



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی (معادلات دیفرانسیل)

عنوان

تحلیل خطای A posteriori معادله Cahn–Hilliard به روش DWR

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

استاد مشاور

دکتر حجت احسنی طهرانی

پژوهشگر

زینب شبانی

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجوی: شیانی

نام: زینب

عنوان: تحلیل خطای $A posteriori$ معادله Cahn-Hilliard به روش DWR

استاد راهنما: دکتر علی مس فروش

استاد مشاور: دکتر حجت احسنی طهرانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی (معادلات دیفرانسیل)

دانشگاه: صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱

تعداد صفحات: ۸۶

واژگان کلیدی: معادله کان هیلارد - روش المان‌های محدود - خطا - روش باقیمانده وزن‌های دوگان

چکیده

این پایان‌نامه، که بر اساس مرجع [۱] تنظیم شده است، به تحلیل خطای $A posteriori$ معادلات با مشتقات جزئی به روش باقیمانده وزن‌های دوگان می‌پردازد. به این صورت که، ابتدا معادلات را به روش المان‌های محدود گالرکین مبتنی بر توابع پیوسته قطعه‌وار خطی در فضا و توابع ناپیوسته قطعه‌وار ثابت در زمان، حل می‌کنیم. سپس خطای $A posteriori$ را برای معادلات به روش باقیمانده وزن‌های دوگان بدست می‌آوریم. در نهایت به کمک خطای بدست آمده یک سازگاری را برای این معادلات به کمک نرم‌افزار FreeFem++ پیاده‌سازی می‌کنیم.

پروردگار...!

نه می‌توانم مویشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست‌های پینه بسته‌شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که هر لحظه شکر گزارشان باشم و ثانیه‌های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذارم.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هست...

تقدیم بہ پدر بزرگوار و مادر مہربانم

آن دو فرشتہ‌ای کہ از خواستہ‌ہایشان گذشتند، سختی‌ہا را بہ جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من بہ جایگاهی کہ اکنون در آن ایستادہ‌ام برسم.

و تقدیم بہ خواہرانم

کہ وجودشان شادی بخش و صفایشان مایہ آرامش من است.

فهرست مطالب

۱	لیست تصاویر
۲	۱ تعاریف مقدماتی
۲	۱.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۴	۲.۱ روش المان‌های محدود
۴	۱.۲.۱ تعاریف کاربردی در روش المان‌های محدود
۱۳	۲.۲.۱ اساس کار روش المان‌های محدود
۱۶	۲ تخمین خطا به روش D.W.R
۱۶	۱.۲ مفاهیم اولیه خطا
۱۷	۱.۱.۲ خطای A priori
۱۷	۲.۱.۲ خطای A posteriori
۱۸	۲.۲ تخمین خطای A posteriori به روش D.W.R
۱۸	۱.۲.۲ پیاده‌سازی روش D.W.R برای معادلات خطی
۱۹	۲.۲.۲ پیاده‌سازی روش D.W.R برای معادلات غیرخطی
۲۱	۳.۲ شرط توقف معادله وسازگاری افراز
۲۱	۱.۳.۲ افرازهای هم‌اندازه و یکسان
۲۲	۲.۳.۲ ریز کردن افرازهای مثلثی
۲۲	۳.۳.۲ درشت کردن افرازهای مثلثی
۲۳	۴.۲ چکیده‌ای از رویکرد روش D.W.R برای مساله‌های غیرخطی
۲۴	۱.۴.۲ تقریب گالرکین از معادله‌های غیرخطی

۳۲	۳	برآورد خطای معادلات وابسته به مکان
۳۲	۱.۳	خطای معادله پواسون به روش D.W.R
۳۲	۱.۱.۳	گسسته‌سازی به روش المان‌های محدود گالرکین
۳۳	۲.۱.۳	برآورد خطای معادله پواسون
۳۷	۳.۱.۳	نتایج عددی محاسبه خطا
۴۰	۴	برآورد خطای معادلات وابسته به زمان و مکان
۴۰	۱.۴	خطای معادله انتقال حرارت به روش D.W.R
۴۰	۱.۱.۴	گسسته‌سازی به روش المان‌های محدود گالرکین
۴۲	۲.۱.۴	گسسته‌سازی به روش تغییر زمان و مکان
۴۳	۳.۱.۴	برآورد خطای معادله انتقال حرارت
۴۶	۴.۱.۴	نتایج عددی محاسبه خطا
۴۸	۲.۴	خطای معادله موج به روش D.W.R
۴۸	۱.۲.۴	گسسته‌سازی به روش المان‌های محدود گالرکین
۵۱	۲.۲.۴	گسسته‌سازی به روش تغییر زمان و مکان
۵۲	۳.۲.۴	برآورد خطای معادله موج
۵۴	۴.۲.۴	نتایج عددی محاسبه خطا
۵۸	۵	خطای معادله کان-هیلارد
۵۹	۱.۵	گسسته‌سازی به روش المان‌های محدود گالرکین
۶۱	۲.۵	برآورد خطای معادله کان-هیلارد
۶۶	۳.۵	پیشنهاد کارهای آتی
۶۷	آ	کدهای Freefem++ نمایش خطا
۶۷	۱.آ	کد Freefem++ نمایش خطای معادله پواسون
۶۹	۲.آ	کد Freefem++ نمایش خطای معادله حرارت
۷۲	۳.آ	کد Freefem++ نمایش خطای معادله موج
۷۵	ب	مقالات استخراج شده
۷۶		مراجع

لیست تصاویر

۳۷		مش بندی فضای Ω در مرحله اول	۱.۳
		شکل سمت راست نمایش خطای ρ در حالت دو-بعدی و شکل سمت چپ نمایش خطای	۲.۳
۳۸		ρ در حالت سه-بعدی را نشان می دهد.	
۳۸		مش بندی فضای Ω در مرحله دوم	۳.۳
		شکل سمت راست نمایش خطای ρ در حالت دو-بعدی و شکل سمت چپ نمایش خطای	۴.۳
۳۸		ρ در حالت سه-بعدی را نشان می دهد.	
۳۹		مش بندی فضای Ω در مرحله سوم	۵.۳
		شکل سمت راست نمایش خطای ρ در حالت دو-بعدی و شکل سمت چپ نمایش خطای	۶.۳
۳۹		ρ در حالت سه-بعدی را نشان می دهد.	
۴۶		نتایج مرحله سوم	۱.۴
۴۷		نتایج مرحله چهارم	۲.۴
۴۷		نتایج مرحله پنجم	۳.۴
۵۵		نتایج مرحله سوم	۴.۴
۵۶		نتایج مرحله چهارم	۵.۴
۵۶		نتایج مرحله پنجم	۶.۴
۵۷		نتایج مرحله ششم	۷.۴

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

مدل‌های ریاضی در علوم و مهندسی بیشتر به شکل معادلات دیفرانسیل یا معادلات انتگرالی هستند. با پیشرفت کامپیوتر در دهه‌های اخیر کارایی این مدل‌ها نیز به‌طور چشم‌گیری افزایش یافته است، اما برای استفاده از مدل‌های ریاضی در یک کامپیوتر، نیاز به الگوریتم‌های عددی داریم، چرا که فقط در ساده‌ترین حالات می‌توان به جواب تحلیلی رسید. ولی در حالت کلی ناگزیریم از روش‌های عددی برای پیدا کردن جواب تقریبی استفاده کنیم.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که به اختصار PDE^۱ خوانده می‌شود، به دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل گفته می‌شود که در آن‌ها توابع مجهول بر حسب چند متغیر مستقل به همراه مشتق جزئی توابع نسبت به آن متغیرها، وجود داشته باشد.

مرتبه‌ی یک معادله با مشتقات جزئی عبارت است از بالاترین مرتبه‌ی مشتقی که در آن معادله ظاهر می‌شود. به عنوان مثال معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ معادله‌ای است دو متغیره از مرتبه‌ی دوم. عملگرهای اصلی در PDE به صورت زیر:

۱. عملگر گرادینان^۲

$$\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}$$

۲. عملگر لاپلاس^۳

$$\nabla \cdot \nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

^۱Partial Differential Equations

^۲Gradient

^۳Laplacian

۳. عملگر دیورژانس^۴

$$\operatorname{div} w = \nabla \cdot w = \sum_{i=1}^d \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$$

هستند. که در آن متغیر مکان $\mathbf{X} := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ و زمان $t \in \mathbb{R}^+$ تعریف می‌شود. همچنین $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ یعنی مشتق جزئی دوم نسبت به x_i . در فضای دوبعدی، می‌توان صورت کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} & Au_{xx}(x, y) + Bu_{xy}(x, y) + Cu_{yy}(x, y) + Du_x(x, y) \\ & + Eu_y(x, y) + Fu(x, y) + G = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

که در آن $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ توابعی از متغیرهای مستقل x, y و متغیر وابسته هستند.

نکته ۱.۱.۱. معادله (۱.۱) بنابه محک یا آزمون $d = AC - B^2$ به صورت زیر دسته‌بندی می‌شود:

مثال	نوع معادله	مشخصه معادله
معادله پواسون	بیضوی	$d = AC - B^2 > 0$
معادله انتقال حرارت	سهموی	$d = AC - B^2 = 0$
معادله موج	هذلولوی	$d = AC - B^2 < 0$

تعریف ۲.۱.۱. مساله مقدار اولیه متناظر با معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی n ، که به اختصار I.V.P^۵ گفته می‌شود، معادله‌ای است با n شرط به طوری که بتوانیم با این n شرط، جواب خصوصی را از جواب عمومی بدست آوریم.

تعریف ۳.۱.۱. مساله مقدار مرزی، که به اختصار B.V.P^۶ گفته می‌شود، معادله‌ای است که با شرایط مرزی همراه است، که اعمال این شرایط، باعث تغییراتی در فضای مرزی معادله می‌شود. ■ شرایط مرزی مهم:

● شرط مرزی دریکله^۷

$$u(x, t) = f(x), \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \partial\Omega, \quad t > 0.$$

^۴Divergence

^۵Initial Value Problem

^۶Bundry Value Problem

^۷Dirichlet boundary condition

• شرط مرزی نویمن^۸

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \text{grad}(u) = \mathbf{n} \cdot \nabla u = f(x), \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \partial\Omega,$$

که در آن $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ بردار یکه خارجی روی مرز Ω است.

۲.۱ روش المان‌های محدود

یکی از روش‌های عددی حل معادلات با مشتقات جزئی، روش المان‌های محدود است که به اختصار FEM^۹ گفته می‌شود.

در این روش ابتدا معادله را به صورت تغییراتی (ضعیف)^{۱۰} تبدیل کرده، سپس دامنه را به تعدادی زیر دامنه افراز می‌کنند. در ادامه روی هر زیر دامنه جواب را تقریب زده و معادله دیفرانسیل پیوسته را به یک دستگاه گسسته معادلات جبری تبدیل می‌کنند. در آخر با ترکیب این معادلات و اعمال شرایط مرزی معادله، دستگاه را حل می‌کنند.

ایده‌ی اصلی برای حل عددی یک مساله مقدار مرزی برای به لرد ریلی^{۱۱} (۱۸۹۰ و ۱۸۹۴) و ریتز^{۱۲} (۱۹۰۸) برمی‌گردد.

در روش ریتز جواب تقریبی به صورت یک ترکیب خطی متناهی از توابعی مانند چندجمله‌ای‌ها یا چندجمله‌ای‌های مثلثاتی در نظر گرفته می‌شود. در همین راستا استفاده از توابع تقریب خطی به طور قطعه‌وار پیوسته، بر اساس مثلثی سازی دامنه (که به عنوان نقطه شروع روش المان‌های محدود گفته می‌شود)، توسط کورانت^{۱۳} پیشنهاد شد.

۱.۲.۱ تعاریف کاربردی در روش المان‌های محدود

تعریف ۱.۲.۱. به مجموعه‌ای از توابع و یا بردارهای V یک فضای خطی^{۱۴} گوئیم، هرگاه برای هر $u, v \in V$ و $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ روابط زیر برقرار باشد:

$$\lambda u + \alpha v \in V, \quad \bullet$$

$$u + v = v + u, \quad \bullet$$

$$\exists (-u) \in V, \quad u + (-u) = 0. \quad \bullet$$

^۸Neumann boundary condition

^۹ Finite Element Methods

^{۱۰}Weak Formulation

^{۱۱}Lord Rayleigh

^{۱۲}Ritz

^{۱۳}Courant

^{۱۴}Vector spaces

تعریف ۲.۲.۱. یک تابع خطی ^{۱۵}، نمایش خطی تابعی است به شکل $L: V \rightarrow \mathbf{R}$ به گونه‌ای که:

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v), \quad \forall v, u \in V, \quad \mu, \lambda \in \mathbf{R}.$$

تعریف ۳.۲.۱. یک فرم دوخطی ^{۱۶} به شکل تابع $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ در نظر گرفته می‌شود، که نسبت به هر آرگومان خود خطی است یعنی:

$$a(\lambda u + \mu v, w) = \lambda a(u, w) + \mu a(v, w), \quad \forall u, v \in V, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R},$$

$$a(w, \lambda u + \mu v) = \lambda a(w, u) + \mu a(w, v).$$

تعریف ۴.۲.۱. فرم دوخطی $a(\cdot, \cdot)$ را متقارن ^{۱۷} گوئیم هرگاه:

$$a(w, v) = a(v, w), \quad \forall w, v \in V.$$

و $a(\cdot, \cdot)$ معین مثبت است هرگاه:

$$a(v, v) > 0, \quad \forall v \in V, \quad v \neq 0.$$

تعریف ۵.۲.۱. یک فرم دوخطی روی V را یک ضرب اسکالر یا داخلی ^{۱۸} گوئیم، هرگاه متقارن و معین مثبت باشد.

تعریف ۶.۲.۱. یک فضای خطی به همراه ضرب داخلی متناظر را، فضای ضرب داخلی گوئیم.

تعریف ۷.۲.۱. یک نرم ^{۱۹} را به شکل تابع $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbf{R}^+$ نشان می‌دهیم، در صورتی که روابط زیر برقرار باشد:

$$\|v\| > 0, \quad \forall v \in V, v \neq 0, \quad ۱.$$

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, v \in V, \quad ۲.$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in V. \quad ۳.$$

تعریف ۸.۲.۱. یک نیم-نرم ^{۲۰} را به شکل تابع $|\cdot|: V \rightarrow \mathbf{R}^+$ نشان می‌دهیم، در صورتی که روابط زیر برقرار باشد:

$$|v| \geq 0, \quad \forall v \in V, \quad ۱.$$

^{۱۵}Liner Function

^{۱۶}Biliner Form

^{۱۷}Symmetric

^{۱۸}Scalar product

^{۱۹}Norm

^{۲۰}Semi Norm

$$|\lambda v| = |\lambda| |v|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V, \quad ۲$$

$$|u + v| \leq |u| + |v|, \quad \forall u, v \in V. \quad ۳$$

تعریف ۹.۲.۱. چند نرم مهم:

• نرم L_p ^{۲۱}

$$\|v\|_{L_p} = \left(\int_0^1 |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

• نرم L_∞ ^{۲۲}

$$\|v\|_{L_\infty} = \sup |v(x)|, \quad x \in [0, 1].$$

• نرم L_2 وزن دار ^{۲۳}

$$\|v\|_a = \left(\int_0^1 a(x) |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad a(x) > 0.$$

• نرم انرژی ^{۲۴}

$$\|v\|_E = \left(\int_0^1 a(x) |v'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad a(x) > 0.$$

$$\|v\|_E = \|v'\|_a. \quad \text{نکته ۱۰.۲.۱}$$

تعریف ۱۱.۲.۱. اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد و $(\cdot, \cdot)$ یک ضرب داخلی روی V باشد، نرم متناظر با ضرب داخلی بالا به شکل:

$$\|v\| = (v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in V,$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۱۲.۲.۱. دو تابع $v(x), u(x)$ را متعامد ^{۲۵} گوئیم، هرگاه $(u, v) = 0$ برقرار باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱. ضرب داخلی AB را کراندار گوئیم، هرگاه برای دو تابع کراندار A و B رابطه

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad (۲.۱)$$

برقرار باشد.

^{۲۱} L_p -norm

^{۲۲} L_∞ -norm

^{۲۳} Weighted L_2 -norm

^{۲۴} Energy-norm

^{۲۵} Orthogonal

لم ۱۴.۲.۱. نامساوی کوشی-شوارتز^{۲۶}:

$$|(v, w)| \leq \|v\| \|w\|, \quad \forall v, w \in V,$$

در این نامساوی در صورتی که v, w مضربی از هم باشند، این نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

لم ۱۵.۲.۱. نامساوی مثلثی^{۲۷}:

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \quad \forall v, w \in V,$$

در این نامساوی در صورتی که v, w مضربی از هم باشند، این نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

لم ۱۶.۲.۱. نامساوی تریس^{۲۸} در فضای گسسته شده:

فرض کنید $\Omega = (0 \times L) \times (0 \times L)$ یک فضای مربعی با ضلع L باشد، بنابراین:

$$\|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \left(L^{-1} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + L \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in C^1(\Omega).$$

لم ۱۷.۲.۱. شرط لیپ-شیتس^{۲۹}: برای تابع f به ازای هر x در همسایگی نقطه b شرط زیر برقرار است:

$$\|f(x) - f(b)\| \leq K \|x - b\|, \quad k > 0.$$

لم ۱۸.۲.۱. فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ یک نگاشت دوبار مشتق‌پذیر روی (a, b) باشد بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a) \right| \leq \frac{1}{4} \|f''\|_q [B(p, p)]^{\frac{1}{p}} (b - a)^{2 + \frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1.$$

که در آن B یک تابع اویلر است و به صورت:

$$B(l, s) := \int_0^1 t^{l-1} (1-t)^{s-1} dt, \quad l, s > 0,$$

تعریف می‌شود.

نتیجه ۱۹.۲.۱.

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{4} \{f(0) + f(1)\} + \frac{1}{4} \int_0^1 f''(s) s (s-1) ds. \quad (3.1)$$

تعریف ۲۰.۲.۱. یک دنباله نامتناهی $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ در V همگرا^{۳۰} است، هرگاه رابطه

$$\|v_i - v\| \rightarrow 0, \quad a.s \quad i \rightarrow \infty, \quad \forall v \in V.$$

برقرار باشد.

^{۲۶}Cauchy-Schwartz inequality.

^{۲۷}Triangle-inequality

^{۲۸}Scaled trace inequality

^{۲۹}Lipschitz condition

^{۳۰}Convergent

تعریف ۲۱.۲.۱. دنباله $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ را کوشی^{۳۱} گوئیم، هرگاه رابطه

$$\|v_i - v_j\| \rightarrow 0, \quad a.s \quad i, j \rightarrow \infty, \quad \forall v \in V.$$

برقرار باشد.

تعریف ۲۲.۲.۱. فضای ضرب داخلی V را کامل گوئیم، هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در V همگرا باشد.

تعریف ۲۳.۲.۱. هر فضای ضرب داخلی کامل^{۳۲} یک فضای هیلبرت^{۳۳} است.

تعریف ۲۴.۲.۱. یک فضای خطی به همراه نرم متناظر را یک فضای خطی نرم‌دار^{۳۴} گوئیم.

تعریف ۲۵.۲.۱. یک فضای نرم‌دار کامل را، فضای باناخ^{۳۵} گوئیم.

تعریف ۲۶.۲.۱. مجموعه $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ یک دامنه^{۳۶} گفته می‌شود، اگر همبند و باز باشد. در حالت خاص در فضای یک‌بعدی یک بازه، در حالت دوبعدی قسمتی از صفحه و در حالت سه‌بعدی قسمتی از فضا است.

تعریف ۲۷.۲.۱. اجتماع نقاط درون مجموعه و نقاط مرزی را بستار^{۳۷} یک مجموعه می‌گوئیم و با نماد $\bar{\Omega}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲۸.۲.۱. قضیه دیورژانس:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot w dx = \int_{\Gamma} w \cdot n ds$$

که در آن ds آرگومان طول قوس است و $n \in \mathbb{R}^d$ بردار عمود نرمال خارجی روی Γ است.

قضیه ۲۹.۲.۱. فرمول گرین^{۳۸} به صورت:

$$\int_{\Omega} w \cdot \nabla v dx = \int_{\Gamma} w \cdot n v ds - \int_{\Omega} \nabla \cdot w v dx,$$

تعریف می‌شود، که در حالت خاص $w = \nabla u$ این معادله به صورت:

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

نمایش داده می‌شود.

^{۳۱} Cowchy Sequence

^{۳۲} Complite Linear Product Space

^{۳۳} Hilbert space

^{۳۴} Normed Linear Space

^{۳۵} Banach Space

^{۳۶} Domain

^{۳۷} Closure

^{۳۸} Green Formula

تعریف ۳۰.۲.۱. یک بردار d تایی $(\alpha_1 \dots \alpha_d)$ از عناصر صحیح نامنفی را، چنداندیس^{۳۹} گوئیم و طول آن به صورت

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i,$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۳۱.۲.۱. مشتقات جزئی مرتبه α تابع $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر

$$D_v^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} V}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

تعریف می‌شود.

■ برخی از فضاهاى تابعی مهم:

تعریف ۳۲.۲.۱. با فرض $m \subset \mathbb{R}^d$ ، فضای توابع پیوسته خطی روی m با نماد $C(m)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳۳.۲.۱. برای توابع پیوسته کراندار ماکسیموم-نرم به صورت

$$\|v\|_{C(m)} = \sup_{x \in m} |v(x)|,$$

تعریف شده است.

نکته ۳۴.۲.۱. اگر m مجموعه‌ای بسته و کراندار (کامل) باشد، بنابراین ماکسیموم-نرم به صورت

$$\|v\|_{C(m)} = \max_{x \in m} |v(x)|,$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۳۵.۲.۱. فرض کنید Ω دامنه‌ای باشد که لزوماً کراندار نیست و k عدد صحیح نامنفی باشد، در این صورت مجموعه تمام توابع روی Ω که به طور پیوسته k بار مشتق پذیر باشد را با $C^k(\Omega)$ نشان می‌دهیم. به عنوان مثال $C^2([0, 1])$ یعنی توابع تعریف شده روی $[0, 1]$ که مشتقات جزئی تا مرتبه دو آن‌ها، پیوسته است.

اگر دامنه Ω کراندار باشد: فضای $C^k(\bar{\Omega})$ به صورت

$$C^k(\bar{\Omega}) = \{v \in C^k(\Omega); D^\alpha v \in C(\bar{\Omega}), \forall |\alpha| \leq k\},$$

تعریف می‌شود. نرم این فضا به صورت

$$\|v\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \max \|D^\alpha v\|_{C(\bar{\Omega})}, \quad \forall |\alpha| \leq k,$$

^{۳۹}Multi index

است و نیم-نرم این فضا به صورت

$$|v|_{C^k(\bar{\Omega})} = \max \|D^\alpha v\|_{C(\bar{\Omega})}, \quad \forall |\alpha| = k,$$

نمایش داده می شود.

نکته ۳۶.۲.۱. مجموعه تمام توابع در $C^K(\Omega)$ با این خاصیت که Ω روی مرز صفر باشد را به صورت $C_0^k(\Omega)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۳۷.۲.۱. تابعی که به اندازه کافی دارای مشتقات پیوسته باشد را تابع هموار^{۴۰} می گوئیم.

تعریف ۳۸.۲.۱. فضای توابعی که مربع آن ها انتگرال پذیر باشند، را فضای $L^2(\Omega)$ می نامیم.

ضرب اسکالری متناظر با این فضا برای دو تابع حقیقی مقدار $u(x), v(x)$ به صورت

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx,$$

است و نرم متناظر با این فضا به صورت

$$\|v\| = \|v\|_{L^2(\Omega)} = (v, v)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

تعریف می شود.

