



دانشگاه صنعتی شاهرود  
دانشکده ریاضی  
گروه ریاضی کاربردی

یک کاربرد از روش کالوکیشن برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه

نگارش

ندا محمودی

استاد راهنما

آقای دکتر علیرضا ناظمی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

مهر ۱۳۹۱

کلیه حقوق اعم از چاپ و تکثیر، نسخه برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان نامه برای دانشگاه شهید بهشتی محفوظ است.  
نقل مطالب با ذکر مأخذ آزاد است.

صفحة تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)



# قدردانی

سپاس خدای را که سخنوران، دستوران او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزارش کردن نتوانند. بدون شک جایگاه و منزلت معلم، والاتر از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، بازبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما بر حسب وظیفه و از باب "من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزوجل" : از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاور بی‌چشم داشت برای من بوده اند؛ از استاد گرامی جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی که با حسن خلق از هیچ کجی در این عرصه بر من دریغ نمودند و زحمات راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛ و از اساتید محترم جناب آقای دکتر حسین قلی زاده و جناب آقای دکتر حجت احسنی که زحمات داوران این رساله را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی، جناب آقای دکتر داود شاهسونی تقدیر و تشکر می‌نمایم. در پایان از دوستان و هم‌اتاقی‌های عزیزم که تجربه بودن با آن‌ها، خاطرات شیرین را برایم رقم زد، سپاسگزارم.

نذامحمودی

۱۳۹۱مهر

## چکیده

در این پایان نامه ابتدا پس از معرفی موجک هار، ویژگی های آن را بررسی می کنیم. سپس در هر فصل با معرفی نوع خاصی از مسائل کنترل بهینه این روش کالوکیشن مستقیم را بر این مسائل اعمال می کنیم. مسائلی که در این پایان نامه به آن ها پرداخته می شود شامل مسائل کنترل بهینه افق نامتناهی، سیستم های تنظیم کننده ی خطی، مساله کنترل بهینه زمانی پرتاب موشک و سیستم های ردیاب خطی است. در انتهای هر فصل چند مثال عددی ارائه شده است. در این مثال ها نمودارهای کنترل و مسیر حاصل از روش موجک هار را با روش تحلیلی مقایسه می کنیم.

واژگان کلیدی: موجک هار، مسائل کنترل بهینه، کالوکیشن مستقیم، افق نامتناهی، سیستم های تنظیم کننده خطی، بهینه زمانی پرتاب موشک، ردیاب .

# فهرست مطالب

لیست تصاویر	خ
مقدمه و مفاهیم اولیه	۱
۱.۱ مقدمه‌ای بر نظریه کنترل	۲
۲.۱ مقدمه‌ای بر موجک هار	۳
۳.۱ شکل کلی مساله کنترل بهینه	۴
۴.۱ توابع موجک هار	۱۳
۱.۴.۱ ویژگی تعامد توابع هار گویا	۱۴
۲.۴.۱ تقریب توابع با توابع هار	۱۵
۳.۴.۱ ماتریس عملگر انتگرالگیری	۱۷
۵.۱ فرمول بندی مسائل کنترل بهینه	۲۰
۶.۱ کالوکیشن مستقیم	۲۱
۱.۶.۱ روش گسسته سازی هار	۲۱
۲.۶.۱ برنامه ریزی غیرخطی	۲۲
<b>۲ حل مسائل افق نامتناهی به روش موجک هار</b>	<b>۲۴</b>
۱.۲ مقدمه	۲۵
۲.۲ معرفی مساله افق نامتناهی و تبدیل آن به مساله افق متناهی	۲۶
۳.۲ کالوکیشن مستقیم هار در مساله افق متناهی	۲۸
۴.۲ مثال های عددی	۳۰
<b>۳ حل سیستم های تنظیم کننده ی خطی به روش موجک هار</b>	<b>۳۵</b>
۱.۳ مقدمه	۳۶
۲.۳ سیستم های تنظیم کننده خطی	۳۶
۳.۳ مثال های عددی	۴۰
<b>۴ حل مسائل کنترل بهینه زمانی پرتاب موشک به روش موجک هار</b>	<b>۵۰</b>
۱.۴ مقدمه	۵۱
۲.۴ مساله کنترل بهینه زمانی پرتاب موشک	۵۱

۵۴	.....	مثال‌های عددی	۳.۴
۶۰		حل سیستم‌های ردیاب خطی به روش موجک هار	۵
۶۱	.....	مقدمه	۱.۵
۶۱	.....	سیستم‌های ردیاب خطی	۲.۵
۶۵	.....	مثال‌های عددی	۳.۵
۷۰		نتایج و پیشنهاداتی برای کارهای آینده	
۷۱		مراجع و مآخذ	
۷۹		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۸۱		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	



## لیست تصاویر

۱۵	..... نمودار $RH(r, t)$ برای $r = 0, 1, 2, \dots, 7$	۱.۱
۱۸	..... نمودار توابع انتگرال $\phi_r(t)$ برای $r = 0, 1, \dots, 7$	۲.۱
۳۱	..... کنترل‌های بهینه دقیق و تقریبی $v(\cdot)$	۱.۲
۳۲	..... مسیرهای بهینه دقیق و تقریبی $y_1(\cdot)$	۲.۲
۳۲	..... مسیرهای بهینه دقیق و تقریبی $y_2(\cdot)$	۳.۲
۳۳	..... کنترل‌های بهینه تحلیلی و تقریبی	۴.۲
۳۴	..... مسیرهای بهینه دقیق و تقریبی	۵.۲
۴۳	..... منحنی‌های کنترل و مسیر بهینه متناظر در حالت $a = -0.2, H = 5$	۱.۳
۴۴	..... منحنی‌های کنترل و مسیر بهینه متناظر در حالت $a = -0.2, H = 0.5$	۲.۳
۴۵	..... منحنی‌های کنترل و مسیر بهینه متناظر در حالت $a = -0.2, H = 0.05$	۳.۳
۴۶	..... منحنی‌های کنترل و مسیر بهینه متناظر در حالت $a = 0.2, H = 5$	۴.۳
۴۷	..... منحنی‌های کنترل و مسیر بهینه متناظر در حالت $a = 0.2, H = 0.5$	۵.۳
۴۸	..... منحنی‌های کنترل و مسیر بهینه متناظر در حالت $a = 0.2, H = 0.05$	۶.۳
۴۹	..... منحنی‌های بهینه کنترل و مسیرهای تحلیلی و تقریبی مثال ۲.۳.۳	۷.۳
۵۲	..... نمایش برخورد موشک به هدف.	۱.۴
۵۶	..... مسیرهای بهینه دقیق و تقریبی مثال ۱.۳.۴	۲.۴
۵۸	..... مسیرهای بهینه دقیق و تقریبی مثال ۲.۳.۴	۳.۴
۵۹	..... مسیرهای بهینه دقیق و تقریبی مثال ۳.۳.۴	۴.۴
۶۸	..... منحنی‌های کنترل و مسیرهای بهینه تحلیلی و تقریبی مثال ۱.۳.۵	۱.۵
۶۹	..... منحنی‌های کنترل و مسیرهای بهینه تحلیلی و تقریبی مثال ۲.۳.۵	۲.۵

