عدد جبری α ، چندجمله‌ای تحویل ناپذیر و منحصر بفردی مانند $f(z)$ است با کوچکترین درجه به‌طوری که $f(\alpha) = 0$.

۲.۱ قضایای مقدماتی

در این بخش چند قضیه پایه‌ای از آنالیز مختلط را که در فصول بعدی مورد نیاز است، آورده ایم.

قضیه ۱.۲.۱. (اساسی جبر) اگر $P(z) = \sum_{i=1}^n a_i z^i$ ($a_n \neq 0$) چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد آن‌گاه $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ چنان موجودند به طوری که

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

که z_i ها لزوماً متمایز نیستند.

قضیه ۲.۲.۱. (روشه^۴) فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی خم ساده بسته C تحلیلی باشند و بر C ، $|g(z)| < |f(z)|$ آنگاه توابع $f(z)$ و $f(z) + g(z)$ درون C تعداد صفرهای برابر دارند.

قضیه ۳.۲.۱. (اصل ماکزیمم قدر مطلق) اگر $f(z)$ در میدان کراندار D تحلیلی و بر بستر آن، $\overline{D}$ پیوسته باشد، آن‌گاه $|f(z)|$ ماکزیممی بر مرز D دارد. به علاوه در نقاط درونی ماکزیمم ندارد، مگر اینکه تابع ثابت باشد.

قضیه ۴.۲.۱. (اینشترم-کاکیا^۵) اگر $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ چندجمله‌ای از درجه‌ی n به‌طوری که

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_1 \geq a_0 > 0$$

آن‌گاه همه صفرهای $P(z)$ در ناحیه $|z| \leq 1$ قرار دارند.

قضیه ۵.۲.۱. (کوهن^۶) اگر $P(z)$ یک چندجمله‌ای خود معکوس حقیقی باشد، تمام ریشه هایش روی U قرار می‌گیرد اگر فقط اگر تمام ریشه های مشتق آن روی U قرار بگیرد.

^۳minimal polynomial

^۴Rouche

^۵Eneström-Kakeya theorem

^۶cohn

و قضیه‌ی زیر، همان نامساوی منسوب به برنشتاین^۷ است که اثبات آن برای چندجمله‌ای‌های مثلثاتی انجام شده است.

قضیه ۶.۲.۱. فرض می‌کنیم $P(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد و

$$\max_{|z|=1} |P(z)| \leq 1$$

دراین صورت

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq n. \quad (۱.۱)$$

تساوی در رابطه‌ی (۱.۱) برقرار است اگر $P(z)$ تمام صفرهای خود را در مبدا بگیرد.

قضیه ۷.۲.۱. (گاوس-لوکاس^۸) هر مجموعه محدب که شامل همه صفرهای یک چند جمله‌ای است، شامل تمام نقاط بحرانی آن نیز می‌باشد.

^۷S.Bernstein

^۸Gauss-Lucas

فصل ۲

ماکزیمم قدر مطلق چند جمله‌ای‌های خود معکوس

۱.۲ ماکزیمم قدر مطلق چند جمله‌ای‌های خود معکوس بر روی دایره واحد

در این فصل، به مطالعه کران‌هایی برای ماکزیمم قدر مطلق چند جمله‌ای‌های خود معکوس می‌پردازیم.

برای این منظور اگر، $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n و $p'(z)$ مشتق آن باشد با استفاده از نامساوی برنشتاین بر روی

مشتق چند جمله‌ای‌های مثلثاتی و همچنین اصل ماکزیمم قدر مطلق به ترتیب نامساوی‌های زیر بدست می‌آید

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |p(z)| \quad (1.2)$$

و

$$\max_{|z|=R>1} |p(z)| \leq R^n \max_{|z|=1} |p(z)|. \quad (2.2)$$

تساوی در (۱.۲) و (۲.۲) فقط وقتی $p(z)$ تمام صفرهایش را در مبدا می‌گیرد، برقرار است. بنابراین، با ایجاد یک شرط مناسب

بر روی موقعیت صفرهای چند جمله‌ای $p(z)$ می‌توان کران نامساوی‌های (۱.۲) و (۲.۲) را بهبود داد.

بر اساس حدس اردوش،^۱ اگر $p(z)$ صفری در $|z| < 1$ نداشته باشد، می‌توان نامساوی زیر که بعداً توسط لکس^۲ [۲۱]

اثبات شده را جایگزین نامساوی (۱.۲) کرد.

^۱ Erdős

^۲ Lax

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \leq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |p(z)|. \quad (3.2)$$

از طرف دیگر توران^۳ [۲۷] نشان داد، اگر $p(z)$ تمام صفر هایش را در $|z| < 1$ بگیرد، آنگاه

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \geq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |p(z)|. \quad (4.2)$$

مالیک،^۴ [۲۲] برای چند جمله‌ای $a_\nu z^\nu$ ، $p(z) = \sum_{\nu=0}^n$ که صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد، نامساوی

(۳.۲) را بصورت زیر تعمیم داد.

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \leq \frac{n}{1+k} \max_{|z|=1} |p(z)|. \quad (5.2)$$

آنکنی^۵ و ریولین^۶ [۱] برای چند جمله‌ای $p(z)$ که در $|z| < 1$ صفری ندارد، نامساوی (۲.۲) را بهبود دادند و برای $R \geq 1$

نتیجه زیر را بدست آوردند.

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq \left(\frac{R^n + 1}{2} \right) \max_{|z|=1} |p(z)|. \quad (6.2)$$

تساوی در نامساوی (۶.۲)، برای چند جمله‌ای‌های $p(z) = \alpha z^n + \delta$ به‌طوری‌که $|\alpha| = |\delta|$ ، برقرار است.

در این فصل، ما نامساوی‌های مشابهی برای رده چند جمله‌ای‌های خود معکوس بدست می‌آوریم.

لم ۱.۱.۲. فرض کنیم $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی m و $p'(z)$ مشتق آن باشد. اگر برای حداقل یک عدد صحیح مثبت

$n \geq m$ ، داشته باشیم

$$p(z) = z^n p(1/z)$$

^۳P. Turan

^۴M. A. Malik

^۵N.C.Ankeny

^۶T.J.Rivlin

آن‌گاه

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \leq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |p(z)|.$$

لم ۲.۱.۲. فرض کنیم $p(z) = \sum_{j=0}^n (a_j + ib_j)z^j = p_1(z) + ip_2(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد آن‌گاه

$$|p_1(z)|^2 + |p_2(z)|^2 \leq \left\{ \max_{|z|=1} |p(z)| \right\}^2.$$

اثبات. چون

$$p_1(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j, \quad p_2(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j$$

چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب حقیقی هستند بنابراین داریم $\overline{p_1(\bar{z})} = p_1(z)$ و $\overline{p_2(\bar{z})} = p_2(z)$ در نتیجه برای $z = e^{i\theta}$

وقتی $0 \leq \theta < 2\pi$ ، خواهیم داشت

$$p_1(e^{-i\theta}) = \overline{p_1(e^{i\theta})}, \quad p_2(e^{-i\theta}) = \overline{p_2(e^{i\theta})}. \quad (۷.۲)$$

اگر $M = \max_{|z|=1} |p(z)|$ آن‌گاه برای $0 \leq \theta < 2\pi$ ، داریم

$$|p_1(e^{i\theta}) + ip_2(e^{i\theta})| = |p(e^{i\theta})| \leq M \quad (۸.۲)$$

و

$$|p_1(e^{-i\theta}) + ip_2(e^{-i\theta})| = |p(e^{-i\theta})| \leq M. \quad (۹.۲)$$

با بکارگیری نامساوی (۷.۲) در (۹.۲) بدست می‌آوریم

$$|\overline{p_1(e^{i\theta})} + i\overline{p_2(e^{i\theta})}| \leq M$$

و چون $|z| = |\bar{z}|$ بنابراین

$$|p_1(e^{i\theta}) - ip_2(e^{i\theta})| = |\overline{p_1(e^{i\theta}) - ip_2(e^{i\theta})}| = |\overline{p_1(e^{i\theta})} + i\overline{p_2(e^{i\theta})}| \leq M. \quad (۱۰.۲)$$

از (۸.۲) و (۱۰.۲) وقتی $0 \leq \theta < 2\pi$ به نامساوی زیر می‌رسیم

$$|p_1(e^{i\theta}) + ip_2(e^{i\theta})|^2 + |p_1(e^{i\theta}) - ip_2(e^{i\theta})|^2 \leq M^2 + M^2 = 2M^2.$$

حال با استفاده از $|A+B|^2 + |A-B|^2 = 2|A|^2 + 2|B|^2$ به نامساوی زیر خواهیم رسید

$$2|p_1(e^{i\theta})|^2 + 2|p_2(e^{i\theta})|^2 \leq 2M^2 \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

در نتیجه

$$|p_1(e^{i\theta})|^2 + |p_2(e^{i\theta})|^2 \leq (\max_{|z|=1} |p(z)|)^2.$$

□

لذا اثبات کامل است.

قضیه ۳.۱.۲. اگر $p(z) = \sum_{j=1}^n (a_j + ib_j)z^j \equiv p_1(z) + ip_2(z)$ ، یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد که در شرط

$$p(z) = z^n p(1/z)$$

صدق کند، آن‌گاه

$$\max_{|z|=1} |p'_1(z) + p'_2(z)| \leq \frac{n}{\sqrt{2}} \max_{|z|=1} |p(z)|$$

$$\max_{|z|=1} |p'_1(z) - p'_2(z)| \leq \frac{n}{\sqrt{2}} \max_{|z|=1} |p(z)|.$$

اثبات. چون $p(z) \equiv p_1(z) + ip_2(z)$ است که در آن $p_1(z)$ و $p_2(z)$ ، چندجمله‌ای‌هایی با درجه ی حداکثر n و ضرایب حقیقی هستند. قرار می‌دهیم

$$G(z) = p_1(z) + p_2(z), \quad H(z) = p_1(z) - p_2(z)$$

بوضوح $H(z)$ و $G(z)$ ، چندجمله‌ای‌هایی از درجه ی حداکثر n با ضرایب حقیقی هستند. حال بنا به فرض $p(z) = z^n p(\frac{1}{z})$ نتیجه می‌گیریم

$$p_1(z) = z^n p_1\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{z^n p_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

و

$$p_2(z) = z^n p_2\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{z^n p_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

و بنابراین

$$\overline{z^n G\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \equiv G(z), \quad \overline{z^n H\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \equiv H(z)$$

حال با استفاده از لم ۱.۱.۲ برای چندجمله‌ای $H(z)$ و $G(z)$ ، بدست می‌آوریم

$$\max_{|z|=1} |p'_1(z) + p'_2(z)| = \max_{|z|=1} |G'(z)| \leq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |G(z)| \quad (۱۱.۲)$$

و

$$\max_{|z|=1} |p'_1(z) - p'_2(z)| = \max_{|z|=1} |H'(z)| \leq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |H(z)|. \quad (۱۲.۲)$$

فرض می‌کنیم که $G(z)$ ماکزیمم مقدار خود را بر روی $|z| = 1$ در نقطه $z = e^{i\alpha}$ وقتی $0 \leq \alpha < 2\pi$ می‌گیرد. لذا با کمک

گرفتن از لم ۲.۱.۲ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \left(\max_{|z|=1} |G(z)| \right)^2 &= |G(e^{i\alpha})|^2 = |p_1(e^{i\alpha}) + p_2(e^{i\alpha})|^2 \\ &\leq \left(|p_1(e^{i\alpha})| + |p_2(e^{i\alpha})| \right)^2 \leq 2 \left(|p_1(e^{i\alpha})|^2 + |p_2(e^{i\alpha})|^2 \right) \\ &\leq 2 \left(\max_{|z|=1} |p(z)| \right)^2 \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\left(\max_{|z|=1} |G(z)| \right)^2 \leq 2 \left(\max_{|z|=1} |p(z)| \right)^2. \quad (۱۳.۲)$$

و به‌طور مشابه با بکارگیری روند بالا برای $H(z)$ خواهیم داشت

$$\left(\max_{|z|=1} |H(z)| \right)^2 \leq 2 \left(\max_{|z|=1} |p(z)| \right)^2 \quad (۱۴.۲)$$

و سرانجام با استفاده از (۱۴.۲) در (۱۱.۲) و همچنین (۱۳.۲) در (۱۲.۲) به ترتیب نامساوی‌های زیر بدست می‌آید :

$$\max_{|z|=1} |p'_1(z) + p'_2(z)| \leq \frac{n}{\sqrt{2}} \max_{|z|=1} |p(z)|$$

9

$$\max_{|z|=1} |p'_1(z) - p'_2(z)| \leq \frac{n}{\sqrt{2}} \max_{|z|=1} |p(z)|.$$

□

و لذا اثبات کامل است.

در قضیه ۳.۱.۲ تساوی فقط زمانی برقرار است که $p(z) = z^n + 2iz^{n/2} + 1$ ، که در آن $n = 2m$ و m یک عدد

صحیح مثبت باشد.

۲.۲ بررسی چند جمله‌ای‌های خود معکوس که به رده $\prod_n$ تعلق دارند

پرفسور رحمان^۲ [۱۲] با مطالعه بر روی چندجمله‌ای‌های خود معکوس، نامساوی‌های مشابهی به (۱.۲) و (۲.۲) برای این رده از چندجمله‌ای‌ها بدست آوردند.

ما نیز در این بخش تلاش می‌کنیم نامساوی‌های مشابهی برای چندجمله‌ای که در شرط $p(z) = z^n p(\frac{1}{z})$ صدق می‌کند و همه ریشه هایشان را در نیم صفحه سمت راست یا نیم صفحه سمت چپ می‌گیرند، بدست آوریم.

تذکر ۱.۲.۲. رده چندجمله‌ای‌های $P(z)$ از درجه‌ی n که در $P(z) = z^n P(1/z)$ صدق می‌کنند و همه ریشه هایشان در نیم صفحه سمت راست یا نیم صفحه سمت چپ است را با $\prod_n$ نمایش می‌دهیم.

لم ۲.۲.۲. فرض کنیم $P(z) = (z - a)(z - \frac{1}{a})$ و $a \neq 0$ باشد به‌طوری‌که $|Arg a| \geq \pi/2$ آن‌گاه

$$\max_{|z|=1} |P(z)| = |P(1)| \quad (۱۵.۲)$$

اگر فرض $|Arg a| \leq \pi/2$ را با $|Arg a| \geq \pi/2$ جایگزین کنیم خواهیم داشت

$$\max_{|z|=1} |P(z)| = |P(-1)|. \quad (۱۶.۲)$$

اثبات. بدون کاستن از کلیت مساله فرض می‌کنیم $1 < |a| \leq 1$ ، زیرا اگر $|a| > 1$ می‌توان $\frac{1}{a}$ را با a جایگزین کرد.

قرار می‌دهیم $a = re^{i\varphi}$ که $0 < r < 1$ و $|\varphi| \geq \pi/2$ ، آن‌گاه برای $|z| = 1$ داریم

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |P(e^{i\theta})| = |(e^{i\theta} - re^{i\varphi})(e^{i\theta} - r^{-1}e^{-i\varphi})| = |e^{2i\theta} + 1 - e^{i\theta}(re^{i\varphi} + r^{-1}e^{-i\varphi})| \\ &= |e^{i\theta} + e^{-i\theta} - (re^{i\varphi} + r^{-1}e^{-i\varphi})| \\ &= |2 \cos \theta - 2w(r, \varphi)|. \end{aligned}$$

که در آن

$$\Im w(r, \varphi) = re^{i\varphi} + r^{-1}e^{-i\varphi} = \cos\varphi\left(r + \frac{1}{r}\right) + i\sin\varphi\left(r - \frac{1}{r}\right).$$

در نتیجه

$$|P(z)| = |\Im \cos \theta - \Im w(r, \varphi)|. \quad (۱۷.۲)$$

حال چون $|\varphi| \geq \pi/2$ ، قسمت حقیقی $w(r, \varphi)$ نامثبت (کوچکتر مساوی صفر) می‌باشد و بنابراین سمت راست نامساوی

(۱۷.۲)، ماکزیمم مقدار خود را زمانی می‌گیرد که $\cos \theta$ ماکزیمم شود یعنی وقتی که $\theta = 0$ باشد. بنابراین داریم

$$\max_{|z|=1} |P(z)| = |\Im - \Im w(r, \varphi)| = |P(1)|.$$

□

نامساوی (۱۶.۲) با روندی مشابه به (۱۵.۲) اثبات می‌شود.