تعریف ۳۹.۲.۱. فضای تابعی شامل همه چند جمله ای های از درجه کمتر یا مساوی q را با P^q نمایش می دهیم.

تعریف ۴۰.۲.۱. فضای تمام توابع خطی قطعه-وار پیوسته روی بازه گسسته شده را با V_h^q نمایش می دهیم.

نکته ۴۱.۲.۱. فضای $V_h^{\circ(q)}$ فضای تمام توابع عضو V_h^q است، که در دو سر بازه (نقاط مرزی) مقدار صفر دارد.

نکته ۴۲.۲.۱. برای فضاهای گفته شده رابطه $V_h^{\circ(q)} \subseteq V_h^q \subseteq P^q$ برقرار است.

تعریف ۴۳.۲.۱. فضای تابعی شامل همه چند جمله ای های قطعه-وار گسسته از درجه $q-1$ را با نماد W_k^q نمایش می دهیم.

تعریف ۴۴.۲.۱. فضای سوبولف به صورت:

$$H^k(\Omega) \subseteq C^k(\Omega) = H^k = \{v \in L^2(\Omega); D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| < k\},$$

^{۴۰} Smooth Function

تعریف می‌شود.

ضرب داخلی و نرم متناظر با این فضا به صورت :

$$\langle v, w \rangle_k = \langle v, w \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} v D^{\alpha} w \, dx,$$

$$\|v\|_k = \|v\|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^{\alpha} v)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

تعریف می‌شود. همچنین نیم نرم متناظر با فضای سوبولف به صورت

$$|v|_k = |v|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (D^{\alpha} v)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

است.

نکته ۴۵.۲.۱. فضای سوبولف به ازای $k = 0$ همان فضای $L^2(\Omega)$ است.

نکته ۴۶.۲.۱. فضای سوبولف به ازای $k = 1$ به صورت

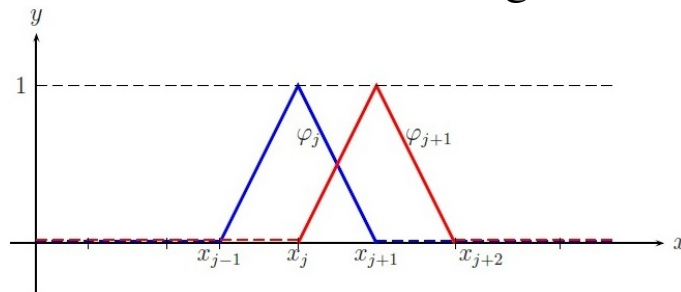
$$\|v\|_1 = (\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2),$$

بدست می‌آید.

تعریف ۴۷.۲.۱. توابع پایه ای $\phi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ متناسب با فضای تابعی در بازه یک بعدی به صورت:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{h_j}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{h_{j+1}}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

تعریف می‌شود و بدلیل اینکه این توابع شکل ظاهری شبیه کلاه دارند، به Hat Function معروف هستند.

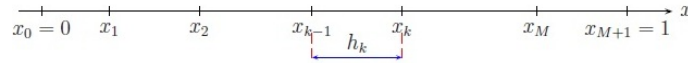


تعریف ۴۸.۲.۱. گسسته‌سازی بازه $\Omega = [a, b]$ در فضای یک بعدی به صورت

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_M < x_{M+1} = b,$$

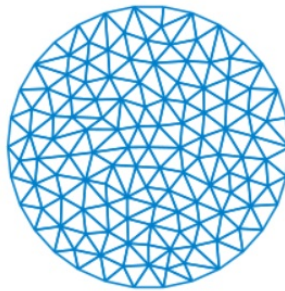
است .

به عنوان مثال برای بازه $[0, 1]$ داریم:

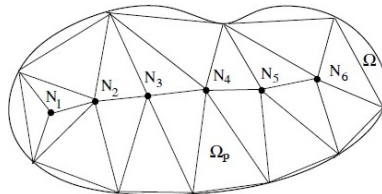


که $h_j = x_j - x_{j-1}$ طول زیر بازه ها و $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ نشان دهنده زیربازه ها و $h = \max h_j$ بیشترین طول زیربازه را نشان می دهد.

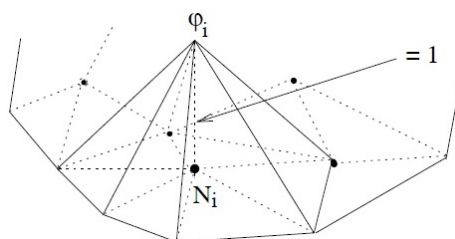
تعریف ۴۹.۲.۱. گسسته سازی فضای Ω در حالت دو بعدی به صورت مثلی سازی کردن فضا انجام می شود.



به این صورت که ابتدا نقاطی روی مرز فضای پیوسته ایجاد کرده و این فضا را به فضای چندوجهی یا چند ضلعی Ω_p تبدیل می کنیم. سپس نقاط داخلی N_i را ایجاد کرده، حال با اتصال نقاط مرزی و نقاط داخلی مثلی سازی را انجام می دهیم.



تعریف ۵۰.۲.۱. توابع پایه ای متناسب با فضای تابعی در فضای دو بعدی به این صورت است که ابتدا یک نقطه گره ای درون فضای چندجمله ای Ω در نظر می گیریم، سپس تابع پایه ای را برای این نقطه گره ای و نقاط مجاور آن به صورت $\phi_j(N_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ تعریف می کنیم، که این چندوجهی در نقطه گره ای مورد نظر یک و در نقاط مجاور آن صفر است. با توجه به شکل زیر مفاهیم بالا قابل درک است.



۲.۲.۱ اساس کار روش المان‌های محدود

برای حل معادلات PDE به روش المان‌های محدود ابتدا بازه Ω را از حالت پیوسته به گسسته تبدیل می‌کنیم سپس فضای تابعی متناظر با Ω و توابع پایه‌ای متناظر با فضای تابعی را تعریف می‌کنیم.

هدف: یافتن جواب در فضای گسسته‌سازی شده به شکل زیر

$$U(x) = \sum_{j=1}^M \xi_j \varphi_j(x),$$

است که در آن:

- $\{\varphi_j\}$ توابع پایه‌ای متناظر با فضای تابعی
- $\{\xi_j\}$ وزن‌های اختصاص داده شده به توابع پایه‌ای
- M زیر بازه‌های حاصل از افراز بازه Ω

هستند. برای بدست آوردن این جواب باید ابتدا معادله PDE را در تابعی از فضای پایه‌ای تعریف شده ضرب کرده و سپس روی بازه Ω انتگرال‌گیری کنیم. حال با استفاده از قضیه گرین به نتیجه مورد نظر می‌رسیم. که به معادله حاصل فرم متغیر (تغییر پذیر) یا به اختصار V.F^{۴۱} می‌گوییم.

بیان مفاهیم با حل مثال

معادله انتقال حرارت در ساده‌ترین شکل :

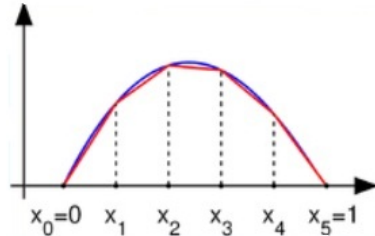
$$\begin{cases} -U''(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ U(0) = U(1) = 0, \end{cases}$$

^{۴۱} Variational Formulation

را در نظر بگیرید حال برای حل این معادله به روش المان‌های محدود ابتدا باید بازه $(0, 1)$ را به صورت :

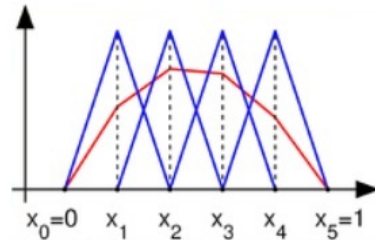
$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_5 = 1.$$

$$h_j = x_j - x_{j-1}, I_j = (x_{j-1}, x_j), h = \max h_j.$$



گسسته‌سازی کرد.

فضای تابعی را فضای V_h° در نظر می‌گیریم و توابع پایه‌ای Hat Function را روی آن تعریف می‌کنیم.



همان‌طور که گفته شد: برای یافتن معادله $V.F$ ابتدا معادله را در $v \in V_h^\circ$ ضرب کرده سپس روی بازه Ω انتگرال گیری می‌کنیم:

$$\int_0^1 -u''v \, dx = \int_0^1 f v \, dx, \quad \forall v \in V_h^\circ.$$

حال با استفاده از قضیه گرین داریم:

$$\int_0^1 u'v' \, dx = \int_0^1 f v \, dx, \quad \forall v \in V_h^\circ.$$

در نتیجه معادله $V.F$ را به‌اختصار به‌صورت زیر می‌نویسیم:

یافتن جواب $u \in V_h^\circ$ به‌طوری‌که:

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_h^\circ,$$

برقرار باشد. همچنین با فرض اینکه u_h جواب تقریبی معادله در فضای گسسته‌شده باشد، معادله المان‌های محدود متناظر (F.E.M) به‌صورت:

یافتن جواب $u_h \in V_h^\circ$ به‌طوری‌که:

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h^\circ,$$

تعریف می‌شود. که در روابط بالا به صورت:

$$a(w, v) = \int_0^1 w'v' dx, \quad , \quad (f, w) = \int_0^1 fw dx,$$

تعریف می‌شود. می‌دانیم که توابع پایه‌ای تولید کننده عناصر V_h° هستند. در نتیجه با توجه به اینکه $\{\phi_j\} \in V_h^\circ$ می‌توان با جایگزینی در معادله $V.F$ نوشت:

$$\int_0^1 u' \phi' dx = \int_0^1 f \phi dx, \quad \forall v \in V_h^\circ, \quad j = 1, \dots, M.$$

و همچنین با قرار دادن $U(X) = \sum_{j=1}^M \xi_j \phi_j(x)$ ، در رابطه بالا داریم:

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^M \xi_i \phi_i' \phi_j' dx = \int_0^1 f \phi_j dx, \quad j = 1, \dots, M.$$

از طرفی با فرض :

$$A = a_{ij} = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' dx,$$

$$b = b_i = \int_0^1 f \phi_i dx,$$

ماتریس $A\xi = b$ حاصل می‌شود، که با محاسبه ماتریس A, B مقادیر ξ_i بدست می‌آید. با جایگذاری وزن‌های ξ_i در معادله $U(X) = \sum_{j=1}^M \xi_j \phi_j(x)$ جواب $U(x)$ مورد نظر حاصل می‌شود.

نکته ۵۱.۲.۱. به ماتریس مربعی A ، ماتریس Stiffness Matrix گفته می‌شود.

نکته ۵۲.۲.۱. به ماتریس مربعی b ، ماتریس Load Vector Matrix گفته می‌شود.

فصل ۲

تخمین خطا به روش D.W.R

۱.۲ مفاهیم اولیه خطا

در روش المانهای محدود دو نوع خطا قابل بررسی است:

• خطای A Priori

• خطای A Posteriori

ماتریسهای مربعی $\mathbf{A}, \mathbf{A}_h \in \mathbf{R}^{n \times n}$ و بردارهای $\mathbf{b}, \mathbf{b}_h \in \mathbf{R}^n$ مفروض است. جوابهای x, x_h چنان موجود است که در معادلات زیر صدق می کنند:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}_h x_h = \mathbf{b}_h, \quad (1.2)$$

با توجه به اینکه:

۱. پارامتر h شاخص تقریبی معادله است، در نتیجه اگر $h \rightarrow 0$ داریم:

$$\mathbf{A}_h \rightarrow \mathbf{A}, \quad \mathbf{b}_h \rightarrow \mathbf{b},$$

۲. خطا در این معادلات به صورت $e := x - x_h$ فرض شده است.

۳. خطای برشی^۱ به صورت $\tau := \mathbf{A}_h x - \mathbf{b}_h$ تعریف می شود.

۴. خطای باقیمانده^۲ به صورت $\rho := \mathbf{b} - \mathbf{A}x_h$ تعریف می شود.

۵. فضای تابعی فرض شده در اینجا، فضای سوبولوف است و ضرب داخلی به صورت $(u, v) =$

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx$$

^۱ Truncation error

^۲ Residual error

۱.۱.۲ خطای A priori

خطای A priori، خطای وابسته به جواب واقعی $u(x)$ است، و مستقل از جواب تقریبی $u_h(x)$ می باشد. برای یافتن این خطا با جایگذاری معادله $\mathbf{A}_h x_h = \mathbf{b}_h$ و خطای e ، در تعریف خطای برشی τ داریم:

$$\begin{aligned}\tau &:= \mathbf{A}_h x - \mathbf{b}_h = \mathbf{A}_h x - \mathbf{A}_h x_h = \mathbf{A}_h e, \\ \mathbf{A}_h e &= \tau,\end{aligned}$$

حال با استفاده از خاصیت کرانداری (۲.۱) می توان نوشت:

$$\|\mathbf{A}_h e\| \leq \|\mathbf{A}_h\| \|e\| \rightarrow \|\tau\| \leq \|\tau\|,$$

در نتیجه کران بالای خطای A priori بر حسب ثابت پایداری گسسته $c_{S,h}$ به صورت:

$$\|e\| \leq c_{S,h} \|\tau\|, \quad c_{S,h} := \|A_h^{-1}\|,$$

بدست می آید.

۲.۱.۲ خطای A posteriori

خطای A posteriori خطای وابسته به جواب تقریبی $u_h(x)$ است و مستقل از جواب واقعی $u(x)$ می باشد. برای یافتن این خطا با جایگذاری معادله $\mathbf{A} x = \mathbf{b}$ و خطای e ، در تعریف خطای باقیمانده ρ داریم:

$$\begin{aligned}\rho &:= \mathbf{b} - \mathbf{A} x_h = \mathbf{A} x - \mathbf{A} x_h = \mathbf{A} e, \\ \mathbf{A} e &= \rho,\end{aligned}\tag{۲.۲}$$

با استفاده از خاصیت کرانداری (۲.۱) می توان نوشت:

$$\|\mathbf{A} e\| \leq \|\mathbf{A}\| \|e\| \rightarrow \|\rho\| \leq \|\rho\|,\tag{۳.۲}$$

در نتیجه کران بالای خطای A posteriori بر حسب ثابت پایداری پیوسته c_S به صورت:

$$\|e\| \leq c_S \|\rho\|, \quad c_S := \|A^{-1}\|,$$

بدست می آید.

نکته ۱.۱.۲. تجزیه و تحلیل خطای A priori به پایدار بودن متغیر گسسته $\mathbf{A}_h$ بستگی دارد در نتیجه جواب حاصل از آن، تخمین دقیق خطای معادله نیست. همچنین محاسبه خطای برشی τ به آسانی امکان پذیر نمی باشد. درحالیکه تجزیه و تحلیل خطای A posteriori به پایدار بودن متغیر پیوسته A بستگی دارد که معمولاً تخمینی دقیق و منظم برای خطای معادله است.

بنابراین برای تخمین خطای معادلات به روش المان‌های محدود از خطای A posteriori معادلات استفاده می‌کنیم.

۲.۲ تخمین خطای A posteriori به روش D.W.R

اساس کار روش D.W.R به این صورت است که ابتدا تابع خطای $J(e)$ متناظر با معادله را تعریف می‌کنیم، سپس با استفاده از جواب مساله دوگان و خطای A posteriori محاسبه شده، کران بالایی برای تابع $J(e)$ می‌یابیم.

۱.۲.۲ پیاده‌سازی روش D.W.R برای معادلات خطی

حال این روش را برای یافتن خطای معادله $Ax = b$ پیاده‌سازی می‌کنیم: مقدار معین $j \in \mathbb{R}^n$ مفروض است. تابع خطای خطی $J(e)$ را متناظر با معادله به صورت زیر

$$J(e) = J(u) - J(x_h) = (e, j),$$

تعریف می‌کنیم. برای تخمین این خطا فرض کنید $z \in \mathbb{R}^n$ جواب مساله دوگان $A^*z = j$ باشد، با جایگذاری مساله دوگان در تابع $J(e)$ داریم:

$$J(e) = (e, j) = (e, A^*z),$$

با استفاده از رابطه $A = -\Delta$ و همچنین با بکار بردن قضیه گرین داریم:

$$(e, A^*z) = - \int_{\Omega} \Delta z e \, dx = \int_{\Omega} \nabla z \nabla e \, dx,$$

با بکار بردن دوباره قضیه گرین برای رابطه بالا داریم:

$$\int_{\Omega} \nabla z \nabla e \, dx = - \int_{\Omega} \Delta e z \, dx = (Ae, z),$$

در نتیجه:

$$(e, A^*z) = (Ae, z),$$

با استفاده از رابطه (۲.۲) داریم:

$$J(e) = (Ae, z) = (\rho, z),$$

حال با استفاده از خاصیت کراننداری (۲.۱) و نامساوی کوشی-شوارتز، تابع $J(e)$ به صورت زیر:

$$|J(e)| \leq \sum_{i=1}^n |\rho_i| |z_i|,$$

بدست می‌آید. که برای تخمین کران بالای این خطا، ضرایب ρ_i ها به راحتی قابل محاسبه هستند و وزن‌های z_i نیز از حل مساله دوگان $A^*z = j$ بدست می‌آید.

۲.۲.۲ پیاده‌سازی روش D.W.R برای معادلات غیرخطی

نگاشت‌های مشتق‌پذیر $A(\cdot), A_h(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ و بردارهای $\mathbf{b}, \mathbf{b}_h \in \mathbb{R}^n$ ، مفروض است، جواب‌های x, x_h چنان موجود است که در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$Ax = \mathbf{b}, \quad A_h x_h = \mathbf{b}_h. \quad (۴.۲)$$

فرض کنید ماتریس B به صورت زیر تعریف شده باشد، با بکار بردن ماتریس ژاکوبین $A'(x)$ و خطای غیرخطی $\rho := \mathbf{b} - A(x_h)$ داریم:

$$B := B(x, x_h) := \int_0^1 A'(x_h + se) ds,$$

در نتیجه برای این ماتریس روابط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} B e &= \int_0^1 A'(x_h + se) e ds = \int_0^1 A'(x_h + s(x - x_h)) e ds, \\ &= \int_0^1 (A'(x_h)(1 - s) + sA'(x)) e ds = \frac{1}{e} (A(x_h)(1 - s) + sA(x)) e \Big|_0^1 = A(x) - A(x_h). \end{aligned} \quad (۵.۲)$$

تابع خطی $\{J\}$ را به صورت $J(\cdot) = (\cdot, j)$ تعریف می‌کنیم، فرض کنید $z \in \mathbb{R}^n$ جواب مساله دوگان $j = B^*z$ باشد. با جایگذاری مساله دوگان در تابع $J(e)$ و دو بار استفاده از قضیه گرین داریم:

$$J(e) = (e, j) = (e, B^*z) = (Be, z) = (A(x) - A(x_h), z) = (\rho, z),$$

حال با استفاده از خاصیت کراننداری (۲.۱) و نامساوی کوشی-شوارتز، تابع $J(e)$ به صورت زیر:

$$|J(e)| \leq \eta := \sum_{i=1}^n |\rho_i| |z_i|.$$

تعریف می‌شود.

تخمین کران بالای خطا $J(e)$ نیازمند به ارزیابی و محاسبه وزن‌های $|z_i|$ است، اما z قابل محاسبه نیست چرا که وابسته به خطای مجهول e است که توسط ماتریس B تعریف شده است. بنابراین برای محاسبه ماتریس B از تعریف زیر استفاده کرده و مساله دوگان متناظر با آن را حل می‌کنیم:

$$B(x, x_h) \approx \tilde{B} := B(x_h, x_h) = \int_0^1 A'(x_h) ds = A'(x_h),$$

در واقع به تخمین خطای تابعی $J(\cdot) = (\cdot, j_h)$ ، برای مساله دوگان جدید می‌پردازیم:

$$A'_h(x_h)^* \tilde{z}_h = j_h,$$

با جایگذاری مساله دوگان در تابع $J(e)$ و دو بار استفاده از قضیه گرین داریم:

$$J(e) = (e, j_h) = (e, A'_h(x_h)^* \tilde{z}_h) = (A'_h(x_h)e, \tilde{z}_h) = (\tilde{B}_h e, \tilde{z}_h),$$

همچنین طبق تعریف (۵.۲) و خطای $\rho := b_h - A(x_h)$ می‌توان نوشت:

$$\tilde{B}_h e = A_h(x_h) - A(x_h),$$

حال با جایگذاری معادله $A_h(x_h) = b_h$ داریم:

$$\tilde{B}_h e = b_h - A(x_h) = \rho,$$

بنابراین کران بالا برای $J(e)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$|J(e)| \approx \tilde{\eta} := |(\rho, \tilde{z}_h)| \leq \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}_i |\rho_i|, \quad \tilde{\omega}_i := |z_{h,i}|, \quad (6.2)$$

برای محاسبه این کران بالا فرض کنید $\tilde{z}$ جواب مساله دوگان $\tilde{B}^* \tilde{z} = A'(x_h)^* \tilde{z} = j$ ، بنابراین برای تابع خطی $J(e)$ داریم:

$$\begin{aligned} |J(e)| &= |(e, \tilde{B}^* \tilde{z})| = |(\tilde{B}e, \tilde{z})| = |(\tilde{B} - B + B)e, \tilde{z})| \\ &\leq |((\tilde{B} - B)e, \tilde{z})| + |(Be, \tilde{z})| \\ &\leq |((\tilde{B} - B)e, \tilde{z})| + |(\rho, \tilde{z})| \\ &\leq |((\tilde{B} - B)e, \tilde{z})| + |(\rho, \tilde{z} - \tilde{z}_h + \tilde{z}_h)| \\ &\leq |((\tilde{B} - B)e, \tilde{z})| + |(\rho, \tilde{z} - \tilde{z}_h)| + |(\rho, \tilde{z}_h)| \\ &\leq |((\tilde{B} - B)e, \tilde{z})| + |(\rho, \tilde{z} - \tilde{z}_h)| + \tilde{\eta} \end{aligned} \quad (7.2)$$

از طرفی:

$$\|\tilde{B} - B\| = \left\| \int_0^1 (A'(x_h) - A'(x_h + se)) ds \right\|,$$

حال با استفاده از لم لیپ-شیتز و تعریف ضریب K به صورت $K = \frac{1}{4} L'$ ، می‌توان نوشت:

$$\|B(x, x_h) - \tilde{B}(x_h, x_h)\| \leq K \|x - x_h\| \leq K \|e\|, \quad (8.2)$$

در نتیجه برای تخمین رابطه (۷.۲) با جایگذاری (۸.۲) داریم:

$$\begin{aligned} |J(e)| &\leq \tilde{\eta} + \|B(x, x_h) - \tilde{B}(x_h, x_h)\| + |(\rho, \tilde{z} - \tilde{z}_h)| \\ &\leq \tilde{\eta} + \frac{1}{4} L' \|e\|^2 \|\tilde{z}\| + \|\rho\| \|\tilde{z} - \tilde{z}_h\|, \end{aligned}$$

بنابراین با فرض کنترل‌پذیر بودن $\|\tilde{z}\|$ ، تخمین خطای $J(e)$ وابسته به محاسبه خطای $\tilde{\eta}$ است.

۳.۲ شرط توقف معادله وسازگاری افراز

در روش المان‌های محدود برای محاسبه‌ی بهتر و دقیق‌تر خطای معادله، فضایی که معادله روی آن تعریف شده است را از حالت پیوسته به حالت گسسته تبدیل می‌کنند. همان‌طور که گفته شد این کار را بوسیله مثلثی‌سازی فضا انجام می‌دهیم و خطا باید روی تک‌تک مثلث‌های گسسته‌سازی محاسبه شده و در شرط توقف صدق کند. که محاسبه این کار بسیار وقت‌گیر و ایجاد خطای محاسباتی می‌کند.