# فصل ۱

## مقدمه و مفاهیم اولیه

## ۱.۱ مقدمه‌ای بر نظریه کنترل

در نظریه کنترل نشان داده شده است که رفتار دینامیکی بسیاری از سیستم‌ها را می‌توان به شکل معادلات یا نامعادلات ریاضی و بخصوص به شکل معادلات دیفرانسیل<sup>۱</sup> بیان نمود. البته ساختن یک مدل ریاضی برای یک سیستم ممکن است بسیار پیچیده باشد این مبحث در جای خود از اهمیت زیادی برخوردار است. ما فرض خواهیم کرد که معادلات ریاضی سیستم که خواص دینامیکی سیستم مورد بررسی را نشان می‌دهد، مشخص باشد. پس برای کنترل یک سیستم لازم است ورودی‌های کنترل مناسب انتخاب شوند چنانکه معادلات ریاضی مربوط به آن سیستم برآورده شوند. البته محاسبه جواب‌های معادلات، بخصوص معادلات دیفرانسیل غیرخطی عموماً پیچیده است. به‌عنوان مثال می‌خواهیم مساله مینیمم‌کردن مصرف سوخت راکت را مورد بررسی قرار دهیم. معادله حاکم بر حرکت راکت عبارت است از:

$$m \frac{dV}{dt} = mF + F_{ext},$$

که در آن  $m$  جرم راکت،  $V$  سرعت آن،  $F$  نیروی پرتاب که بوسیله راکت تولید می‌شود و  $F_{ext}$  نیروهای خارجی که از محیط به راکت وارد می‌شود، همچنین داریم [۱]:

$$|F| = \frac{c}{m} \beta,$$

که در آن  $c$  سرعت نسبی اگزوز و  $\beta = -\frac{dm}{dt}$  نرخ مصرف سوخت است، اگر  $\varphi$  زاویه افقی<sup>۲</sup> پرتاب (زاویه بین محور راکت و افق) باشد، آنگاه معادلات حرکت عبارتند از:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{c\beta}{m} \cos \varphi,$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{c\beta}{m} \sin \varphi - mg,$$

که در آن  $V = [v_1, v_2]^T$  و  $F_{ext} = [0, -mg]^T$  اختیار شده است. مساله کنترل بهینه عبارت است از انتخاب کنترل‌های  $\beta$  و  $\varphi$  که راکت را از نقطه اولیه به ارتفاع موردنظر  $\bar{y}$  برساند به قسمی که مقدار سوخت مصرفی

<sup>۱</sup>Differential equations

<sup>۲</sup>Horizontal angle

مینیمم شود. سوخت مصرف شده عبارت است از:

$$I = \int_0^T \beta dt$$

که در آن  $T$  زمان رسیدن به  $\bar{y}$  است.

## ۲.۱ مقدمه‌ای بر موجک هار

در نظریه کنترل کلاسیک بر اساس روش تبدیل لاپلاس<sup>۳</sup> جواب‌های بسیاری از معادلات دیفرانسیل بدست می‌آید. اما این روش مشکلات و محدودیت‌های زیادی دارد. علاوه بر این امروزه صرفه‌جویی در زمان، سوخت، انرژی یا سرمایه‌گذاری اقتصادی و غیره نیز در یک سیستم کنترل‌پذیر ضرورت دارد. در روش کلاسیک حل مسائل کنترل بهینه، استفاده از روش‌های حساب تغییرات<sup>۴</sup> و پونتریاگین<sup>۵</sup> متداول است. با استفاده از این روش‌ها به مجموعه‌ای از نقاط می‌رسیم که باید در شرایط مساله صدق کند. این روش دارای محدودیت‌ها و مشکلاتی است. به همین منظور روش‌های محاسباتی جایگزین متفاوتی برای حل مسائل کنترل بهینه در کتاب‌ها و مقالات علمی گسترش یافته است. روشی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می‌گیرد، روش موجک هار می‌باشد.

موجک هار<sup>۶</sup> سری خاصی از توابع است که به‌عنوان ساده‌ترین و اولین نوع موجک، شناخته می‌شود. این نوع موجک اولین بار در سال ۱۹۱۰ توسط آلفرد هار<sup>۷</sup> پیشنهاد شد. توابع هار مجموعه‌ای متعامد<sup>۸</sup> هستند که مقادیر خود را از مجموعه‌ی  $\{0, \sqrt{2^i}, -\sqrt{2^i}; i = 0, 1, \dots\}$  اختیار می‌کنند. نقطه ضعف موجک هار ناپیوسته بودن آن است. در نقاط ناپیوستگی مشتق وجود ندارد و این موضوع باعث می‌شود که کاربرد مستقیم این موجک برای حل معادلات دیفرانسیل غیرممکن شود. یک راه غلبه بر این مشکل استفاده از روش انتگرالگیری است. در این روش بالاترین درجه مشتق موجود در معادله با سری هار بسط داده می‌شود. ایده اصلی این روش بر اساس تبدیل

<sup>۳</sup>Laplace transform

<sup>۴</sup>Variational Calculus

<sup>۵</sup>Pontryagin

<sup>۶</sup>Haar wavelet

<sup>۷</sup>Alfred Haar

<sup>۸</sup>Orthogonal set

یک معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری<sup>۹</sup> است. در این روش بازه زمانی به زیر بازه‌هایی با طول یکسان تقسیم می‌شود و توابع در این زیر بازه‌ها تقریب زده می‌شوند. به نقاط میانی این زیر بازه‌ها نقاط کالوکیشن<sup>۱۰</sup> گفته می‌شود برای رسیدن به دقت بیشتر باید تعداد این نقاط افزایش یابد. این نقاط بصورت تصاعدی افزایش می‌یابند.