لم ۳.۲.۲. برای هر عدد مختلط z که در نیم صفحه بسته چپ قرار می‌گیرد داریم

$$(1 + |z|)/|1 - z| \leq 2^{1/2}.$$

اثبات. برای هر عدد مختلط z داریم

$$\frac{1 + |z|}{|1 - z|} = \frac{|1 + |z||}{\{1 + |z|^2 - 2\operatorname{Re} z\}^{1/2}} \leq \frac{1 + |z|}{\{1 + |z|^2\}^{1/2}}.$$

چون z در نیم صفحه بسته چپ قرار می‌گیرد، بنابراین از نامساوی بالا خواهیم داشت

$$\frac{1 + |z|}{|1 - z|} \leq \left\{ \frac{(1 + |z|)^2}{(1 + |z|^2)} \right\}^{1/2} \leq 2^{1/2}.$$

□

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنیم $P(z)$ یک چندجمله‌ای باشد که به رده‌ی $\prod_n$ تعلق دارد آن‌گاه

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq \frac{n}{\sqrt{2}} \max_{|z|=1} |P(z)| \quad (۱۸.۲)$$

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|. \quad (۱۹.۲)$$

تساوی در (۱۹.۲) برای چندجمله‌ای $P(z) = (1+z)^n$ ، به‌طوری‌که ریشه‌هایش در نیم صفحه چپ قرار بگیرد اتفاق می‌افتد و همچنین برای چندجمله‌ای $P(z) = (1-z)^n$ ، به‌طوری‌که ریشه‌هایش در نیم صفحه سمت راست قرار بگیرد.

اثبات. فرض کنیم $P(z)$ یک چندجمله‌ای باشد که به رده Π_n تعلق دارد.

$$P(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$$

قضیه را برای حالتی اثبات می‌کنیم که $P(z)$ تمام ریشه‌هایش را بر نیم صفحه سمت چپ می‌گیرد.

حالتی که $P(z)$ تمام ریشه‌هایش را بر نیم صفحه سمت راست می‌گیرد با روندی مشابه و با استفاده از (۱۶.۲) به جای (۱۵.۲) بدست می‌آید.

$P(z)$ نمی‌تواند ریشه‌ای در مبدأ داشته باشد زیرا در غیر اینصورت اگر $P(z)$ یک ریشه در مبدأ داشته باشد، آن‌گاه $a_0 = 0$ خواهد بود و چون $P(z)$ در شرط $P(z) = z^n P(1/z)$ صدق می‌کند لذا $a_n = 0$ و در نتیجه $P(z)$ از درجه‌ی کمتر از n خواهد بود که این یک تناقض است.

حال دوباره بنا به فرض، $P(z) = z^n P(1/z)$ اگر $re^{i\alpha}$ یک ریشه از $P(z)$ باشد آن‌گاه $r^{-1}e^{-i\alpha}$ نیز یک ریشه از $P(z)$ خواهد بود و بنابراین ریشه‌های $P(z)$ در جفت‌های $z = re^{i\alpha}$ و $z = r^{-1}e^{-i\alpha}$ اتفاق می‌افتد. اگر $r = 1$ و $\alpha = \pi$ قرار دهیم آن‌گاه

$$re^{i\alpha} = r^{-1}e^{-i\alpha}$$

و بنابراین ریشه‌های $P(z)$ در هر یک از جفت‌های $z = re^{i\alpha}$ و $z = r^{-1}e^{-i\alpha}$ و یا $z = 1$ اتفاق می‌افتد.

بنابراین چندجمله‌ای $P(z)$ به شکل زیر خواهد بود :

$$P(z) = (z + ۱)^m \left[\prod_{k=۱}^L \left\{ (z - r_k e^{i\alpha_k}) \left(z - \frac{1}{r_k} e^{-i\alpha_k} \right) \right\} \right]. \quad (۲۰.۲)$$

که در آن $m \geq ۰$ ؛ $m + ۲L = n$ ؛ $r_k > ۰$ و $\pi/۲ \leq |\alpha_k| < \pi$ برای $k = ۱, ۲, \dots, L$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} \max_{|z|=۱} |p(z)| &= \max_{|z|=۱} \left[|z + ۱|^m \prod_{k=۱}^L \left| \left\{ (z - r_k e^{i\alpha_k}) \left(z - \frac{1}{r_k} e^{-i\alpha_k} \right) \right\} \right| \right] \\ &= |۱ + ۱|^m \prod_{k=۱}^L \left| \left\{ (۱ - r_k e^{i\alpha_k}) \left(۱ - \frac{1}{r_k} e^{-i\alpha_k} \right) \right\} \right| \end{aligned} \quad (۲۱.۲)$$

$$= |p(۱)| \quad (۲۲.۲)$$

$$\begin{aligned} &= ۲^m \prod_{k=۱}^L |۲ - ۲w(r_k, \alpha_k)| \\ &= ۲^{m+L} \prod_{k=۱}^L |۱ - w(r_k, \alpha_k)|. \end{aligned} \quad (۲۳.۲)$$

همچنین

$$P(z) = (z + ۱)^m \left\{ \prod_{k=۱}^L [z^{۲} - ۲w(r_k, \alpha_k)z + ۱] \right\}.$$

۹

$$\begin{aligned} P'(z) &= m(z + ۱)^{m-۱} \prod_{k=۱}^L [z^{۲} - ۲w(r_k, \alpha_k)z + ۱] \\ &+ (z + ۱)^m \sum_{k=۱}^L \left\{ [z^{۲} - ۲w(r_k, \alpha_k)] \prod_{j=۱, j \neq k}^L [z^{۲} - ۲w(r_j, \alpha_j)z + ۱] \right\}. \end{aligned} \quad (۲۴.۲)$$

بنابراین برای $|z| = ۱$

$$\begin{aligned}
 |P'(z)| &\leq m|(z + ۱)|^{m-۱} \prod_{k=۱}^L |z^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}w(r_k, \alpha_k)z + ۱| \\
 &\quad + |z + ۱|^m \sum_{k=۱}^L \left\{ |\mathfrak{r}z - \mathfrak{r}w(r_k, \alpha_k)| \prod_{j=۱, j \neq k}^L |z^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}w(r_j, \alpha_j)z + ۱| \right\} \\
 &\leq m\mathfrak{r}^{m-۱} \prod_{k=۱}^L |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}w(r_k, \alpha_k)| \\
 &\quad + \mathfrak{r}^m \sum_{k=۱}^L \left\{ [\mathfrak{r} + \mathfrak{r}|w(r_k, \alpha_k)|] \prod_{j=۱, j \neq k}^L |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}w(r_j, \alpha_j)| \right\} \\
 &= m\mathfrak{r}^{m+L-۱} \prod_{k=۱}^L |۱ - w(r_k, \alpha_k)| \\
 &\quad + \mathfrak{r}^{m+L} \sum_{k=۱}^L \left\{ [۱ + |w(r_k, \alpha_k)|] \prod_{j=۱, j \neq k}^L |۱ - w(r_j, \alpha_j)| \right\}.
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 \max_{|z|=۱} |P'(z)| &\leq m\mathfrak{r}^{m+L-۱} \prod_{k=۱}^L |۱ - w(r_k, \alpha_k)| \\
 &\quad + \mathfrak{r}^{m+L} \sum_{k=۱}^L \left\{ [۱ + |w(r_k, \alpha_k)|] \prod_{j=۱, j \neq k}^L |۱ - w(r_j, \alpha_j)| \right\} \\
 &\quad (۲۵.۲)
 \end{aligned}$$

از (۲۳.۲) و (۲۵.۲) خواهیم داشت

$$\frac{\max_{|z|=۱} |P'(z)|}{\max_{|z|=۱} |P(z)|} \leq \frac{m}{\mathfrak{r}} + \sum_{k=۱}^L \frac{۱ + |w(r_k, \alpha_k)|}{|۱ - w(r_k, \alpha_k)|}$$

چون $|\alpha_k| \geq \pi/\mathfrak{r}$ و $Re w(r_k, \alpha_k) \leq ۰$ بنابراین با استفاده از لم ۳.۲.۲ و نامساوی فوق داریم

$$\frac{\max_{|z|=۱} |P'(z)|}{\max_{|z|=۱} |P(z)|} \leq \frac{m}{\mathfrak{r}} + \sum_{k=۱}^L \mathfrak{r}^{۱/\mathfrak{r}} = \frac{m}{\mathfrak{r}} + L\sqrt{\mathfrak{r}} \leq \frac{m + \mathfrak{r}L}{\sqrt{\mathfrak{r}}} = \frac{n}{\mathfrak{r}^{۱/\mathfrak{r}}}.$$

که نتیجه می‌دهد

$$\max_{|z|=۱} |P'(z)| \leq \frac{n}{\mathfrak{r}^{۱/\mathfrak{r}}} \max_{|z|=۱} |P(z)|$$

ولذا نامساوی (۱۸.۲) ثابت می‌شود.

برای اثبات نامساوی (۱۹.۲) داریم

$$\begin{aligned}\frac{P'(1)}{P(1)} &= \frac{m}{2} + \sum_{k=1}^L \left[\frac{1}{1 - r_k e^{i\alpha_k}} + \frac{1}{1 - r_k^{-1} e^{-i\alpha_k}} \right] \\ &= \frac{m}{2} + \sum_{k=1}^L \left[\frac{1}{1 - r_k e^{i\alpha_k}} - \frac{r_k e^{i\alpha_k}}{1 - r_k e^{i\alpha_k}} \right] \\ &= \frac{m}{2} + L \\ &= \frac{n}{2}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$|P'(1)| = (n/2)|P(1)|. \quad (26.2)$$

چون $\max_{|z|=1} |P(z)| = |P(1)|$ از (۲۶.۲) خواهیم داشت

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq |P'(1)| \geq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

□

که نامساوی (۱۹.۲) می‌باشد.

آنکنی و ریولین [۱] با استفاده از نامساوی (۱۸.۲) قضیه زیر را استنباط کردند.

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنیم $p(z)$ ، یک چندجمله‌ای باشد که به رده $\prod_n$ تعلق دارد، آن‌گاه

$$\max_{|z|=R>1} |p(z)| \leq \frac{R^n + (2^{1/2} - 1)}{2^{1/2}} \max_{|z|=1} |p(z)|.$$

۳.۲ تعمیم نامساوی برنشتاین در رابطه با ماکزیمم قدر مطلق چندجمله‌ای‌ها و مشتق آن‌ها

در این بخش نامساوی برنشتاین، در رابطه با ماکزیمم قدر مطلق چندجمله‌ای‌ها و مشتق آن‌ها را تعمیم می‌دهیم در حالی‌که

ماکزیمم قدر مطلق چندجمله‌ای‌ها، روی دایره واحد هستند و در کنار آنها، نامساوی‌هایی برای چندجمله‌ای‌های خود معکوس

بدست می‌آوریم.

اگر $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد و $f'(z)$ مشتق آن باشد، طبق آنچه در بخش ۱.۲ گفته شد، نامساوی‌های (۱.۲) و (۲.۲)، برای رده چندجمله‌ای‌های $f(z) \neq 0$ در $|z| < 1$ ، بدست می‌آید. همچنین بیان شد که این نامساوی‌ها را می‌توان به ترتیب با نامساوی‌های (۳.۲) و (۶.۲) جایگزین کرد.

فرموله شده با کمی تفاوت نامساوی (۱.۲) و (۲.۲) بیان می‌کند که اگر f ، یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n باشد

به‌طوری‌که $|f(z)| \leq M (= |Mz^n|)$ وقتی $|z| = 1$ ، آن‌گاه

$$|f'(z)| \leq \left| \frac{d}{dz} (Mz^n) \right| \quad (۲۷.۲)$$

و

$$|f(Rz)| \leq |MR^n z^n| \quad (۲۸.۲)$$

وقتی $|z| = 1$ و $R > 1$.

نامساوی (۲۷.۲)، حالت خاصی از قضیه زیراست وقتی $F(z) := Mz^n$ یا $[۵]$ یا $[۲۶]$.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنیم $F(z) = \sum_{j=0}^n A_j z^j$ ، یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد، که همه ریشه‌هایش در دیسک واحد

بسته است. علاوه بر این اگر $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ ، یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n بطوری‌که در $|z| = 1$

$$|f(z)| \leq |F(z)|$$

آن‌گاه

$$|f'(z)| \leq |F'(z)| \quad (1 \leq |z| < \infty) \quad (۲۹.۲)$$

و تساوی در (۲۹.۲) برای چندجمله‌ای‌های $f(z) = e^{i\alpha} F(z)$ جایی که $\alpha \in \mathbb{R}$ برقرار است.

اثبات. فرض می‌کنیم برای تمام اعداد حقیقی، $f(z) \neq e^{i\alpha} F(z)$ تعریف می‌کنیم

$$F^* := \overline{z^n F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad f^* := \overline{z^n f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

قرار می‌دهیم

$$\varphi(z) := f^*(z)/F^*(z)$$

لذا $\varphi(z)$ ، بر دیسک $|z| < 1 + \delta$ وقتی $\delta > 0$ ، تحلیلی است و همچنین بر روی دایره واحد، $|\varphi(z)| \leq 1$ خواهد بود.

بنابراین در $|z| < 1$ ، $|\varphi(z)| < 1$ و در نتیجه وقتی $|z| > 1$ داریم

$$|f(z)| < |F(z)|.$$

همچنین چون

$$|a_n|/|A_n| = |\varphi(\cdot)| < 1$$

نتیجه می‌دهد که برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ به‌طوری‌که $|\lambda| \geq 1$ ، چند جمله‌ای $f(z) - \lambda F(z)$ از درجه‌ی n می‌باشد و همه

ریشه‌هایش در دیسک واحد بسته قرار می‌گیرد. از قضیه گاوس-لوکاس، نتیجه می‌گیریم

$$f'(z) - \lambda F'(z) \neq 0, \quad (|z| > 1)$$

و لذا در $|z| > 1$ داریم

$$|f'(z)| < |F'(z)|.$$

حال بوسیله پیوستگی، در $|z| = 1$ خواهیم داشت

$$|f'(z)| \leq |F'(z)|.$$

□

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنیم $F(z) = \sum_{j=0}^n A_j z^j$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد، که همه ریشه‌هایش را در دیسک

واحد بسته می‌گیرد. علاوه بر این اگر $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n به‌طوری‌که در $|z| = 1$

$$|f(z)| \leq |F(z)|$$

آن‌گاه

$$|f(z)| < |F(z)| \quad (|z| > 1) \quad (۳۰.۲)$$

و تساوی در (۳۰.۲) برای چند جمله‌ای‌های $f(z) = e^{i\alpha} F(z)$ ، جایی که $\alpha \in \mathbb{R}$ برقرار است.

هدف ما بیان تعمیم کلی‌تری از نامساوی‌های (۱.۲) و (۲.۲) برای چندجمله‌ای‌های خود معکوس است که در حالت‌های خاص

شامل قضیه‌های ۱.۳.۲ و ۲.۳.۲ می‌باشد.

لم ۳.۳.۲. فرض می‌کنیم $f(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$ ، یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد که همه ریشه‌هایش در $|z| \leq k$ قرار

می‌گیرد، که در آن $k \geq 0$ ، آن‌گاه برای هر $R \geq r$ و $k^2 \leq rR$ داریم

$$|f(Rz)| \geq \left(\frac{R+k}{r-k} \right)^n |f(rz)| \quad (|z| = 1)$$

اثبات. چون همه ریشه‌های $f(z)$ در $|z| \leq k$ قرار می‌گیرد، لذا داریم

$$f(z) = a_n \prod_{j=1}^n (z - k_j e^{i\theta_j})$$

که در آن $k_j \leq k$ و $j = 1, 2, \dots, n$.

حال، برای $0 \leq \theta < 2\pi$ ، داریم

$$\begin{aligned} \left| \frac{Re^{i\theta} - k_j e^{i\theta_j}}{re^{i\theta} - k_j e^{i\theta_j}} \right|^2 &= \frac{R^2 + k_j^2 - 2Rk_j \cos(\theta - \theta_j)}{r^2 + k_j^2 - 2rk_j \cos(\theta - \theta_j)} \\ &\geq \left(\frac{R+k_j}{r+k_j} \right)^2 \quad (R > r, rR > k_j^2) \\ &\geq \left(\frac{R+k}{r+k} \right)^2 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\left| \frac{Re^{i\theta} - k_j e^{i\theta_j}}{re^{i\theta} - k_j e^{i\theta_j}} \right| \geq \frac{R+k}{r+k} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(Re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right| &= \prod_{j=1}^n \frac{|Re^{i\theta} - k_j e^{i\theta_j}|}{|re^{i\theta} - k_j e^{i\theta_j}|} \\ &\geq \prod_{j=1}^n \left(\frac{R+k}{r+k} \right) = \left(\frac{R+k}{r+k} \right)^n \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \end{aligned}$$

که بوضوح هم ارز است با

$$|f(Rz)| \geq \left(\frac{R+k}{r+k} \right)^n |f(rz)| \quad (|z|=1, R>r, rR \geq k^2)$$

ولذا اثبات کامل است.