بنابراین برای بالا بردن سرعت رسیدن به جواب و دقت محاسبات فضا را به دو نیم تقسیم کرده و در هر قسمت خطا را محاسبه می‌کنیم. در هر قسمتی که تغییرات خطا نسبت به شرط توقف روند افزایش یا کاهش زیادی داشت، ادامه روند را در آن قسمت و به همان صورت بالا انجام می‌دهیم تا به ایده آل مورد نظر برسیم. سه روش ما را به رسیدن به این مطلوب کمک می‌کند:

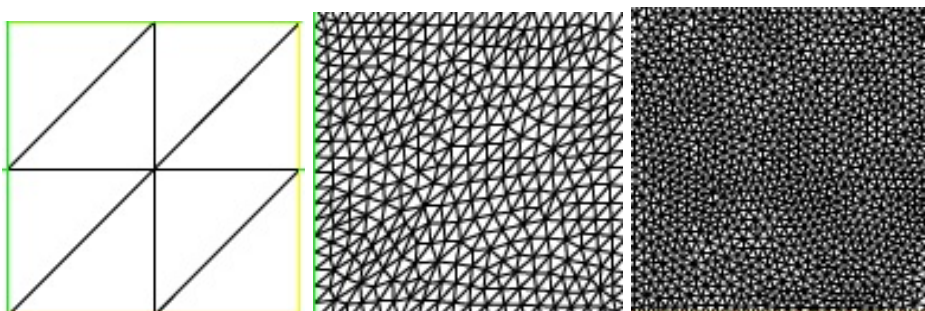
۱. افرازهای هم اندازه و یکسان

۲. ریزکردن افرازهای مثلثی

۳. درشت‌سازی افرازهای مثلثی

۱.۳.۲ افرازهای هم اندازه و یکسان

گاهی موارد با تقسیم فضا به دو قسمت و محاسبه خطا در دو ناحیه می‌بینیم که خطا در هر دو قسمت یکسان است. در نتیجه افرازها را تا رسیدن به شرط توقف به صورت یکسان در تمامی مناطق مثلثی فضا ادامه می‌دهیم. نکات بالا در شکل‌های زیر صادق است:

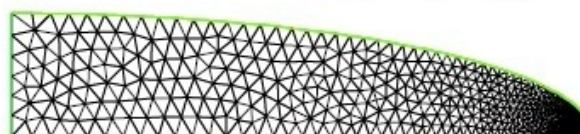


۲.۳.۲ ریز کردن افرازهای مثلثی

هنگامی که در تقسیم فضا در یک قسمت خطای بیشتری داریم ادامه روند مثلثی سازی را در همان قسمت تا رسیدن به شرط توقف ادامه می دهیم. همان طور که در شکل زیر می بینید ادامه روند فقط با تقسیم متوالی قسمتی از فضا انجام می شود.



یعنی مثلث های موجود در قسمتی که خطای بیشتری دارد را آنقدر ریز^۳ می کنیم تا خطای کل کمتر مساوی شرط توقف معادله شود. که این نکات در شکل زیر صادق است:



۳.۳.۲ درشت کردن افرازهای مثلثی

هنگامی که در تقسیم فضا در یک قسمت خطای خیلی کمتری داریم در این صورت ادامه روند مثلثی سازی را در همان قسمت تا رسیدن به شرط توقف ادامه می دهیم. همان طور که در شکل می بینید ادامه روند فقط با تغییرات در همان قسمت انجام می شود.



یعنی مثلث های موجود در قسمتی که خطای کمتری دارد را درشت^۴ می کنیم تا خطا به خطای شرط توقف و مطلوب برسد.

^۳refinement

^۴coarsening



۴.۲ چکیده‌ای از رویکرد روش D.W.R برای مساله‌های غیرخطی

در اینجا کلی‌ترین رویکرد تخمین خطای A posteriori برای تقریب گالرکین از معادله $V.F$ غیرخطی نشان می‌دهد.

با فرض اینکه $F(\cdot)$ یک تابع خطی باشد، دو معادله تقریب گالرکین خطی زیر

$$\begin{aligned} a(u, \psi) &= F(\psi), & \forall \psi \in V, \\ a(u_h, \psi_h) &= F(\psi_h), & \forall \psi_h \in V_h, \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. با تفاضل دو معادله بالا و تعریف خطای اولیه^۵ $e := u - u_h$ ، تعامد گالرکین^۶

$$a(e, \psi_h) = 0, \quad \forall \psi_h \in V_h,$$

بدست می‌آید. حال فرض کنید $J(\cdot)$ تابع خروجی خطی وابسته به مساله‌های دوگان گسسته و پیوسته زیر باشد.

$$\begin{aligned} a(\psi, z) &= J(\psi), & \forall \psi \in V, \\ a(\psi_h, z_h) &= J(\psi_h), & \forall \psi_h \in V_h, \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از تعامد گالرکین و تعریف خطای دوگان^۷ $e^* := z - z_h$ رابطه زیر برای خطای $J(e)$ بدست می‌آید:

$$J(e) = a(e, z) = a(e, z) - a(e, \psi_h) = a(e, z - \psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h,$$

^۵ Primal error

^۶ Galerkin orthogonality

^۷ Dual error

عبارت بالا برای هر $\psi_h \in V_h$ برقرار است، همچنین می‌دانیم $z_h \in V_h$ بنابراین :

$$\begin{aligned} J(e) &= a(e, z - z_h) = a(e, e^*) \\ &= a(u - u_h, e^*) = a(u, e^*) - a(u_h, e^*) = a(u, e^*) - F(e^*), \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$J(e) = a(u, e^*) - F(e^*) = F(e^*), \quad (9.2)$$

حال با استفاده از رابطه (۹.۲) باقیمانده‌های اولیه و دوگان وزن‌دار را به‌صورت زیر

$$J(e) = F(z - \psi_h) - a(u_h, z - \psi_h) =: \rho(u_h)(z - \psi_h), \quad \psi_h \in V_h, \quad (10.2)$$

$$F(e^*) = J(u - \varphi_h) - a(u - \varphi_h, z_h) =: \rho^*(z_h)(u - \varphi_h), \quad \varphi_h \in V_h, \quad (11.2)$$

تعریف می‌کنیم، که به‌طور بدیهی ما را به نمایش خطای خطی زیر می‌رساند:

$$J(e) = \frac{1}{\gamma} \rho(u_h)(z - \psi_h) + \frac{1}{\gamma} \rho^*(z_h)(u - \varphi_h), \quad \psi_h, \varphi_h \in V_h. \quad (12.2)$$

در ادامه می‌بینیم که روند بالا یک تعمیم بدیهی برای مسایل غیرخطی دارد، با این تفاوت که در مسایل غیرخطی باقیمانده‌های اولیه و دوگان وزن‌دار یکسان نیستند.

۱.۴.۲ تقریب گالرکین از معادله‌های غیرخطی

ادامه این تئوری با کمی فرضیات برای معادلات غیرخطی قابل بررسی می‌باشد:

فرض کنید $A(u)(\cdot)$ یک فرم نیم‌خطی باشد که در آن متغیر اول غیرخطی و متغیر دوم خطی است، و $J(\cdot)$ تابع خروجی تعریف شده روی توابع پایه‌ای فضای V است، که الزاما خطی نیست. هدف ارزیابی تابع $J(u)$ بواسطه حل معادله ضعیف زیر است:

$$A(u)(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in V. \quad (13.2)$$

تقریب گالرکین متناظر آن جواب گسسته $u_h \in V_h \subset V$ را به‌صورت :

$$A(u_h)(\psi_h) = 0, \quad \forall \psi_h \in V_h, \quad (14.2)$$

مشخص می‌کند. فرض کنید مشتق‌های J, A با این رابطه که متغیر اول u تا مرتبه سه صعود کند، وجود داشته باشد و به‌صورت

$$A'(u)(\varphi, \cdot), A''(u)(\psi, \varphi, \cdot), A'''(u)(\xi, \psi, \varphi, \cdot),$$

و

$$J'(u)(\varphi, \cdot), J''(u)(\psi, \varphi, \cdot), J'''(u)(\xi, \psi, \varphi, \cdot),$$

تعریف می‌شود. در این صورت‌ها ممکن است آرگومان اول غیرخطی باشد در حالیکه آرگومان‌های بعدی لزوماً خطی هستند.

برای تخمین خطای $J(u) - J(u_h)$ ، از روش لاگرانژ-اویلر^۸ برای بهینه‌سازی مقید استفاده می‌کنیم. متغیر دوگان $z \in V$ (متغیر الحاقی یا ضریب لاگرانژ) را در نظر بگیرید، تابع لاگرانژ را به صورت:

$$\mathcal{L}(u, z) := J(u) - A(u)(z), \quad (15.2)$$

تعریف کرده و بدنبال یافتن نقطه‌های سکون^۹ $\{u, z\} \in V \times V$ از تابع $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ هستیم یعنی:

$$\mathcal{L}'(u, z)(\varphi, \psi) = \left\{ \begin{array}{l} J'(u)(\varphi) - A'(u)(\varphi, z) \\ -A(u)(\psi) \end{array} \right\} = 0, \quad \forall \{\varphi, \psi\}. \quad (16.2)$$

واضح است که مؤلفه‌ی u در نقطه سکون همان جواب معادله اصلی (۱۳.۲) است. همچنین

• با فرض $\varphi = 0$ ، رابطه

$$A(u, \psi) = 0, \quad \forall \psi \in V,$$

بدست می‌آید.

• با فرض $\psi = 0$ به دنبال یافتن جواب $z \in V$ هستیم، به طوری که رابطه

$$J'(u, \varphi) - A'(u)(z, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in V.$$

برقرار باشد.

تقریب‌های گالرکین $\{u_h, z_h\} \in V_h \times V_h$ بوسیله سیستم لاگرانژ-اویلر گسسته شده، به صورت زیر

$$\mathcal{L}'(u_h, z_h)(\varphi_h, \psi_h) = \left\{ \begin{array}{l} J'(u_h)(\varphi_h) - A'(u_h)(\varphi_h, z_h) \\ -A(u_h)(\psi_h) \end{array} \right\} = 0, \quad \forall \{\varphi_h, \psi_h\}, \quad (17.2)$$

تعریف می‌شود. که در اینجا نیز مؤلفه‌ی u_h در هر نقطه سکون، جواب مساله گسسته (۱۴.۲) است. همچنین

• با فرض $\varphi_h = 0$ رابطه

$$A(u_h, \psi_h) = 0, \quad \forall \psi_h \in V_h,$$

بدست می‌آید.

^۸Euler-Lagrange method

^۹stationary points

• و با فرض $\psi_h = 0$ ، به دنبال یافتن جواب $z_h \in V_h$ هستیم، به طوری که رابطه

$$J'(u_h, \varphi_h) - A'(u_h)(z_h, \varphi_h) = 0, \quad \forall \varphi_h \in V_h,$$

برقرار باشد.

گزاره ۱۰.۴.۲. فرض کنید $L(\cdot)$ تابعی سه بار مشتق پذیر روی فضای برداری (حقیقی یا مختلط) X باشد، که دارای نقطه سکون $x \in X$ است، یعنی

$$L'(x)(y) = 0, \quad \forall y \in X, \quad (۱۸.۲)$$

همچنین فرض کنید روی زیر فضای $X_h \subset X$ با بعد متناهی، تقریب گالرکین

$$L'(x_h, y_h) = 0, \quad \forall y_h \in X_h, \quad (۱۹.۲)$$

دارای جواب $x_h \in X_h$ است. آنگاه نمایش خطا به صورت

$$L(x) - L(x_h) = \frac{1}{4} L'(x_h, x - y_h) + \mathcal{R}_h, \quad y_h \in X_h, \quad (۲۰.۲)$$

است، که در آن $\mathcal{R}_h$ جمله باقیمانده از درجه سه است و با فرض $e^x := x - x_h$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{R}_h := \frac{1}{4} \int_0^1 L'''(x_h + se^x)(e^x, e^x, e^x) s(s-1) ds.$$

برهان. طبق فرض داریم $L'(x)(e^x) = 0$ همچنین از تعریف مشتق توابع داریم:

$$\int_0^1 L'(x_h + se^x) ds = \frac{L(x) - L(x_h)}{x - x_h},$$

در نتیجه می توان نوشت:

$$L(x) - L(x_h) = \int_0^1 L'(x_h + se^x) e^x ds + \frac{1}{4} L'(x_h)(e^x) - \frac{1}{4} \{L'(x_h)(e^x) + L'(x)(e^x)\}. \quad (۲۱.۲)$$

با استفاده از حل عددی انتگرال به روش دوزنقه، و استفاده از نتیجه لم (۱۸.۲.۱) رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} \int_0^1 L'(x_h + se^x) e^x ds &= \frac{1}{4} \{L'(x_h) e^x + L'(x_h + e^x) e^x\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^1 L'''(x_h + se^x)(e^x, e^x, e^x)(s)(s-1) ds, \\ &= \frac{1}{4} \{L'(x_h) e^x + L'(x_h + (x - x_h)) e^x\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^1 L'''(x_h + se^x)(e^x, e^x, e^x)(s)(s-1) ds, \\ &= \frac{1}{4} \{L'(x_h) e^x + L'(x) e^x\} + \frac{1}{4} \int_0^1 L'''(x_h + se^x)(e^x, e^x, e^x)(s)(s-1) ds, \end{aligned} \quad (۲۲.۲)$$

با جایگزینی رابطه (۲۲.۲) در رابطه (۲۱.۲) داریم:

$$\begin{aligned} L(x) - L(x_h) &= \frac{1}{\Psi} \{L'(x_h)e^x + L'(x)e^x\} + \frac{1}{\Psi} \int_0^1 L'''(x_h + se^x)(e^x, e^x, e^x)(s)(s-1) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Psi} L'(x_h)(e^x) - \frac{1}{\Psi} \{L'(x_h)(e^x) + L'(x)(e^x)\}. \\ &= \frac{1}{\Psi} L'(x_h)(e^x) + \frac{1}{\Psi} \int_0^1 L'''(x_h + se^x)(e^x, e^x, e^x)(s)(s-1) ds \\ &= \frac{1}{\Psi} L'(x_h)(e^x) + \mathcal{R}_h. \end{aligned} \quad (23.2)$$

با توجه به اینکه $\forall x_h \in X_h$ و $L'(x_h)(x - x_h) = L'(x_h)(e^x)$ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$L'(x_h)(e^x) = L'(x_h)(x - y_h), \quad \forall y_h \in X_h,$$

و با جایگزینی رابطه بالا در (۲۳.۲) داریم:

$$L(x) - L(x_h) = \frac{1}{\Psi} L'(x_h, x - y_h) + \mathcal{R}_h, \quad y_h \in X_h. \quad (24.2)$$

□

گزاره ۲.۴.۲. برای هر جواب از معادله‌های (۱۳.۲) و (۱۴.۲) نمایش تابع خطا به صورت

$$J(u) - J(u_h) = \frac{1}{\Psi} \rho(u_h)(z - \varphi_h) + \frac{1}{\Psi} \rho^*(u_h, z_h)(u - \psi_h) + \mathcal{R}_h^{\Psi}, \quad \forall \varphi_h, \psi_h \in V_h, \quad (25.2)$$

تعریف می‌شود. که در آن مانده‌های اولیه و دوگان به صورت

$$\rho(u_h)(\cdot) = -A(u_h)(\cdot),$$

$$\rho^*(u_h, z_h)(\cdot) = J'(u_h)(\cdot) - A'(u_h)(\cdot, z_h).$$

تعریف می‌شود، جمله‌ی باقیمانده $\mathcal{R}_h^{\Psi}$ از درجه سه است، که با فرض خطای اولیه $e := u - u_h$ و خطای

دوگان $e^* := z - z_h$ به صورت زیر

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h^{\Psi} &= \frac{1}{\Psi} \int_0^1 \left\{ J'''(u_h + se)(e, e, e) - A'''(u_h + se)(e, e, e, z_h + se^*) \right. \\ &\quad \left. - \Psi A''(u_h + se)(e, e, e^*) \right\} s(s-1) ds. \end{aligned}$$

تعریف می‌شود.

برهان. فضای $X := V \times V$ را در نظر بگیرید، برای متغیرهای مستقل $x = \{u, z\} \in X$ تابع $L(x) := \mathcal{L}(u, z)$ را تعریف می‌کنیم. در این مفهوم، نقطه‌های سکون بوسیله $x := \{u, z\}$ و $x_h := \{u_h, z_h\}$ با خطای $e^x := x - x_h$ نمایش داده می‌شود. بنابراین با استفاده از رابطه (۱۵.۲) می‌توان نوشت:

$$J(u) - J(u_h) = L(x) + A(u)(z) - L(x_h) - A(u_h)(z_h),$$

با جایگزینی رابطه (۱۳.۲) و (۱۴.۲) در معادله بالا داریم:

$$J(u) - J(u_h) = L(x) - L(x_h).$$

حال با توجه به نمایش خطا در گزاره (۱.۴.۲) می‌توان نوشت:

$$J(u) - J(u_h) = \frac{1}{4} L'(x_h, x - y_h) + \mathcal{R}_h, \quad y_h \in X_h,$$

$$\mathcal{R}_h := \frac{1}{4} \int_0^1 L'''(x_h + se^x)(e^x, e^x, e^x)s(s-1) ds.$$

با توجه به تعریف تابع $L(x)$ و تعاریف متغیرهای $x_h = \{u_h, z_h\}$ ، $y_h = \{\varphi_h, \psi_h\} \in X_h$ و $x = \{u, z\}$ داریم:

$$\begin{aligned} L'(x_h)(x - y_h) &= \mathcal{L}'(u_h, z_h)(x - y_h) \\ &= \mathcal{L}'(u_h, z_h)((u, z) - (\varphi_h, \psi_h)) \\ &= \mathcal{L}'(u_h, z_h)(u - \varphi_h) + \mathcal{L}'(u_h, z_h)(z - \psi_h) \\ &= \mathcal{L}'(u_h, z_h)(u - \varphi_h)(z - \psi_h) \\ &= J'(u_h)(u - \varphi_h) - A'(u_h)(u - \varphi_h, z_h) - A(u_h)(z - \psi_h) \\ &= \rho^*(u_h, z_h)(u - \varphi_h) + \rho(u_h)(z - \psi_h). \end{aligned}$$

با توجه به اینکه تابع $\mathcal{L}(u, z)$ نسبت به متغیر z خطی است، در نتیجه مشتق سوم از $L(\cdot)$ ، فقط شامل سه جمله است. یعنی:

$$J'''(u_h + se)(e, e, e) - A'''(u_h + se)(e, e, e, z_h + se^*) - 3A''(u_h + se)(e, e, e^*),$$

□

در نتیجه $\mathcal{R}_h^3$ بدست می‌آید.

نکته ۳.۴.۲. در معادلات خطی دیدیم که جمله‌های مانده اولیه و دوگان، منطبق هستند. یعنی:

$$\rho^*(z_h)(u - \varphi_h) = \rho(u_h)(z - \psi_h).$$

ولی این نکته برای معادلات غیرخطی الزاما درست نیست.

گزاره ۴.۴.۲. با توجه به گزاره‌های بالا رابطه جمله‌های مانده در معادلات غیرخطی به صورت زیر است:

$$\rho^*(u_h)(z_h, u - \varphi) = \rho(u_h, z - \psi_h) + \Delta\rho, \quad \forall \varphi_h, \psi_h \in V_h, \quad (26.2)$$

$$\Delta\rho = \int_0^1 (A''(u_h + se)(e, e, z_h + se^*) - J''(u_h + se)(e, e)) ds.$$

همچنین شکل ساده شده خطا نیز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$J(u) - J(u_h) = \rho(u_h, z - \varphi_h) + R^\Psi, \quad \forall \varphi_h \in V_h, \quad (27.2)$$

$$\mathcal{R}_h^\Psi = \int_0^1 (A''(u_h + se)(e, e, z) - J''(u_h + se)(e, e)) s ds.$$

برهان. تابع اسکالر $g(\cdot)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(s) := J'(u_h + se)(e) - A'(u_h + se)(e, z_h + se^*).$$

بنابراین روابط زیر برقرار می‌شود:

$$\begin{aligned} g(1) &= J'(u_h + e)(e) - A'(u_h + e)(e, z_h + e^*), \\ &= J'(u_h + u - u_h)(e) - A'(u_h + u - u_h)(e, z_h + z - z_h), \\ &= J'(u)(e) - A'(u)(e, z). \end{aligned}$$

حال با در نظر گرفتن $x = \{u, z\}$ و فرض $e := x - x_h$ داریم:

$$\begin{aligned} J'(u)(e) - A'(u)(e, z) &= J'(u)(x - x_h) - A'(u)(x - x_h, z), \\ &= J'(u)(x) - J'(u)(x_h) - A'(u)(x, z) + A'(u)(x_h, z), \end{aligned}$$

حال با استفاده از تعریف تابع لاگرانژ و $x_h \subset X_h \in X$ داریم:

$$g(1) = A(u)(x) - A(u)(x_h) = 0.$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} g(0) &= J'(u_h)(e) - A'(u_h)(e, z_h) = \rho^*(u_h, z_h)(e), \\ g'(s) &= J''(u_h + se)(e, e) - A''(u_h + se)(e, e, z_h + se^*) - A'(u_h + se)(e, e^*). \end{aligned}$$

حال با استفاده از تعامد گالرکین و $\{\psi_h, \varphi_h\} = y_h \in X_h = \{u_h, z_h\}$ داریم :

$$\begin{aligned} \rho^*(u_h, z_h)(u - \varphi_h) &= \rho^*(u_h, z_h)(u - u_h), \\ &= \rho^*(u_h, z_h)(e) = g(\circ) = g(\circ) - g(\mathbf{1}) = - \int_{\circ}^{\mathbf{1}} g'(s) ds, \\ &= \int_{\circ}^{\mathbf{1}} \left\{ A''(u_h + se)(e, e, z_h + se^*) - J''(u_h + se)(e, e) \right\} ds, \\ &\quad + \int_{\circ}^{\mathbf{1}} A'(u_h + se)(e, e^*) ds. \end{aligned}$$

از طرفی :

$$\begin{aligned} \int_{\circ}^{\mathbf{1}} A'(u_h + se)(e, e^*) ds &= \int_{\circ}^{\mathbf{1}} A'(u_h + s(u - u_h))(e, e^*) ds \\ &= \int_{\circ}^{\mathbf{1}} (A'(u_h)(\mathbf{1} - s) + su)(e, e^*) ds \\ &= \frac{\mathbf{1}}{e} (A(u_h)(\mathbf{1} - s) + su)(e, e^*) \Big|_{\circ}^{\mathbf{1}} = A(u)(e^*) - A(u_h)(e^*) \\ &= A(u)(z) - A(u)(z_h) - A(u_h)(e^*) = \rho(u_h)(e^*) \\ &\quad - A(u_h)(e^*) - \rho(u_h)(e^*) = \circ, \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \rho^*(u_h, z_h)(u - \varphi_h) &= \int_{\circ}^{\mathbf{1}} \left\{ A''(u_h + se)(e, e, z_h + se^*) - J''(u_h + se)(e, e) \right\} ds \\ &\quad + \int_{\circ}^{\mathbf{1}} A'(u_h + se)(e, e^*) ds, \\ &= \Delta\rho + \rho(u_h)(e^*) = \Delta\rho + \rho(u_h)(z - \psi_h). \end{aligned}$$

بنابراین رابطه (۲۶.۲) اثبات می شود. حال به اثبات رابطه (۲۷.۲) می پردازیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h^{\mathbf{Y}} &= \int_{\circ}^{\mathbf{1}} (A''(u_h + se)(e, e, z) - J''(u_h + se)(e, e)) s ds, \\ &= - \int_{\circ}^{\mathbf{1}} (A'(u_h + se)(e, z) - J'(u_h + se)(e)) ds + A'(u)(e, z) - J'(u)(e), \end{aligned}$$

همچنین می دانیم:

$$A'(u)(e, z) = J'(u)(e),$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_h^\gamma &= - \int_0^1 (A'(u_h + se)(e, z) - J'(u_h + se)(e)) \, ds \\
 &= -A(u)(z) + A(u_h)(z) + J(u) - J(u_h), \quad -A(u)(z) = \circ, \\
 &= A(u_h)(z) - A(u_h)(\psi_h) + J(u) - J(u_h), \quad -A(u_h)(\psi_h) = \circ, \\
 &= A(u_h)(z - \psi_h) + J(u) - J(u_h), \\
 &= -\rho(u_h)(z - \psi_h) + J(u) - J(u_h), \quad \psi_h \in V_h.
 \end{aligned}$$

در نتیجه رابطه (۲۷.۲) اثبات می‌شود.