### ۳.۱ شکل کلی مساله کنترل بهینه

در اینجا شکل کلی از یک مساله کنترل بهینه<sup>۱۱</sup> معرفی می‌کنیم که در فصول بعدی با استفاده از روش عددی موجدک هر بار به حل آن می‌پردازیم.

فرض کنید سیستم دینامیکی توسط  $n$  متغیر حالت  $x_1, x_2, \dots, x_n$  مشخص می‌شود. اکنون بردار حالت  $x$ <sup>۱۲</sup> را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

مولفه‌های  $x$  را می‌توان بعنوان محورهای مختصات  $n$  بعدی به نام فضای حالت<sup>۱۳</sup> در نظر گرفت.

بردار کنترل<sup>۱۴</sup>  $u$  را به‌عنوان برداری از  $m$  متغیر کنترل  $u_1, u_2, \dots, u_m$  و بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

فرض کنید  $(x, u)^T$  در یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول<sup>۱۵</sup> بصورت زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} \dot{x} = g(t, x, u), & t_a \leq t \leq t_b, \\ x(t_a) = x_a, & x(t_b) = x_b, \end{cases} \quad (1.1)$$

<sup>۹</sup>Algebraic equation

<sup>۱۰</sup>Collocation points

<sup>۱۱</sup>Optimal control problem

<sup>۱۲</sup>State vector

<sup>۱۳</sup>State space

<sup>۱۴</sup>Control vector

<sup>۱۵</sup>First order differential equations

که در آن  $g$  یک بردار با مولفه‌های  $g_1, g_2, \dots, g_n$ ،  $x(t_a)$  حالت اولیه<sup>۱۶</sup> و  $x(t_b)$  حالت نهایی<sup>۱۷</sup> است. مساله کنترل بهینه عبارت است از پیدا کردن  $(x, u)^T$  که در (۱.۱) صدق کرده و تابعی زیر را ماکسیمم یا مینیمم کند:

$$I = \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t)) dt.$$

در اینجا  $f_0$  و  $f_i; i = 1, 2, \dots, n$ ، تابعی پیوسته از  $x, t, u$  هستند.

در اینجا بطور خلاصه به بیان تعاریفی و مباحثی که در این پایان‌نامه از آن استفاده شده است می‌پردازیم.

**تعریف ۱.۳.۱.** گروه<sup>۱۸</sup> مجموعه‌ای است از اعضای  $G$  همراه با یک نگاشت<sup>۱۹</sup> (که آن را یک عمل دوتایی می‌نامیم)

$$G \times G : *$$

۱. عضو  $e \in G$  چنان موجود باشد که برای تمام  $g \in G$  داشته باشیم  $e * g = g * e = g$  این عضو را عضو

خنثی<sup>۲۰</sup> گروه  $G$  گوئیم.

۲. برای هر عضو  $g \in G$ ، عضو منحصر بفرد  $h \in G$ <sup>۲۱</sup> موجود باشد بطوریکه  $h * g = g * h = e$  عضو  $h$

را وارون  $g$  نامیده و آن را با  $g^{-1}$  نشان می‌دهیم.

۳. برای کلیه  $g, h$  و  $j$  در  $G$  داشته باشیم  $g * (h * j) = (g * h) * j$  یعنی  $*$  شرکت پذیر باشد. در این

صورت گروه را با  $(G, *)$  نشان می‌دهیم. به‌علاوه اگر برای کلیه  $g, h \in G$  داشته باشیم  $g * h = h * g$

آن‌گاه  $G$  را یک گروه جابجایی (تعویض پذیر) گوئیم. یک زیرگروه  $(G, *)$  زیرمجموعه‌ای مانند  $s$  از  $G$  است

که تحت  $*$  بسته باشد.

**تعریف ۲.۳.۱.** میدان مجموعه‌ای از اعضای  $F$  همراه دو عمل  $F \times F \rightarrow F$  و  $F \times F \rightarrow F$  :  $+$  که بترتیب

<sup>۱۶</sup>Initial state

<sup>۱۷</sup>Final state

<sup>۱۸</sup>Group

<sup>۱۹</sup>Mapping

<sup>۲۰</sup>Neutral element

<sup>۲۱</sup>Unique element

جمع و ضرب نامیده می‌شوند بطوریکه  $(F, +)$  گروهی جابجایی با عضو همانی<sup>۲۲</sup> صفر بوده و  $(F - \{0\}, \cdot)$  نیز گروهی جابجایی باشد. عضو همانی آن را با ۱ نشان داده و آن را واحد می‌نامیم. چنین میدانی را بصورت  $(F, +, \cdot)$  نشان می‌دهیم. یک زیر میدان  $(F, +, \cdot)$  زیر مجموعه‌ای مانند  $S$  از  $F$  است بطوریکه  $(S, +, \cdot)$  میدان باشد.