□

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنیم $f(z)$ و $F(z)$ ، دو چندجمله‌ای باشند به‌طوری‌که درجه‌ی $f(z)$ از درجه‌ی $F(z)$ بیشتر نمی‌شود

اگر $F(z)$ همه ریشه‌هایش، را در $|z| \leq 1$ بگیرد و در $|z|=1$

$$|f(z)| \leq |F(z)|$$

آن‌گاه، برای هر عدد حقیقی یا مختلط β با $|\beta| \leq 1$ و $R \geq r \geq 1$ داریم

$$|f(Rz) - \beta f(rz)| \leq |F(Rz) - \beta F(rz)| \quad (|z| \geq 1)$$

و نامساوی اکید برقرار است اگر داشته باشیم $|z| > 1$.

تساوی برای چندجمله‌ای $f(z) = e^{i\alpha} P(z)$ جایی که $\alpha \in \mathbb{R}$ و $F(z)$ چندجمله‌ای که همه ریشه‌هایش در $|z| \leq 1$

باشد، برقرار است.

اثبات. فرض می‌کنیم $1 \leq r \leq R$. در حالتی که $R = r$ ، نامساوی بدیهی است لذا قضیه را در حالتی اثبات می‌کنیم که

$R > r$ باشد. چون طبق فرض در $|z|=1$ ، $|f(z)| \leq |F(z)|$ ، بنابراین، برای هر عدد حقیقی یا مختلط δ با $|\delta| > 1$ ،

در $|z|=1$ ، داریم

$$|f(z)| < |\delta F(z)|$$

علاوه بر آن، چون همه ریشه‌های $F(z)$ در $|z| \leq 1$ قرار می‌گیرند، با استفاده از قضیه روشه نتیجه می‌گیریم که همه ریشه‌های

$$g(z) = f(z) - \delta F(z)$$

با $|\delta| > 1$ نیز در $|z| \leq 1$ قرار می‌گیرد. بنابراین، اگر لم بالا را برای $g(z)$ با $k = 1$ بکار گیریم که همه ریشه‌هایش را در

$|z| \leq 1$ می‌گیرد، برای $R > r \geq 1$ و برای هر θ با $0 \leq \theta < 2\pi$ ، بدست می‌آوریم

$$|g(Re^{i\theta})| \geq \left(\frac{R+1}{r+1}\right)^n |g(re^{i\theta})| \quad (31.2)$$

چون $0 \neq g(Re^{i\theta})$ برای هر $R > r \geq 1$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ خواهیم داشت

$$|g(Re^{i\theta})| > \left(\frac{r+1}{R+1}\right)^n |g(Re^{i\theta})|$$

از ترکیب نامساوی فوق با نامساوی (31.2)، برای هر $R > r \geq 1$ و هر θ ، با $0 \leq \theta < 2\pi$ داریم

$$|g(Re^{i\theta})| > \left(\frac{r+1}{R+1}\right)^n |g(Re^{i\theta})| \geq \left(\frac{r+1}{R+1}\right)^n \left(\frac{R+1}{r+1}\right)^n |g(re^{i\theta})|$$

لذا

$$|g(Re^{i\theta})| > |g(re^{i\theta})|$$

که هم ارز است با

$$|g(rz)| < |g(Rz)| \quad (32.2)$$

برای $|z| = 1$ و $R > r \geq 1$.

اگر β ، هر عدد حقیقی یا مختلط با $|\beta| \leq 1$ ، آن‌گاه از نامساوی (32.2) نتیجه می‌شود

$$|\beta g(rz)| < |g(Rz)|$$

چون همه ریشه‌های $g(z)$ در $|z| \leq 1$ قرار می‌گیرد، لذا تمام ریشه‌های $g(Rz)$ ، در $\frac{1}{R} < |z| \leq 1$ قرار دارد. حال، با بکارگیری مجدد قضیه روشه، چند جمله‌ای

$$h(z) = g(Rz) - \beta g(rz) = f(Rz) - \beta f(rz) - \delta (F(Rz) - \beta F(rz)). \quad (۳۳.۲)$$

برای هر عدد حقیقی یا مختلط δ ، با $|\delta| > 1$ و $R > r \geq 1$ ، همه ریشه‌هایش را در $|z| < 1$ می‌گیرد. بوضوح نتیجه می‌گیریم که برای $|z| \geq 1$ و $R > r \geq 1$

$$|f(Rz) - \beta f(rz)| \leq |F(Rz) - \beta F(rz)| \quad (۳۴.۲)$$

به برهان خلف فرض می‌کنیم، نامساوی (۳۴.۲) برقرار نباشد. در نتیجه نقطه $z = z_0$ وجود دارد با $|z_0| \geq 1$ به‌طوری‌که

$$|f(Rz_0) - \beta f(rz_0)| > |F(Rz_0) - \beta F(rz_0)| \quad (۳۵.۲)$$

حال، چون همه ریشه‌های $F(z)$ در $|z| \leq 1$ قرار می‌گیرد، چند جمله‌ای $F(Rz)$ همه ریشه‌هایش را در $\frac{1}{R} < |z| \leq 1$ قرار می‌گیرد و بنا به قضیه روشه، نتیجه می‌شود که برای $R > r \geq 1$ همه ریشه‌های

$$F(Rz) - \beta F(rz)$$

در $|z| < 1$ قرار دارد و برای هر z_0 با $|z_0| \geq 1$ داریم

$$F(Rz_0) - \beta F(rz_0) \neq 0$$

بنابراین، اگر قرار دهیم

$$\delta = f(Rz_0) - \beta f(rz_0) / F(Rz_0) - \beta F(rz_0)$$

آنگاه چون δ ، یک عدد حقیقی یا مختلط تعریف شده با $|\delta| > 1$ ، بنابراین از (۳۳.۲) نتیجه می‌شود که برای حداقل یک z_0 ،

که در $|z_0| \geq 1$ صدق می‌کند، داریم

$$h(z) = 0$$

و این یک تناقض است، زیرا همه ریشه‌های $h(z)$ ، در $|z| < 1$ قرار می‌گیرد، بنابراین برای $R > r \geq 1$ در $|z| \geq 1$ داریم

$$|f(Rz) - \beta f(rz)| \leq |F(Rz) - \beta F(rz)|.$$

□

اگر در قضیه بالا قرار دهیم $r = 1$ ، به نتیجه زیر می‌رسیم.

نتیجه ۵.۳.۲. فرض کنیم $f(z)$ و $F(z)$ ، دو چندجمله‌ای باشند به طوری که درجه‌ی $f(z)$ از درجه‌ی $F(z)$ بیشتر نمی‌شود.

اگر همه ریشه‌های $F(z)$ در $|z| \leq 1$ ، قرار بگیرد و در $|z| = 1$ داشته باشیم

$$|f(z)| \leq |F(z)|$$

آن‌گاه، برای هر عدد حقیقی یا مختلط β ، با $|\beta| \leq 1$ و $R \geq 1$ ، در $|z| \geq 1$ داریم

$$|f(Rz) - \beta f(z)| \leq |F(Rz) - \beta F(z)| \quad (۳۶.۲)$$

تساوی برای چندجمله‌ای $f(z) = e^{i\alpha} F(z)$ ، جایی که $\alpha \in \mathbb{R}$ و $F(z)$ چندجمله‌ای، که همه ریشه‌هایش در $|z| \leq 1$

واقع باشد، برقرار است.

نکته ۶.۳.۲. اگر در نتیجه فوق، $\beta = 1$ قرار دهیم و دو طرف نامساوی (۳۶.۲) را به $R - 1$ تقسیم کنیم و $R \rightarrow 1$ میل

دهیم به قضیه ۱.۳.۲ می‌رسیم و اگر فقط $\beta = 0$ قرار دهیم قضیه ۲.۳.۲، حاصل خواهد شد.

و همچنین اگر در قضیه ۴.۳.۲، $F(z) = Mz^n$ قرار دهیم جایی که $M = \max_{|z|=1} |f(z)|$ ، آن‌گاه به نتیجه زیر

می‌رسیم.

نتیجه ۷.۳.۲. اگر $f(z)$ ، یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد، آن‌گاه برای هر عدد حقیقی یا مختلط β با $|\beta| \leq 1$ و

$$R \geq r \geq 1, \text{ در } |z| \geq 1 \text{ داریم}$$

$$|f(Rz) - \beta f(rz)| \leq |R^n - \beta r^n| |z|^n \max_{|z|=1} |f(z)| \quad (۳۷.۲)$$

تساوی برای چند جمله‌ای‌های $f(z) = \gamma z^n$ ، $(\gamma \neq 0)$ برقرار است.

اگر در نامساوی (۳۷.۲)، $r = \beta = 1$ قرار دهیم و دو طرف نامساوی را به $R - 1$ تقسیم کنیم و $1 \rightarrow R$ میل دهیم

به نامساوی (۱.۲)، خواهیم رسید و اگر فقط $\beta = 0$ قرار دهیم، نامساوی (۲.۲) حاصل خواهد شد.

تذکر ۸.۳.۲. اگر $P(z)$ چند جمله‌ای از درجه‌ی n ، که در $|z| < 1$ ریشه‌ی نداشته باشد، آن‌گاه چند جمله‌ای

$$Q(z) = \overline{z^n p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \text{ همه ریشه‌هایش را در } |z| \leq 1 \text{ خواهد گرفت.}$$

بنابراین، اگر ما $f(z)$ را بوسیله $P(z)$ و $F(z)$ را با $Q(z)$ در قضیه‌ی ۴.۳.۲، جایگزین کنیم به نتیجه زیر می‌رسیم.

نتیجه ۹.۳.۲. اگر $P(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد، که در $|z| < 1$ ریشه‌ای ندارد، آن‌گاه برای هر عدد حقیقی یا

مختلط β با $|\beta| \leq 1$ و $R \geq r \geq 1$ ، در $|z| \geq 1$ ، داریم

$$|P(Rz) - \beta P(rz)| \leq |Q(Rz) - \beta Q(rz)|$$

$$\text{جایی که } Q(z) = \overline{z^n p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

تساوی برای چند جمله‌ای که همه ریشه‌هایش را، در $|z| = 1$ می‌گیرد، برقرار است.

نتیجه ۱۰.۳.۲. اگر $P(z)$ ، یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد و $Q(z) = \overline{z^n P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ ، سپس برای هر عدد حقیقی یا مختلط

β با $|\beta| \leq 1$ و $R \geq r \geq 1$ ، در $|z| \geq 1$ داریم

$$|P(Rz) - \beta P(rz)| + |Q(Rz) - \beta Q(rz)| \leq \left(|R^n - \beta r^n| |z|^n + |1 - \beta| \right) M$$

جایی که، $M = \max_{|z|=1} |P(z)|$.

تساوی برای چند جمله‌ای $P(z) = e^{i\alpha} \left(\frac{z^n + 1}{2} \right)$ جایی که $\alpha \in \mathbb{R}$ ، برقرار است.

نکته ۱۱.۳.۲. نتیجه ۱۰.۳.۲، در حالت خاص شامل بسیاری نامساوی‌های مشهور است. برای مثال اگر $\beta = 1$ و $r = 1$ قرار

دهیم و دو طرف نامساوی را به $1 - R$ تقسیم کنیم و $1 \rightarrow R$ خواهیم داشت

$$|P'(z)| + |Q'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

برای هر چند جمله‌ای $P(z)$ از درجه‌ی n روی $|z| = 1$ ، که در آن $Q(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)}$.

و اگر فقط، $\beta = 0$ قرار دهیم به نامساوی زیر می‌رسیم

$$|P(z)| + |Q(z)| \leq (R^n + 1) \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

حال با ترکیب کردن نتیجه ۹.۳.۲ و ۱۰.۳.۲، نتیجه زیر بدست می‌آید که نامساوی‌های (۳.۲) و (۶.۲) حالت‌های خاص آن،

محسوب می‌شوند.

نتیجه ۱۲.۳.۲. اگر $P(z)$ ، یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد که هیچ ریشه‌ای در $|z| < 1$ ندارد، آن‌گاه برای هر عدد

حقیقی یا مختلط، β با $|\beta| \leq 1$ و $R \geq r \geq 1$ ، داریم

$$|P(Rz) - \beta P(rz)| \leq \left\{ \frac{|R^n - \beta r^n| |z|^n + |1 - \beta|}{2} \right\} \max_{|z|=1} |P(z)| \quad (|z| \geq 1)$$

تساوی برای $P(z) = e^{i\gamma} \left(\frac{z^n + 1}{2} \right)$ به‌طوری‌که $\gamma \in \mathbb{R}$ ، برقرار است.

اگر در قضیه ۴.۳.۲، $F(z)$ را با $P(z)$ (چند جمله‌ای از درجه‌ی n ، به‌طوری‌که در $|z| < 1$ ریشه نداشته باشد) و

$f(z)$ را با mz^n جایگزین کنیم، جایی که

$$m = \min_{|z|=1} |P(z)|$$

نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱۳.۳.۲. فرض کنیم $P(z)$ ، یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد که همه ریشه‌هایش را در $|z| < 1$ می‌گیرد، آن‌گاه

برای هر عدد حقیقی یا مختلط β ، با $|\beta| \leq 1$ و $R \geq r \geq 1$ ، در $|z| \leq 1$ داریم

$$|P(Rz) - \beta P(rz)| \geq m|z^n||R^n - \beta r^n|$$

تساوی برای چند جمله‌ای $P(z) = e^{i\alpha} z^n$ برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ ، برقرار می‌باشد.

به ویژه از نامساوی فوق داریم

$$\min_{|z|=1} |P(Rz) - \beta P(rz)| \geq |R^n - \beta r^n| \min_{|z|=1} |P(z)| \quad (38.2)$$

اگر در نامساوی (۳۸.۲)، $r = \beta = 1$ قرار دهیم و دو طرف نامساوی را به $1 - R$ تقسیم کنیم و $1 \rightarrow R$ میل دهیم، به

یک حالت خاصی از نتیجه ۱۳.۳.۲ می‌رسیم، که این نتیجه منسوب به عزیز^۸ و داوود^۹ [۴] است.

حال دوباره قرار می‌دهیم

$$m = \min_{|z|=1} |P(z)|$$

به‌طوری‌که چندجمله‌ای $P(z)$ هیچ ریشه‌ای در $|z| \leq 1$ ندارد، آن‌گاه واضح است که برای هر α با $|\alpha| < 1$ ، چند جمله‌ای

$P(z) + m\alpha z^n$ هیچ ریشه‌ای در $|z| \leq 1$ ندارد و چندجمله‌ای $Q(z) + \bar{\alpha}m$ ، جایی که $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = z^n p\left(\frac{1}{z}\right)$ تعریف شده

است، همه ریشه‌هایش را در $|z| \leq 1$ می‌گیرد. بنابراین اگر در نتیجه ۵.۳.۲، قرار دهیم

$$f(z) = P(z) + m\alpha z^n, \quad F(z) = Q(z) + \bar{\alpha}m$$

به نامساوی (۳۹.۲) خواهیم رسید که برای $|z| \geq 1$ و $R > r \geq 1$

$$|P(Rz) - \beta P(rz) + \alpha m(R^n - \beta r^n)z^n| \leq |Q(Rz) - \beta Q(rz) + \bar{\alpha}m(1 - \beta)|$$

با انتخاب آرگومان مناسب از α ، در سمت چپ نامساوی بالا داریم

^۸A. Aziz

^۹Q. M. Dawood

$$|P(Rz) - \beta P(rz) + \alpha m(R^n - \beta r^n)z^n| = |P(Rz) - \beta P(rz) + m|\alpha||R^n - \beta r^n||z|^n|$$

برای $|z| \geq 1$ و $R > r \geq 1$ ، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & |P(Rz) - \beta P(rz)| + m|\alpha||R^n - \beta r^n||z|^n \\ & \leq |Q(Rz) - \beta Q(rz)| + m|\alpha|(1 - \beta) \end{aligned} \quad (39.2)$$

حال، اگر $1 \rightarrow |\alpha|$ میل دهیم برای هر β با $|\beta| \leq 1$ و $R > r \geq 1$ ، در $|z| \leq 1$ ، بدست می‌آوریم

$$|P(Rz) - \beta P(rz)| \leq |Q(Rz) - \beta Q(rz)| - m \left\{ |R^n - \beta r^n||z|^n - |1 - \beta| \right\} \quad (40.2)$$

از ترکیب نتیجه فوق با نتیجه ۱۰.۳.۲، نتیجه زیر بدست می‌آید که تعمیمی از نتیجه عزیز و داوود [۱۱] است.