□

فصل ۳

برآورد خطای معادلات وابسته به مکان

در این فصل می‌خواهیم روش D.W.R را برای معادلات بیضوی خطی توسعه دهیم. برای ارائه این مدل، معادله پواسون را روی دامنه چند وجهی یا چند ضلعی $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ با شرایط مرزی دریکله در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3)$$

۱.۳ خطای معادله پواسون به روش D.W.R

۱.۱.۳ گسسته‌سازی به روش المانهای محدود گالرکین

فضای تابعی پیوسته H_0^1 را در نظر بگیرید. حال با ضرب تابع $v(x) \in H_0^1$ در معادله (۱.۳) و انتگرال‌گیری روی فضای Ω داریم:

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx,$$

حال با استفاده از قضیه گرین داریم:

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v(x) \, ds + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx,$$

با توجه به اینکه شرایط مرزی دریکله روی فضای Ω اعمال شده است در نتیجه :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx,$$

بنابراین معادله $V.F$ برای معادله (۱.۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

یافتن جواب $u \in V := H_0^1(\Omega)$ به طوری که :

$$a(u, \psi) := (\nabla u, \nabla \psi) = (f, \psi), \quad \forall \psi \in V.$$

که در آن:

$$a(u, \psi) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx$$

$$(f, \psi) = \int_{\Omega} f \cdot \psi \, dx$$

حال با استفاده از تعاریف (۴۹.۲.۱) و (۵۰.۲.۱) فضای تابعی گسسته‌سازی شده را بر اساس توابع پایه‌ای تعریف شده می‌نویسیم:

$$V_h^k = \{v \in V \mid v|_K \in \mathbf{P}^k(K), K \in \mathbb{T}_h\}.$$

• $\mathbf{P}^k(K)$ چندجمله‌ای از درجه k متناظر با هر مثلث است.

• $\mathbb{T}_h$ افراز فضای Ω است.

$$h_k = \text{diam}(K), \quad h = \max h_k.$$

بنابراین تقریب المان‌های محدود برای معادله (۱.۳) برابر است با:

یافتن جواب تقریبی $u_h \in V$ به‌طوری‌که:

$$a(u_h, \psi_h) = (f, \psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h^k.$$

با تفاضل معادله $V.F$ از معادله المان‌های محدود و همچنین فرض خطا به‌صورت تفاضل جواب واقعی از

جواب تقریبی $e := u - u_h$ ، به تعامد گالرکین^۱ زیر می‌رسیم:

$$a(u_h, \psi_h) = 0, \quad \forall \psi_h \in V_h.$$

بنابراین با توجه به روابط بالا معادله پواسون را در فضای المان‌های محدود پیاده‌سازی کردیم.

حال به برآورد خطای A posteriori این معادله به روش D.W.R می‌پردازیم.

۲.۱.۳ برآورد خطای معادله پواسون

برای محاسبه خطای معادله پواسون همان‌طور که در فصل دوم گفتیم ابتدا $J(\cdot)$ را متناسب با معادله اصلی

تعریف می‌کنیم. سپس کران بالایی وابسته به وزن‌های معادله دوگان و خطای A posteriori معادله برای این تابع می‌یابیم.

فرض کنید $z \in V$ جواب مساله دوگان متناظر زیر

$$a(\varphi, z) = J(\varphi), \quad \forall \varphi \in V, \quad (۲.۳)$$

^۱Galerkin Orthogonality

و $z_h \in V_h$ جواب تقریب المان محدود زیر

$$a(\varphi_h, z_h) = J(\varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in V_h, \quad (۳.۳)$$

باشد. با استفاده از معادله (۲.۳) داریم:

$$J(e) = a(e, z).$$

همچنین با استفاده از تعامد گالرکین :

$$a(e, \psi_h) = 0, \quad \forall \psi_h \in V_h.$$

می توان نوشت:

$$\begin{aligned} J(e) &= a(e, z) = a(e, z) - a(e, \psi_h) \\ &= a(e, z - \psi_h), \end{aligned}$$

با فرض خطای $e = u - u_h$ به صورت $e = u - u_h$ معادله زیر حاصل می شود:

$$a(e, z - \psi_h) = a(u, z - \psi_h) - a(u_h, z - \psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h,$$

در نتیجه با استفاده از معادله (۲.۳) می توان نوشت:

$$a(e, z - \psi_h) = (f, z - \psi_h) - a(u_h, z - \psi_h) := \rho(u_h)(z - \psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h,$$

که در آن مانده $\rho(u_h)(\cdot)$ از تقریب گالرکین u_h بعنوان تابعی از فضای جواب در نظر گرفته می شود. حال با استفاده از قضیه گرین داریم:

$$\begin{aligned} a(u_h, z - \psi_h) &= \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla (z - \psi_h) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \Delta u_h (z - \psi_h) \, dx - \int_{\Gamma} \partial_n u_h (z - \psi_h) \, dx. \end{aligned}$$

در این صورت مانده ρ با اجتماع روی همه ی سلول های مثلثی به صورت زیر بدست می آید:

$$\rho(u_h)(z - \psi_h) = \sum_{k \in \mathbb{T}_h} \{(f + \Delta u_h, z - \psi_h)_k - (\partial_n u_h, z - \psi_h)_{\partial k}\}, \quad \forall \psi_h \in V_h,$$

که در اینجا برای دو همسایگی سلول های $k, k' \in \mathbb{T}_h$ با یال مشترک Γ و بردار یکه نرمال خارجی n رابطه زیر برقرار است:

$$[\partial_n u_h] = [\nabla u_h \cdot n] := ((\nabla u_h)_{|_{k' \cap \Gamma}} - (\nabla u_h)_{|_{k \cap \Gamma}}) \cdot n.$$

در نتیجه با جدا کردن مرز مشترک این سلول ها داریم:

$$\rho(u_h)(z - \psi_h) = \sum_{k \in \mathbb{T}_h} \{(f + \Delta u_h, z - \psi_h)_k + \frac{1}{\nu}([\partial_n u_h], z - \psi_h)_{\partial k \setminus \partial \Omega}\}, \quad \forall \psi_h \in V_h,$$

حال باقیمانده روی سلول‌های مثلثی را با نماد R_h و باقیمانده روی یال‌های مرزی را با r_h نمایش می‌دهیم بنابراین:

$$R_{h|K} := f + \Delta u_h,$$

$$r_{h|\Gamma} := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}[\partial_n u_h], & \Gamma \subset \partial K \setminus \partial\Omega, \\ 0, & \Gamma \subset \partial\Omega. \end{cases}$$

در نتیجه تابع خطای $J(e)$ به صورت

$$J(e) = \sum_{k \in \mathbb{T}_h} \{(R_h, z - \psi_h)_k - (r_h, z - \psi_h)_{\partial k \setminus \partial\Omega}\}, \quad \forall \psi_h \in V_h,$$

بدست می‌آید.

با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز برای تابع $J(e)$ می‌توان نوشت:

$$|J(e)| \leq \sum_{k \in \mathbb{T}_h} \|R_h\| \|z - \psi_h\|_k - \|r_h\| \|z - \psi_h\|_{\partial k \setminus \partial\Omega} \quad \forall \psi_h \in V_h,$$

نامساوی بالا به ازای تمام مقادیر V_h برقرار است، لذا با جایگذاری تابع درونیاب $I_h z \in V_h$ رابطه زیر بدست می‌آید:

$$|J(e)| \leq \sum_{k \in \mathbb{T}_h} \|R_h\| \|z - I_h z\|_k - \|r_h\| \|z - I_h z\|_{\partial k \setminus \partial\Omega}. \quad (4.3)$$

حال به تخمین کران بالا می‌پردازیم:

لم ۱.۱.۳. فرض کنید $I_h z$ تابع درونیاب z باشد، همچنین با فرض $|z|_k = \|v\|_{L^2(k)}$ و $|v|_{\mathbf{r},k} = \|v\|_{H^{\mathbf{r}}(k)}$ روابط زیر برقرار است:

$$\|I_h z - z\|_k \leq C_k h_k^{\mathbf{r}} |z|_{\mathbf{r},k}, \quad \forall k \in \mathbf{T}_h, \bullet$$

$$\|\nabla(I_h z - z)\|_k \leq C_k h_k |z|_{\mathbf{r},k}, \quad \forall k \in \mathbf{T}_h. \bullet$$

که در روابط بالا

$$h_k = \text{diam}(K), \quad h = \max h_k.$$

در نتیجه تخمین‌های متناظر زیر برقرار می‌شود:

$$\|I_h z - z\| \leq C h^{\mathbf{r}} \|z\|_{\mathbf{r}}, \quad \forall k \in \mathbf{T}_h, \bullet 1$$

$$\|\nabla(I_h z - z)\| \leq C h \|z\|_{\mathbf{r}}, \quad \forall k \in \mathbf{T}_h. \bullet 2$$

برهان. برای اثبات رابطه (۱) داریم:

$$\begin{aligned}
 \|I_h z - z\| &= \left(\int_{\Omega} |I_h z - z|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \Omega = \cup_{k \in \mathbf{T}_h} k \\
 &= \left(\int_{k_1} |I_h z - z|^2 dx + \int_{k_2} |I_h z - z|^2 dx + \dots + \int_{k_m} |I_h z - z|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\sum_{k \in \mathbf{T}_h} \|I_h z - z\|_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k \in \mathbf{T}_h} C_k^2 h_k^2 |z|_{2,k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C_k h_k \left(\sum_{k \in \mathbf{T}_h} \|z\|_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_k h_k \|z\|_2.
 \end{aligned}$$

□

به طور مشابه رابطه (۲) اثبات می‌شود. بنابراین کران بالای رابطه (I) بدست می‌آید.

حال به یافتن کران بالای رابطه (II) می‌پردازیم:

اگر در نامعادله تریس به جای V از $z - I_h z$ استفاده کنیم در نتیجه نامعادله

$$\|z - I_h z\|_{L_2(\Gamma)} \leq C \left(h_k^{-1} \|z - I_h z\|_{L_2(\Omega)}^2 + h_k \|\nabla(z - I_h z)\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

بدست می‌آید. با جایگزینی روابط لم (۱.۱.۳)، در نامعادله بالا داریم:

$$\begin{aligned}
 \|z - I_h z\|_{\partial k} &\leq C(C_k h_k^{-\frac{1}{2}} h_k \|z\|_2 + C_k h_k^{\frac{1}{2}} h_k \|z\|_2) \\
 &\leq C_k h_k^{\frac{1}{2}} \|z\|_2.
 \end{aligned}$$

کران‌های بدست آمده از رابطه‌های (I)، (II)، را در نامعادله (۴.۳) جایگذاری می‌کنیم:

$$|J(e)| \leq \left(\sum_{k \in \mathbf{T}_h} C_k h_k^{\frac{1}{2}} \|z\|_2 \|R_h\| - C_k h_k^{\frac{1}{2}} \|z\|_2 \|r_h\|, \right) \quad (۵.۳)$$

و با اعمال نماد گذاری‌های زیر کران بالای معادله (۱.۳) به‌صورت:

$$|J(e)| \leq \eta_{\omega} := \sum_{K \in \mathbf{T}_h} \rho_K \omega_K,$$

بدست می‌آید. که در آن

$$\begin{aligned}
 \rho_k &:= \left(\|R_h\|_k^2 + h_k^{-1} \|r_h\|_{\partial k}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 \omega_k &:= \left(\|z - I_h z\|_k^2 + h_k \|z - I_h z\|_{\partial k}^2 \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

تعریف می‌شوند.

جدول ۱.۳: تایج عددی محاسبه خطای معادله پواسون

مرحله	زمان	تابع خطای $\rho_{\min}$	تابع خطای $\rho_{\max}$	تعداد مثلث‌های افراز	تعداد یال‌های افراز
۱	۲.۵۲۶s	$1.54108e-006$	0.00843563	۳۵۱۰	۱۸۴۸
۲	۴.۸۱۲s	$8.86662e-007$	0.00551111	۸۰۱۵	۴۱۴۱
۳	۹.۷۱۷s	$7.59887e-008$	0.00492679	۱۱۶۴۳	۵۹۷۵

۳.۱.۳ نتایج عددی محاسبه خطا

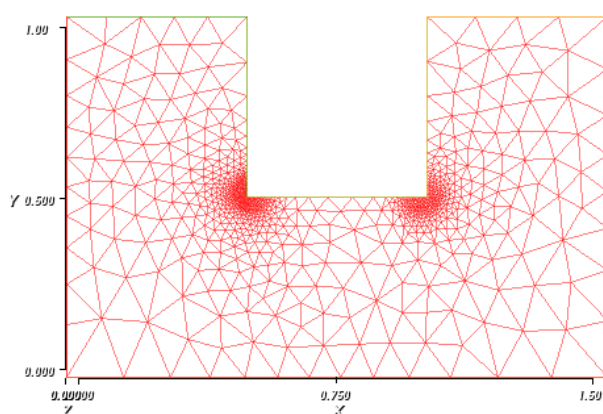
با استفاده از نتایج تحلیلی کران بالای خطای معادله پواسون و استفاده از نرم افزار محاسباتی Freefem++ می‌توان این نتایج را محاسبه و ترسیم کرد.

در همین راستا معادله (۱.۳) را با فرض $f(x) = (x - y)$ در نظر بگیرید:

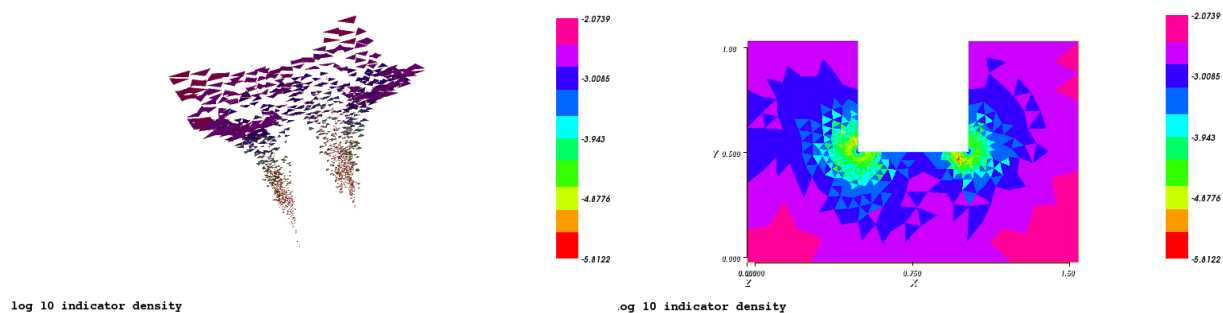
$$\begin{cases} -\Delta u = (x - y) & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.3)$$

با حل این معادله به روش المان‌های محدود و پیاده‌سازی خطای این معادله به روش D.W.R، می‌توان به معادله (۵.۳) برسیم. با کدنویسی در فضای C++ و اجرا در نرم‌افزار Freefem++ می‌توان به نتایج عددی در جدول (۳.۱.۳) رسید.

حال با توجه به داده‌های بدست آمده در هر مرحله، در اولین شکل مش‌بندی فضای معادله را می‌بینیم، در شکل دوم نمایش خطای ρ در حالت یک بعدی را نشان می‌دهد و آخرین شکل نمایش خطای ρ در حالت خاص سه-بعدی است.

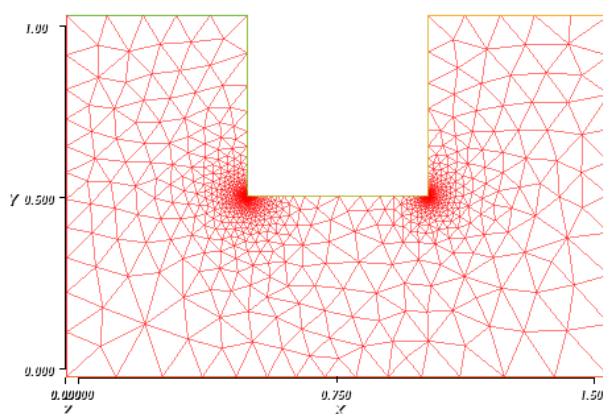


شکل ۱.۳: مش‌بندی فضای Ω در مرحله اول

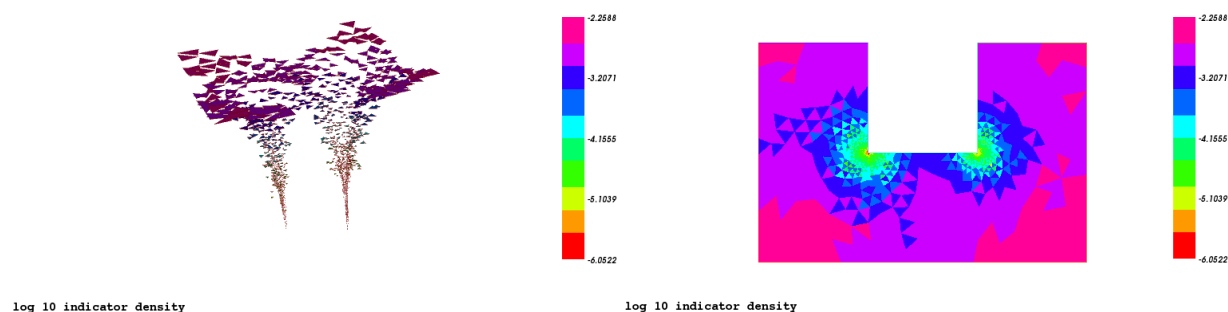


شکل ۲.۳: شکل سمت راست نمایش خطای ρ در حالت دو-بعدي و شکل سمت چپ نمایش خطای ρ در حالت سه-بعدي را نشان می‌دهد.

با توجه به داده‌های جدول نمایش خطا در مرحله دوم به صورت زیر است:

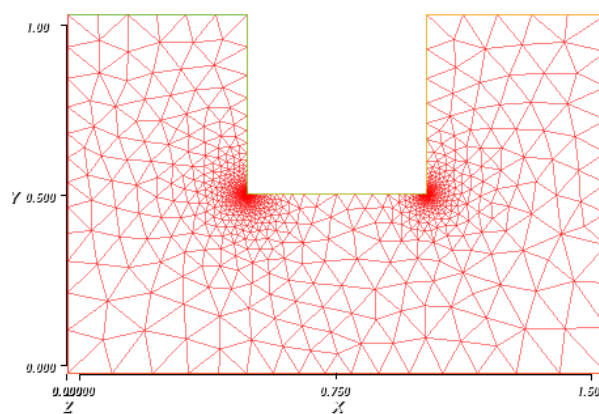


شکل ۳.۳: مش‌بندی فضای Ω در مرحله دوم

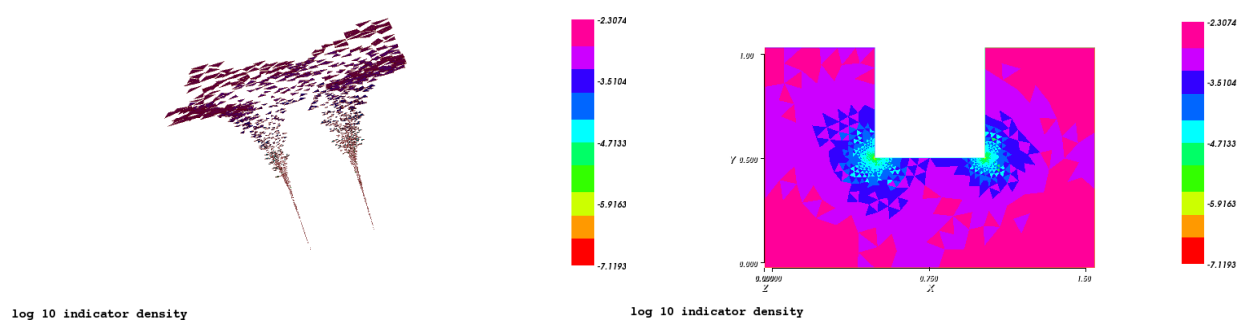


شکل ۴.۳: شکل سمت راست نمایش خطای ρ در حالت دو-بعدي و شکل سمت چپ نمایش خطای ρ در حالت سه-بعدي را نشان می‌دهد.

با توجه به داده‌های جدول نمایش خطا در مرحله سوم به صورت زیر است:



شکل ۵.۳: مش‌بندی فضای Ω در مرحله سوم



شکل ۶.۳: شکل سمت راست نمایش خطای p در حالت دو-بعدي و شکل سمت چپ نمایش خطای p در حالت سه-بعدي را نشان می‌دهد.

فصل ۴

برآورد خطای معادلات وابسته به زمان و مکان

در این فصل به تخمین خطای معادلات وابسته به زمان به روش D.W.R می‌پردازیم. این معادلات علاوه بر اینکه به تغییرات مکان، وابسته هستند با تغییرات زمان نیز تغییر می‌کنند. معادله انتقال حرارت از این معادلات است که در این فصل ابتدا این مساله مربوط به معادله انتقال حرارت مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, & \text{in } \Omega \times [0, T], \\ u(\cdot, 0) = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = 0. & \text{on } \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (1.4)$$

که در آن Ω دامنه چندوجهی در فضای $\mathbf{R}^2$ است، همچنین $I = [0, T]$ بازه زمانی است که معادله روی آن تعریف شده است.

۱.۴ خطای معادله انتقال حرارت به روش D.W.R

۱.۱.۴ گسسته‌سازی به روش المان‌های محدود گالرکین

در این روش برای این مدل از معادلات ابتدا باید گسسته‌سازی مکانی را انجام داد که برای این کار اقدامات زیر را انجام دهیم:

- گسسته‌سازی فضای مکانی Ω
- تعریف فضای تابعی متناسب با فضای مکانی گسسته شده
- تعریف توابع پایه‌ای متناسب با فضای پایه‌ای

همانطور که قبلاً گفته شد برای گسسته‌سازی فضای Ω باید این فضا را مثلی سازی کرد و توابع پایه‌ای متناظر با آن را توابع زیر معرفی می‌کنیم:

$$\varphi_i(N_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

که روی هر نقطه تعریف شده یک و در بقیه نقاط صفر است. همچنین فضای تابعی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_h^n = \{v \in V, \quad v|_K \in \mathbf{P}^n(K), K \in \mathbb{T}_h\},$$

• $\mathbf{P}^n(K)$ چندجمله‌ای از درجه n متناظر مناسب با هر مثلث است.

• $\mathbb{T}_h$ افراز فضای Ω است.

$$h_k = \text{diam}(K), \quad h = \max h_k,$$

حال گسسته‌سازی بازه‌ی زمانی را انجام می‌دهیم بنابراین:

$$I = [\circ, T] = \{\circ = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = T\}.$$

که در آن $k_n := t_n - t_{n-1}$ طول زیر بازه‌ها و $I_n = (t_{n-1}, t_n)$ نشان‌دهنده زیر بازه‌ها است. همچنین توابع پایه‌ای متناسب با بازه گسسته‌شده را به صورت

$$\psi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم.