**تعریف ۳.۳.۱.** یک فضای برداری<sup>۲۳</sup> روی میدان  $F$  (که اعضای آن اسکالرها نامیده می‌شوند) مجموعه‌ای مانند  $V$  است که اعضای آن را بردار می‌نامیم بطوریکه:

۱. نگاشتی که آن را جمع نامیده و با نماد  $+$  نشان می‌دهیم، چنین تعریف شده باشد که  $V \times V \rightarrow V : +$  و  $(V, +)$  گروهی جابجایی باشد عضو همانی این گروه را با  $0$  نشان می‌دهیم. همچنین نگاشت  $F \times V \rightarrow V$  را که ضرب اسکالر نامیده می‌شود تعریف می‌کنیم. ضرب اسکالر  $F$  و  $V$  را برای هر  $f \in F$  و  $v \in V$  بصورت  $f \cdot v$  نشان می‌دهیم. برای کلیه  $a, b \in F$  و  $u, v \in V$  ضرب اسکالر دارای خواص زیر است:

$$۲. \quad a(u + v) = au + av \quad (\text{توزیع ضرب اسکالر روی جمع برداری}),$$

$$۳. \quad (a + b)v = av + bv \quad (\text{توزیع ضرب برداری روی جمع اسکالر}),$$

$$۴. \quad a(bv) = (a \cdot b)v \quad (\text{شرکت پذیری ضرب اسکالر}),$$

$$۵. \quad 1v = v$$

$$۶. \quad 0v = 0.$$

چنین فضای برداری را با  $(V, F)$  نشان می‌دهیم.

**تعریف ۴.۳.۱.** فضای برداری  $V$  روی میدان اعداد مختلط را یک فضای ضرب داخلی<sup>۲۴</sup> (و یا فضای شبه هیلبرت)

نامیم، هرگاه تابعی چون  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  چنان وجود داشته باشد که برای هر  $u, v, w \in V$  و  $a \in \mathbb{C}$

<sup>۲۲</sup>Identity element

<sup>۲۳</sup>Vectorial space

<sup>۲۴</sup>Inner product space

داشته باشیم:

$$۱. \quad \langle U, V \rangle \geq 0 \text{ و } \langle V, V \rangle = 0 \text{ اگر و تنها اگر } V = 0,$$

$$۲. \quad \langle U, V + W \rangle = \langle U, V \rangle + \langle U, W \rangle$$

$$۳. \quad \langle aU, V \rangle = a \langle U, V \rangle$$

$$۴. \quad \langle U, V \rangle = \overline{\langle V, U \rangle} \text{ که خط بالایی عمل مزدوج در اعداد مختلط است.}$$

تابع  $\langle U, V \rangle$  را یک ضرب داخلی گوییم.

**تعریف ۵.۳.۱.** دنباله  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  در فضای ضرب داخلی  $(V, \mathbb{C})$  کشی <sup>۲۶</sup> نامیده می‌شود هرگاه برای هر  $N, \epsilon > 0$

ای در  $\mathbb{N}$  چنان یافت شود که برای هر  $m, n \geq N$  داشته باشیم  $d(V_m, V_n) \leq \epsilon$ .

**تعریف ۶.۳.۱.** یک فضای ضرب داخلی را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا <sup>۲۷</sup> باشد.

**تعریف ۷.۳.۱.** یک فضای ضرب داخلی کامل را یک فضای هیلبرت <sup>۲۸</sup> گوییم.

**تعریف ۸.۳.۱.** فضای  $L^2[a, b]$  برای بازه  $[a, b]$  را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : \int_{[a, b]} |f|^2 < \infty \right\}$$

**تعریف ۹.۳.۱.** فرض کنید تابع  $f$  برای  $0 \leq t < \infty$  تعریف شده و  $s$  یک متغیر حقیقی باشد. تابع  $F$  را بصورت

زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

<sup>۲۵</sup>Sequence

<sup>۲۶</sup>Cauchy

<sup>۲۷</sup>Convergent

<sup>۲۸</sup>Hilbert space



حوزه تعریف  $F$  مجموعه  $s$ هایی است که به ازای آن‌ها انتگرال فوق همگراست، یعنی  $s$ هایی که به ازای آن‌ها حد زیر موجود است:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt.$$

تابع  $F(s)$  را تبدیل لاپلاس تابع  $f(t)$  می‌نامیم و آن را با  $L\{f(t)\}$  نشان می‌دهیم، پس:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

**تعریف ۱۰.۳.۱.** فرض می‌کنیم  $X \neq \emptyset$  یک مجموعه باشد، یک جبر از مجموعه‌ها روی  $X$  عبارت است از یک خانواده غیرتهی  $A$  از زیر مجموعه‌های  $X$  بطوریکه در دو شرط زیر صدق کند:

$$۱. \text{ اگر } E_1, E_2, \dots, E_n \in A \text{ آن‌گاه, } \bigcup_{k=1}^n E_k \in A.$$

$$۲. \text{ اگر } E \in A \text{ آن‌گاه, } E^C \in A.$$

یک جبر روی  $X$  را  $\sigma$ -جبر گوئیم، هرگاه تحت اجتماع شمارش‌پذیر بسته باشد. یعنی اگر  $E_k \in A$  برای هر  $k \in \mathbb{N}$  آن‌گاه  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in A$ .

**تعریف ۱۱.۳.۱.** فرض کنید  $A \subseteq X$  یک  $\sigma$ -جبر باشد، تابع مجموعه‌ای  $\mu$  از  $A$  بتوی  $(0, \infty]$  را یک اندازه روی  $\sigma$ -جبر  $A$  می‌نامیم، هرگاه:

$$۱. \mu(\emptyset) = 0.$$

$$۲. \text{ فرض کنیم } E_k \in A, k \in \mathbb{N} \text{ و } E_k \cap E_l = \emptyset \text{ وقتی } k \neq l. \text{ آن‌گاه } \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

$\mu(E)$  را اندازه <sup>۲۹</sup> مجموعه  $E$  نامیم.