نتیجه ۱۴.۳.۲. فرض کنیم $P(z)$ ، یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد که هیچ ریشه‌ای در $|z| < 1$ ندارد، آن‌گاه برای هر

عدد حقیقی یا مختلط β با $|\beta| \leq 1$ و $R > r \geq 1$ ، در $|z| \geq 1$ داریم

$$\begin{aligned} |P(Rz) - \beta P(rz)| & \leq \left\{ \frac{|R^n - \beta r^n||z|^n + |1 - \beta|}{2} \right\} \max_{|z|=1} |P(z)| \\ & - \left\{ \frac{|R^n - \beta r^n||z|^n - |1 - \beta|}{2} \right\} \min_{|z|=1} |P(z)| \end{aligned}$$

نامساوی فوق اکید است و تساوی برای چند جمله‌ای $P(z) = z^n + \gamma$ ، $|\gamma| = 1$ ، برقرار است.

نتیجه زیر حالت خاصی از نتیجه ۱۰.۳.۲، است که شامل نامساوی مهمی برای چند جمله‌ای‌های خود معکوس می‌باشد.

نتیجه ۱۵.۳.۲. اگر $P(z)$ ، یک چند جمله‌ای خود معکوس از درجه‌ی n باشد آن‌گاه برای $R \geq r \geq 1$

$$|P(Rz) - \beta P(rz)| \leq \left\{ \frac{|R^n - \beta r^n||z|^n + |1 - \beta|}{2} \right\} \max_{|z|=1} |P(z)| \quad (|z| \geq 1).$$

تساوی برای چند جمله‌ای $P(z) = z^n + 1$ یا در واقع هر چند جمله‌ای که همه ریشه‌هایش روی دایره یک باشد، برقرار

است.

اگر در نامساوی فوق، $\beta = 0$ قرار دهیم، به نامساوی (۶.۲) می‌رسیم، و اگر $R = r = 1$ قرار دهیم و دو طرف نامساوی را به $R - 1$ تقسیم کنیم، سپس $1 \rightarrow R$ میل دهیم به نامساوی (۳.۲) می‌رسیم که هر دو، برای چند جمله‌ایهای خود معکوس نیز، صادق است.

فصل ۳

ریشه‌های چندجمله‌ای‌های خود معکوس

۱.۳ ریشه‌هایی از خانواده چندجمله‌ای خود معکوس

در این بخش ابتدا، شرایط کافی را ارائه می‌دهیم که تضمین می‌کند همه ریشه‌های چندجمله‌ای خود معکوس بر روی دایره واحد قرار می‌گیرند و سپس نشان می‌دهیم، برای خانواده مشخصی از چندجمله‌ای‌های خود معکوس که تمام ریشه‌هایشان بر روی دایره واحد قرار می‌گیرند، تمام ریشه‌های ترکیب محدب آنها نیز بر روی دایره واحد قرار می‌گیرند.

می‌دانیم تمام ریشه‌های چندجمله‌ای خود معکوس بر روی دایره واحد یا نسبت به دایره واحد متقارن قرار می‌گیرند. در این بخش به دنبال پاسخ دادن به دو سوال اساسی زیر هستیم.

سوال (۱): تحت چه شرایطی ریشه‌های چندجمله‌ای خود معکوس، بر روی دایره واحد قرار می‌گیرند؟

سوال (۲): فرض کنید $P(z)$ و $Q(z)$ ، دو چندجمله‌ای خود معکوس حقیقی مرتبه n باشند به طوری که همه ریشه‌هایشان

بر روی دایره واحد قرار می‌گیرند. ترکیب محدب آنها را بصورت زیر در نظر بگیرید

$$G(\lambda, z) = \lambda P(z) + (1 - \lambda)Q(z) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

آیا $G(\lambda, z)$ نیز دارای خاصیت مشابه، برای $0 \leq \lambda \leq 1$ می‌باشد؟

در رابطه با پاسخ دادن به سوال (۱) لاکاتوس [۱۹] ثابت کرد که اگر $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ چند جمله‌ای خود معکوس

مرتبه‌ی n ، باشد به‌طوری‌که

$$|a_n| \geq \sum_{i=1}^{n-1} |a_n - a_i|$$

آن‌گاه $P(z)$ ، همه ریشه‌هایش را بر روی دایره واحد می‌گیرد.

لاکاتوس و لوسنزی^۱ [۲۰] این نتیجه را بهبود و نشان دادند که اگر $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ یک چندجمله‌ای خود معکوس

از مرتبه‌ی n با درجه فرد باشد، اگر

$$|a_n| \geq \cos^2 \frac{1}{2(n+1)\pi} \sum_{i=1}^{n-1} |a_n - a_i|$$

آن‌گاه، $P(z)$ همه ریشه‌هایش را بر روی دایره واحد می‌گیرد.

همچنین ثابت کردند که اگر $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ یک چندجمله‌ای خود معکوس از مرتبه‌ی n ، باشد به‌طوری‌که

$$|a_n| \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|$$

آن‌گاه همه ریشه‌های $P(z)$ ، بر روی دایره واحد قرار می‌گیرد.

این سؤال مطرح می‌شود، که اگر $P(z)$ و $Q(z)$ دو چندجمله‌ای، با تمام ریشه‌هایشان روی دایره یک‌ه باشد، آیا همه

ریشه‌های ترکیب محدب آنها نیز، روی U قرار می‌گیرد؟

با ارائه مثال زیر، نشان می‌دهیم در حالت کلی جواب منفی است.

مثال ۱.۱.۳. $P(z)$ و $Q(z)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$P(z) = (z^2 - z + 1)(z^6 + 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

$$Q(z) = (z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)(z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1)$$

هر کدام از $P(z)$ و $Q(z)$ ، همه ریشه‌هایشان را بر روی U می‌گیرند، اما $(P(z) + Q(z))/2$ ریشه

$.../۸۶۶۰۳ \pm i۰/۷۷۱۱۵...$ با اندازه $۱/۱۵۹۶۳...$ را دارد که بیرون U می‌باشد.

^۱Losoncz

توسط فیل^۲ [۹] یک جواب کلی برای سؤال (۲) ارائه شد.

فرض می‌کنیم $w_1, w_2, \dots, w_n$ و $z_1, z_2, \dots, z_n$ به ترتیب ریشه‌های $P(z)$ و $Q(z)$ ، باشند به طوری که برای

$$1 \leq i \leq n-1,$$

$$0 < \arg(z_i) \leq \arg(z_{i+1}) < 2\pi \quad \text{و} \quad 0 < \arg(w_i) \leq \arg(w_{i+1}) < 2\pi$$

لم فیل، بیان می‌کند که همه ریشه‌های $G(\lambda, z)$ بر روی دایره واحد قرار می‌گیرند اگر و فقط اگر، کمان‌های باز و محدود شده بوسیله z_i و w_i مجزا باشند.

اخیراً کیم [۱۸]، نیز بر روی توزیع ریشه‌های $G(\lambda, z)$ ، برای خانواده چند جمله‌ای‌های خود معکوس به فرم

$$P(z) = \frac{(z^\alpha - 1)(z^\beta - 1)}{(z - 1)^2}, \quad Q(z) = \frac{(z^\gamma - 1)(z^\eta - 1)}{(z - 1)^2}$$

جایی که $\alpha, \beta, \gamma, \eta \in N$ و $\alpha + \beta = \gamma + \eta$ ، مطالعاتی انجام داده است.

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنیم γ, β, α و η ، اعداد صحیح مثبت باشند و $\alpha + \beta = \gamma + \eta$ ، آن‌گاه چندجمله‌ای خود معکوس

$$\Phi(\alpha, \beta; \gamma, \eta; z) := \frac{(z^\alpha - 1)(z^\beta - 1)}{(z - 1)^2} + \frac{(z^\gamma - 1)(z^\eta - 1)}{(z - 1)^2}$$

همه ریشه‌هایش را روی U می‌گیرد.

اثبات. قرار می‌دهیم α, n و γ اعداد صحیح مثبت باشند، با $n \geq 2$ و $\alpha < \gamma < [n/2]$ ، آن‌گاه کافیت نشان دهیم،

چندجمله‌ای خودمعکوس

$$\Psi(z) := (z^\alpha - 1)(z^{n-\alpha} - 1) + (z^\gamma - 1)(z^{n-\gamma} - 1)$$

همه ریشه‌هایش را روی U می‌گیرد. برای این منظور، نشان می‌دهیم $\Psi'(z)$ ریشه‌هایش را روی U می‌گیرد و سپس با استفاده

از قضیه کوهن، نتیجه حاصل است. داریم

^۲H. J. Fell

$$\psi(z) = \mathfrak{V}z^n - z^{n-\alpha} - z^{n-\gamma} - z^\gamma - z^\alpha + \mathfrak{V}$$

و با محاسبه مشتق آن داریم

$$\begin{aligned}\Psi'(z) &= \mathfrak{V}nz^{n-1} - (n-\alpha)z^{n-\alpha-1} - (n-\gamma)z^{n-\gamma-1} - \gamma z^{\gamma-1} - \alpha z^{\alpha-1} \\ &= z^{\alpha-1} (\mathfrak{V}nz^{n-\alpha} - (n-\alpha)z^{n-\mathfrak{V}\alpha} - (n-\gamma)z^{n-\gamma-\alpha} - \gamma z^{\gamma-\alpha} - \alpha) \\ &= z^{\alpha-1} (\mathfrak{V}nz^{n-\alpha} - nz^{n-\mathfrak{V}\alpha} + \alpha z^{n-\mathfrak{V}\alpha} - nz^{n-\gamma-\alpha} + \gamma z^{n-\gamma-\alpha} - \gamma z^{\gamma-\alpha} - \alpha) \\ &= z^{\alpha-1} (\mathfrak{V}nz^{n-\alpha} - nz^{n-\mathfrak{V}\alpha} \pm nz^{n-\mathfrak{V}\alpha} + \alpha z^{n-\mathfrak{V}\alpha} \pm \alpha z^{\gamma-\alpha} \pm \alpha z^{n-\gamma-\alpha} - nz^{n-\gamma-\alpha} \\ &\quad + \gamma z^{n-\gamma-\alpha} - \gamma z^{\gamma-\alpha} - \alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= z^{\alpha-1} \left((n+\alpha)z^{n-\mathfrak{V}\alpha} - \mathfrak{V}nz^{n-\mathfrak{V}\alpha} - (n+\alpha)z^{n-\gamma-\alpha} + (\alpha+\gamma)z^{n-\gamma-\alpha} + \mathfrak{V}nz^{n-\alpha} \right. \\ &\quad \left. - (\alpha+\gamma)z^{\gamma-\alpha} + \alpha z^{\gamma-\alpha} - \alpha \right) = z^{\alpha-1} \left(\alpha(z^{\gamma-\alpha} - 1) + (\alpha+\gamma)z^{\gamma-\alpha}(z^{n-\mathfrak{V}\gamma} - 1) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha+n)z^{n-\gamma-\alpha}(z^{\gamma-\alpha} - 1) + \mathfrak{V}nz^{n-\mathfrak{V}\alpha}(z^\alpha - 1) \right)\end{aligned}$$

از آنجا که

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1)$$

در نهایت داریم

$$\begin{aligned}\Psi'(z) &= z^{\alpha-1}(z-1) \left(\alpha(1+z+\dots+z^{\gamma-\alpha-1}) + (\alpha+\gamma)z^{\gamma-\alpha}(1+z+\dots+z^{n-\mathfrak{V}\gamma-1}) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha+n)z^{n-\gamma-\alpha}(1+z+\dots+z^{\gamma-\alpha-1}) + (\mathfrak{V}n)z^{n-\mathfrak{V}\alpha}(1+z+\dots+z^{\alpha-1}) \right)\end{aligned}$$

بنابراین، با استفاده از قضیه اینشتروم-کاکایا [۲۳]، $\Psi'(z)$ همه ریشه‌هایش را درون یا روی U ، می‌گیرد. لذا بنا به قضیه کوهن،

□

همه ریشه‌های $\Psi(z)$ نیز، روی U قرار می‌گیرد.

برای پیدا کردن جواب دقیق تر سؤال (۱) و (۲)، به لم‌ها و قضایای زیر احتیاج داریم .

لم ۳.۱.۳. فرض کنیم $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ یک چندجمله‌ای مرتبه n باشد به‌طوری‌که

$$|a_n| \geq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$$

آن‌گاه، همه ریشه‌های $P(z)$ بر روی دیسک $|z| \leq 1$ قرار می‌گیرد.

لم ۴.۱.۳. فرض کنیم $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ یک چندجمله‌ای مرتبه n باشد به‌طوری‌که برای حداقل یک k

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_k \geq 0$$

$$a_k \geq |a_k - a_{k-1}| + |a_{k-1} - a_{k-2}| + \dots + |a_1 - a_0| + |a_0|$$

آن‌گاه، همه ریشه‌های $P(z)$ ، بر روی دیسک $|z| \leq 1$ قرار می‌گیرد.

اثبات. چندجمله‌ای $\Phi(z)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Phi(z) = (1 - z)P(z)$$

$$= -a_n z^{n+1} + (a_n - a_{n-1})z^n + \dots + (a_1 - a_0)z + a_0.$$

بوضوح مشاهده می‌شود که فرض لم ۳.۱.۳، در $\Phi(z)$ صدق می‌کند. در نتیجه همه ریشه‌های $\Phi(z)$ بر روی دیسک $|z| \leq 1$

□

قرار می‌گیرد و لذا تمام ریشه‌های $P(z)$ نیز بر روی دیسک $|z| \leq 1$ قرار می‌گیرد.

قضیه ۵.۱.۳. چندجمله‌ای خودمعکوس مرتبه n ، $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ را در نظر بگیرید. اگر برای حداقل یک

$$0 \leq k \leq n-1$$

$$na_n \geq (n-1)a_{n-1} \geq \dots \geq (k+1)a_{k+1} > 0$$

$$(k+1)a_{k+1} \geq \sum_{i=0}^k |(i+1)a_{i+1} - ia_i|$$

آن‌گاه $P(z)$ ، تمام ریشه‌هایش را بر دایره واحد می‌گیرد.

اثبات. فرض می‌کنیم $P'(z)$ مشتق $P(z)$ باشد. داریم

$$P'(z) = \sum_{i=1}^n a_i z^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)a_{i+1} z^i$$

آن‌گاه $P'(z)$ در فرض لم ۴.۱.۳، صدق می‌کند در نتیجه $P'(z)$ همه ریشه‌هایش را بر روی دیسک $|z| \leq 1$ می‌گیرد. حال با

□

استفاده از قضیه کوهن، $P(z)$ تمام ریشه‌هایش را بر دایره واحد می‌گیرد.

اگر در قضیه فوق، $k = 1$ قرار دهیم به نتیجه زیر خواهیم رسید.

نتیجه ۶.۱.۳. اگر $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ چندجمله‌ای خودمعکوس مرتبه n باشد به‌طوری‌که

$$na_n \geq (n-1)a_{n-1} \geq \dots \geq 2a_2 \geq a_1 > 0$$

آن‌گاه $P(z)$ همه ریشه‌هایش را بر دایره واحد خواهد گرفت.

حال، اگر در قضیه ۵.۱.۳، قرار دهیم $k = n-1$ ، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۷.۱.۳. اگر $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ چندجمله‌ای خود معکوس مرتبه‌ی n باشد به‌طوری‌که

$$na_n \geq \sum_{i=0}^{n-1} |(i+1)a_{i+1} - ia_i|$$

آن‌گاه $P(z)$ ، همه ریشه‌هایش را بر دایره واحد خواهد گرفت.

مثال ۸.۱.۳. چندجمله‌ای خود معکوس مرتبه‌ی ۷ زیر را در نظر بگیرید:

$$P(z) = 5z^7 + 3z^6 + 3z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 3z + 5$$

$P(z)$ در نتیجه ۶.۱.۳، صدق می‌کند و لذا همه ریشه‌های $P(z)$ بر دایره واحد قرار می‌گیرد.

مثال ۹.۱.۳. چندجمله‌ای خود معکوس مرتبه ۷ زیر را در نظر بگیرید:

$$P(z) = 10z^7 + 5/9z^6 + 2/9z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 2/9z^2 + 5/9z + 10$$

چندجمله‌ای $P(z)$ در ۶.۱.۳، صدق نمی‌کند ولی فرض نتیجه ۷.۱.۳، برقرار است لذا همه ریشه‌های $P(z)$ ، بر دایره واحد قرار می‌گیرد.

قضیه ۱۰.۱.۳. قرار می‌دهیم $\alpha_i, \beta_i \in N$ ،

$$P_i(z) = \frac{(z^{\alpha_i} - 1)(z^{\beta_i} - 1)}{(z - 1)^2} \quad (1 \leq i \leq m)$$

و ترکیب محدب را بصورت زیر در نظر بگیرید

$$G(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, z) = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i(z)$$

جایی که $0 \leq \lambda_i \leq 1$ و $1 \leq i \leq m$ ، $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

اگر $\alpha_i + \beta_i = n$ برای $1 \leq i \leq m$ ، آن‌گاه $G(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, z)$ همه ریشه‌هایش را بر روی دایره واحد می‌گیرد.