برای بدست آوردن معادله $DG(\circ)$ ابتدا فضای تست مبتنی بر مکان و زمان گسسته‌سازی شده را تعریف می‌کنیم:

$$V_h^k := \{\varphi : \Omega \times I \rightarrow \mathbf{R}, \varphi(\cdot, t)|_{\Omega} \in V_h^n, \varphi(\cdot, \circ) \in V_h^\circ, \varphi(x, \cdot)|_{I_n} \in P_\circ, \}.$$

معادله (۱.۴) را در تابعی از فضای تابعی ضرب کرده و سپس روی فضای Ω انتگرال گیری می‌کنیم.

$$\int_{\Omega} (\partial_t u, \varphi) dx - \int_{\Omega} (\Delta u, \varphi) dx = \int_{\Omega} (f, \varphi) dx,$$

حال با استفاده از فرمول گرین معادله زیر بدست می‌آید:

$$(\partial_t u, \varphi)_{\Omega} + (\nabla u, \nabla \varphi)_{\Omega} = (f, \varphi)_{\Omega}, \quad (۲.۴)$$

با انتگرال گیری بر حسب زمان از رابطه بالا داریم:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\partial_t u, \varphi)_{\Omega} dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla u, \nabla \varphi)_{\Omega} dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (f, \varphi)_{\Omega} dt,$$

بنابراین :

$$= \left((u(t_{n-1}) - u(t_n)), \varphi \right)_{\Omega} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla u, \nabla \varphi)_{\Omega} dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (f, \varphi)_{\Omega} dt,$$

در نتیجه به فرم $DG(\circ)$ برای معادله انتقال حرارت (۱.۴) می‌رسیم:

$$A(u)(\varphi) = \int_{I_n} (\nabla u \nabla \varphi)_{\Omega} - (f, \varphi)_{\Omega} dt + (u^{(n-1)+} - u^{(n-1)-}, \varphi)_{\Omega}, \quad (۳.۴)$$

که در آن

$$[u]^n = u^{n+} - u^{n-}, \quad u^{(n-1)-} = \lim_{t \uparrow t_{n-1}} u(t), \quad u^{(n-1)+} = \lim_{t \downarrow t_{n-1}} u(t).$$

با توجه به روابط بالا معادله المان‌های محدود متناظر برابر است با:

$$A(u_h)(\varphi_h) = \circ, \quad \forall \varphi_h \in V_h^k.$$

همچنین با فرض $e = u - u_h$ تعامد گالرکین به صورت

$$A(u)(\varphi_h) - A(u_h)(\varphi_h) = \circ, \quad \forall \varphi_h \in V_h^k.$$

تعریف می‌شود. یعنی :

$$A(e)(\varphi_h) = \circ, \quad \forall \varphi_h \in V_h^k. \quad (۴.۴)$$

۲.۱.۴ گسسته‌سازی به روش تغییر زمان و مکان

با استفاده از، روش اویلر-پسرو و جایگذاری رابطه زیر

$$\partial_t u(t_n) = \frac{u^n - u^{n-1}}{k},$$

در معادله (۲.۴) داریم:

$$\left(\frac{u^n - u^{n-1}}{k}, \varphi \right)_{\Omega} + (\nabla u, \nabla \varphi)_{\Omega} = (f, \varphi)_{\Omega},$$

با جداسازی عملگرها، رابطه بالا به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} (u^n, \varphi)_{\Omega} - \frac{1}{k} (u^{n-1}, \varphi)_{\Omega} + (\nabla u, \nabla \varphi)_{\Omega} &= (f, \varphi)_{\Omega}, \\ (u^n, \varphi)_{\Omega} + k(\nabla u^n, \nabla \varphi)_{\Omega} &= (u^{n-1}, \varphi)_{\Omega} + \int_{I_n} f \varphi dt, \end{aligned} \quad (۵.۴)$$

با توجه به روابط بالا معادله انتقال حرارت را در فضای المان‌های محدود پیاده‌سازی کردیم. حال به برآورد خطای این معادله به روش D.W.R می‌پردازیم.

۳.۱.۴ برآورد خطای معادله انتقال حرارت

فرض کنید $z \in V$ جواب مساله دوگان متناظر زیر

$$\begin{cases} \partial_t z - \Delta z = g, & \text{in } \Omega \times I, \\ z|_{t=T} = \circ, & \text{in } \Omega, \\ z|_{\partial\Omega} = \circ, & \text{on } I. \end{cases}$$

باشد. در این صورت تابع خطای $J(e)$ را وابسته به جواب مساله دوگان به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(e) = a(e, z),$$

همچنین با استفاده از تعامد گالرکین (۴.۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} J(e) &= a(e, z) = a(e, z) - a(e, \varphi_h) \\ &= a(e, z - \varphi_h), \end{aligned}$$

با فرض خطای $e = u - u_h$ به صورت داریم:

$$\begin{aligned} a(e, z - \varphi_h) &= a(u, z - \varphi_h) - a(u_h, z - \varphi_h), \\ &= (Au, z - \varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in V_h^k, \quad (A = -\Delta) \end{aligned}$$

بنابراین با جایگذاری رابطه $DG(\circ)$ در معادله بالا داریم:

$$A(e, z - \varphi_h) = (f - \partial_t u_h, z - \varphi_h) - ([u_h]^{n-1}, (z - \varphi_h)^{(n-1)+}) - a(u_h, z - \varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in V_h^k,$$

حال با استفاده از قضیه گرین داریم:

$$\begin{aligned} a(u_h, z - \varphi_h) &= \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla (z - \varphi_h) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \Delta u_h (z - \varphi_h) \, dx + \int_{\Gamma} \partial_n u_h (z - \varphi_h) \, dx. \end{aligned}$$

در نتیجه می‌توان تابع خطای $J(e)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} J(e) &= A(e, z - \varphi_h) \\ &= \left((f - \partial_t u_h, z - \varphi_h)_{\Omega \times I} - ([u_h]^{n-1}, (z - \varphi_h)^{(n-1)+})_{\Omega \times I} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \Delta u_h (z - \varphi_h) \, dx - \int_{\Gamma} \partial_n u_h (z - \varphi_h) \, dx \right). \end{aligned}$$

در این صورت تابع خطای $J(e)$ با اجتماع روی همه‌ی سلول‌های مثلثی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$J(e) = \sum_{n=1}^N \sum_{k \in \mathbb{T}_h} \left\{ (f - \partial_t u_h + \Delta u_h, z - \varphi_h)_k - (\partial_n u_h, z - \varphi_h)_{\partial k} - ([u_h]^{n-1}, (z - \varphi_h)^{(n-1)+})_K \right\}, \quad \forall \varphi_h \in V_h,$$

که در اینجا برای دو همسایگی سلول‌های $k, k' \in \mathbb{T}_h$ با یال مشترک Γ و بردار یکه نرمال خارجی n رابطه زیر برقرار است:

$$[\partial_n u_h] = [\nabla u_h \cdot n] := ((\nabla u_h)|_{k' \cap \Gamma} - (\nabla u_h)|_{k \cap \Gamma}) \cdot n,$$

در نتیجه با جدا کردن مرز مشترک این سلول‌ها داریم:

$$J(e) = \sum_{n=1}^N \sum_{k \in \mathbb{T}_h} \left\{ (f - \partial_t u_h + \Delta u_h, z - \varphi_h)_k + \frac{1}{\gamma} ([\partial_n u_h], z - \varphi_h)_{\partial k \setminus \partial \Omega} - ([u_h]^{n-1}, (z - \varphi_h)^{(n-1)+})_K \right\}, \quad \forall \varphi_h \in V_h.$$

نامساوی بالا به ازای تمام مقادیر V_h^k برقرار است، لذا با جایگذاری تابع درونیاب $I_h^k z \in V_h^k$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{I_n} I_h^K z(a, t) dt = \bar{z}(a), \quad \bar{z}(x) := \int_{I_n} z(x, t) dt, \quad x \in \Omega,$$

رابطه زیر بدست می‌آید:

$$J(e) = \sum_{n=1}^N \sum_{k \in \mathbb{T}_h} \left\{ (f - \partial_t u_h + \Delta u_h, z - I_h^k z)_k + \frac{1}{\gamma} ([\partial_n u_h], z - I_h^k z)_{\partial k \setminus \partial \Omega} - ([u_h]^{n-1}, (z - I_h^k z)^{(n-1)+})_K \right\}, \quad \forall \varphi_h \in V_h.$$

حال باقیمانده روی سلول‌های مثلثی را با نماد R_h^k و باقیمانده روی یال‌های مرزی را با r_h^k نمایش می‌دهیم بنابراین:

$$J(e) = \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \left\{ (R_h^k, z - I_h^k z)_K + (r_h^k, z - I_h^k z)_{\partial K \times I_n} - ([u_h]^{n-1}, (z - I_h^k z)^{(n-1)+})_k \right\},$$

$$R_{h|K}^k := f - \partial_t u_h + \Delta u_h, \quad r_{h|\Gamma}^k := \begin{cases} \frac{1}{\gamma} [\partial_n u_h], & \Gamma \subset \partial K \setminus \partial \Omega, \\ 0, & \Gamma \subset \partial \Omega. \end{cases} \quad (۶.۴)$$

همچنین با قرار دادن $\bar{R}_h^k = \bar{f} - \partial_t \bar{U} + \Delta \bar{U}$ می‌توان به نتیجه زیر رسید:

$$J(e) = \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_h} \left\{ (f - \bar{f}, z - I_h^k z)_{k \times I_n} + (\bar{R}_h^k, \bar{z} - I_h^k z)_{K \times I_n} \right. \\ \left. + (r_h^k, \bar{z} - I_h^K z)_{\partial K \times I_n} - ([u_h]^{n-1}, (z - I_h^K z)^{(n-1)+})_k \right\}.$$

حال با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز برای تابع $J(e)$ می‌توان نوشت:

$$|J(e)| \leq \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_h} \left\{ \|f - \bar{f}\| \|z - I_h^k z\|_{k \times I_n} + \|\bar{R}_h^k\| \|\bar{z} - I_h^k z\|_{k \times I_n} \right. \\ \left. + \|r_h^k\| \|\bar{z} - I_h^K z\|_{\partial K \times I_n} - \| [u_h]^{n-1} \| \|z - I_h^K z\|_k^{(n-1)+} \right\}.$$

با توجه به لم (۱.۱.۳) از فصل قبل داریم که:

$$\|I_h^k z - \bar{z}\|_{k \times I_n} \leq C_h h_k^{\frac{1}{2}} \|z\|_{\frac{1}{2}},$$

$$\|I_h^k z - \bar{z}\|_{\partial k \times I_n} \leq C_h h_k^{\frac{1}{2}} \|z\|_{\frac{1}{2}},$$

$$\|I_h^k z - z\|_{k \times I_n} \leq C_k k_n^{\frac{1}{2}} \|z\|_{\frac{1}{2}},$$

$$\|I_h^k z - z\|_{\partial k \times I_n} \leq C_k k_n^{\frac{1}{2}} \|z\|_{\frac{1}{2}},$$

در نتیجه با قرار دادن رابطه‌های بالا در تابع خطای $J(e)$ نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$|J(e)| \leq \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_h} \left\{ C_k k_n^{\frac{1}{2}} \|f - \bar{f}\| \|z\|_{\frac{1}{2}} + C_h h_k^{\frac{1}{2}} \|\bar{R}_h^k\| \|z\|_{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + C_h h_k^{\frac{1}{2}} \|r_h^k\| \|z\|_{\frac{1}{2}} - C_k k_n^{\frac{1}{2}} \|[u_h]^{n-1}\| \|z\|_{\frac{1}{2}} \right\},$$

با گسسته‌سازی مولفه‌های زمانی و مکانی در تابع خطای $J(e)$ می‌بینیم که:

$$|J(e)| \leq \eta_\omega := \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_h^n} \{ \rho_{K,h}^n \omega_{K,h}^n + \rho_{K,k}^n \omega_{K,k}^n \},$$

$$\rho_{K,h}^n := (\|R_h^k\|_{K \times I_n}^{\frac{1}{2}} + h_K^{-1} \|r_h^k\|_{\partial K \times I_n}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_{K,h}^n := (\|z - I_h^k z\|_{K \times I_n}^{\frac{1}{2}} + h_K \| \bar{z} - I_h^K z \|_{\partial K \times I_n}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho_{K,k}^n := (\|f - \bar{f}\|_{K \times I_n}^{\frac{1}{2}} + k_n^{-1} \|[u_h]^{n-1}\|_K^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_{K,k}^n := (\|z - I_h^k z\|_{K \times I_n}^{\frac{1}{2}} + k_n \|(z - I_h^K z)^{(n-1)+}\|_K^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}.$$

جدول ۱.۴: تایج عددی محاسبه خطای معادله انتقال حرارت

مرحله	زمان	جواب $u_{\max}$	جواب $u_{\min}$	تابع خطای $\rho_{\max}$	تابع خطای $\rho_{\min}$
۱	۰.۰۱۹s	۰.۰۵۳۵۷۱۴	-۴.۳۱۱۷۲e-۰۴۸	۰.۴۲۸۵۷۱	۰.۴۲۸۵۷۱
۲	۳.۰۴۴s	۰.۰۶۶۵۳۹۹	-۹.۸۵۲۱۸e-۰۳۴	۰.۰۴۶۸۸۹۷	۰.۰۰۲۰۴۱۵۶
۳	۶.۲۰۴s	۰.۰۷۲۰۷۶۲	-۲.۰۲۲۹e-۰۳۶	۰.۰۰۲۷۶۲۶۷	۴.۳۵۳۸۲e-۰۰۵
۴	۱۰.۷۹۱s	۰.۰۷۳۳۰۳۷	-۴.۲۳۸۲۹e-۰۳۷	۰.۰۰۲۲۸۶۱۴	۴.۴۳۸۵e-۰۰۶
۵	۱۶.۷۹۸s	۰.۰۷۳۵۶۲	-۷.۴۵۸۱۱e-۰۳۹	۰.۰۰۲۱۱۳۶۸	۷.۶۳۶۴۵e-۰۰۷

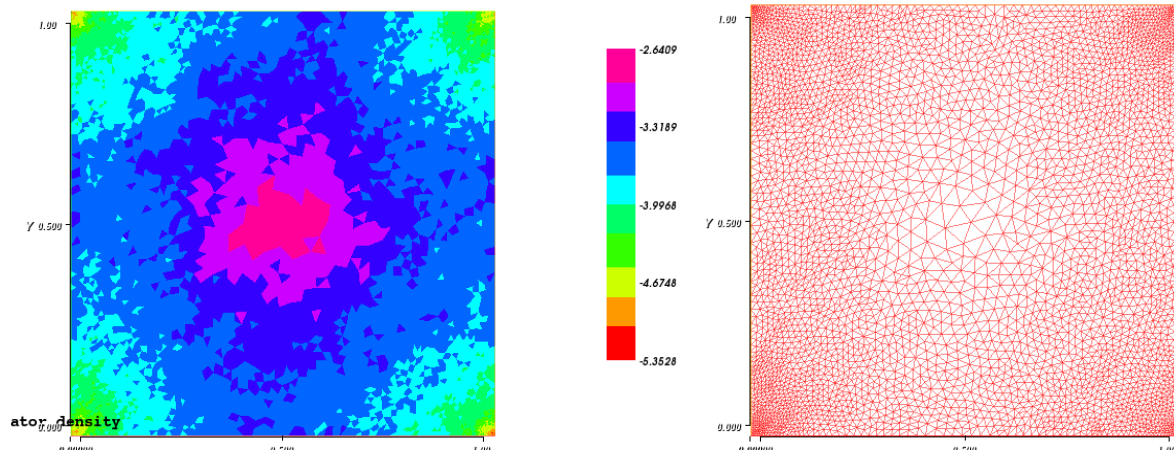
۴.۱.۴ نتایج عددی محاسبه خطا

با بکاربردن نتایج تحلیلی کران بالای خطای معادله انتقال حرارت و استفاده از نرم افزار محاسباتی Freefem++ می‌توان این نتایج را محاسبه و ترسیم کرد. در همین راستا با فرض

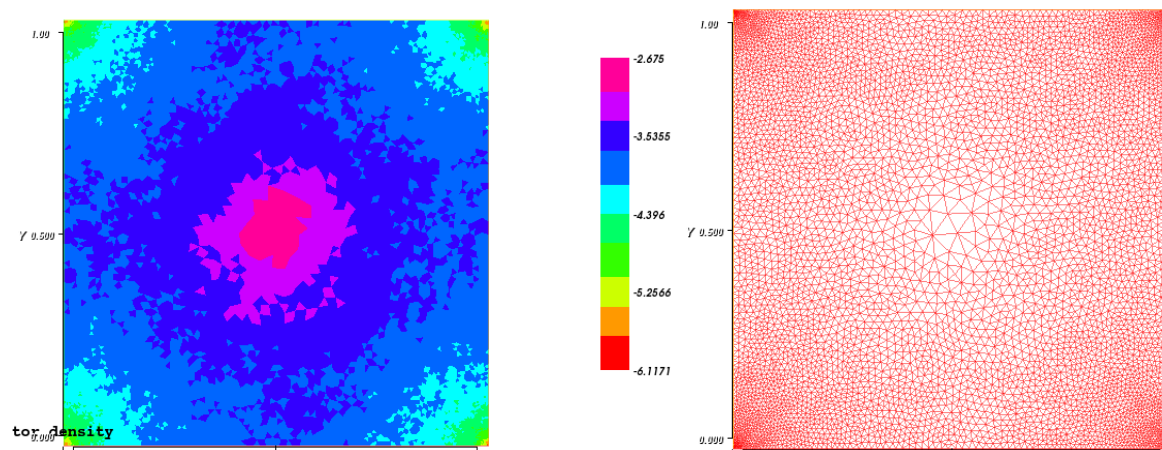
$$u(x, y, 0) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right), \quad f = 0,$$

در معادله (۱.۴) و همچنین با کدنویسی در فضای C++ و اجرا در نرم افزار Freefem++ به نتایج عددی در جدول (۴.۱.۴) می‌رسی:

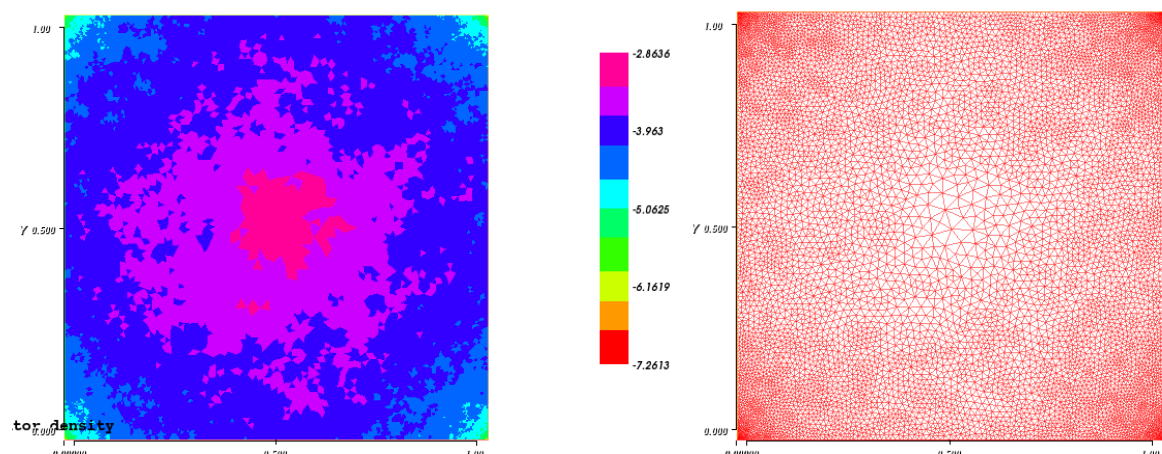
حال با توجه به داده‌های بدست آمده در سه مرحله آخر، در شکل سمت راست مش بندی فضای معادله را می‌بینیم و در شکل سمت چپ نمایش خطای ρ در حالت یک بعدی را نشان می‌دهد:



شکل ۱.۴: نتایج مرحله سوم

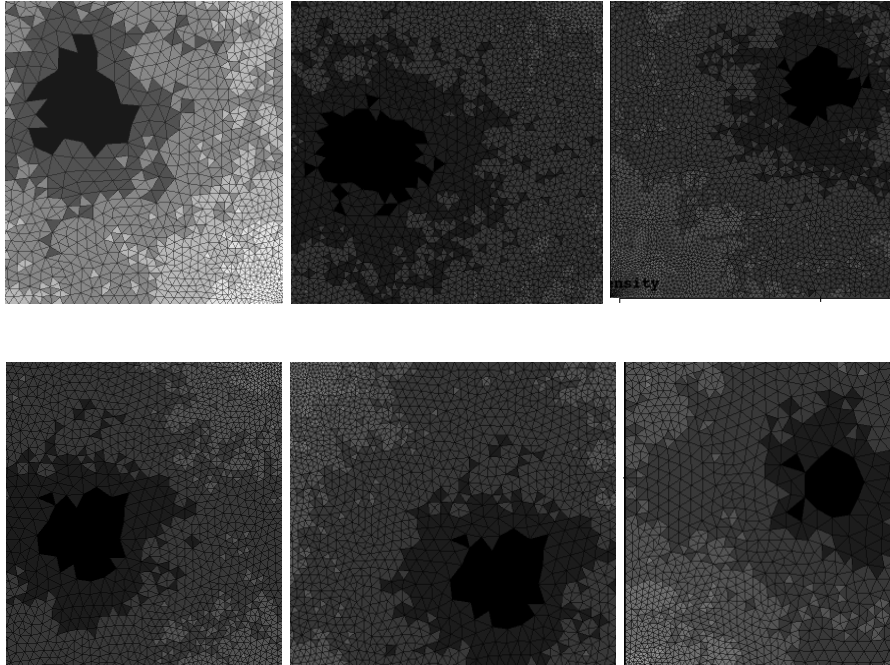


شکل ۲.۴: نتایج مرحله چهارم



شکل ۳.۴: نتایج مرحله پنجم

در حالت کلی روند تغییرات تابع خطای ρ در یک بازه زمانی ثابت به صورت زیر است:



۲.۴ خطای معادله موج به روش D.W.R

نوع دیگری از معادلات وابسته به زمان، معادله موج است که در این قسمت به تخمین خطای این معادله می پردازیم.

مساله زیر مربوط به معادله موج را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0, & \text{in } \Omega \times [0, T], \\ w = 0, & \text{on } \partial\Omega \times [0, T], \\ w(\cdot, 0) = w^0, & \text{in } \Omega, \\ \partial_t w(\cdot, 0) = v^0, & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (7.4)$$

که در آن Ω دامنه چندوجهی در فضای $\mathbf{R}^2$ است، همچنین $I = [0, T]$ بازه زمانی است که معادله روی آن تعریف شده است.

۱.۲.۴ گسسته سازی به روش المان های محدود گالرکین

در این روش برای این مدل از معادلات ابتدا باید گسسته سازی مکانی را انجام داد که برای این کار اقدامات زیر را انجام دهیم:

• گسسته‌سازی فضای مکانی Ω

• تعریف فضای تابعی متناسب با فضای مکانی گسسته شده

• تعریف توابع پایه‌ای متناسب با فضای پایه‌ای

همانطور که قبلاً گفته شد برای گسسته‌سازی فضای Ω باید این فضا را مثلثی سازی کرد و توابع پایه‌ای متناظر با آن را توابع زیر معرفی می‌کنیم:

$$\varphi_i(N_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

که روی هر نقطه تعریف شده یک و در بقیه نقاط صفر است. همچنین فضای تابعی تعریف شده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_h^n = \{v \in V, \quad v|_K \in \mathbf{P}^n(K), K \in \mathbb{T}_h\},$$

• $\mathbf{P}^n(K)$ چندجمله‌ای از درجه n متناظر با هر مثلث است.