تعریف ۱۲.۳.۱. فرض می‌کنیم  $f : X \rightarrow Y$  یک نگاشت،  $(X, M)$  و  $(Y, N)$  فضاهای اندازه‌پذیر باشند. تابع  $f$  را اندازه‌پذیر<sup>۳۰</sup> گوئیم اگر برای هر  $E \in N$  داشته باشیم:

$$f^{-1}(E) \in M,$$

تعریف ۱۳.۳.۱. تابع اندازه‌پذیر  $f$  که روی  $\mathbb{R}$  تعریف شده است را یک انتگرال لبگ<sup>۳۱</sup> می‌گوئیم اگر یک دنباله از توابع  $(f_n)$  وجود داشته باشد بطوریکه در دو شرط زیر صدق کند:

$$۱. \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty.$$

$$۲. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty.$$

آن‌گاه انتگرال  $f$  بصورت

$$\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n,$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۱۴.۳.۱. یک تابع  $f$  که روی  $\mathbb{R}$  تعریف شده است، انتگرال‌پذیر موضعی<sup>۳۲</sup> گفته می‌شود اگر

$$\int_a^b f,$$

برای هر  $-\infty < a < b < \infty$  موجود باشد.

تعریف ۱۵.۳.۱. یک مجموعه  $S$  اندازه‌پذیر گفته می‌شود اگر تابع مشخصه<sup>۳۳</sup>  $\chi_S$  یک تابع انتگرال‌پذیر موضعی باشد.

<sup>۳۰</sup>Measurable

<sup>۳۱</sup>lebesgue integral

<sup>۳۲</sup>Locally integrable

<sup>۳۳</sup>Characteristic function

**تعریف ۱۶.۳.۱.** فرض کنید  $S$  یک مجموعه اندازه پذیر باشد، اگر تابع مشخصه  $\chi_S$  یک تابع انتگرال پذیر باشد آن گاه  $\mu(S)$  بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mu(S) = \int \chi_S,$$

اگر  $\chi_S$  انتگرال پذیر نباشد، آن گاه:

$$\mu(S) = \infty.$$

**تعریف ۱۷.۳.۱.** مجموعه توابع  $\{u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots\}$  را در فاصله  $[a, b]$  متعامد گوییم. اگر داشته باشیم:

$$\int_a^b u_m(x)u_n(x) dt \begin{cases} = 0, & m \neq n, \\ > 0, & m = n. \end{cases}$$

**تعریف ۱۸.۳.۱.** اگر در تعریف ۱۷.۳.۱ داشته باشیم:

$$\int_a^b u_m(x)u_n(x) dt = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

در این صورت دنباله تابعی را در فاصله  $[a, b]$  یک پایه متعامد یکه گوییم.

**تعریف ۱۹.۳.۱.** سیستمی با معادله حالت زیر را در نظر می گیریم:

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

$$y = cx,$$

که در آن  $A$  ماتریس  $n \times n$ ،  $b$  بردار  $n \times 1$  و  $c$  بردار سطری است. شرط لازم و کافی برای کنترل پذیری<sup>۳۴</sup> سیستم این است که:

$$\text{rank}(Q = [b \mid Ab \mid \dots \mid A^{n-1}b]) = n.$$

ماتریس  $Q$  را ماتریس کنترل پذیری سیستم می نامیم.

<sup>۳۴</sup>Controllability

تعریف ۲۰.۳.۱. ماتریس مربعی حقیقی  $A = (a_{ij})$ <sup>۳۵</sup>، از مرتبه‌ی  $n$  را معین مثبت<sup>۳۶</sup> گوییم هرگاه:

۱. متقارن<sup>۳۷</sup> باشد،

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T Ax > 0. \quad ۲.$$

همچنین این ماتریس نیمه‌معین مثبت<sup>۳۸</sup> است هرگاه:

۱. متقارن باشد،

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T Ax \geq 0. \quad ۲.$$

تعریف ۲۱.۳.۱. به‌ازای تمام مقادیر  $z$  داریم:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

برای هر ماتریس مربعی  $A$  تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} e^A &= A^0 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots, \\ &= I + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots, \end{aligned}$$

که در آن  $A^0$  را برابر  $I$  است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \dots$$

<sup>۳۵</sup>Real square matrix

<sup>۳۶</sup>Positive definite matrix

<sup>۳۷</sup>Symmetric

<sup>۳۸</sup>Positive semi-definite matrix

معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} - Ax = Bu.$$

اگر تساوی فوق را از سمت چپ در ماتریس  $e^{-At}$  ضرب کنیم، داریم:

$$e^{-At}(\dot{x} - Ax) = e^{-At}Bu.$$

یا

$$\frac{d[e^{-At}x]}{dt} = e^{-At}Bu.$$

با انتگرالگیری می‌توان نوشت:

$$e^{-At}x(t) - x(\circ) = \int_{\circ}^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau.$$

در نتیجه:

$$e^{-At}x(t) = \int_{\circ}^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + x(\circ).$$

ماتریس  $e^{At}$  را ماتریس انتقال<sup>۳۹</sup> یا گذرا می‌نامند و با  $\Phi(t)$  نشان می‌دهند. یعنی

$$\Phi(t) = e^{At}.$$

بنابراین  $\Phi(t)$  دستگاه را از حالت  $x(\circ)$  در لحظه اولیه  $t = \circ$  به حالت  $x(t)$  در زمان  $t$  تبدیل می‌کند.

**تعریف ۲۲.۳.۱.** معادله‌ی ریکاتی<sup>۴۰</sup> با فرم کلی زیر شناخته می‌شود:

$$\dot{y}(t) + P(t)y(t) + Q(t)y^{\vee} = R(t), \quad \circ \leq t \leq T, \quad (۲.۱)$$

<sup>۳۹</sup>Transition matrix

<sup>۴۰</sup>Riccati equation

با در نظر گرفتن شرط ابتدایی

$$y(0) = b, \quad (3.1)$$

و شرط مرزی

$$y(t_0) = c, \quad 0 < t_0 \leq T, \quad (4.1)$$

که در آن  $P$  و  $Q$  و  $R$  توابعی بر حسب  $t$  هستند.