اثبات. ترکیب محدب را بصورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\hat{G}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, z) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \hat{P}_i(z)$$

که در آن

$$\hat{P}_i(z) = (z^{\alpha_i} - 1)(z^{\beta_i} - 1)$$

چون هر $\hat{P}_i(z)$ خود معکوس است ترکیب محدب فوق نیز خود معکوس می‌باشد و مشتق $\hat{G}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, z)$ بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \hat{G}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, z) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{d}{dz} \hat{P}_i(z) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\alpha_i z^{\alpha_i-1} (z^{\beta_i} - 1) + \beta_i z^{\beta_i-1} (z^{\alpha_i} - 1) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(n z^{n-1} - \alpha_i z^{\alpha_i-1} - \beta_i z^{\beta_i-1} \right) \\ &= n z^{n-1} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\alpha_i z^{\alpha_i-1} + \beta_i z^{\beta_i-1} \right) \end{aligned}$$

چون

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i (\alpha_i + \beta_i) = n$$

بنابر لم ۳.۱.۳، تمام ریشه‌های $\hat{G}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, z)$ درون یا روی دایره واحد قرار می‌گیرد. حال، با استفاده از قضیه

□

کوهن، اثبات کامل می‌شود.

۲.۳ بررسی چندجمله‌ای مینیمال بر یک نقطه روی دایره واحد

اگر $P(z)$ و $Q(z)$ ، دو چندجمله‌ای خود معکوس باشند، به‌طوری‌که در نقطه‌ی z_0 بر روی دایره واحد با شرایط

$$|z_0| = 1, z_0 \neq 1$$

دارای قدر مطلق یکسانی باشند، یعنی

$$|P(z_0)| = |Q(z_0)| \neq 0$$

نشان می‌دهیم چند جمله‌ای مینیمال در نقطه فوق، خود معکوس می‌باشد. همچنین شرایط کافی را ارائه می‌دهیم که حتماً z_0

ای، روی دایره واحد وجود داشته باشد به‌طوری‌که در شرط $|P(z_0)| = |Q(z_0)|$ صدق کند. سؤالی که مطرح می‌شود در

مورد تعداد ریشه‌های چند جمله‌ای مینیمال، بر روی دایره واحد است.

در این بخش، این سؤال را در حالتی که ضرایب چند جمله‌ای خود معکوس، اعداد صحیحی باشند مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در ابتدا چند جمله‌ای مینیمال را برای عناصر مجموعه زیر بدست می‌آوریم.

$$\{z : |P(z)| = |Q(z)|, |z| = 1\}$$

قضیه ۱.۲.۳. قرار می‌دهیم $P(z)$ و $Q(z)$ ، دو چندجمله‌ای خودمعکوس صحیح با $\deg P(z) = m \geq n = \deg Q(z)$

فرض کنیم برای حداقل یک z با $|z| = 1$ و $z \neq 1$ داشته باشیم:

$$|P(z)| = |Q(z)| \neq 0.$$

آن‌گاه، چند جمله‌ای مینیمال در نقطه z ، خودمعکوس است و مشتق شده از چند جمله‌ای خود معکوس صحیح

$$P(z)^2 - z^{m-n}Q(z)^2$$

می‌باشد.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم، چندجمله‌ای مینیمال $f(z)$ ، از درجه d در نقطه z با $|z| = 1$ ، چندجمله‌ای خودمعکوس است.

از آنجایی که $|z| = |\bar{z}| = 1$ و $f(z)$ ، در نقطه z مینیمال می‌باشد، لذا

$$f(z) = f(\bar{z}) = 0.$$

بنابراین

$$z^d f(z^{-1}) = z^d f(\bar{z}) = 0.$$

در نتیجه z ، یک ریشه چندجمله‌ای $(z^{-1})^n f(z)$ وقتی درجه آن d است، می‌باشد. چون چندجمله‌ای مینیمال منحصر بفرد

است لذا داریم

$$f(z) = z^d f(z^{-1})$$

حال، قسمت دوم قضیه را ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم $P(z)$ و $Q(z)$ ، دو چندجمله‌ای خود معکوس صحیح باشد با درجه‌ی

$$\deg P(z) = m \geq n = \deg Q(z)$$

چندجمله‌ای از درجه‌ی m ، $F(z)$ را بصورت

$$F(z) = P(z)^{\flat} - z^{m-n}Q(z)^{\flat}$$

تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم چندجمله‌ای فوق، خود معکوس است. چون

$$z^{\flat m}P(z^{-1})^{\flat} = P(z)^{\flat} \quad , \quad z^{\flat n}Q(z^{-1})^{\flat} = Q(z)^{\flat}$$

داریم

$$\begin{aligned} z^{\flat m}F(z^{-1}) &= z^{\flat m}(P(z^{-1})^{\flat} - z^{-m+n}Q(z^{-1})^{\flat}) \\ &= z^{\flat m}(z^{-\flat m}P(z)^{\flat} - z^{-m+n}z^{-\flat n}Q(z)^{\flat}) \\ &= P(z)^{\flat} - z^{m-n}Q(z)^{\flat} = F(z) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$z^{\flat m}F(z^{-1}) = F(z)$$

حال، نشان می‌دهیم $F(z)$ ، چندجمله‌ای مینیمال است. چون برای هر z ، ای که $|z| = 1$ و $z \neq 1$ باشد، داریم

$$|P(z,)| = |Q(z,)|$$

با استفاده از $\overline{z,} = \frac{1}{z,}$ و این که $P(z)$ و $Q(z)$ ، دو چند جمله‌ای خود معکوس می‌باشند، داریم

$$|P(z,)|^{\flat} = |Q(z,)|^{\flat} \implies P(z,)\overline{P(z,)} - Q(z,)\overline{Q(z,)} = 0$$

$$0 = P(z,)\overline{P(z^{-1},)} - Q(z,)\overline{Q(z^{-1},)} = z,^{-m}P(z,)^{\flat} - z,^{-n}Q(z,)^{\flat}$$

$$= z,^{-m}(P(z,)^{\flat} - z,^{m-n}Q(z,)^{\flat}) = z,^{-m}F(z,)$$

در نتیجه

$$z_0^{-m} F(z_0) = 0$$

□

چون، $z_0 \neq 0$ است لذا $F(z_0) \equiv 0$.

نکته ۲.۲.۳. در قضیه فوق، شرط $z_0 \neq 1$ ضروری است. زیرا در غیر این صورت اگر $z_0 = 1$ باشد، چندجمله‌ای مینیمال آن بصورت $z - 1$ خواهد بود که خود معکوس نیست.

مثال ۳.۲.۳. اگر $P(z)$ و $Q(z)$ ، دو چندجمله‌ای خود معکوس بصورت زیر باشند

$$P(z) = z^4 + 1, \quad Q(z) = z^2 + 1$$

برای $z_0 = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ و $z_1 = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ که $z_0 = z_1 \neq 1$ ، $|z_0| = |z_1| = 1$ و

$$|P(z_0)| = |Q(z_0)| = |P(z_1)| = |Q(z_1)| = 1$$

چندجمله‌ای مینیمال، به ترتیب به صورت

$$z^2 - z + 1$$

و

$$z^2 + z + 1$$

بدست می‌آید که عامل‌هایی از

$$(z^4 + 1)^2 - z^2(z^2 + 1)^2 = (z - 1)^2(z + 1)^2(z^2 + z + 1)^2(z^2 - z + 1)^2$$

بوده و خود معکوس می‌باشند.

مثال ۴.۲.۳. دو چندجمله‌ای $P(z) = z^3 + 1$ و $Q(z) = z^2 + z + 1$ ، را در نظر بگیرید که تمام ریشه‌هایشان را روی

U می‌گیرند. بوسیله قضیه ۱.۲.۳، برای عدد مختلط z روی U ، با $|z_0^2 + z_0 + 1| = |z_0^3 + 1|$ چندجمله‌ای مینیمال،

به صورت

$$F(z) = z^6 - z^5 - 2z^4 - z^3 - 2z^2 - z + 1$$

خواهد بود. زیرا

$$F(z) = P(z)^2 - z^{m-n}Q(z)^2 = (z^3 + 1)^2 - z(z^2 + z + 1)^2$$

تحویل ناپذیر است.

چند جمله‌ای مینیمالی که از نقاط z و z_1 ، در مثال ۳.۲.۳، بدست آمد، همه ریشه‌هایش را روی دایره واحد می‌گیرد در حالی که، چند جمله‌ای مینیمال مثال ۴.۲.۳، دو ریشه خارج دایره واحد دارد. بنابراین، طبیعی است پرسیده شود، تحت چه شرایطی چندجمله‌ای بدست آمده در قضیه ۱.۲.۳، تمام ریشه‌هایش را روی دایره واحد می‌گیرد.

چندجمله‌ای مینیمال بدست آمده از جفت چندجمله‌ای‌های زیر، تمام ریشه‌هایشان را روی دایره واحد می‌گیرند.

$$(۱) \quad P(z) = z^{n+k} + 1, \quad Q(z) = z^n + 1$$

برای $k \geq 1$ ، زیرا

$$\begin{aligned} (z^{n+k} + 1)^2 - z^k(z^n + 1)^2 &= z^{2(n+k)} + 2z^{n+k} + 1 - z^{2n+k} - 2z^{n+k} - z^k \\ &= z^{2(n+k)} - z^{2n+k} - z^k + 1 = z^{2n+k}z^k - z^{2n+k} - (z^k - 1) \\ &= z^{2n+k}(z^k - 1) - (z^k - 1) = (z^k - 1)(z^{2n+k} - 1) \\ &= (z - 1)^2(z^{k-1} + z^{k-2} + \dots + 1)(z^{2n+k-1} + z^{2n+k-2} + \dots + 1) \end{aligned}$$

$$(۲) \quad P(z) = \frac{z^m - 1}{z - 1}, \quad Q(z) = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

برای $m \geq n$ ، زیرا

$$\begin{aligned} \left(\frac{z^m - 1}{z - 1}\right)^2 - z^{m-n} \left(\frac{z^n - 1}{z - 1}\right)^2 &= \frac{(z^m - 1)^2 - z^{m-n}(z^n - 1)^2}{(z - 1)^2} \\ &= \frac{z^{m-n}z^{m+n} - z^{n+m} - z^{m-n} + 1}{(z - 1)^2} \\ &= \frac{(z^{m-n} - 1)(z^{m+n} - 1)}{(z - 1)^2} \\ &= (z^{m-n-1} + z^{m-n-2} + \dots + 1)(z^{m+n-1} + z^{m+n-2} + \dots + 1) \end{aligned}$$

حال، این سؤال ممکن است پرسیده شود که آیا برای هر دو چندجمله‌ای خودمعکوس صحیح $P(z)$ و $Q(z)$ ، z_0 ای با

$$|z_0| = 1, z_0 \neq 1, \text{ وجود دارد، به طوری که } |P(z_0)| = |Q(z_0)| \text{ ؟}$$

در حالت کلی جواب منفی است. به عنوان مثال، برای دو چندجمله‌ای خود معکوس

$$P(z) = z^3 - 2z^2 - 2z + 1, \quad Q(z) = z^2 - 7z + 1$$

هیچ z_0 ای، روی دایره واحد با شرایط فوق، وجود ندارد. زیرا $P(z)^2 - z^{m-n}Q(z)^2$ هیچ ریشه‌ای روی دایره واحد ندارد.

بنابراین، لازم است شرایطی را ذکر کنیم که جواب سؤال بالا مثبت شود.

قضیه بعد، شرایط کافی را جایی که $P(z)$ و $Q(z)$ ، دو چندجمله‌ای با درجه زوج باشند، بیان می‌کند. برای اثبات این

قضیه، به لم زیر نیاز داریم که در آن برای رده چندجمله‌ای‌های مثلثاتی حقیقی از درجه حداکثر n داریم

$$\|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p d\theta \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty$$

جایی که $f \in C(K)$ و $K := \mathbb{R}(\text{mod } 2\pi)$.

لم ۵.۲.۳. اگر T_n ، یک چندجمله‌ای مثلثاتی حقیقی از درجه حداکثر n و $0 < q \leq p \leq \infty$ ، آن‌گاه

$$\|T_n\|_p \leq \left(\frac{2rn + 1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|T_n\|_q$$

جایی که $r(q) := r$ ، کوچکترین عدد صحیح ناکمتر از $\frac{q}{\mathfrak{r}}$.

قضیه ۶.۲.۳. برای هر عدد زوج m و n ، فرض می‌کنیم

$$P(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k, \quad Q(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$$

چندجمله‌ای خودمعکوس صحیح باشند و $\deg P(z) = m \geq n = \deg Q(z)$ اگر داشته باشیم

$$(a_{\frac{m}{\mathfrak{r}}} - b_{\frac{n}{\mathfrak{r}}})^{\mathfrak{r}} < \frac{\wedge}{\mathfrak{r}m + \mathfrak{r}} \left[\sum_{k=1}^{\frac{n}{\mathfrak{r}}} (a_{\frac{m}{\mathfrak{r}}-k} - b_{\frac{n}{\mathfrak{r}}-k})^{\mathfrak{r}} + \sum_{k=\frac{n}{\mathfrak{r}}+1}^{\frac{m}{\mathfrak{r}}} a_{\frac{m}{\mathfrak{r}}-k}^{\mathfrak{r}} \right]$$

یا

$$(a_{\frac{m}{\mathfrak{r}}} + b_{\frac{n}{\mathfrak{r}}})^{\mathfrak{r}} < \frac{\wedge}{\mathfrak{r}m + \mathfrak{r}} \left[\sum_{k=1}^{\frac{n}{\mathfrak{r}}} (a_{\frac{m}{\mathfrak{r}}-k} + b_{\frac{n}{\mathfrak{r}}-k})^{\mathfrak{r}} + \sum_{k=\frac{n}{\mathfrak{r}}+1}^{\frac{m}{\mathfrak{r}}} a_{\frac{m}{\mathfrak{r}}-k}^{\mathfrak{r}} \right]$$

آن‌گاه $z \in \mathbb{C}$ وجود دارد با $|z| = 1$ به‌طوری‌که

$$|P(z)| = |Q(z)|$$

اثبات. عکس نقیض قضیه‌ی فوق را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم برای هر $z \in \mathbb{C}$ با $|z| = 1$ ، داشته باشیم

$$|P(z)| \neq |Q(z)|$$

قرار می‌دهیم

$$F(z) = F_1(z)F_{\mathfrak{r}}(z)$$

به‌طوری‌که

$$F_1(z) = P(z) - z^{\frac{m-n}{\mathfrak{r}}} Q(z), \quad F_{\mathfrak{r}}(z) = P(z) + z^{\frac{m-n}{\mathfrak{r}}} Q(z)$$

در نتیجه $F_1(z)$ و $F_{\mathfrak{r}}(z)$ ، هیچ ریشه‌ای روی U ندارند و درجه‌ی $F_1(z) = F_{\mathfrak{r}}(z) = m$ داریم

$$\frac{F_1(z)}{z^{\frac{m}{\mathfrak{r}}}} = \frac{P(z)}{z^{\frac{m}{\mathfrak{r}}}} - \frac{Q(z)}{z^{\frac{n}{\mathfrak{r}}}}$$

حال قرار می‌دهیم $z = e^{i\theta}$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{P(z)}{z^{\frac{m}{\gamma}}} &= a_{\frac{m}{\gamma}} + a_{\frac{m}{\gamma}-1} \left(z + \frac{1}{z} \right) + a_{\frac{m}{\gamma}-2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \dots + a_{\frac{1}{\gamma}} \left(z^{\frac{m}{\gamma}} + \frac{1}{z^{\frac{m}{\gamma}}} \right) \\ &= a_{\frac{m}{\gamma}} + 2 \left(a_{\frac{m}{\gamma}-1} \operatorname{Re} z + \dots + a_{\frac{1}{\gamma}} \operatorname{Re} z^{\frac{m}{\gamma}} \right) \\ &= a_{\frac{m}{\gamma}} + 2 \left(a_{\frac{m}{\gamma}-1} \cos(\theta) + \dots + a_{\frac{1}{\gamma}} \cos\left(\frac{m}{\gamma}\theta\right) \right)\end{aligned}$$

و به‌طور مشابه

$$\frac{Q(z)}{z^{\frac{n}{\gamma}}} = b_{\frac{n}{\gamma}} + 2 \left(b_{\frac{n}{\gamma}-1} \cos(\theta) + \dots + b_{\frac{1}{\gamma}} \cos\left(\frac{n}{\gamma}\theta\right) \right)$$