• $\mathbb{T}_h$ افراز فضای Ω است.

$$h_k = \text{diam}(K), \quad , \quad h = \max h_k,$$

حال گسسته‌سازی بازه‌ی زمانی را انجام می‌دهیم بنابراین:

$$I = [\circ, T] = \{\circ = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = T\},$$

که در آن $I_n = (t_{n-1}, t_n)$ نشان‌دهنده زیر بازه‌ها و $k_n := t_n - t_{n-1}$ طول زیر بازه‌ها است. همچنین توابع پایه‌ای متناسب با بازه گسسته‌شده را به صورت زیر

$$\psi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم.

برای بدست آوردن معادله $DG(\circ)$ ابتدا فضای تست مبتنی بر مکان و زمان گسسته‌سازی شده را تعریف می‌کنیم:

$$V_h^k := \{\varphi : \Omega \times I \rightarrow \mathbf{R}, \varphi(\cdot, t)|_{\Omega} \in V_h^n, \varphi(\cdot, \circ) \in V_h^\circ, \varphi(x, \cdot)|_{I_n} \in P_\circ, \},$$

حال با تغییر متغیر $u = \binom{w}{v}$ ، داریم:

$$\partial_t^2 w - \Delta w = \circ \implies \begin{cases} \partial_t w - v = \circ, \\ \partial_t v - \Delta w = \circ. \end{cases} \quad (۸.۴)$$

در نتیجه نمایش ساده‌تر معادله بر حسب متغیر u بدست می‌آید:

$$u_t - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} u = 0,$$

با توجه به تغییر متغیر بالا پارامترهای بکار رفته در معادله (۸.۴) بر حسب گسسته‌سازی توابع پایه‌ای به صورت زیر:

$$\begin{cases} w(x, t) = w_{n-1}(x)\psi_{n-1}(t) + w_n(x)\psi_n(t), & x \in \Omega, \quad t \in I_n, \\ v(x, t) = v_{n-1}(x)\psi_{n-1}(t) + v_n(x)\psi_n(t), \end{cases} \quad (9.4)$$

تعریف می‌شوند، که در آن مولفه‌های زیر

$$\begin{cases} w_n(x) = w_{n,1}(x)\varphi_1(x) + \dots + w_{n,m}(x)\varphi_m(x), \\ v_{n-1}(x) = v_{n-1,1}(x)\varphi_1(x) + \dots + v_{n-1,m}(x)\varphi_m(x), \end{cases}$$

جایگذاری شده‌اند. حال با ضرب معادله (۸.۴) در تابع $\varphi = (\varphi_w^v)$ از فضای تست V_h^K داریم:

$$\partial_t w \cdot \varphi^v - v \cdot \varphi^v = 0,$$

$$\partial_t v \cdot \varphi^w - \Delta w \cdot \varphi^w = 0,$$

حال با انتگرال‌گیری از دو معادله بالا روی فضای Ω داریم:

$$\int_{\Omega} \partial_t w \cdot \varphi^v \, dx - \int_{\Omega} v \cdot \varphi^v \, dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} \partial_t v \cdot \varphi^w \, dx - \int_{\Omega} \Delta w \cdot \varphi^w \, dx = 0,$$

بنابراین با نمادگذاری $\int_{\Omega} u \, v \, dx = (u, v)_{\Omega}$ و همچنین با استفاده از قضیه گرین داریم:

$$\begin{cases} (\partial_t w, \varphi^v)_{\Omega} - (v, \varphi^v)_{\Omega} = 0, \\ (\partial_t v, \varphi^w)_{\Omega} + (\nabla w, \nabla \varphi^w)_{\Omega} = 0, \end{cases} \quad (10.4)$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌های بالا روی بازه زمانی روابط زیر بدست می‌آید:

$$(\partial_t w, \varphi^v)_{\Omega} - (v, \varphi^v)_{\Omega} + (w(\circ) - w^{\circ}, \varphi^v(\circ)) = 0,$$

$$(\partial_t v, \varphi^w)_{\Omega} + (\nabla w, \nabla \varphi^w)_{\Omega} + (\partial_t w(\circ) - \partial_t w^{\circ}, \varphi^w(\circ)) = 0,$$

که در این صورت با توجه به نمادگذاریهای زیر معادله $DG(\circ)$ برای معادله موج (۷.۴) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} A(u)(\varphi) &:= (\partial_t w, \varphi^v)_{\Omega} - (v, \varphi^v)_{\Omega} + (w^{\circ+}, \varphi^{v^{\circ+}}) \\ &+ (\partial_t v, \varphi^w)_{\Omega} + a(w, \varphi^w)_{\Omega} + (v^{\circ+}, \varphi^{w^{\circ+}}), \quad \forall \varphi \in V_h^k, \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$(v, w)_\Omega = \int_\Omega vw \, dx.$$

$$a(v, w)_\Omega = (a\nabla v, \nabla w).$$

و همچنین:

$$u^{\circ+} = \lim_{t \downarrow t_*} u(t), \quad w^{\circ-} = \lim_{t \uparrow t_*} u(t), \quad [w]^\circ = w^{\circ+} - w^{\circ-}.$$

حال با توجه به روابط بالا معادله المان‌های محدود متناظر برابر است با:

$$A(u_h)(\varphi_h) = \circ, \quad \forall \varphi_h = \{\varphi_h^v, \varphi_h^w\} \in V_h^k.$$

همچنین با فرض $e := \{e^w, e^v\}$ تعامد گالرکین به صورت

$$A(u)(\varphi_h) - A(u_h)(\varphi_h) = \circ, \quad \forall \varphi_h = \{\varphi_h^v, \varphi_h^w\} \in V_h^k,$$

تعریف می‌شود. یعنی:

$$A(e)(\varphi_h) = \circ, \quad \forall \varphi_h = \{\varphi_h^v, \varphi_h^w\} \in V_h^k. \quad (۱۲.۴)$$

۲.۲.۴ گسسته‌سازی به روش تغییر زمان و مکان

این روش، روش اوایلر-پسرو است در نتیجه با جایگذاری رابطه زیر

$$\partial_t^\gamma w^{n+1} = \frac{\partial_t w^{n+1} - \partial_t w^n}{k_n}, \quad \partial_t w^n = \frac{w^n - w^{n-1}}{k_{n-1}},$$

در معادله‌های (۱۰.۴) و استفاده از تعاریف پارامترها (۹.۴) داریم:

$$\int_{I_n} \int_\Omega \left\{ \frac{w^n - w^{n-1}}{k_n} \varphi^v - (v_{n-1}(x) \psi_{n-1}(t) + v_n(x) \psi_n(t)) \varphi^v \right\} dx dt = \circ,$$

$$\int_{I_n} \int_\Omega \left\{ \frac{v^n - v^{n-1}}{k_n} \varphi^w + (a \nabla (w_{n-1}(x) \psi_{n-1}(t) + w_n(x) \psi_n(t)) \nabla \varphi^w \right\} dx dt = \circ,$$

با جداسازی انتگرال‌های زمانی و مکانی در روابط بالا روابط بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_\Omega (w^n - w^{n-1}) \varphi^v dx - \left(\int_{I_n} (\psi_{n-1}(t) + \psi_n(t)) dt \int_\Omega (v_{n-1}(x) + v_n(x)) \varphi^v dx \right) = \circ,$$

$$\int_\Omega (v^n - v^{n-1}) \varphi^w dx + \left(\int_{I_n} (\psi_{n-1}(t) + \psi_n(t)) dt \int_\Omega (a \nabla (w_{n-1}(x) + w_n(x)) \nabla \varphi^w dx \right) = \circ,$$

در نتیجه گسسته‌سازی به روش اوایلر-پسرو به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(w^n - w^{n-1}, \varphi^v) - \frac{1}{\gamma} k_n (v^n + v^{n+1}, \varphi^v) = \circ,$$

$$(v^n - v^{n-1}, \varphi^w) + \frac{1}{\gamma} k_n (a \nabla (w^n + w^{n-1}), \nabla \varphi^w) = \circ,$$

بنابراین با توجه به روابط بالا معادله موج را در فضای المان‌های محدود پیاده‌سازی کردیم.

۳.۲.۴ برآورد خطای معادله موج

تابع خطای $J(\cdot)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$J(\varphi) := (j, \varphi^w)_{\Omega \times I}, \quad \varphi = \{\varphi^w, \varphi^v\},$$

که در آن $j(x, t)$ تابع چگال معادله است. با توجه به تعریف تابع لاگرانژین (۲۶.۲) با فرض $\psi = 0$ ، برای معادله موج داریم:

$$J'(u)(\varphi) - A'(u)(\varphi, z) = 0$$

حال به محاسبه $A'(u)(\varphi, z)$ با توجه به رابطه زیر می پردازیم:

$$\begin{aligned} A(u)(\varphi) &:= (\partial_t w, \varphi^v)_{\Omega} - (v, \varphi^v)_{\Omega} + (w^{\circ+}, \varphi^{v^{\circ+}}) \\ &+ (\partial_t v, \varphi^w)_{\Omega} + a(w, \varphi^w)_{\Omega} + (v^{\circ+}, \varphi^{w^{\circ+}}), \quad \forall \varphi \in V_h^k. \end{aligned} \quad (۱۳.۴)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} A'(w, v, z^w, z^v, \varphi^w, \varphi^v) &= \langle \partial_t \varphi^w, z^v \rangle - \langle \varphi^v, z^v \rangle + \langle \varphi^{v^{\circ+}}, z^{v^{\circ+}} \rangle \\ &+ \langle \partial_t \varphi^v, z^w \rangle + \langle a \nabla \varphi^w, \nabla z^w \rangle + \langle \varphi^{v^{\circ+}}, z^{w^{\circ+}} \rangle \end{aligned} \quad (۱۴.۴)$$

از طرفی :

$$\langle \partial_t \varphi^w, z^v \rangle = -\langle \varphi^w, \partial_t z^v \rangle + \langle \varphi^w(T), z^v(T) \rangle - \langle \varphi^w(0), z^v(0) \rangle,$$

همچنین :

$$\langle \partial_t \varphi^v, z^w \rangle = -\langle \varphi^v, \partial_t z^w \rangle + \langle \varphi^v(T), z^w(T) \rangle - \langle \varphi^v(0), z^w(0) \rangle,$$

در نتیجه برای رابطه (۱۴.۴) داریم:

$$\begin{aligned} A'(w, v, z^w, z^v, \varphi^w, \varphi^v) &= -\langle \varphi^w, \partial_t z^v \rangle + \langle \varphi^w(T), z^v(T) \rangle - \langle \varphi^v, z^v \rangle \\ &- \langle \varphi^v, \partial_t z^w \rangle + \langle \varphi^v(T), z^w(T) \rangle + \langle a \nabla \varphi^w, \nabla z^w \rangle, \end{aligned}$$

در نتیجه با ساده سازی و جایگذاری $z = \{\partial_t z^w, z^w\}$ و استفاده از قضیه گرین داریم:

$$\begin{aligned} A'(w, v, z^w, z^v, \varphi^w, \varphi^v) &= -\langle \partial_t^2 z^w - \Delta z^w, \varphi^w \rangle + \langle z^w, \varphi^v \rangle \\ &+ \langle -\partial_t z^w, \varphi^v \rangle + \langle n.a \nabla z^w, \varphi^v \rangle. \end{aligned} \quad (۱۵.۴)$$

در نتیجه با توجه به تعریف تابع خطای $J(\cdot)$ داریم:

$$J(\varphi) = A'(u)(\varphi, z), \quad \forall \varphi \in V_h^k. \quad (۱۶.۴)$$

در نتیجه به مساله الحاقی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \partial_t^\gamma z^w - \Delta z^w = j, & \text{in } \Omega \times [\circ, T], \\ n.a \nabla z^w|_{\partial\Omega} = \circ, & \text{on } [\circ, T], \\ z^w|_{t=T} = \circ, & \text{on } \Omega, \\ -\partial_t z^w|_{t=T} = \circ. & \text{on } \Omega, \end{cases}$$

این معادله دارای جواب دقیق $\{z^w, -\partial_t z^w\}$ است.

حال برای تخمین خطای $J(e)$ با توجه به گزاره‌های فصل دوم داریم:

$$J(u) - J(U) = -A(u, z^v - \varphi_h^v, z^w - \varphi_h^w) + \mathcal{R}^\gamma, \quad (۱۷.۴)$$

لذا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} J(e) = \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_h^n} & \left((\partial_t w_h - v_h, z^v - \varphi_h^v)_{\Omega \times I_n} + (\partial_t v_h - \Delta w_h, z^w - \varphi_h^w)_{\Omega \times I_n} \right. \\ & \left. - (n.[a \nabla w_h], z^w - \varphi_h^w)_{\partial K \times I_n} \right), \end{aligned}$$

که در اینجا برای دو همسایگی سلول‌های $k, k' \in \mathbb{T}_h$ با یال مشترک Γ و بردار یکه نرمال خارجی n داریم:

$$[n w_h] = [\nabla w_h \cdot n] := ((\nabla w_h)|_{k' \cap \Gamma} - (\nabla w_h)|_{k \cap \Gamma}) \cdot n,$$

در نتیجه با جدا کردن مرز مشترک این سلول‌ها داریم:

$$\begin{aligned} J(e) = \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_h^n} & \left((\partial_t w_h - v_h, z^v - \varphi_h^v)_{\Omega \times I_n} + (\partial_t v_h - \Delta w_h, z^w - \varphi_h^w)_{\Omega \times I_n} \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{\gamma} n.[a \nabla w_h], z^w - \varphi_h^w \right)_{\partial K \times I_n} \right), \end{aligned}$$

حال باقیمانده روی سلول‌های مثلثی را با نماد R_h^v, R_h^w و باقیمانده روی یال‌های مرزی را با r_h نمایش می‌دهیم بنابراین:

$$\begin{aligned} J(e) \leq \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_h^n} & (R_h^w, z^v - \varphi_h^v)_{\Omega \times I_n} \\ & + (R_h^v, z^w - \varphi_h^w)_{\Omega \times I_n} - (r_h, z^w - \varphi_h^w)_{\partial K \times I_n}, \end{aligned}$$

که در آن مانده‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_h^w|_K := \partial_t w_h - v_h, \quad R_h^v|_k := \partial_t v_h - \Delta w_h,$$

$$r_h|_{\Gamma \times I_n} := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} n \cdot [a \nabla w_h], & \Gamma \subset \partial K \setminus \partial \Omega, \\ 0, & \Gamma \subset \partial \Omega. \end{cases}$$

با اعمال نامساوی کوشی-شوارتز داریم:

$$\begin{aligned} |J(e)| &\leq \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_h^n} \|R_h^w\| \|z^v - \varphi_h^v\|_{\Omega \times I_n} \\ &\quad + \|R_h^v\| \|z^w - \varphi_h^w\|_{\Omega \times I_n} - \|r_h\| \|z^w - \varphi_h^w\|_{\partial K \times I_n}, \end{aligned} \quad (18.4)$$

با توجه به لم (۱.۱.۳) از فصل قبل داریم که:

$$\begin{aligned} \|\varphi_h^w - z^w\|_{K \times I_n} &\leq C_h h_k^{\frac{1}{2}} \|z\|_2, \\ \|\varphi_h^w - z^w\|_{\partial K \times I_n} &\leq C_h h_k^{\frac{1}{2}} \|z\|_2, \end{aligned}$$

در نتیجه با اعمال رابطه زیر در معادله (۱۸.۴) داریم:

$$\begin{aligned} |J(e)| &\leq \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_h^n} C_h h_k^{\frac{1}{2}} \|R_h^w\| \|z^w\|_2 \\ &\quad + C_h h_k^{\frac{1}{2}} \|R_h^v\| \|z^v\|_2 - C_h h_k^{\frac{1}{2}} \|r_h\| \|z\|_2, \end{aligned} \quad (19.4)$$

بنابراین رابطه زیر برای تابع خطا $J(e)$ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} |J(e)| &\leq \eta_\omega := \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_h^n} \{\rho_K^{n,1} \omega_K^{n,1} + \rho_K^{n,2} \omega_K^{n,2}\}, \\ \rho_K^{n,1} &:= (\|R_h^v\|_{K \times I_n}^2 + h_K^{-1} \|r_h\|_{\partial K \times I_n}^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \omega_K^{n,1} &:= (\|\partial_t z^w - \varphi_h^v\|_{K \times I_n}^2 + h_K \|z^w - \varphi_h^w\|_{\partial K \times I_n}^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \rho_K^{n,2} &:= \|R_h^w\|_{K \times I_n}, \\ \omega_K^{n,2} &:= \|z^w - \varphi_h^w\|_{K \times I_n}, \end{aligned}$$

۴.۲.۴ نتایج عددی محاسبه خطا

با بکار بردن نتایج تحلیلی کران بالای خطای معادله موج و استفاده از نرم افزار محاسباتی Freefem++ می‌توان این نتایج را محاسبه و ترسیم کرد.

جدول ۲.۴: تایید عددی محاسبه خطای معادله موج

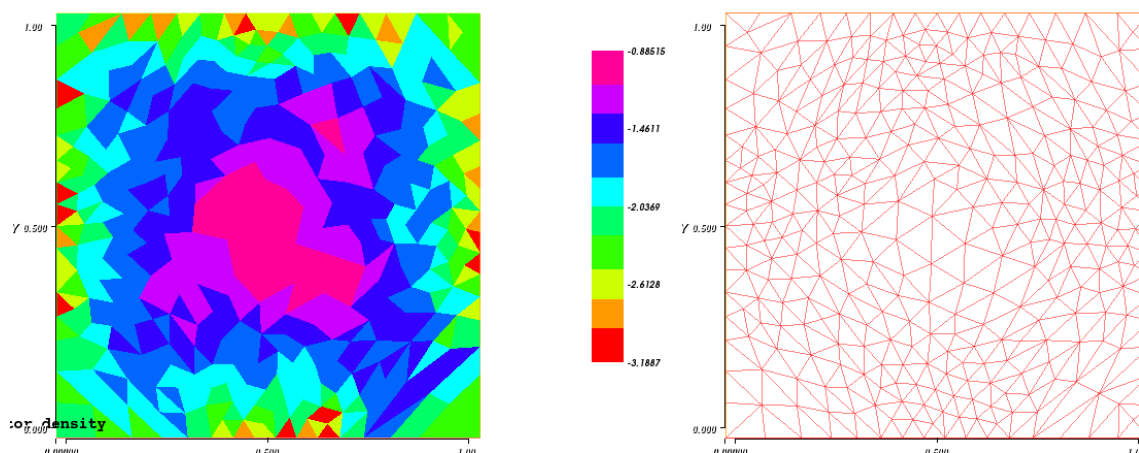
مرحله	زمان	جواب $u_{\max}$	جواب $u_{\min}$	تابع خطای $\rho_{\max}$	تابع خطای $\rho_{\min}$
۱	۰.۷۰۰s	۰.۹۷۵۶۴۲	-۳.۳۱۳۶۲e-۰۳۴	۰.۶۵۰۵۲۱	۰.۰۱۲۴۵۹۶
۲	۰.۷۶۰s	۰.۹۴۳۰۵۳	-۲.۲۸۷۴e-۰۳۴	۰.۴۱۱۳۱۴	۰.۰۰۵۴۰۸۳۲
۳	۰.۸۸۱s	۰.۹۱۸۵۲۱	-۹.۳۹۱۹۸e-۰۳۵	۰.۱۶۴۶۹۵	۰.۰۰۱۵۵۷۸۵
۴	۱.۱۶۸s	۰.۸۸۱۱۰۳	-۲.۸۷۱۱۲e-۰۳۵	۰.۱۳۰۲۷۱	۰.۰۰۰۶۴۷۵۲۱
۵	۲.۱۶۱s	۰.۸۳۹۶۷۲	-۲.۰۵۹۷۷e-۰۳۷	۰.۰۸۱۸۴۱۵	۰.۰۰۰۱۴۱۶۵۴
۶	۵.۰۹۰s	۰.۷۸۹۰۴۸	۴.۰۱۴۵۹e-۰۳۸	۰.۲۸۵۳۹۲	۳.۱۹۲۹e-۰۰۵

در همین راستا با فرض

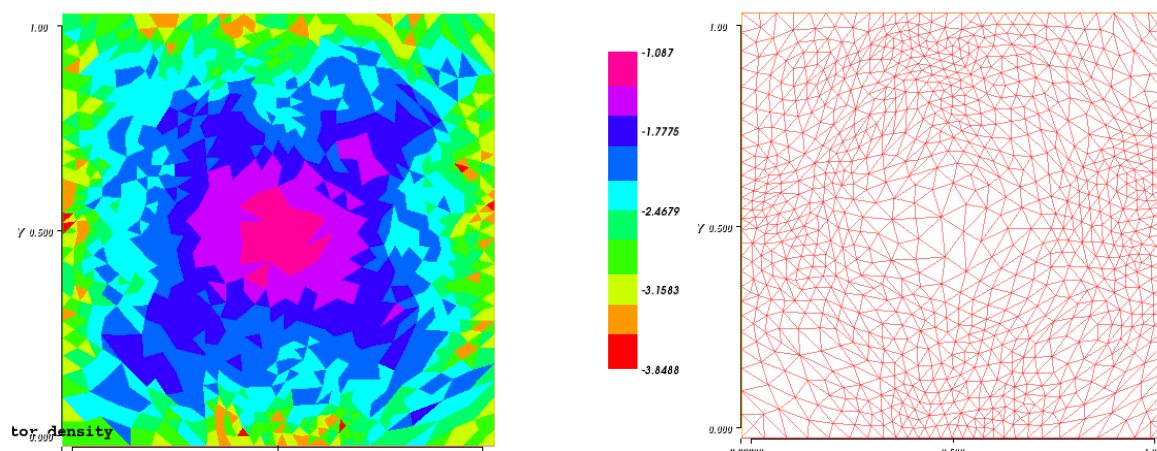
$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi y), \quad f = 0,$$

در معادله (۷.۴) و همچنین با کدنویسی در فضای C++ و اجرا در نرم افزار Freefem++ می توان به نتایج عددی جدول (۴.۲.۴) رسید.