## ۴.۱ توابع موجک هار

توابع هار را بصورت زیر تعریف می کنیم [۲]:

### تعریف ۱.۴.۱.

$$H(0, t) = 1, \quad 0 \leq t < 1,$$

$$H(1, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \end{cases}$$

$$H(2, t) = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ -\sqrt{2}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \end{cases}$$

$$H(3, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ \sqrt{2}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{3}{8}, \\ -\sqrt{2}, & \frac{3}{8} \leq t < 1, \end{cases}$$

بطور کلی داریم:

$$H(2^p + n - 1, t) = \begin{cases} \sqrt{2^p} & J_1 \leq t \leq J_{\frac{1}{2}}, \\ -\sqrt{2^p} & J_{\frac{1}{2}} \leq t \leq J_0, \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

که در آن:

$$J_u = \frac{n - u}{2^p}, \quad u = 0, \frac{1}{2}, 1,$$

$$p = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots, 2^p.$$

لینچ<sup>۴۱</sup> و ریس<sup>۴۲</sup> توابع هار را گویا کردند [۳]. توابع هار گویا<sup>۴۳</sup> تمام ویژگی توابع هار اصلی را دارند و با حروف  $RH$  نمایش داده می‌شوند. در این پایان نامه مسائل کنترل بهینه را با استفاده از این توابع حل می‌کنیم.

**تعریف ۲.۴.۱.** توابع هار گویا مقادیر خود را از مجموعه‌ی  $\{۱, -۱, ۰\}$  اختیار می‌کنند و روی بازه  $(۰, ۱)$  بصورت زیر تعریف می‌شوند [۴]:

$$RH(r, t) = \begin{cases} ۱, & J_۱ \leq t < J_{\frac{1}{2}}, \\ -۱, & J_{\frac{1}{2}} \leq t < J_۰, \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن:

$$J_u = \frac{j - u}{2^i}, \quad u = ۰, \frac{1}{2}, ۱.$$

و مقدار  $r$  و پارامترهای  $i, j$  بصورت زیر است:

$$r = 2^i + j - ۱, \quad i = ۰, ۱, ۲, ۳, \dots, \quad j = ۱, ۲, ۳, \dots, 2^i,$$

برای  $i = j = ۰$  داریم:

$$RH(۰, t) = ۱, \quad ۰ \leq t < ۱.$$

نمودار توابع هار گویا برای  $r = ۰, ۱, ۲, \dots, ۷$  در شکل ۱.۱ رسم شده است [۷].

### ۱.۴.۱ ویژگی تعامد توابع هار گویا

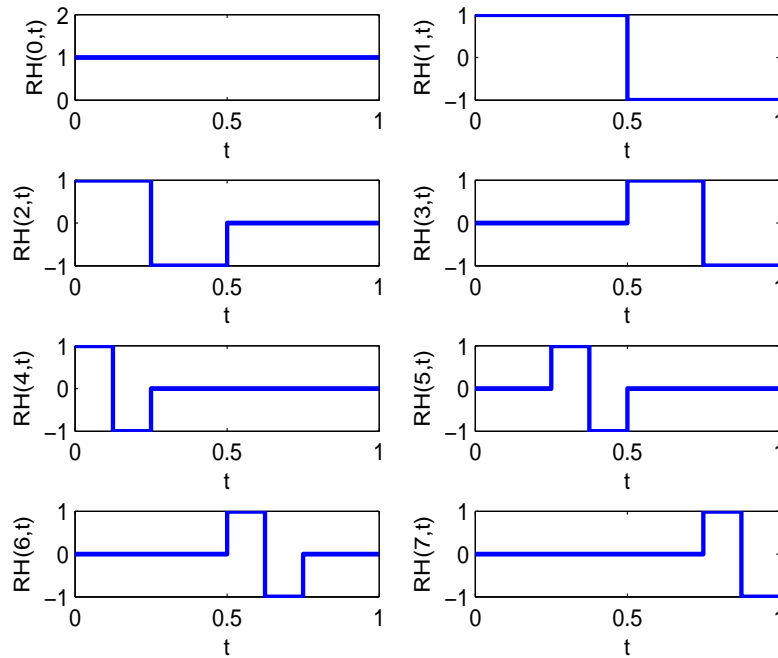
مجموعه‌ی توابع هار گویا مجموعه‌ای متعامد کامل هستند و ویژگی تعامدشان بصورت زیر است [۴]:

$$\int_0^1 RH(r, t)RH(\nu, t)dt = \begin{cases} 2^{-i}, & r = \nu, \\ ۰, & r \neq \nu, \end{cases}$$

<sup>۴۱</sup>Lynch

<sup>۴۲</sup>Reis

<sup>۴۳</sup>Rationalized Haar functions



شکل ۱.۱: نمودار  $RH(r, t)$  برای  $r = 0, 1, 2, \dots, 7$

که در آن:

$$\nu = 2^n + m - 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots, 2^n.$$

### ۲.۴.۱ تقریب توابع با توابع هار

همانطور که اشاره شد مجموعه توابع هار گویا مجموعه‌ای متعامد کامل در فضای هیلبرت  $L^2[0, 1]$  است، بنابراین

هر تابع پیوسته مانند  $\mathcal{F}(t)$  در این فضا را می‌توان با این توابع به صورت زیر تقریب زد [۴]:

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r RH(r, t). \quad (5.1)$$

اگر تابع  $\mathcal{F}(t)$  معلوم باشد  $a_r$  بصورت زیر بدست می‌آید:

$$a_r = 2^i \int_0^1 \mathcal{F}(t) RH(r, t) dt, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

که در آن:

$$r = 2^i + j - 1, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 2^i,$$



و برای  $r = 0, i = j = 0$  است. سری رابطه‌ی (۵.۱) نامتناهی است. برای تبدیل این سری به یک سری متناهی فرض می‌کنیم  $i = 0, 1, 2, \dots, \alpha$  باشد، بنابراین جملات سری به  $K$  جمله‌ی اولش محدود می‌شود، در نتیجه

داریم:

$$\mathcal{F}(t) \simeq \sum_{r=0}^{K-1} a_r RH(r, t) = A^T \phi(t), \quad (۶.۱)$$