چون $F_{\gamma}(z)$ هیچ ریشه‌ای روی U ندارد

$$\begin{aligned}T(\theta) &:= \frac{F_{\gamma}}{z^{\frac{m}{\gamma}}} = \frac{P_{\gamma}(z)}{z^{\frac{m}{\gamma}}} - \frac{Q_{\gamma}}{z^{\frac{n}{\gamma}}} \\ &= \left(a_{\frac{m}{\gamma}} + 2 \left(a_{\frac{m}{\gamma}-1} \cos(\theta) + \dots + a_{\frac{1}{\gamma}} \cos\left(\frac{m}{\gamma}\theta\right) \right) \right) \\ &\quad - \left(b_{\frac{n}{\gamma}} + 2 \left(b_{\frac{n}{\gamma}-1} \cos(\theta) + \dots + b_{\frac{1}{\gamma}} \cos\left(\frac{n}{\gamma}\theta\right) \right) \right) \\ &= a_{\frac{m}{\gamma}} - b_{\frac{n}{\gamma}} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{\gamma}} (a_{\frac{m}{\gamma}-k} - b_{\frac{n}{\gamma}-k}) \cos(k\theta) \\ &\quad + 2 \sum_{k=\frac{n}{\gamma}+1}^{\frac{m}{\gamma}} a_{\frac{m}{\gamma}-k} \cos(k\theta)\end{aligned}$$

هیچ ریشه حقیقی ندارد. بدون کاستن از کلیت مسأله، می‌توان فرض کرد، T روی خط حقیقی مثبت قرار دارد. بنابراین داریم

$$\|T\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) d\theta = 2\pi(a_{\frac{m}{\gamma}} - b_{\frac{n}{\gamma}})$$

با استفاده از فرمول پارسوال^۳، همچنین داریم

$$\begin{aligned}\|T\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{\gamma} (a_{\frac{m}{\gamma}} - b_{\frac{n}{\gamma}})^2 \\ &\quad + 4\pi \left[\sum_{k=1}^{\frac{n}{\gamma}} (a_{\frac{m}{\gamma}-k} - b_{\frac{n}{\gamma}-k})^2 + \sum_{k=\frac{n}{\gamma}+1}^{\frac{m}{\gamma}} a_{\frac{m}{\gamma}-k}^2 \right]\end{aligned}$$

^۳Parseval formula

حال، با بکارگیری لم ۵.۲.۳، داریم

$$\|T\|_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}} \leq \left(\frac{m+1}{\mathfrak{V}\pi} \right) \|T\|_{\mathfrak{V}}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathfrak{V}}(a_{\frac{m}{\mathfrak{V}}} - b_{\frac{n}{\mathfrak{V}}})^{\mathfrak{V}} + \mathfrak{F} \left[\sum_{k=1}^{\frac{n}{\mathfrak{V}}} (a_{\frac{m}{\mathfrak{V}}-k} - b_{\frac{n}{\mathfrak{V}}-k})^{\mathfrak{V}} + \sum_{k=\frac{n}{\mathfrak{V}}+1}^{\frac{m}{\mathfrak{V}}} a_{\frac{m}{\mathfrak{V}}-k}^{\mathfrak{V}} \right] \\ & \leq \left(\frac{m+1}{\mathfrak{V}\pi} \right) \mathfrak{F}\pi (a_{\frac{m}{\mathfrak{V}}} - b_{\frac{n}{\mathfrak{V}}})^{\mathfrak{V}} = \mathfrak{V}(m+1)(a_{\frac{m}{\mathfrak{V}}} - b_{\frac{n}{\mathfrak{V}}})^{\mathfrak{V}} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$(a_{\frac{m}{\mathfrak{V}}} - b_{\frac{n}{\mathfrak{V}}})^{\mathfrak{V}} \geq \frac{\wedge}{\mathfrak{F}m + \mathfrak{V}} \left[\sum_{k=1}^{\frac{n}{\mathfrak{V}}} (a_{\frac{m}{\mathfrak{V}}-k} - b_{\frac{n}{\mathfrak{V}}-k})^{\mathfrak{V}} + \sum_{k=\frac{n}{\mathfrak{V}}+1}^{\frac{m}{\mathfrak{V}}} a_{\frac{m}{\mathfrak{V}}-k}^{\mathfrak{V}} \right]$$

و به‌طور مشابه، چون $F_{\mathfrak{V}}(z)$ ، هیچ ریشه‌ای روی U ندارد و با روند بالا داریم

$$(a_{\frac{m}{\mathfrak{V}}} + b_{\frac{n}{\mathfrak{V}}})^{\mathfrak{V}} \geq \frac{\wedge}{\mathfrak{F}m + \mathfrak{V}} \left[\sum_{k=1}^{\frac{n}{\mathfrak{V}}} (a_{\frac{m}{\mathfrak{V}}-k} + b_{\frac{n}{\mathfrak{V}}-k})^{\mathfrak{V}} + \sum_{k=\frac{n}{\mathfrak{V}}+1}^{\frac{m}{\mathfrak{V}}} a_{\frac{m}{\mathfrak{V}}-k}^{\mathfrak{V}} \right]$$

□

و اثبات کامل است.

فصل ۴

نامساوی‌های L^p برای چندجمله‌ای‌های خود معکوس

۱.۴ میانگین انتگرالی برای مشتق چندجمله‌ای‌های خود معکوس

در این فصل $M_p(g, \rho)$ را L^p تابع g روی دایره‌ای به شعاع ρ و به مرکز مبدأ، می‌نامیم. می‌دانیم ρ_n زیر رده‌ای از P_n است.

بنابراین، $f \in \rho_n$ اگر و فقط اگر $f \neq 0$ و $f \in P_n$ و $f(z) = z^n f(\frac{1}{z})$.

در این صورت، برای هر تابع تام F و $0 < r < \infty$ و $0 < p < \infty$ و

$$M_p(F, r) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.4)$$

با استفاده از یک نتیجه کلاسیکی از هاردی [۱۵]، $M_p(F, r)$ یک تابع اکیداً صعودی از r است، مگر اینکه F یک تابع ثابت

باشد. اگر $0 < r < \infty$ و $p \rightarrow \infty$ ، آن‌گاه

$$M_p(F, r) \longrightarrow \max_{|z|=r} |F(z)|$$

اگر و تنها اگر برای $0 < r < \infty$ ،

$$M_{\infty}(F, r) := \max_{|z|=r} |F(z)|. \quad (2.4)$$

همچنین، هاردی [۲۷] نشان داد که برای هر $0 < r < \infty$ و $p \rightarrow \infty$ آن‌گاه

$$M_p(F, r) \longrightarrow \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |F(re^{i\theta})| d\theta \right)$$

^۱G. H. Hardy

قرار می‌دهیم

$$M_*(F, r) := \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |F(re^{i\theta})| d\theta \right) \quad (۳.۴)$$

بنابراین هنگامی که F یک چندجمله‌ای باشد مقدار وابسته به $M_*(F, r)$ را اندازه لگاریتمی مهلر^۲ می‌نامیم.

با استفاده از قضیه یسنس^۳ یعنی

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |e^{i\theta} - a| d\theta = \begin{cases} 0 & |a| \leq 1 \\ \log |a| & |a| > 1 \end{cases}$$

می‌توان نشان داد که اگر F یک چندجمله‌ای به فرم $F(z) := a_m \prod_{\mu=1}^m (z - z_\mu)$ باشد به طوری که $F(0) \neq 0$ آن‌گاه

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |F(e^{i\theta})| d\theta = \log \frac{|F(0)|}{\prod_{|z_\mu| < 1} |z_\mu|}$$

لذا

$$\exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |F(e^{i\theta})| d\theta \right) = |a_m| \prod_{\mu=1}^m \max \{ |z_\mu|, 1 \}$$

و بنابراین

$$M_*(F, 1) = |a_m| \prod_{\mu=1}^m \max \{ |z_\mu|, 1 \} \quad (۴.۴)$$

اگر f متعلق به ρ_n باشد آن‌گاه $f^*(z) := z^n f(\frac{1}{z})$ نیز به ρ_n تعلق دارد. برای $R > 1$ و $p > 0$ داریم

$$M_p(f, R) = R^n M_p(f^*, \frac{1}{R}) \leq R^n M_p(f^*, 1) = R^n M_p(f, 1)$$

تذکر ۱.۱.۴. اگر f^* ثابت باشد آنگاه نامساوی بالا، به تساوی تبدیل می‌شود

بنابراین برای $1 < R < \infty$ و $0 < p \leq \infty$ ،

$$M_p(f, R) < R^n M_p(f, 1) \quad (۵.۴)$$

^۲logarithmic Mahler measure

^۳Jensen

و تساوی برای چندجمله‌ای $f(z) = cz^n$ برقرار است.

همچنین، اگر f یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n باشد و $0 < p \leq \infty$ آن‌گاه

$$M_p(f', 1) \leq n M_p(f, 1) \quad (0 < p \leq \infty) \quad (۶.۴)$$

و تساوی برای چندجمله‌ای $f(z) = cz^n$ برقرار است.

اگر در نامساوی (۶.۴)، $p = \infty$ ، آن‌گاه نامساوی (۶.۴)، همان نامساوی برنشتاین است. یعنی اگر f یک چندجمله‌ای از

درجه حداکثر n باشد که $M_\infty(f, 1) = 1$ آن‌گاه

$$M_\infty(f', 1) \leq n.$$

زیگموند^۴ [۲۸] نامساوی (۶.۴)، را برای $p \in [1, \infty)$ و ارسطو^۵ [۹] آن را برای حالت $0 < p < 1$ ثابت کرد.

چون $M_p(F, r)$ ، یک تابع غیر نزولی از p است نتیجه می‌دهد که برای هر چندجمله‌ای f از درجه حداکثر n ، به‌طوری‌که

$$M_\infty(f, 1) = 1$$

$$M_p(f', 1) \leq n \quad (0 \leq p < \infty)$$

بنابراین

$$\sup \left\{ \frac{M_p(f', 1)}{M_\infty(f, 1)} : f \in P_n, \quad f(z) \neq 0 \right\} = n \quad (0 \leq p \leq \infty) \quad (۷.۴)$$

یک چندجمله‌ای $f_* \in \rho_n$ ، وجود دارد به‌طوری‌که

$$M_\infty(f'_*, 1) \geq M_\infty(f_*, 1)(n - 1) \quad (۸.۴)$$

اگر $f(z) := \sum_{v=0}^n a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه n ، باشد به‌طوری‌که $a_n \neq 0$ آن‌گاه [۱۱]

$$M_\infty(f', 1) \leq M_\infty(f, 1) \left(n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)} \right) \quad (۹.۴)$$

^۴A. Zygmund

^۵V. V. Arestov

و به ویژه (۹.۴) برای هر $f \in \rho_n$ برقرار است.

در این بخش، به دنبال پاسخ دادن به سؤال مشابه (۱۷.۴) که توسط پرفسور رحمان، برای رده چندجمله‌ای ρ_n مطرح شد هستیم.

سؤال: برای هر $p \in [1, \infty]$ قرار می‌دهیم

$$k_{n,p} := \sup \left\{ \frac{M_p(f', 1)}{M_\infty(f, 1)} : f \in \rho_n \right\}$$

مقدار $k_{n,p}$ چیست؟

از (۸.۴) و (۹.۴) می‌دانیم

$$n - 1 \leq k_{n,\infty} \leq n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}.$$

برای یافتن پاسخ دقیق تر سوال فوق، در حالتی که p در $[1, 2]$ قرار دارد، به لم و قضیه زیر نیاز داریم.

لم ۲.۱.۴. اگر $f(z) := \sum_{v=0}^n a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n باشد به طوری که $a_0 = a_n$ آن‌گاه

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(e^{2k\pi i/n})|^2 = \sum_{v=0}^n |a_v|^2 + 2|a_0|^2 = \sum_{v=0}^n |a_v|^2 + 2|a_n|^2 \quad (10.4)$$

اثبات. برای هر θ حقیقی داریم

$$\begin{aligned} |f(e^{i\theta})|^2 &= f(e^{i\theta}) \overline{f(e^{i\theta})} = \sum_{v=0}^n a_v e^{iv\theta} \sum_{v=0}^n \overline{a_v} e^{-iv\theta} \\ &= (a_0 + a_1 e^{i\theta} + \dots + a_n e^{in\theta}) (\overline{a_0} + \overline{a_1} e^{-i\theta} + \dots + \overline{a_n} e^{-in\theta}) \\ &= (a_0 \overline{a_0} + a_0 \overline{a_1} e^{-i\theta} + \dots + a_0 \overline{a_n} e^{-in\theta}) + (a_1 \overline{a_0} e^{i\theta} + a_1 \overline{a_1} + \dots + a_1 \overline{a_n} e^{-(n-1)\theta}) \\ &\quad + \dots + (a_n \overline{a_0} e^{in\theta} + a_n \overline{a_1} e^{i(n-1)\theta} + \dots + a_n \overline{a_n}). \end{aligned} \quad (11.4)$$

قرار می‌دهیم

$$b_{\cdot} = \sum_{v=\cdot}^n |a_v|^2, \quad b_{-n} = a_{\cdot} \overline{a_n} = |a_{\cdot}|^2, \quad b_n = a_n \overline{a_{\cdot}} = |a_n|^2 \quad (12.4)$$

و

$$b_m = \sum_{\mu=\cdot}^{n-m} a_{m+\mu} \overline{a_{\mu}}, \quad b_{-m} = \overline{b_m} \quad (m = 1, 2, \dots, n-1)$$

حال w را ریشه n ام یک، تعریف می‌کنیم یعنی $w^n = 1$ و داریم

$$w := e^{\imath m \pi i / n}$$

جایی که $m \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1)\}$ چون $w \neq 1$ لذا

$$\sum_{k=\cdot}^{n-1} (e^{\imath m \pi i / n})^k = \sum_{k=\cdot}^{n-1} w^k = \frac{1 - w^n}{1 - w} = \cdot, \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1)) \quad (13.4)$$

حال با استفاده از (۱۱.۴)، (۱۲.۴) و (۱۳.۴) داریم

$$\begin{aligned} \sum_{k=\cdot}^{n-1} |f(e^{\imath k \pi i / n})|^2 &= b_{-n} \sum_{k=\cdot}^{n-1} (e^{-\imath k \pi i}) + b_n \sum_{k=\cdot}^{n-1} (e^{\imath k \pi i}) + \sum_{k=\cdot}^{n-1} b_{\cdot} \\ &\quad + \sum_{m=-n+1, m \neq \cdot}^{n-1} b_m \sum_{k=\cdot}^{n-1} (e^{\imath m \pi i / n})^k \\ &= nb_{-n} + nb_n + nb_{\cdot} = n \sum_{v=\cdot}^n |a_v|^2 + 2n |a_{\cdot}|^2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{n} \sum_{k=\cdot}^{n-1} |f(e^{\imath k \pi i / n})|^2 = \sum_{v=\cdot}^n |a_v|^2 + 2 |a_{\cdot}|^2$$

□

قضیه ۳.۱.۴. اگر $a_v z^v := f(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n باشد به‌طوری‌که

$$f(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$$

. علاوه بر آن قرار می‌دهیم $M_p(\cdot, \cdot)$ و $M_\infty(\cdot, \cdot)$ را همانطور که در (۱.۴) و (۲.۴) تعریف شد، آن‌گاه

$$M_p(f', 1) \leq \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} |f(e^{2k\pi i/n})|^2 - 2|a_0|^2} \quad (0 \leq p \leq 2) \quad (14.4)$$

و همچنین

$$M_p(f', 1) \leq \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{(M_\infty(f, 1))^2 - 2|a_0|^2} \quad (0 \leq p \leq 2) \quad (15.4)$$

اثبات. قضیه را در ۳ گام، ثابت می‌کنیم.