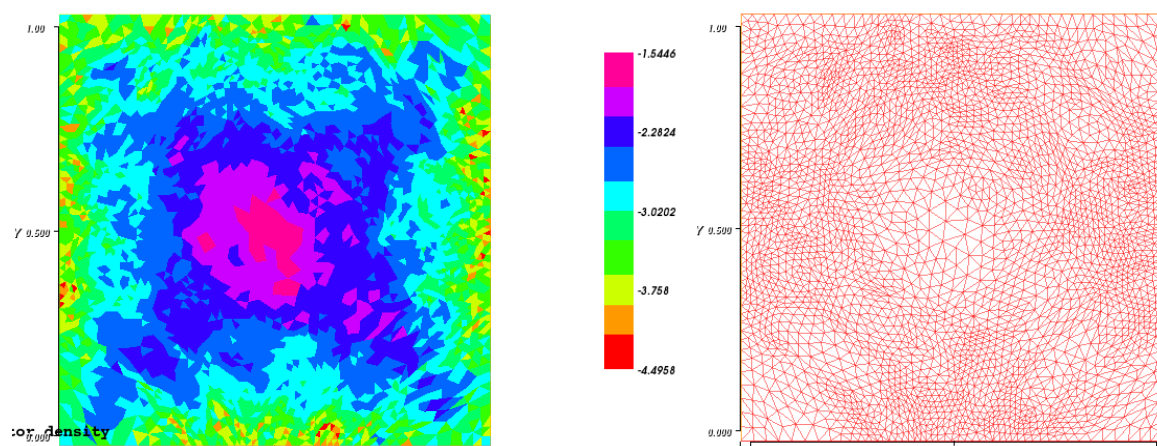
حال با توجه به داده های بدست آمده در چهار مرحله آخر، در شکل سمت راست مش بندی فضای معادله را می بینیم و در شکل سمت چپ نمایش خطای ρ در حالت یک بعدی را نشان می دهد:



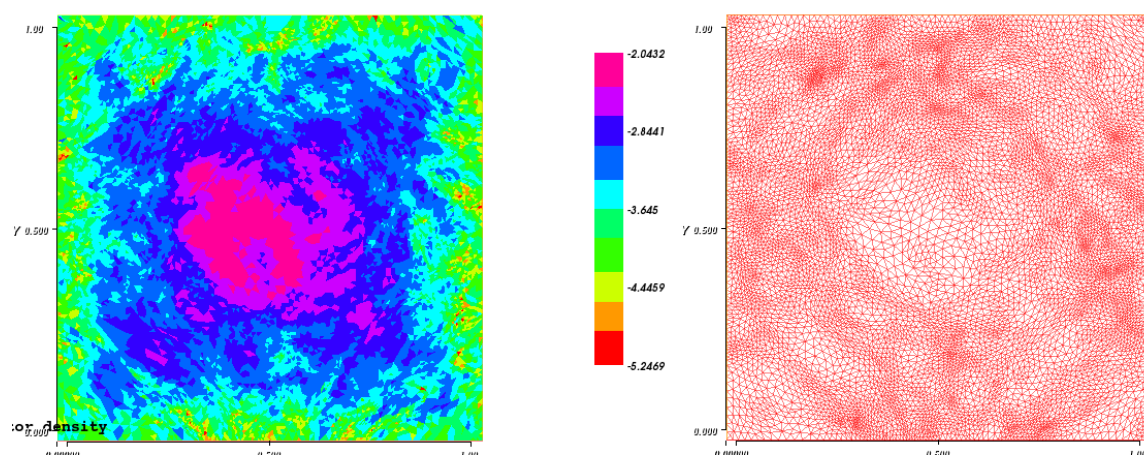
شکل ۴.۴: نتایج مرحله سوم



شکل ۵.۴: نتایج مرحله چهارم



شکل ۶.۴: نتایج مرحله پنجم



شکل ۷.۴: نتایج مرحله ششم

فصل ۵

خطای معادله کان-هیلارد

هنگامی که یک آلیاژ همگن مذاب به سرعت سرد می‌شود، جامد بدست آمده معمولاً همگن نیست. اما در عوض دارای ساختاری از ذره‌های ریز متشکل از همان آلیاژ است. به این تبدیل ساختار آلیاژ همگن، تجزیه اسپینودال^۱ گفته می‌شود.

معادله کان-هیلارد یک مدل برای جداسازی حالت و تجزیه اسپینودال می‌باشد که اولین بار توسط جان کان^۲ و جان هیلارد^۳ در سال ۱۹۵۸ بر همین اساس طراحی شده است. مساله زیر مربوط به معادله کان-هیلارد^۴ را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_t - \Delta w = 0, & \text{in } \Omega \times [0, T], \\ w + \epsilon \Delta u - f(u) = 0, & \text{in } \Omega \times [0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & \text{on } \partial\Omega \times [0, T], \\ u(\cdot, 0) = g_0, & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1.5)$$

که در آن Ω دامنه چندوجهی در فضای $\mathbf{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ است. همچنین می‌دانیم:

$$u = u(x, t), \quad w = w(x, t), \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

از طرفی:

v ، بردار یکه خارجی روی مرز Ω است و $\epsilon > 0$ متغیر بسیار کوچک فرض شده است، f یک متغیر غیرخطی است. به عنوان مثال $f(u) = u^3 - u$.

حال با گسسته‌سازی معادله (۱.۵) به روش المان‌های محدود گالرکین مبتنی بر توابع پیوسته قطعه‌وار خطی در فضا و توابع ناپیوسته قطعه‌وار ثابت در زمان، حل می‌کنیم.

^۱spinodal

^۲Jahn W.cahn

^۳John E.Hilliard

^۴Cahn-Hilliard

۱.۵ گسسته‌سازی به روش المان‌های محدود گالرکین

در نظر بگیرید $I = [0, T]$ و $Q = \Omega \times I$ ، همچنین برای $D \subset \Omega \subset Q$ داریم:

$$\langle v, w \rangle_D = \int_D vw \, dz, \quad \|v\|_D^2 = \int_D v^2 \, dz.$$

که در این روابط dz اندازه لبگ^۵ است. فرض کنید فضای تابعی $V = H^1(\Omega)$ و $\mathcal{W} = C^1([0, T], V)$ را داشته باشیم. حال با ضرب معادله اول از معادله (۱.۵) در $\psi_u \in V$ و ضرب معادله دوم در $\psi_w \in V$ داریم:

$$u_t \cdot \psi_u - \Delta w \cdot \psi_u = 0, \quad \forall \psi_u \in V, t \in [0, T],$$

$$w \cdot \psi_w + \epsilon \Delta u \cdot \psi_w - f(u) \cdot \psi_w = 0, \quad \forall \psi_w \in V, t \in [0, T],$$

با انتگرال‌گیری روی فضای مکانی Ω از روابط بالا خواهیم داشت:

$$\langle u_t \cdot \psi_u \rangle_\Omega - \langle \Delta w \cdot \psi_u \rangle_\Omega = 0, \quad \forall \psi_u \in V, t \in [0, T],$$

$$\langle w \cdot \psi_w \rangle_\Omega + \epsilon \langle \Delta u \cdot \psi_w \rangle_\Omega - \langle f(u) \cdot \psi_w \rangle_\Omega = 0, \quad \forall \psi_w \in V, t \in [0, T],$$

بنابراین با استفاده از قضیه گرین داریم:

یافتن $u, w \in \mathcal{W}$ به‌طوری‌که $u(0) = g$ و

$$\begin{cases} \langle u_t \cdot \psi_u \rangle_\Omega + \langle \nabla w \cdot \nabla \psi_u \rangle_\Omega = 0, & \forall \psi_u \in V, t \in [0, T], \\ \langle w \cdot \psi_w \rangle_\Omega - \epsilon \langle \nabla u \cdot \nabla \psi_w \rangle_\Omega - \langle f(u) \cdot \psi_w \rangle_\Omega = 0, & \forall \psi_w \in V, t \in [0, T], \end{cases} \quad (2.5)$$

برقرار باشد. حال بازه زمانی $I = [0, T]$ را به زیربازه‌های $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ که طول هر زیربازه را با

$k_n = t_n - t_{n-1}$ نشان می‌دهیم، گسسته‌سازی می‌کنیم:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = T.$$

برای هر بازه زمانی $t_n, n \geq 1$ ، فرض کنید $\mathcal{V}_n$ فضای تعریف شده تمام توابع خطی قطعه-وار پیوسته روی افرازهای فضای زمانی $\mathbf{T}_n = \{K\}$ باشد، که ممکن است از یک مرتبه زمانی به یک مرتبه زمانی دیگر تغییر کند:

$$\mathcal{V} = \{\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R} : \varphi(\cdot, t)|_\Omega \in \nu_n, t \in I_n, \varphi(x, \cdot)|_{I_n} \in P_0, x \in \bar{\Omega}\}.$$

که در آن P_0 چندجمله‌ای از درجه صفر می‌باشد.

با انتگرال‌گیری از معادله (۲.۵) روی بازه زمانی I_n خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \langle \nabla w \cdot \nabla \psi_u \rangle_\Omega \, dt &= \langle u(t_{n-1}) - u(t_n), \psi_u(t_{n-1}) \rangle_\Omega, \\ \int_{I_n} \langle w \cdot \psi_w \rangle_\Omega \, dt - \epsilon \int_{I_n} \langle \nabla u \cdot \nabla \psi_w \rangle_\Omega \, dt - \int_{I_n} \langle f(u) \cdot \psi_w \rangle_\Omega \, dt &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

^۵Lebesgue measure

با نماد گذاری های زیر

$$u^{n+} = \lim_{t \downarrow t_n} u(t), \quad u^{n-} = \lim_{t \uparrow t_n} u(t), \quad [u]_n = u^{n+} - u^{n-}.$$

برای معادله (۳.۵) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \langle \nabla w \cdot \nabla \psi_u \rangle_{\Omega} dt &= \langle [u]_{n-1}, \psi_u^{n-1+} \rangle_{\Omega}, \\ \int_{I_n} \langle w \cdot \psi_w \rangle_{\Omega} dt - \epsilon \int_{I_n} \langle \nabla u \cdot \nabla \psi_w \rangle_{\Omega} dt - \int_{I_n} \langle f(u) \cdot \psi_w \rangle_{\Omega} dt &= 0, \end{aligned}$$

با اجتماع روی تک تک بازه گسسته شده داریم:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^N \int_{I_n} \{ \langle \nabla w \cdot \nabla \psi_u \rangle_{\Omega} + \langle w \cdot \psi_w \rangle_{\Omega} - \epsilon \langle \nabla u \cdot \nabla \psi_w \rangle_{\Omega} - \langle f(u) \cdot \psi_w \rangle_{\Omega} \} dt \\ &+ \sum_{n=1}^N \langle [u]_{n-1}, \psi_u^{(n-1)+} \rangle_{\Omega}. \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{I_n} \{ \langle \nabla w \cdot \nabla \psi_u \rangle_{\Omega} + \langle w \cdot \psi_w \rangle_{\Omega} - \epsilon \langle \nabla u \cdot \nabla \psi_w \rangle_{\Omega} - \langle f(u) \cdot \psi_w \rangle_{\Omega} \} dt \\ &+ \sum_{n=2}^N \langle [u]_{n-1}, \psi_u^{(n-1)+} \rangle_{\Omega} + \langle [u]_0^+ - g_0, \psi_u^{0+} \rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (۴.۵)$$

معادله (۴.۵)، نمایش $DG(0)$ برای معادله (۱.۵) است که با نماد گذاری زیر آن را نشان می دهیم:
فرض کنید $A(\cdot, \cdot)$ فرم نیم خطی باشد، بنابراین برای همه $u, w, \psi_u, \psi_w \in \mathcal{V}$ داریم:

$$\begin{aligned} A(u, w; \psi_u, \psi_w) &= \sum_{n=1}^N \int_{I_n} \{ \langle \nabla w \cdot \nabla \psi_u \rangle_{\Omega} + \langle w \cdot \psi_w \rangle_{\Omega} \\ &- \epsilon \langle \nabla u \cdot \nabla \psi_w \rangle_{\Omega} - \langle f(u) \cdot \psi_w \rangle_{\Omega} \} dt \\ &+ \sum_{n=2}^N \langle [u]_{n-1}, \psi_u^{(n-1)+} \rangle_{\Omega} + \langle [u]_0^+ - g_0, \psi_u^{0+} \rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (۵.۵)$$

در نتیجه معادله تغییرپذیر (V.F) معادله (۱.۵) به صورت:

یافتن جواب های $u, w \in \mathcal{W}$ بطوری که:

$$A(u, w; \psi_u, \psi_w) = 0 \quad \forall \psi_u, \psi_w \in \mathcal{W}. \quad (۶.۵)$$

و معادله المان های محدود متناظر به شکل:

یافتن جواب های $U, W \in \mathcal{V}$ بطوری که:

$$A(U, W; \psi_u, \psi_w) = 0 \quad \forall \psi_u, \psi_w \in \mathcal{V}. \quad (۷.۵)$$

تعریف می‌شوند. همچنین با انتخاب

$$\psi_w(t) = \begin{cases} \chi_w \in \mathcal{V}_n, & t \in I_n, \\ \circ, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \psi_u(t) = \begin{cases} \chi_u \in \mathcal{V}_n, & t \in I_n, \\ \circ, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

در رابطه (۷.۵) به مفهوم گام زمانی اوایلر می‌رسیم:

$$\langle U_\circ - g_\circ, \chi_u \rangle_\Omega = \circ, \quad \forall \chi_u \in \mathcal{V}_1,$$

$$K_n \langle \nabla W_n, \nabla \chi_u \rangle_\Omega + \langle U_n - U_{n-1}, \chi_u \rangle_\Omega = \circ, \quad \forall \chi_u \in \mathcal{V}_1, n \geq 1,$$

$$\langle W_n, \chi_w \rangle_\Omega - \epsilon \langle \nabla U_n, \nabla \chi_w \rangle_\Omega - \langle f(U_n), \chi_w \rangle_\Omega = \circ, \quad \forall \chi_w \in \mathcal{V}_1, n \geq 1.$$

بنابراین با توجه به روابط بالا معادله کان-هیلارد را در فضای المان‌های محدود پیاده‌سازی کردیم.

۲.۵ برآورد خطای معادله کان-هیلارد

تابع هدف خطی $J(u)$ را برای هر $g, g_T \in L_2(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(u) = \langle u, g \rangle_Q + \langle u(T), g_T \rangle_\Omega.$$

با توجه به تعریف تابع لاگرانژین (۲۶.۲) با فرض $\psi = \circ$ ، برای معادله کان-هیلارد داریم:

$$J'(u)(\varphi_u) = A'(u, w; z_u, z_w, \varphi_u, \varphi_w). \quad (۸.۵)$$

از طرفی با مشتق‌گیری از معادله (۵.۵) به:

$$\begin{aligned} A'(u, w; z_u, z_w, \varphi_u, \varphi_w) = & \langle \varphi_{u,t}, z_u \rangle_Q + \langle \nabla \varphi_w, \nabla z_u \rangle_Q + \langle \varphi_w, z_w \rangle_Q \\ & - \epsilon \langle \nabla \varphi_u, \nabla z_w \rangle_Q - \langle \varphi_u, z_w \rangle_Q + \langle \varphi_u(\circ), z_u(\circ) \rangle_\Omega, \end{aligned}$$

می‌رسیم. حال با انتگرال‌گیری نسبت به متغیر t داریم:

$$\langle \varphi_{u,t}, z_u \rangle_Q = -\langle \varphi_u, z_{u,t} \rangle_Q + \langle \varphi_u(T), z_u(T) \rangle_\Omega - \langle \varphi_u(\circ), z_u(\circ) \rangle_\Omega,$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} A'(u, w; z_u, z_w, \varphi_u, \varphi_w) = & -\langle \varphi_u, z_{u,t} \rangle_Q + \langle \nabla \varphi_w, \nabla z_u \rangle_Q \\ & + \langle \varphi_w, z_w \rangle_Q + \epsilon \langle \nabla \varphi_u, \nabla z_w \rangle_Q \\ & - \langle \varphi_u, f'(u)z_w \rangle_Q + \langle \varphi_u(T), z_u(T) \rangle_\Omega. \end{aligned}$$

به این ترتیب به مساله الحاقی زیر می‌رسیم:

یافتن جواب $z_u, z_w \in \mathcal{W}$ به طوری که:

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_u, -z_{u,t} \rangle_Q - \epsilon \langle \nabla \varphi_u, \nabla z_w \rangle_Q \\ & - \langle \varphi_u, f'(u)z_w \rangle_Q + \langle \varphi_u(T), z_u(T) \rangle_\Omega \\ & + \langle \nabla \varphi_w, \nabla z_w \rangle_Q + \langle \varphi_w, z_w \rangle_Q = J'(u; \varphi_u), \quad \forall \varphi_u, \varphi_w \in \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

از طرفی:

$$J'(u; \varphi_u) = \langle \varphi_u, g \rangle_Q + \langle \varphi_u(T), g_T \rangle_\Omega. \quad (10.5)$$

بنابراین براساس معادله (۸.۵) رابطه‌های (۹.۵) و (۱۰.۵) با هم برابر می‌شوند، در نتیجه:

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_u, -z_{u,t} - f'(u)z_w - g \rangle_Q - \epsilon \langle \nabla \varphi_u, \nabla z_w \rangle_Q \\ & + \langle \varphi_u(T), z_u(T) - g_T \rangle_\Omega = 0, \quad \forall \varphi_u \in \mathcal{W}, \\ & \langle \varphi_w, z_w \rangle_Q + \langle \nabla \varphi_w, \nabla z_u \rangle_Q = 0, \quad \forall \varphi_w \in \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

حال برای تخمین خطای $J(e)$ با توجه به گزاره‌های فصل دوم داریم:

$$J(u) - J(U) = -A(U, W; z_u - \pi z_u, z_w - \pi z_w) + \mathcal{R}^2, \quad (12.5)$$

که $z = (z_u, z_w)$ جواب مساله الحاقی است و $(\pi z_u, \pi z_w) \in \mathcal{V}$ ، تقریب توابع درونیاب هستند. همچنین جمله باقیمانده از درجه دو می‌باشد.

بنابراین با استفاده از رابطه (۷.۵) به محاسبه $\int_{I_n} \langle \nabla W, \nabla \psi_u \rangle_\Omega dt$ می‌پردازیم. به همین منظور با استفاده از قضیه گرین داریم:

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \langle \nabla W, \nabla \psi_u \rangle_\Omega dt &= \int_{I_n} \sum_{K \in T_n} \langle \nabla W, \nabla \psi_u \rangle_K dt \\ &= \int_{I_n} \sum_{K \in T_n} -\langle \Delta W, \psi_u \rangle_K dt + \int_{I_n} \sum_{K \in T_n} \langle \Delta \partial_v W, \psi_u \rangle_{\partial_K} dt, \end{aligned}$$

که در آن $\partial_v W = v \cdot \nabla W$ فرض شده است. حال با تقسیم‌بندی مرز $\partial K \in T_n$ به دو قسمت یال‌های داخلی با نماد ε_I^n و یال‌های روی مرز با نماد $\varepsilon_{\partial\Omega}^n$ ، همچنین نماد [] به معنی جهش از وسط یال‌ها است، با

توجه به این مفاهیم داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{I_n} \sum_{K \in T_n} \langle \partial_v W, \psi_u \rangle_{\partial K} dt \\ &= \int_{I_n} \sum_{E \in \varepsilon_I^n} \langle \Delta \partial_v W, \psi_u \rangle_E dt + \int_{I_n} \sum_{E \in \varepsilon_{\partial \Omega}^n} \langle \Delta \partial_v W, \psi_u \rangle_{\partial K} dt \\ &= \int_{I_n} \sum_{K \in T_n} \frac{1}{\gamma} \langle [\partial_v W], \psi_u \rangle_{\partial K \setminus \partial \Omega} dt + \int_{I_n} \sum_{K \in T_n} \langle \partial_v W, \psi_u \rangle_{\partial K \cap \partial \Omega} dt. \end{aligned}$$

فرض کنید $\partial_x Q_k^n = \partial K \times I_n$ و $\partial_x Q = \partial \Omega \times I$ بنابراین:

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \langle \nabla W, \nabla \psi_u \rangle_{\Omega} dt &= \sum_{K \in T_n} \left\{ - \langle \Delta W, \psi_u \rangle_{Q_K^n} - \frac{1}{\gamma} \langle [\partial_v W], \psi_u \rangle_{\partial_x Q_K^n \setminus \partial_x Q} \right. \\ &\quad \left. + \langle \partial_v W, \psi_u \rangle_{\partial_x Q_K^n \cap \partial_x Q} \right\}, \end{aligned}$$

همچنین بطور مشابه داریم:

$$\begin{aligned} \epsilon \int_{I_n} \langle \nabla U, \nabla \psi_w \rangle_{\Omega} dt &= \sum_{K \in T_n} \left\{ - \epsilon \langle \Delta U, \psi_w \rangle_{Q_K^n} - \frac{1}{\gamma} \epsilon \langle [\partial_v U], \psi_w \rangle_{\partial_x Q_K^n \setminus \partial_x Q} \right. \\ &\quad \left. + \epsilon \langle \partial_v U, \psi_w \rangle_{\partial_x Q_K^n \cap \partial_x Q} \right\}. \end{aligned}$$

می‌دانیم که برای توابع خطی قطعه‌وار روی فضای Q_K^n خاصیت $\Delta W = \Delta U = 0$ برقرار است. در نتیجه:

$$\int_{I_n} \langle W, \psi_w \rangle_{\Omega} dt = \sum_{K \in T_n} \langle W, \psi_w \rangle_{Q_K^n},$$

و

$$\int_{I_n} \langle f(U), \psi_w \rangle_{\Omega} dt = \sum_{K \in T_n} \langle f(U), \psi_w \rangle_{Q_K^n},$$

بنابراین با فرض $U_{\circ}^- = g$ رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} A(U, W; \psi_u, \psi_w) &= \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathbf{T}_n} \left\{ - \langle \Delta W, \psi_u \rangle_{\Omega_K^n} \right. \\ &\quad + \langle \epsilon \Delta U + W - f(U), \psi_w \rangle_{\Omega_K^n} - \frac{1}{\gamma} \langle [\partial_v W], \psi_u \rangle_{\partial_x Q_K^n \setminus \partial_x Q} \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \epsilon \langle [\partial_v U], \psi_w \rangle_{\partial_x Q_K^n \setminus \partial_x Q} + \langle \partial_v W, \psi_u \rangle_{\partial_x Q_K^n \cap \partial_x Q} \\ &\quad \left. - \epsilon \langle \partial_v W, \psi_u \rangle_{\partial_x Q_K^n \cap \partial_x Q} + \langle [U]_{n-1}, \psi_{u, n-1}^+ \rangle_k \right\}, \end{aligned}$$

بنابراین رابطه (۲.۵) به صورت:

$$J(e) = \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_h} \left\{ \langle R_u, z_u - \pi z_u \rangle_{Q_K^n} + \langle R_w, z_w - \pi z_w \rangle_{Q_K^n} \right. \\ \left. + \langle r_u, z_u - \pi z_u \rangle_{\partial_x Q_K^n} + \langle r_w, z_w - \pi z_w \rangle_{\partial_x Q_K^n} \right. \\ \left. - \langle [U]_{n-1}, (z_u - \pi z_u)_{n-1}^+ \rangle_k \right\} + \mathcal{R}^2,$$

تعریف می شود که در آن باقیمانده های داخلی

$$R_u = \Delta W, \quad R_w = -\epsilon \Delta U - W + f(U),$$

و باقیمانده های خارجی

$$r_w|_{\Gamma} = \begin{cases} -\frac{1}{\nu} \epsilon [\partial_v U], & \Gamma \subset \partial_x Q_k^n \setminus \partial_x Q, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$r_u|_{\Gamma} = \begin{cases} \frac{1}{\nu} [\partial_v W], & \Gamma \subset \partial_x Q_k^n \setminus \partial_x Q, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

و باقیمانده مرزی به صورت:

$$r_w|_{\Gamma} = \begin{cases} \epsilon \partial_v U, & \Gamma \subset \partial_x Q_k^n \setminus \partial_x Q, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$r_u|_{\Gamma} = \begin{cases} -\partial_v W, & \Gamma \subset \partial_x Q_k^n \setminus \partial_x Q, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

تعریف می شود. که در اینجا اندیس u در باقیمانده های بالا به معادله اول (۱.۵) و اندیس w به معادله دوم در (۱.۵) برمی گردد.