که در آن:

$$K = 2^{\alpha+1}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$A$  را بردار ضرایب توابع هار گویا و  $\Phi(t)$  را بردار توابع هار گویا می‌نامیم و آن‌ها را بصورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A = [a_0, a_1, \dots, a_{K-1}]^T,$$

$$\Phi(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{K-1}(t)]^T,$$

که در آن:

$$\phi_r(t) = RH(r, t), \quad r = 0, 1, 2, \dots, K-1.$$

اگر بازه‌ی  $[0, 1]$  به  $K$  زیربازه‌ی مساوی تقسیم‌بندی شود نقاط موجود در وسط هر زیر بازه را نقاط کالوکیشن می‌نامیم و آن‌ها را بصورت زیر نمایش می‌دهیم [۵]:

$$t_l = \frac{l - 0.5}{K}, \quad l = 1, 2, \dots, K.$$

می‌توان بردار  $1 - 0, 1, 2, \dots, K - 1$  را در این نقاط مشخص کرد. فرض می‌کنیم  $\hat{\Phi}_{K \times K}$  به‌عنوان ماتریس هار، ترکیبی از بردارهای  $1 - 0, 1, 2, \dots, K - 1$  در نقاط کالوکیشن باشد. بنابراین داریم:

$$\hat{\Phi}_{K \times K} = [\Phi(t_1), \Phi(t_2), \dots, \Phi(t_K)]. \quad (۷.۱)$$

به عنوان مثال ماتریس هار هشت موجک اول بصورت زیر است [۶]:

$$\hat{\Phi}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (8.1)$$

با استفاده از روابط (۶.۱) و (۷.۱) داریم:

$$[\mathcal{F}(t_1), \mathcal{F}(t_2), \dots, \mathcal{F}(t_K)] = A^T \hat{\Phi}_{K \times K}, \quad (9.1)$$

از رابطه‌ی (۹.۱) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$A^T = [\mathcal{F}(t_1), \mathcal{F}(t_2), \dots, \mathcal{F}(t_K)] \hat{\Phi}_{K \times K}^{-1},$$

که در آن [۶]:

$$\hat{\Phi}_{K \times K}^{-1} = \left(\frac{1}{K}\right) \hat{\Phi}_{K \times K}^T \text{diag}\left(1, 1, \underbrace{2, 2, \underbrace{2^2, \dots, 2^2}_{2^2}}, \underbrace{2^3, \dots, 2^3}_{2^3}, \dots, \underbrace{\frac{K}{2}, \dots, \frac{K}{2}}_{\frac{K}{2}}\right). \quad (10.1)$$

بنابراین تابع  $\mathcal{F}(t)$  در نقاط کالوکیشن بصورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\mathcal{F}(t_l) \approx A_{1 \times K}^T \hat{\Phi}_{K \times K}, \quad l = 1, 2, \dots, K.$$

### ۳.۴.۱ ماتریس عملگر انتگرالگیری

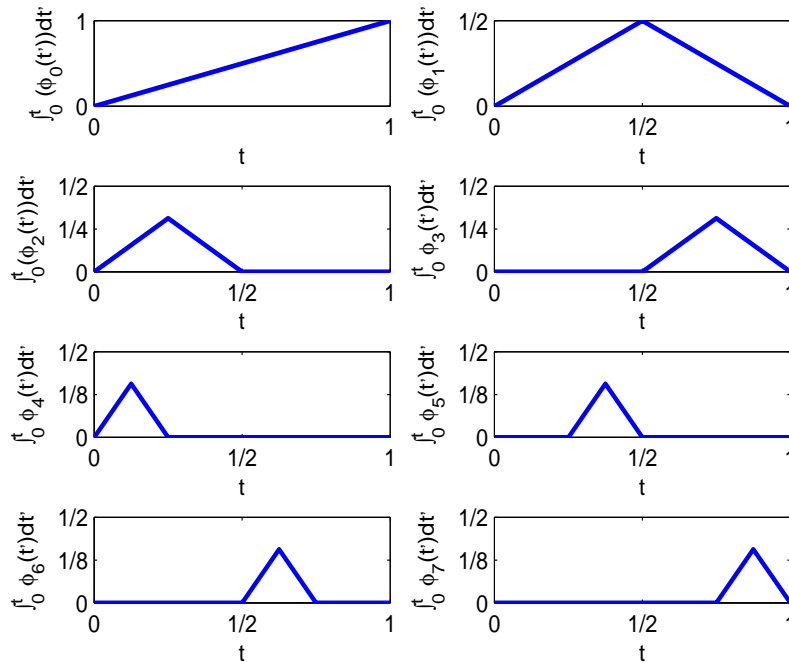
همیشه در حل مسائل کنترل بهینه با روابطی سر و کار داریم که مشتق‌گیری یا انتگرالگیری از آن‌ها اجتناب ناپذیر است، برای سیستم‌هایی که توابع را با موجک هار تقریب زده‌ایم مشتق‌گیری از موج‌های پله‌ای امکان پذیر نیست

در حالیکه انتگرالگیری از آن‌ها توابعی خطی نتیجه می‌دهد و از رابطه‌ی زیر بدست می‌آیند [۷]:

$$\int_0^t \Phi(t') dt' \simeq P \Phi(t). \quad (11.1)$$

ماتریس  $P_{K \times K}$ ، ماتریس عملگر انتگرالگیری<sup>۴۴</sup> است و از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید [۷]:

<sup>۴۴</sup>Operational matrix of integration



شکل ۲.۱: نمودار توابع انتگرال  $\phi_r(t)$  برای  $r = 0, 1, \dots, 7$

$$P_{K \times K} = \frac{1}{2K} \begin{bmatrix} 2K P_{\frac{K}{2} \times \frac{K}{2}} & -\hat{\Phi}_{\frac{K}{2} \times \frac{K}{2}} \\ \hat{\Phi}_{\frac{K}{2} \times \frac{K}{2}}^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.1)$$

بطوریکه  $P_{1 \times 1} = [\frac{1}{2}]$ ،  $\hat{\Phi}_{1 \times 1} = [1]$  همچنین  $\hat{\Phi}_{\frac{K}{2} \times \frac{K}{2}}$  و  $\hat{\Phi}_{\frac{K}{2} \times \frac{K}{2}}^{-1}$  بترتیب از (۹.۱) و (۱۰.۱) بدست می‌آیند. به