گام اول: ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $f(z) := \sum_{v=0}^n a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n باشد، به‌طوری‌که

$$|a_v| = |a_{n-v}| \quad (v = 0, 1, \dots, n) \quad (16.4)$$

آن‌گاه

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{n^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

بوضوح

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{v=0}^n |a_v|^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{v=0}^n v^2 |a_v|^2 \quad (17.4)$$

حال، با استفاده از (۱۷.۴) و $|a_v| = |a_{n-v}|$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(e^{i\theta})|^2 d\theta &= \sum_{v=0}^n v^2 |a_v|^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{v=0}^n v^2 |a_v|^2 + \sum_{v=0}^n v^2 |a_{n-v}|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v=0}^n \{v^2 + (n-v)^2\} |a_v|^2 \\ &\leq \frac{n^2}{2} \sum_{v=0}^n |a_v|^2 = \frac{n^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \end{aligned}$$

گام دوم : با استفاده از (۱۷.۴) و لم ۱.۱.۴ خواهیم داشت

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{v=0}^n |a_v|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(e^{\sqrt[n]{k}\pi i})|^2 - 2|a_0|^2$$

لذا

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{n^2}{2} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(e^{\sqrt[n]{k}\pi i/n})|^2 - 2|a_0|^2$$

بنابراین

$$M_2(f', 1) \leq \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(e^{\sqrt[n]{k}\pi i/n})|^2 - 2|a_0|^2} \quad (18.4)$$

گام سوم: سرانجام برای $0 \leq p \leq 2$ داریم $M_p(f', 1) \leq M_2(f', 1)$ و چون $M_p(f', 1)$ یک تابع غیر نزولی از p است

لذا

$$M_p(f', 1) \leq \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(e^{\sqrt[n]{k}\pi i/n})|^2 - 2|a_0|^2} \quad (0 \leq p \leq 2)$$

□

نکته ۴.۱.۴. چندجمله‌ای $f(z) := z^n + 1$ ، نشان می‌دهد نامساوی‌های (۱۴.۴) و (۱۵.۴)، برای هر $p \in [0, 2]$ اکید است.

اگر $|f(e^{\sqrt[n]{k}\pi i/n})| \leq 1$ برای $k = 0, 1, \dots, n-1$ ، آن‌گاه $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(e^{\sqrt[n]{k}\pi i/n})|^2 \leq 1$ خواهد بود، بنابراین

نامساوی (۱۴.۴)، شامل نتیجه زیر است که قوی تر از نامساوی (۱۵.۴) می‌باشد.

نتیجه ۵.۱.۴. اگر $f(z) := \sum_{v=0}^n a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n باشد به‌طوری‌که

$$f(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$$

علاوه بر آن، برای $k = 0, 1, \dots, n-1$ ، $|f(e^{\sqrt[n]{k}\pi i/n})| \leq 1$ ، آن‌گاه

$$M_p(f', 1) \leq \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 2|a_0|^2} \quad (0 \leq p \leq 2)$$

نکته ۶.۱.۴. برای مثال، چندجمله‌ای $f(z) := (z^n + 1)/2$ ، نشان می‌دهد که نامساوی فوق، برای هر $p \in [0, 2]$ اکید می‌باشد.

نتیجه ۷.۱.۴. اگر $g(z) := \sum_{v=0}^n c_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n ، با ضرایب مختلط باشد، علاوه بر آن برای هر $p \in (0, \infty)$ قرار می‌دهیم

$$I_{p,1} := \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left| ng(x) + i\sqrt{1-x^2}g'(x) \right|^p \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

9

$$I_{p,2} := \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left| ng(x) - i\sqrt{1-x^2}g'(x) \right|^p \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

آن‌گاه برای هر $p \in [0, 2]$ داریم:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{I_{p,1} + I_{p,2}}{2} \right)^{1/p} \\ & \leq n \sqrt{\frac{1}{n} \left\{ |g(1)|^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left| g\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right) \right|^2 + |g(-1)|^2 \right\} - \left(\frac{|c_n|}{2^{n-1}} \right)^2} \end{aligned} \quad (19.4)$$

به ویژه، اگر $|g(x)| \leq 1$ ، در نقاط $x_k := \cos(k\pi)$ وقتی $k = 0, 1, \dots, n$ آن‌گاه برای هر $p \in (0, 2]$ داریم

$$\left(\frac{I_{p,1} + I_{p,2}}{2} \right)^{1/p} \leq n \sqrt{2 - \left(\frac{|c_n|}{2^{n-1}} \right)^2} \quad (20.4)$$

تساوی در (۱۹.۴) و (۲۰.۴) برای چندجمله‌ای چیبیشف نوع اول مرتبه n ، $T_n(x) := \cos(n \arccos x)$ برقرار است.

اثبات. چندجمله‌ای $f(z)$ ، از مرتبه $2n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(z) := z^n g\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)$$

بوضوح $f(z)$ ، به ρ_{2n} تعلق دارد. همانطور که می‌دانیم

$$\rho_{2n} = \left\{ f \neq 0 \mid f(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right), \quad 2n \text{ از درجه‌ی حداکثر} \right\}$$

می‌توان $f(z)$ را به صورت $\sum_{v=0}^{2n} a_v z^v$ ، $f(z) := \sum_{v=0}^{2n} a_v z^v$ ، در نظر گرفت به طوری که $a_{2n} = a_0 = \frac{c_n}{2^n}$. چون

$$f(e^{i\theta}) = e^{in\theta} g(\cos \theta)$$

لذا

$$|f'(e^{i\theta})| = |ing(\cos \theta) + g'(\cos \theta)(-\sin \theta)|$$

و در نتیجه

$$M_p(f', 1) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |ng(\cos \theta) + i(\sin \theta)g'(\cos \theta)|^p d\theta \right)^{1/p}$$

حال اگر در قضیه ۳.۱.۴، به جای n ، $2n$ قرار دهیم، برای هر $p \in (0, 2]$ ، داریم

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |ng(\cos \theta) + i(\sin \theta)g'(\cos \theta)|^p d\theta \right)^{1/p} \\ & \leq n \left[\frac{1}{n} \left\{ |g(1)|^2 + 2 \sum_{k=1, k \neq n}^{2n-1} \left| g\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right) \right|^2 + |g(-1)|^2 \right\} - \left(\frac{|c_n|}{2^{n-1}} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

زیرا

$$2|a_0|^2 = 2|a_{2n}|^2 = 2 \left(\frac{c_n}{2^{n-1}} \right)^2$$

و

$$\left(\frac{I_{p,1} + I_{p,2}}{2} \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |ng(\cos \theta) + i(\sin \theta)g'(\cos \theta)|^p d\theta \right)^{1/p}$$

بنابراین

$$\sum_{k=1}^{n-1} |f(e^{2k\pi i/n})|^2 = |g(1)|^2 + 2 \sum_{k=1, k \neq n}^{2n-1} \left| g\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right) \right|^2 + |g(-1)|^2$$

□

نکته ۸.۱.۴. چون

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

مقدار وابسته به $\left(\frac{I_{p,1} + I_{p,2}}{2}\right)^{1/p}$ ، میانگین انتگرال وزنی^۶ از

$$\frac{1}{2} \left\{ \left| ng(x) + i\sqrt{1-x^2}g'(x) \right|^p + \left| ng(x) - i\sqrt{1-x^2}g'(x) \right|^p \right\}$$

گفته می‌شود.

۲.۴ میانگین انتگرالی برای چندجمله‌ای‌های خود معکوس بر روی $|z| = R$ هنگامی که $R \rightarrow \infty$

یادآوری ۱.۲.۴. در ابتدای فصل ۴، دیدیم اگر $f(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$ ، یک چندجمله‌ای، متعلق به ρ_n ، باشد آن‌گاه

$$M_\infty(f', 1) \leq M_\infty(f, 1) \left(n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)} \right)$$

از طرف دیگر، چندجمله‌ای $f(z) \in \rho_n$ ، وجود دارد [۱۲] به‌طوری‌که

$$M_\infty(f', 1) \geq (n-1)M_\infty(f, 1).$$

حال، می‌خواهیم مقدار

$$A_n := \sup \{ M_\infty(f'; 1) : f \in \rho_n, \quad M_\infty(f; 1) = 1 \}$$

را وقتی $r > 1$ ، بدست آوریم. برای این منظور قرار می‌دهیم

$$B_n(r) := \sup \{ M_\infty(f; 1) : f \in \rho_n, \quad M_\infty(f; 1) = 1 \} \quad (21.4)$$

واضح است که

^۶weighted integral mean

$$B_n(r) = r^n B_n\left(\frac{1}{r}\right) \quad (r > 0).$$

نکته ۲.۲.۴. f به ρ_1 تعلق دارد اگر $f(z)$ مضرب ثابتی از $1 + z$ باشد.

برای هر $R > 1$

$$B_1(R) = (R + 1)/2$$

و

$$B_2(R) = (R^2 + 1)/2$$

اگر قرار دهیم $f \in \rho_1$ ، در نتیجه $f(z) := a_1(1 + z)$ ، جایی که $a_1 \in \mathbb{C}$ ، بنابراین ماکزیمم قدر مطلق $|f(z)|$ بر روی دایره $|z| = r$ مساوی با $|a_1|(r + 1)$ خواهد بود. لذا:

$$\max_{|z|=R} |f(z)| = |a_1|(R + 1) = \frac{R + 1}{2} \max_{|z|=1} |f(z)|$$

حال اگر، $f \in \rho_2$ باشد آن‌گاه $f(z) := a_2(z^2 + 1) + (\alpha_1 + i\beta_1)z$ ، جایی که α_1 و β_1 حقیقی و $a_2 = \alpha_2 + i\beta_2$

. برای تمام θ های حقیقی داریم

$$|f(e^{i\theta})| = |2a_2 \cos \theta + \alpha_1 + i\beta_1| \leq \sqrt{4a_2^2 + 4a_2|\alpha_1| + |\alpha_1|^2} = \begin{cases} f(1) & \alpha_1 \geq 0 \\ f(-1) & \alpha_1 \leq 0 \end{cases}$$

بنابراین

$$\max_{|z|=1} |f(z)| = \sqrt{4a_2^2 + 4a_2|\alpha_1| + |\alpha_1|^2}$$

علاوه بر آن، برای $R > 1$ و $\theta \in \mathbb{R}$ ، داریم

$$\begin{aligned}
 |f(Re^{i\theta})|^2 &= \left(\frac{R^2 + 1}{2} \right)^2 |a_1|^2 - \left(2a_1 R \sin \theta - \frac{1}{2} \beta_1 (R^2 - 1) \right)^2 \\
 &\quad + |a_1|^2 R^2 + \frac{1}{4} \beta_1^2 (R^2 - 1)^2 + 2a_1 \alpha_1 R (R^2 + 1) \cos \theta \\
 &\leq \left(\frac{R^2 + 1}{2} \right)^2 |a_1|^2 + |a_1|^2 R^2 + \frac{1}{4} \beta_1^2 (R^2 - 1)^2 + 2a_1 |\alpha_1| R \frac{R^2 + 1}{2} \\
 &\leq \left(\frac{R^2 + 1}{2} \right)^2 (|a_1|^2 + 2a_1 |\alpha_1| + |a_1|^2) = \left(\frac{R^2 + 1}{2} \right)^2 \max_{|z|=1} |f(z)|^2
 \end{aligned} \tag{۲۲.۴}$$

بنابراین

$$B_2(R) = (R^2 + 1)/2$$

برای هر $n \geq 3$ یک چندجمله‌ای $f \in \rho_n$ وجود دارد [۲۶] که

$$M_\infty(f, R) \geq \frac{R^n + R^{n-2}}{2} M_\infty(f, 1) \quad (R > 1)$$

و بنابراین

$$B_n(R) \geq \frac{R^n + R^{n-2}}{2} \quad (R > 1, n = 3, 4, \dots)$$

لذا یک کران بالا برای $B_n(R)$ بدست آورده‌ایم.

فراپیر و رحمان [۱۰] با بیان قضیه زیر، در صدد یافتن اینفیمم مقدار $\frac{M_\infty(f, R)}{M_\infty(f, 1)}$ ، بر روی چندجمله‌ای‌های f متعلق به

ρ_n بودند.

قضیه ۳.۲.۴. قرار می‌دهیم

$$\psi(t) := \frac{1 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} t^{-2v^2}}{2 \sum_{v=0}^{\infty} t^{-(2v+1)^2/2}} \quad (t > 1)$$

آن‌گاه، برای هر $f \in \rho_n$ و $R > 1$ داریم

$$\frac{M_\infty(f, R)}{M_\infty(f, 1)} \geq \begin{cases} R^{(n/2)} \psi(R) & \text{فرد } n \\ R^{(n/2)} & \text{زوج } n \end{cases}$$

حال قرار می‌دهیم $p \in [0, \infty)$ و $R \in (1, \infty)$ ، در مقایسه با قضیه فوق، ما نیز به دنبال یافتن اینفیمم مقدار

$$\frac{M_p(f, R)}{M_p(f, 1)}, \text{ وقتی } f \text{ متعلق به } \rho_n \text{ است، می‌باشیم.}$$

در ابتدا، حالت $p = 0$ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۴.۲.۴. قرار می‌دهیم $M_0(F, r)$ همانگونه که در (۳.۴) تعریف شد. آن‌گاه برای هر $f \in \rho_n$ و هر $R > 1$ ، داریم

$$M_0(f, R) \geq M_0(f, 1) \begin{cases} R^{n/2} & \text{زوج } n \\ R^{(n+1)/2} & \text{فرد } n \end{cases} \quad (۲۳.۴)$$

اثبات. فرض می‌کنیم $z = -1$ از $f(z) \equiv z^n f(\frac{1}{z})$ داریم

$$f(-1) = (-1)^n f(-1)$$

اگر n فرد باشد $f(-1) = -f(-1)$ بنابراین درحالتی که n فرد است، چندجمله‌ای $f \in \rho_n$ ، در -1 باید صفر شود.

چون $f(z) \equiv z^n f(\frac{1}{z})$ ، مرتبه تکرار هر ریشه از چندجمله‌ای f ، اگر n زوج باشد نمی‌تواند بیشتر از $\frac{n}{2}$ و اگر n فرد باشد،

نمی‌تواند بیشتر از $\frac{(n-1)}{2}$ باشد. بنابراین f باید به فرم زیر باشد

$$f(z) := \sum_{v=l}^{n-l} a_v z^v = z^l \sum_{v=l}^{n-l} a_v z^{v-l}$$

جایی که $0 \leq l \leq \frac{n}{2}$ و همچنین اگر n فرد باشد $0 \leq l \leq \frac{n-1}{2}$.

حال $\varphi(z)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi(z) := z^{-l} f(z)$$

ابتدا فرض می‌کنیم بر روی $1 < |z|$ ، $\varphi(z) \neq 0$ سپس با استفاده از (۴.۴) داریم

$$M.(f, 1) = |a_{n-l}|$$

همچنین برای هر $1 < R$ ، $\varphi(Rz) \neq 0$ با استفاده مجدد از (۴.۴) داریم

$$M.(f, R) = R^l M.(\varphi, R) = |a_{n-l}| R^{n-l} = M.(f, 1) R^{n-l}$$

چون

$$l \leq \begin{cases} n/2 & \text{زوج } n \\ (n-1)/2 & \text{فرد } n \end{cases}$$

در این حالت نتیجه مورد نظر برقرار است.

حالتی را در نظر می‌گیریم که برخی از ریشه‌های φ بیرون دیسک واحد بسته باشد. این ریشه‌ها را $\{z_j\}_{j=1}^k$ می‌نامیم با

شمردن چندگانگی (احتمالا تکراری) از (۴.۴) داریم

$$M.(f, 1) = |a_{n-l}| \prod_{j=1}^k |z_j| \quad (24.4)$$

چون $f(Rz) = \sum_{v=l}^{n-l} a_v R^v z^v$ و $\{z_j/R\}_{j=1}^k$ تنها ریشه‌های بزرگتر از یک آن می‌باشد، لذا با بکارگیری دوباره از (۴.۴)

خواهیم داشت

$$M.(f, R) = |a_{n-l}| R^{n-l-k} \prod_{j=1}^k \left(R \max \left\{ \left| \frac{z_j}{R} \right|, 1 \right\} \right)$$

حال چون

$$R \max \left\{ \left| \frac{z_j}{R} \right|, 1 \right\} = R \left| \frac{z_j}{R} \right| = |z_j| \geq R$$

و اگر $|z_j| < R$

$$R \max \left\{ \left| \frac{z_j}{R} \right|, 1 \right\} = R > |z_j|$$

بنابراین

$$M_*(f, R) \geq R^{n-l-k} |a_{n-l}| \prod_{j=1}^k |z_j| \quad (25.4)$$

از (۲۴.۴) و (۲۵.۴) نتیجه می‌گیریم

$$M_*(f, R) \geq R^{n-l-k} M_*(f, 1)$$

حال چون

$$l + k \leq \begin{cases} n/2 & n \text{ زوج} \\ (n-1)/2 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

□

بنابراین (۲۳.۴)، در حالتی که برخی ریشه‌های φ بیرون دیسک واحد بسته باشد نیز برقرار است.

نکته ۵.۲.۴. تساوی در (۲۳.۴)، وقتی n زوج باشد برای ضرایب ثابت $z^{n/2}$ و وقتی n فرد باشد، برای ضرایب ثابت

$$z^{(n-1)/2} (z + 1)$$

برقرار است.