حال $\pi z_u, \pi z_w \in \mathcal{V}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید:

$$(P_n v)(t) = \frac{1}{k_n} \int_{I_n} v(s) ds.$$

تصویر قایم بر روی ثابت ها باشد. همچنین فرض کنید $\pi_n : C(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{V}_n$ تابع درونیاب گره ای باشد، که برای همه نقطه های گره ای a در T_n به صورت

$$(\pi_n v)(a) = v(a),$$

تعریف می شود. همچنین بدلیل اینکه R_u, R_w, r_u, r_w ثابت های تکه ای در زمان هستند، در نتیجه با تعریف $\pi : C(\bar{Q}) \rightarrow \mathcal{V}$ داریم:

$$\pi v|_{I_n} = P_n \pi_n v.$$

با توجه به روابط بالا تابع خطا به صورت

$$\begin{aligned}
 J(u) - J(U) &= \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_n} \left\{ \langle R_u, P_n(z_u - \pi_n z_u) \rangle_{Q_K^n} + \langle R_w, P_n(z_w - \pi_n z_w) \rangle_{Q_K^n} \right. \\
 &\quad + \langle r_u, P_n(z_u - \pi_n z_u) \rangle_{\partial_x Q_K^n} + \langle r_w, P_n(z_w - \pi_n z_w) \rangle_{\partial_x Q_K^n} \\
 &\quad \left. - \langle [U]_{n-1}, (z_u - \pi_n z_u)_{n-1}^+ \rangle_K \right\} + \mathcal{R}^{(2)}, \quad (13.5)
 \end{aligned}$$

بدست می‌آید. حال با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز و لم (۱.۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
 |J(u) - J(U)| &\leq \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_n} \left\{ \|R_u\|_{Q_K^n} \|P_n(z_u - \pi_n z_u)\|_{Q_K^n} \right. \\
 &\quad + h_K^{-\frac{1}{2}} \|r_u\|_{\partial_x Q_K^n} h_K^{\frac{1}{2}} \|P_n(z_u - \pi_n z_u)\|_{\partial_x Q_K^n} \\
 &\quad + \|R_w\|_{Q_K^n} \|P_n(z_w - \pi_n z_w)\|_{Q_K^n} \\
 &\quad + h_K^{-\frac{1}{2}} \|r_w\|_{\partial_x Q_K^n} h_K^{\frac{1}{2}} \|P_n(z_w - \pi_n z_w)\|_{\partial_x Q_K^n} \\
 &\quad \left. + k_n^{-\frac{1}{2}} \|[U]_{n-1}\|_K k_n^{\frac{1}{2}} \|P_n(z_u - \pi_n z_u)_{n-1}^+\|_K \right\} + |\mathcal{R}^{(2)}|. \quad (14.5)
 \end{aligned}$$

که در رابطه بالا $h_k = \text{diam}(\mathbf{k})$ تعریف می‌شود.

از طرفی برای $a, b, c, b \leq 0$ رابطه زیر برقرار است:

$$(ab + cd) \leq (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} (b^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (15.5)$$

بنابراین با بکار بردن رابطه (۱۵.۵) برای هر یک از نامساوی‌های تابع $J(e)$ داریم:

$$\begin{aligned}
 \rho_{u,K} &= \left(\|R_u\|_{Q_K^n} + h_K^{-\frac{1}{2}} \|r_u\|_{\partial_x Q_K^n} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (16.5) \\
 w_{u,K} &= \left(\|P_n(z_u - \pi_n z_u)\|_{\partial_x Q_K^n} + h_K \|P_n(z_u - \pi_n z_u)\|_{\partial_x Q_K^n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 \rho_{w,K} &= \left(\|R_w\|_{Q_K^n} + h_K^{-\frac{1}{2}} \|r_w\|_{\partial_x Q_K^n} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 w_{w,K} &= \left(\|P_n(z_w - \pi_n z_w)\|_{\partial_x Q_K^n} + h_K \|P_n(z_w - \pi_n z_w)\|_{\partial_x Q_K^n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 \rho_K &= \left(k_n^{-\frac{1}{2}} \|[U]_{n-1}\|_K \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 w_K &= \left(k_n \|(z_u - \pi_n z_u)_{n-1}^+\|_K \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

نکته ۱.۲.۵. با توجه به اینکه برای توابع خطی قطعه-وار $R_u = \Delta W = 0$ ، در نتیجه جمله اول در $\rho_{u,K}$ و

$w_{u,K}$ را می‌توان حذف کرد.

در نتیجه در حالت کلی معادله (۱۳.۵) به صورت:

$$|J(u) - J(U)| \leq \sum_{n=1}^N \sum_{K \in T_n} \left\{ \rho_{u,K} w_{u,K} + \rho_{w,K} w_{w,K} + \rho_K w_K \right\} + |\mathcal{R}^{(2)}|. \quad (17.5)$$

بدست می‌آید. بنابراین با محاسبه کران بالا تابع $J(e)$ ، خطای معادله کان-هیلارد تقریب زده می‌شود.

۳.۵ پیشنهاد کارهای آتی

خطای محاسبه شده برای معادله کان-هیلارد، خطای تحلیلی است، و به دلیل پیچیدگی این معادله محاسبه نتایج عددی وقت‌گیر می‌باشد. لذا لازم است که برای رسیدن به جواب عددی، معادله را در نرم‌افزار Freefem++ پیاده‌سازی کنیم و به نتایج عددی مورد نظر رسید. که انجام این کار به پروژه‌های بعدی موکول شده است.

پیوست آ

کدهای Freefem++ نمایش خطا

آ.۱ کد Freefem++ نمایش خطای معادله پواسون

در اینجا کد Freefem++ معادله پواسون ، برای بدست آوردن نتایج عددی بالا قرار داده شده است:

```
border C01(t=0,1){x = 0; y = 1-t; label =1;}
border C02(t=0,1){x =1.5*t; y = 0; label =2;}
border C03(t=0,1){x = 1.5; y = t; label = 3;}
border C04(t=0,1){x = 1.5-0.5*t; y = 1; label =4;}
border C05(t=0,1){x = 1; y = 1-0.5*t; label = 5;}
border C06(t=0,1){x =1- 0.5*t; y = 0.5; label = 6;}
border C07(t=0,1){x = 0.5; y = 0.5+0.5*t; label = 7;}
border C08(t=0,1){x = 0.5-0.5*t; y = 1; label = 8;}
mesh Th = buildmesh(C01(15)+C02(15)+C03(15)+C04(15)+C05(15)+C06(15)+
C07(15)+C08(15));
savemesh(Th,"th.msh");
fespace Vh(Th,P2);
fespace Nh(Th,P0);
Vh u,v;
Nh rho,logrho;
real[int] viso(21);
```

```

for (int i=0;i<viso.n;i++)
    viso[i]=10.^(+(i-16.)/2.);
real error=0.01;
real cpu=clock();
func f=(x-y);
problem Problem1(u,v,solver=CG,eps=1.0e-6) =
    int2d(Th,qforder=5)( u*v*1.0e-6+ dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v))
    + int2d(Th,qforder=10)( -f*v);
/*

$$\begin{aligned} \eta_K = & \left( h_K^2 || f - \Delta u_h ||_{L^2(K)}^2 \right. \\ & \left. + \sum_{e \in AK} h_e || [\frac{\partial u_h}{\partial n_k}] ||_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$


$$\rho_K = \left( || f - \Delta u_h ||_{L^2(K)}^2 \right. \\ \left. + \sum_{e \in AK} \frac{1}{h_e} || [\frac{\partial u_h}{\partial n_k}] ||_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

*/

varf indicator2(uu,chiK) =
    intalldges(Th)(chiK*lenEdge*square(jump(N.x*dx(u)+N.y*dy(u))))
    +int2d(Th)(chiK*square(hTriangle*(f+dxx(u)+dyy(u))) );
for (int i=0;i< 4;i++)
{
    Problem1;
    cout<< "u =   min "   << u[].min << " max="   << u[].max << endl;

```

```

plot(u,wait=1);
cout << " indicator2 " << endl;

rho[] = indicator2(0,Nh);
rho=sqrt(rho);
logrho=log10(rho);
cout << "rho =   min " << rho[].min << " max=" << rho[].max << endl;
plot(rho,fill=1,wait=1,cmm="indicator density "
,ps="rhoP2.eps", value=1,viso=viso,nbiso=viso.n);
plot(logrho,fill=1,wait=1,cmm="log 10 indicator density "
,ps="logrhoP2.eps",value=1,nbiso=10);
plot(Th,wait=1,cmm="Mesh ",ps="ThrhoP2.eps");
Th=adaptmesh(Th,[dx(u),dy(u)],err=error,anisomax=1);
plot(Th,wait=1);
u=u;
rho=rho;
error = error/2;
cout << " CPU time = " << clock()-cpu << endl;
} ;

```

آ.۲ کد ++Freefem نمایش خطای معادله حرارت

در اینجا کد ++Freefem معادله حرارت، برای بدست آوردن نتایج عددی بالا قرار داده شده است:

```

mesh Th=square(1,1);
savemesh(Th,"th.msh");
fespace Vh(Th,P2);
fespace Nh(Th,P0);
real[int] viso(21);
for (int i=0;i<viso.n;i++)

```

```

viso[i]=10.^(+(i-16.)/2.);
real error=0.01;
real cpu=clock();
Vh u,v,uu;
Nh rho,logrho;
real dt =0.2;
problem dHeat(u,v) =
int2d(Th) ( u*v + dt*(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)))
+ int2d(Th) (- uu*v - dt*v )
+ on(1,2,3,4,u=0);
real t =0; // start from t=0
uu =sin(x + pi/4.)* cos(y + pi/4.); // u(x,y,0)=0
for (int m=0;m<=1/dt;m++)
{
t=t+dt;
uu = u;
/*

```

$$\begin{aligned}
\|\eta_K\| &= \left(\|h_K\|^2 + \|f - \Delta u_h\|_{L^2(K)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{e \in AK} h_e \left\| \frac{\partial u_h}{\partial n_k} \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \|\eta_K\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\rho_K\| &= \left(\|f - \Delta u_h\|_{L^2(K)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{e \in AK} \frac{1}{h_e} \left\| \frac{\partial u_h}{\partial n_k} \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\rho_K\|
\end{aligned}$$

```

*/

```

```

varf indicator2(uu,chiK) =
    intalldges(Th)(chiK*lenEdge*square(jump(N.x*dx(u)+N.y*dy(u))))
    +int2d(Th)(chiK*square(hTriangle*(dxx(u)+dyy(u))) );
for (int i=0;i< 1;i++)
{
    dHeat;
    cout << "u =   min " << u[].min << " max= " << u[].max << endl;
    plot(u,wait=1);
    cout << " indicator2 " << endl;

    rho[] = indicator2(0,Nh);
    rho=sqrt(rho);
    logrho=log10(rho);
    cout << "rho =   min " << rho[].min << " max=" << rho[].max << endl;
    plot(rho,fill=1,wait=1,cmm="indicator density "
    ,ps="rhoP2.eps",value=1,viso=viso,nbiso=viso.n);
    plot(logrho,fill=1,wait=1,cmm="log 10 indicator density "
    ,ps="logrhoP2.eps",value=1,nbiso=10);
    plot(Th,wait=1,cmm="Mesh ",ps="ThrhoP2.eps");
    Th=adaptmesh(Th,[dx(u),dy(u)],err=error);
    plot(Th,wait=1);
    u=u;
    rho=rho;
    error = error/2;
    cout << " CPU time = " << clock()-cpu << endl;
} ;
}

```

۳.آ کد Freefem++ نمایش خطای معادله موج

در اینجا کد Freefem++ معادله موج، برای بدست آوردن نتایج عددی بالا قرار داده شده است:

```

verbosity=0;
load "medit"
load "msh3"
real Dx=.04,Dy=.04;
mesh Th=square(floor(1./Dx),floor(1./Dy));
fespace Vh(Th,P2);
fespace Nh(Th,P0);
real[int] viso(21);
for (int i=0;i<viso.n;i++)
viso[i]=10.^(+(i-16.)/2.);
real error=0.2;
real cpu=clock();
func g=0.;
real c=1.,dt=0.02,Tf=4.;
Nh rho,logrho;
Vh uh,vh,uh0=sin(pi*x)*sin(pi*y),uh1=uh0+dt*g;
macro Grad(u)[dx(u),dy(u)]//
problem tambour(uh,vh) = int2d(Th)(uh*vh + Grad(uh)'*Grad(vh)*(c*dt)^2*.5 )
+ int2d(Th)(Grad(uh0)'*Grad(vh)*(c*dt)^2*.5 )
- int2d(Th)(2.*uh1*vh - uh0*vh)
+ on(1,2,3,4,uh=0);

int k=0,kk=0;

for (real t=0.;t<Tf;t+=dt){
for (int i=0;i< 1;i++)
{

```

```

tambour;

uh0 = uh1;

uh1 = uh;

cout << uh[].min << " max=" << uh[].max << endl;

plot(uh,wait=1);

cout << " indicator2 " << endl;

varf indicator2(uu,chiK) =

    intalldges(Th)(chiK*lenEdge*square(jump(N.x*dx(uh)+N.y*dy(uh))))

    +int2d(Th)(chiK*square(hTriangle*(dxx(uh)+dyy(uh)))) );

rho[] = indicator2(0,Nh);

rho=sqrt(rho);

logrho=log10(rho);

cout << "rho =   min " << rho[].min << " max=" << rho[].max << endl;

plot(rho,fill=1,wait=1,cmm="indicator density "

,ps="rhoP2.eps",value=1,viso=viso,nbiso=viso.n);

plot(logrho,fill=1,wait=1,cmm="log 10 indicator density "

,ps="logrhoP2.eps",value=1,nbiso=10);

plot(Th,wait=1,cmm="Mesh ",ps="ThrhoP2.eps");

Th=adaptmesh(Th,[dx(uh),dy(uh)],err=error);

plot(Th,wait=1);

uh=uh;

rho=rho;

error = error/2;

if ( !(kk % 20)){

    plot(uh,cmm="t="+t,fill=true,value=true,wait=1,dim=3,boundary=false);

    // pour visualiser la solution avec Medit

    mesh3 TK=movemesh23(Th,transfo=[x,y,uh/2.]);

    medit("Solution",TK);

    savemesh(TK,"Ondes2D."+(100000+k)+".mesh");

```



```
// pour visualiser la solution avec Mathematica
{ ofstream ff("Ondes2D."+ (100000+k) + ".txt");

for (int i=0; i<Th.nt; i++){
    for (int j=0; j <3; j++)
        ff<<Th[i][j].x << " " << Th[i][j].y<< " " <<uh[] [Vh(i,j)]<<endl;
    ff<<Th[i][0].x << " " << Th[i][0].y<< " " <<uh[] [Vh(i,0)]<<"\n";
}
}

k++;

}

kk++;}

cout << " CPU time = " << clock()-cpu << endl;
};
```

پیوست ب

مقالات استخراج شده

1. **A posteriori error analysis for the heat equation with dual weighted residual method**, Zeinab sheibani and Ali mesforush, The 43rd Annual Iranian Mathematics Conference, University of Tabriz-Iran, 27-30 August 2012.
2. **A posteriori error analysis for the Wave equation with dual weighted residual method**, Zeinab sheibani and Ali mesforush, The 9th Seminar of Differential Equations And Dynamical Systems, Shahid Madani, Tabriz-Iran University, 11-13 July 2012.
3. **A posteriori Error Estimate For Poisson Equation with (D.W.R)**, Zeinab sheibani and Ali mesforush, First National Conference on Computational science, Damghan University, 6-7 September 2012.

مراجع

- [1] W. Bangerth and R. Rannacher, *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*, Berlin, 2003.
- [2] S. Larsson and V. Thomée, *Partial Differential Equations With Numerical Methods*, Springer, 2003.
- [3] Mohammad . Asadzadeh, *An Introduction to the Finite Element Method (FEM) for Differential Equations* Mathematical Sciences Chalmers University of Technology of Gothenburg Sweden, 2010.
- [4] Becker, R., Rannacher, R. , *An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods* Acta Numerica 10 (2001)
- [5] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo and C. Johnson, *Computational Differential Equations* Studentlitteratur, Lund, 1996.
- [6] R. Hartmann, *A posteriori Fehlerschätzung und adaptive Schrittweiten- und Ortsgittersteuerung bei Galerkin-Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung*, Diploma thesis, University of Heidelberg, 1998.
- [7] S. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [8] Debnath and P. Mikusiński, *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, second ed., Academic Press Inc., San Diego, CA, 1999.
- [9] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, and C. Johnson, *Introduction to adaptive methods for differential equations*, Acta Numerica, 1995, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 105–158.
- [10] W. Bangerth, *Adaptive Finite-Elemente-Methoden zur Lösung der Wellengleichung mit Anwendung in der Physik der Sonne*, Diploma thesis, University of Heidelberg, 1998.
- [11] D. A. French and T. E. Peterson, *A continuous space-time finite element method for the wave equation*, Math. Comput. 65 (1996),
- [12] M. Grote, A. Schneebeli, and D. Schötzau, *Discontinuous Galerkin finite element method for the wave equation*, SIAM J. Numer. Anal. 44 (2006),
- [13] Stig larsson, Ali mesforush, *A Posteriori error analysis for the CAHN-HILLIARD equation*, Mathematical Sciences Chalmers University of Technology of Gothenburg Sweden ,
- [14] Bernardi, C., and Sueli, E. *Time and space adaptivity for the second-order wave equation*. Math. Models Methods Appl. Sci. 15 (2005), 199225.
- [15] D. Bernardi, F. Hecht, O. Pironneau, C. Prud'homme: *freefem documentation*, on the web at <http://www.asci.fr>

- [16] D. Bernardi, F. Hecht, K. Ohtsuka, O. Pironneau: *freefem+ documentation, on the web* at <ftp://www.freefem.org/freefemplus>.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Lebesgue measure	اندازه لبگ
Dual weithed residual	باقیمانده وزن‌های دوگان
Closure	بستار
Elliptic	بیضوی
Linear Function	تابع خطی
Smooth Function	تابع هموار
Galerking Orthogonality	تعامد گالرکین
Multi Index	چند اندیشه
Primal Error	خطای اولیه
Residual Error	خطای باقیمانده
Truncation Error	خطای برشی
Dual Error	خطای دوگان
Domain	دامنه
Coarsening	درشت کردن
Cowchy Sequence	دنباله کوشی
Divergence	دیورژانس
Finite Element Methods	روش المان‌های محدود

Euler-Lagrange Method	روش لاگرانژ-اویلر
Refinement	ریز کردن
Parabolic	سهموی
Lipschitz Condition	شرط لیپ-شیتز
Dirichlet Boundary Condition	شرط مرزی دریگله
Neumann Boundary Condition	شرط مرزی نویمان
Scalar Product	ضرب اسکالر
Varitional Formulation	فرم تغییرپذیر
Biliner Form	فرم دوخطی
Weak Formulation	فرم ضعیف
Green Formula	فرمول گرین
Banach Space	فضای باناخ
Vector Space	فضای برداری
Normed Linear Space	فضای خطی نرم‌دار
Complite Linear Space	فضای ضرب داخلی کامل
Hilbert Space	فضای هیلبرت
Cahn-Hilliard	کان-هیلیارد
Gradient	گرادیان
Laplacian	لاپلاسین
Symmetric	متقارن
Orthogonal	متعامد
Initial Value Problem	مساله مقدار اولیه
Bundry Value Problem	مساله مقدار مرزی

Partial Diffrential Equation	معادلات مشتقات جزئی
Potential Equation	معادله پواسون
Heat Equation	معادله حرارت
Wave Equation	معادله موج
Scaled Trace Inequality	نامساوی تریس
Couchy-Schwartz Inequality	نامساوی کوشی شوارتز
Triangle-Inequality	نامساوی مثلثی
Norm	نرم
Energy Norm	نرم انرژی
Stationary Point	نقطه سکون
Semi Norm	نیم نرم
Hyperbolic	هذلولوی
Convergent	همگرا

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A Posteriori Error	خطای
A Priori Error	خطای
Banach Space	فضای باناخ
Bilinear Form	فرم دوخطی
Bundry Value Problem	مساله مقدار مرزی
Cahn-Hilliard	کان-هیلیارد
Couchy-Schwartz Inequality	نامساوی کوشی شوارتز
Closure	بستار
Coarsening	درشت کردن
Complite Linear Space	فضای ضرب داخلی کامل
Convergent	همگرا
Cowchy Sequence	دنباله کوشی
Dirichlet Boundary Condition	شرط مرزی دریکله
Divergence	دیورژانس
Domain	دامنه
Dual Error	خطای دوگان
Dual Weithed Residual	باقیمانده وزن‌های دوگان

Elliptic.....	بیضوی
Energy Norm	نرم انرژی
Euler-Lagrange Method.....	روش لاگرانژ-اویلر
Finite Element Methods.....	روش المان‌های محدود
Galerking Orthogonality.....	تعامد گالرکین
Gradient	گرادیان
Green Formula.....	فرمول گرین
Heat Equation.....	معادله حرارت
Hilbert Space	فضای هیلبرت
Hyperbolic	هذلولوی
Initial Value Problem	مساله مقدار اولیه
Laplacian	لاپلاسیان
Lebesgue measure	اندازه لبگ
Linear Function.....	تابع خطی
Lipschitz Condition.....	شرط لیپ-شیتز
Multi Index	چند اندیس
Neumann Boundary Condition	شرط مرزی نویمان
Norm	نرم
Normed Linear Space	فضای خطی نرم‌دار
Orthogonal	متعامد
Parabolic	سهموی
Partial Diffrential Equation	معادلات مشتقات جزئی
Potential Equation.....	معادله پواسون

Primal Error	خطای اولیه
Refinement	ریز کردن
Residual Error	خطای باقیمانده
Semi Norm	نیم نرم
Scalar Product	ضرب اسکالر
Scaled Trace Inequality	نامساوی تریس
Smooth Function	تابع هموار
Stationary Point	نقطه سکون
Symmetric	متقارن
Triangle-Inequality	نامساوی مثلثی
Truncation Error	خطای برشی
Varitional Formulation	فرم تغییرپذیر
Vector Space	فضای برداری
Wave Equation	معادله موج
Weak Formulation	فرم ضعیف

نمایه

ت

معادله حرارت، ۲، ۱۲، ۳۸

تقریب گالرکین، ۲۲، ۲۳، ۲۵، ۳۲

معادله کان-هیلیارد، ۵۵، ۵۸، ۶۳

معادله موج، ۲، ۴۶

خ

خطای باقیمانده، ۱۵، ۱۶

ن

خطای برشی، ۱۵، ۱۶

نامساوی کوشی-شوارتز، ۶، ۱۸، ۳۳، ۴۲، ۵۱، ۶۲

ر

روش اویلر-پسرو، ۴۰، ۴۹

روش لاگرانژ-اویلر، ۲۴، ۵۰

ش

شرایط مرزی دریکله، ۳۰

شرط مرزی دریکله، ۳

شرط مرزی نویمن، ۳

ف

فرمول گرین، ۷

فضای ضرب داخلی، ۴

م

معادله پواسون، ۲، ۳۰

Surname: Sheibani

Name: Zeinab

Title: A Posteriori error analysis for the Cahn-Hilliard equation by Dual Weighted Residual method.

Supervisor: Dr.A. Mesforush

Advisor: Dr.H. Ahsani Tehrani

Degree: Master of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Differential Equations

Technology University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2012

Number of pages: [86](#)

Keywords: Cahn-Hilliard equation, a posteriori error, dual weighted residual

Abstract

In this thesis we focus on estimating A posteriori error using Dual Weighted Residual of partial differential equations. This end we solve the equations by Galerkin finite element method base on continuous piecewise constant in space and discontinuous piecewise constant functions in time. We compute the A posteriori error estimate for this equations using Dual Weighted Residual method. Finally we have some numerical results for the adaptivity based on this a posteriori error estimate.



Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

A Posteriori error analysis for the Cahn-Hilliard equation by Dual Weighted Residual method.

Supervisor

Dr.A. Mesforush

Advisor

Dr.H. Ahsani Tehrani

by

Zeinab Sheibani

2012