در حالتی که $p \in (0, \infty)$ ، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۶.۲.۴. برای هر $p \in (0, \infty)$ ، فرض کنیم $M_p(F, r)$ همانگونه که در (۱.۴) تعریف شد، برای هر $f \in \rho_n$ ، داریم

$$M_p(f, R) \geq R^{n/p} M_p(f, 1) \quad (R > 1) \quad (26.4)$$

نامساوی فوق، برای هر $p \in (0, \infty)$ و هر $R > 1$ درجایی که n زوج باشد، اکید است.

اثبات. با استفاده از یک نتیجه کلاسیکی هاردی [۱۵]، $\log M_p(f, r)$ یک تابع محدب از r برای هر تابع تام f است. یعنی

برای $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \infty$ داریم

$$\frac{\log M_p(f, r_3) - \log M_p(f, r_2)}{\log r_3 - \log r_2} \geq \frac{\log M_p(f, r_2) - \log M_p(f, r_1)}{\log r_2 - \log r_1}$$

به ویژه، اگر $R > 1$ باشد، قرار می‌دهیم

$$r_1 = \frac{1}{R}, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = R$$

لذا با جایگذاری مقادیر فوق داریم

$$\frac{\log \frac{M_p(f, r_3)}{M_p(f, r_2)}}{\log \frac{r_3}{r_2}} = \frac{\log \frac{M_p(f, R)}{M_p(f, 1)}}{\log \frac{R}{1}} \geq \frac{\log \frac{M_p(f, r_2)}{M_p(f, r_1)}}{\log \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\log \frac{M_p(f, 1)}{M_p(f, 1/R)}}{\log \frac{1}{1/R}}$$

لذا

$$\frac{M_p(f, R)}{M_p(f, 1)} \geq \frac{M_p(f, 1)}{M_p(f, 1/R)}$$

بنابراین برای هر تابع تام f ، داریم

$$M_p(f, 1) \leq \sqrt{M_p(f, R) M_p(f, 1/R)} \quad (1 < p < \infty; R > 1) \quad (27.4)$$

چون $f \in \rho_n$ است یعنی $f(z) \equiv z^n f(1/z)$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} M_p(f, \frac{1}{R}) &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(\frac{1}{R} e^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(\frac{1}{R} e^{i\theta}\right)^n f(R e^{-i\theta}) \right|^p d\theta \right)^{1/p} \\ &= \frac{1}{R^n} M_p(f, R) \end{aligned}$$

از (۲۷.۴) نتیجه می‌شود که

$$M_p(f, 1) \leq \frac{1}{R^{n/2}} M_p(f, R) \quad (R > 1)$$

□

لذا اثبات کامل است.

نکته ۷.۲.۴. تساوی در (۲۶.۴) برای چندجمله‌ای $f(z) = z^{n/2}$ جایی که n زوج است، برقرار می‌باشد.

نکته ۸.۲.۴. اگر n فرد و f یک چندجمله‌ای متعلق به ρ_n باشد، آن‌گاه $g(z) := f(z)/(z+1)$ یک چندجمله‌ای از

درجه‌ی $n-1$ خواهد بود که متعلق به ρ_{n-1} است. با بکارگیری نامساوی (۲۶.۴) برای g وقتی $0 < p < \infty$ و $R > 1$

داریم

$$M_p(g, R) \geq R^{(n-1)/2} M_p(g, 1) \quad (R > 1)$$

لذا

$$\begin{aligned} M_p(f, R) &\geq (R-1) M_p(g, R) \geq (R-1) R^{(n-1)/2} M_p(g, 1) \\ &\geq \frac{R^{(n+1)/2} - R^{(n-1)/2}}{2} M_p(f, 1) \end{aligned}$$

بنابراین درحالتی که n فرد است، نامساوی (۲۶.۴) را می‌توان با نامساوی زیر جایگزین کرد

$$M_p(f, R) \geq \max \left\{ R^{n/2}, \frac{R^{(n+1)/2} - R^{(n-1)/2}}{2} \right\} M_p(f, 1) \quad (28.4)$$

قضیه زیر صورت دقیق‌تر نامساوی فوق را، درحالتی که $p = 2$ ، بیان می‌کند.

قضیه ۹.۲.۴. اگر n فرد باشد، برای هر $f \in \rho_n$ داریم

$$M_2(f, R) \geq \left(\frac{R^{n+1} + R^{n-1}}{2} \right)^{1/2} M_2(f, 1) \quad (R > 1) \quad (29.4)$$

نامساوی فوق، برای هر $R > 1$ اکید است.

اثبات. قرار می‌دهیم $f(z) := \sum_{v=0}^n a_v z^v$ ، متعلق به ρ_n ، لذا برای هر $v = 0, 1, \dots, n$ بنا براین $a_v = a_{n-v}$

$$\begin{aligned} M_2^*(f, R) &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(Re^{i\theta})|^2 d\theta \right) = \sum_{v=0}^n |a_v|^2 R^{2v} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{v=0}^n |a_v|^2 R^{2v} + \sum_{v=0}^n |a_{n-v}|^2 R^{2v} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{v=0}^n |a_v|^2 R^{2v} + \sum_{v=0}^n |a_v|^2 R^{2(n-v)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v=0}^n |a_v|^2 (R^{2v} + R^{2(n-v)}) \end{aligned}$$

ادعا می‌کنیم

$$R^{\gamma v} + R^{\gamma n - \gamma v} \geq R^{n+1} + R^{n-1} \quad (v = 0, 1, \dots, n; R > 1) \quad (30.4)$$

نامساوی (30.4) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$R^{n+1}(R^{n-1-\gamma v} - 1) - R^{\gamma v}(R^{n-1-\gamma v} - 1) \geq 0$$

$$(R^{n+1} - R^{\gamma v})(R^{n-1-\gamma v} - 1) \geq 0$$

برای $v = 0, \dots, \frac{n-1}{\gamma}$ ، عامل‌های سمت چپ نامساوی بالا، هر دو نامنفی اند و همچنین برای $v = \frac{n+1}{\gamma}, \dots, n$ ، هر دوی

این عامل‌ها نامثبت اند لذا نامساوی (30.4)، برقرار است بنابراین

$$\begin{aligned} M_{\gamma}^{\gamma}(f, R) &= \frac{1}{\gamma} \sum_{v=0}^n |a_v|^{\gamma} (R^{\gamma v} + R^{\gamma n - \gamma v}) \geq \frac{R^{n+1} + R^{n-1}}{\gamma} \sum_{v=0}^n |a_v|^{\gamma} \\ &= \frac{R^{n+1} + R^{n-1}}{\gamma} M_{\gamma}^{\gamma}(f, 1) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$M_{\gamma}(f, R) \geq \frac{R^{n+1} + R^{n-1}}{\gamma} M_{\gamma}(f, 1)$$

□

نکته ۱۰.۲.۴. تساوی در (۲۹.۴)، برای ضرایب ثابت $z^{(n+1)/\gamma} + z^{(n-1)/\gamma}$ ، برقرار است.

نکته ۱۱.۲.۴. می‌دانیم برای هر $f \in \rho_n$

$$M_p(f, r) = r^n M_p(f, \frac{1}{r}) \quad (0 < r < \infty; 0 \leq p < \infty)$$

کران‌های پایینی که از قضیه‌های ۴.۲.۴، ۶.۲.۴ و ۹.۲.۴، برای $\frac{M_p(f, R)}{M_p(f, 1)}$ وقتی $R > 1$ بدست آمد، کران پایینی، برای

وقتی $0 < \rho < 1$ ، محسوب خواهد شد. $\frac{M_p(f, \rho)}{M_p(f, 1)}$

بنابراین، از قضیه ۴.۲.۴، نتیجه می‌گیریم که برای هر $f \in \rho_n$ و هر $\rho \in (0, 1)$ داریم

$$M_*(f, \rho) \geq M_*(f, 1) \begin{cases} \rho^{n/2} & \text{اگر } n \text{ زوج} \\ \rho^{(n+1)/2} & \text{اگر } n \text{ فرد} \end{cases}$$

به‌طور مشابه، از قضیه ۶.۲.۴، نتیجه می‌شود که برای هر $f \in \rho_n$ و هر $p \in (0, \infty)$ داریم

$$M_p(f, \rho) \geq \rho^{n/2} M_p(f, 1) \quad (0 < p < 1).$$

و همچنین از قضیه ۹.۲.۴، نتیجه می‌شود، اگر n فرد باشد، آن‌گاه برای هر $f \in \rho_n$ داریم

$$M_2(f, \rho) \geq \left(\frac{\rho^{n+1} + \rho^{n-1}}{2} \right)^{1/2} M_2(f, 1) \quad (0 < \rho < 1).$$

مراجع

- [1] N. C. Ankeney and T. J. Rivlin, On a theorem of S. Bernstein, Pacific J. Math. 5 (1955), 849-852.
- [2] V. V. Arestov, On integral inequalities for trigonometric polynomials and their derivatives, Math. USSR Izv. 18 (1982), 1-17, Izv. Akad. Nauk SSR, Ser. Mat. 45 (1981), 3-22.
- [3] A. Aziz and B. A. Zargar, Some inequalities for self-reciprocal polynomials, J. Pure appl Math, 27(8) (1996), 791-794.
- [4] A. Aziz and Q. M. Dawood, Inequalities for a polynomial and its derivative, J. Approx. Theory, 53 (1988), 155-162.
- [5] S. Bernstein, Lecons sur les Proprietes Extremales et la Meilleure Approximation des Fonctions Analytiques d'une Fonction Reelle, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [6] P. Borwein, T. Erdélyi, Polynomials and Polynomial Inequalities, Grad. Texts in Math., Springer, New York, 1991.
- [7] Y. Choo, On the zeros of a family of self-reciprocal polynomials, J. Math. Analysis. Vol. 5 (2011), 1761-1766.
- [8] A. Cohn, Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise, Math. Z. 14 (1922), 110-148.
- [9] H. J. Fell, On the zeros of convex combinations of polynomials, Pacific J. Math, 89 (1980), 43-50.
- [10] C. Frappier and Q. I. Rahman, On an inequality of S. Bernstein, Canad. J. Math. 34 (1982), 932-944.
- [11] C. Frappier and Q. I. Rahman and St. Ruscheweyh, Inequalities for polynomials with two equal coefficients, J. Approx. Theory, 44 (1985), 73-81.
- [12] C. Frappier and Q. I. Rahman and St. Ruscheweyh, New inequalities for polynomials, Trans. Amer. Math. Soc, 288 (1985), 69-99.
- [13] N. K. Govil and A. Liman and W. M. Shah, Some inequalities concerning derivative and maximum modulus of polynomials, The Australian. J. Math. Analysis. Appl (2011), 1-8.
- [14] N. K. Govil and V. K. Jain and G. Labelle, Inequalities for polynomials satisfying $p(z) \equiv z^n p(1/z)$, Amer. Math. soc (1976), 238-242.

- [15] G. H. Hardy, On the mean value of the modulus of an analytic function, Proc. London Math. Soc, (2) 14 (1915) 269-277.
- [16] S. H. Kim and Ch. Woo Park, On the zeros of certain self-reciprocal polynomials, J. Math. Anal. Appl, 339 (2008), 240-247.
- [17] S. H. Kim, On self-reciprocal polynomials at a point on the unit circle, Bull. Korean Math. Soc, 46 (2009), 1153-1158.
- [18] S. H. Kim, The zeros of certain family of self-reciprocal polynomials, Bull. Korean Math. Soc, 44 (2007), 461-473.
- [19] P. Lakatos, On zeros of reciprocal polynomials, Publ. Math. Debrecen, 61 (2002), 645-661.
- [20] P. Lakatos and L. Losonczi, On zeros of reciprocal polynomials of odd degree, J. Inequal. Pure Appl. Math. 4(3) Art. 60 (2003) 8 pp.
- [21] P. D. Lax, Proof of a conjecture of P. Erdos, On the derivative of a polynomial, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), 509-466.
- [22] M. A. Malik, On the derivative of a polynomial, J. London Math. Soc, (1969) 57-60.
- [23] M. Marden, Geometry of Polynomials, Math. Surveys, No. 3, Amer. Math. Society, Providence, RI. 1966.
- [24] M. A. Qazi, An L^p inequality for self-reciprocal polynomials, J. Math. Appl. 329 (2007) 1204-1211.
- [25] M. A. Qazi, An L^p inequality for self-reciprocal polynomials, Australian Math. appl. (2011), 1-7.
- [26] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, Analytic Theory of Polynomials, London Math. Soc. Monogr. (N. S.), vol. 26, Clarendon Press, Oxford, (2002).
- [27] P. Turan, Uber die ableitung von polynomen, Compositio Math, 7 (1939), 89-95.
- [28] A. Zygmund, A remark on conjugate series, Proc. London Math. Soc. (2) 34 (1932), 392-400.

فهرست الفبایی

اینشترم-کاکایا ، ۳

آنکنی، ۶

اردوش، ۵

ارسطو، ۴۸

اندازه لگاریتمی مهلر ، ۴۷

برنشتاین، ۴

توران، ۶

خود معکوس، ۲

داوود، ۲۶

رحمان، ۱۱

روشه، ۳

ریولین، ۶

زیگموند ، ۴۸

عزیز، ۲۶

فیل، ۳۱

لوسنزی، ۳۰

لکس، ۵

مالیک، ۶

میانگین انتگرال وزنی، ۵۵

هاردی، ۴۶

پارسوال، ۴۴

چند جمله ای مینیمال، ۳

چندجمله‌ای مثلثاتی، ۲

کوهن، ۴

گائوس - لوکاس، ۴

ینسن ، ۴۷

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Principle	اصل
Strictly	اکیداً
Measure	اندازه
Obtain	بدست آوردن
Refinement	بهبود
Entire Function	تابع تام
Analytic Function	تابع تحلیلی
Chebyshev transformation	تبدیل چیبیشف
Analytic	تحلیلی
Estimate	تخمین زدن
Generalization	تعمیم
Polynomial	چندجمله‌ای
Trigonometric polynomial	چندجمله‌ای مثلثاتی
Minimal polynomial	چندجمله‌ای مینیمال
Self inverse	خودمعکوس
Degree	درجه
Class	رده
Zero	ریشه
Even	زوج
Vanish	صفر شدن
Real Coefficients	ضرایب حقیقی
Positive Coefficients	ضرایب مثبت
Complex Coefficients	ضرایب مختلط
Odd	فرد
Hypothesis	فرضیات
Parseval Formula	فرمول پارسوال
Modulus	قدر مطلق
Enestrom-Kakeya Theorem	قضیه انستروم کاکیا
Bound	کران
Maximum Modulus	ماکزیمم قدر مطلق
Origin	مبدأ
Convex	محدب

Complex	مختلط
Derivative	مشتق
Equivalent	معادل
Integral mean	میانگین انتگرالی
Region	ناحیه
Inequality	نامساوی
Unit	یکه

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Analytic	تحلیلی
Analytic Functions	تابع تحلیلی
Bound	کران
Chebyshev transformation	تبدیل چیبیشف
Class	رده
Complex	مختلط
Complex Coefficients	ضرایب مختلط
Convex	محدب
Degree	درجه
Derivative	مشتق
Enestrom-Kakeya Theorem	قضیه انشتروم کاکیا
Entire Functions	تابع تام
Equivalent	معادل
Estimate	تخمین زدن
Even	زوج
Generalization	تعمیم
Hypothesis	فرضیات
Inequality	نامساوی
Integral mean	میانگین انتگرالی
Maximum Modulus	ماکزیمم قدرمطلق
Measure	اندازه
Minimal Polynomial	چندجمله‌ای مینیمال
Modulus	قدرمطلق
Obtain	بدست آوردن
Odd	فرد
Origin	مبدأ
Parseval formula	فرمول پارسوال
Polynomial	چندجمله‌ای
Positive Coefficients	ضرایب مثبت
Principle	اصل
Real Coefficients	ضرایب حقیقی
Refinement	بهبود

Region	ناحیه
Self inversive	خودمعکوس
Self reciprocal	خودمعکوس
Strictly	اکیداً
Trigonometric Polynomial	چندجمله‌ای مثلثاتی
Unit	یکه
Vanish	صفرشدن
Zero	ریشه

Abstract

One of the known polynomials in complex analysis is self-reciprocal polynomials. According to The principle maximum modulus and Bernstein inequality on the derivative of a trigonometric polynomials, there are inequalities for the analysis polynomials. In this thesis, we try obtain proximate for maximum modulus self-reciprocal polynomial and we investigate the distribution of its zeros around the unit circle.

Keywords: *self-reciprocal polynomial, Principle maximum modulus, inequality, Bernstein inequality, zero, derivative polynomial*



Shahrood University of Technology
Faculty of Mathematical Sciences
Department of Mathematics

M.Sc. Thesis

Some inequality for self reciprocal polynomials

By:

Hajar Badrzade

Supervisor:

Professor Ahmad Zire

September 2012