عنوان مثال ماتریس عملگر انتگرالگیری مرتبه هشت  $P_{8 \times 8}$  بصورت زیر است:

$$P_{8 \times 8} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 32 & -16 & -8 & -8 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 16 & 0 & -8 & 8 & -4 & -4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13.1)$$

انتگرال گیری از  $\phi_r(t)$ ،  $r = 0, 1, \dots, 7$  را که در شکل ۲.۱ رسم شده است [۸]، بصورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\int_0^t \phi_{\circ}(t') dt' = t, \quad 0 \leq t < 1 \simeq \frac{1}{16} [1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11 \ 13 \ 15], \quad (14.1)$$

$$\int_0^t \phi_{\surd}(t') dt' = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ 1-t, & \frac{1}{4} \leq t < 1, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 7 \ 5 \ 3 \ 1], \quad (15.1)$$

$$\int_0^t \phi_{\rceil}(t') dt' = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} - t, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [1 \ 3 \ 3 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (16.1)$$

$$\int_0^t \phi_{\rceil}(t') dt' = \begin{cases} t - \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{3}{4}, \\ 1-t, & \frac{3}{4} \leq t < 1, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 3 \ 3 \ 1], \quad (17.1)$$

$$\int_0^t \phi_{\rceil}(t') dt' = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{1}{8}, \\ \frac{1}{8} - t, & \frac{1}{8} \leq t < \frac{1}{4}, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (18.1)$$

$$\int_0^t \phi_{\Delta}(t') dt' = \begin{cases} t - \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{4} - t, & \frac{3}{4} \leq t < \frac{7}{8}, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (19.1)$$

$$\int_0^t \phi_{\varphi}(t') dt' = \begin{cases} t - \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{5}{8}, \\ \frac{3}{4} - t, & \frac{5}{8} \leq t < \frac{3}{2}, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0], \quad (20.1)$$

$$\int_0^t \phi_{\vee}(t') dt' = \begin{cases} t - \frac{3}{4}, & \frac{3}{4} \leq t < \frac{7}{8}, \\ 1-t, & \frac{7}{8} \leq t < 1, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]. \quad (21.1)$$

با ادغام روابط (۱۴.۱) - (۲۱.۱) داریم:

$$\int_0^t \hat{\Phi}_{8 \times 8}(t') dt' \simeq \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (22.1)$$

اکنون با توجه به روابط (۸.۱)، (۱۱.۱) و (۲۲.۱) ماتریس  $P_{8 \times 8}$  بدست می‌آید که همان ماتریس (۱۳.۱) است.

## ۵.۱ فرمول‌بندی مسائل کنترل بهینه

سیستم کنترلی غیرخطی<sup>۴۵</sup> زیر را داریم:

$$\dot{X}(t) = G(t, X(t), U(t)), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (23.1)$$

$$S(t, X(t), U(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (24.1)$$

بطوریکه  $X$  بردار  $n$  بعدی متغیر حالت<sup>۴۶</sup>،  $G$  یک بردار  $n$  بعدی توابع دیفرانسیلی پیوسته،  $S$  بردار  $q$  بعدی،  $t$  متغیر زمان و  $U$  بردار  $m$  بعدی متغیر کنترل<sup>۴۷</sup> است. حالت‌ها دارای شرایط اولیه و مرزی معلوم  $X(0) = X_0$  و  $\vartheta(t_f, X_f) = 0$  هستند بطوریکه  $\vartheta$  بردار  $p$  بعدی از توابع  $t$  زمان اولیه و  $t_f$  زمان نهایی است. در این‌جا مسائل بولزا<sup>۴۸</sup> [۵] را مورد بررسی قرار می‌دهیم، مسائلی که دارای تابع هدف مینیمم‌سازی بصورت زیر هستند:

$$J = \Psi(t_f, X_f) + \int_{t_0}^{t_f} H(t, X(t), U(t)) dt \quad (25.1)$$

که در آن  $\Psi$  تابع اسکالر از زمان نهایی  $t_f$  و متغیر حالت نهایی  $X_f$  و  $H(t, X, U)$  تابع اسکالر از زمان، حالت  $X$  و کنترل  $U$  است. از آن‌جا که توابع هر گویا روی بازه‌ی  $\tau \in [0, 1]$  تعریف می‌شوند، از تبدیل بازه‌ی  $t = [(t_f - t_0)\tau + t_0]$ ،  $t \in [t_0, t_f]$  استفاده می‌کنیم تا بازه  $[t_0, t_f]$  را به بازه  $[0, 1]$  تبدیل کنیم. با استفاده از این تبدیل، مساله کنترل بهینه سیستم غیرخطی (۲۳.۱) و (۲۴.۱) با تابع هدف (۲۵.۱) به مساله‌ی بهینه‌سازی<sup>۴۹</sup> زیر تبدیل می‌شود.

$$\text{minimize } J = \psi(t_f, x(1)) + (t_f - t_0) \int_0^1 h(\tau, t_f, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad (26.1)$$

subject to

<sup>۴۵</sup>Nonlinear

<sup>۴۶</sup>State variable

<sup>۴۷</sup>Control variable

<sup>۴۸</sup>Bolza problems

<sup>۴۹</sup>Optimization problem

$$\dot{x}(\tau) = (t_f - t_*)g(\tau, t_f, x(\tau), u(\tau)), \quad \tau \in [0, 1], \quad (27.1)$$

$$s(\tau, t_f, x(\tau), u(\tau)) \leq 0, \quad \tau \in [0, 1], \quad (28.1)$$

$$x(0) = x_*.$$

## ۶.۱ کالوکیشن مستقیم

### ۱.۶.۱ روش گسسته‌سازی هار

در این بخش چگونگی تقریب توابع با موجک هار و ماتریس عملگر انتگرالگیری متناظر با آن را توضیح خواهیم داد. ما انتظار داریم که از این روش در حل مسائل کنترل بهینه استفاده کنیم. بنابراین جواب پیوسته متغیرهای حالت و کنترل برای یک مساله را بصورت مجموع توابع هار نمایش می‌دهیم. بازه‌ی استاندارد در این روش بازه‌ی  $[0, 1]$ ، با مجموعه نقاط کالوکیشن بصورت زیر است:

$$\tau_l = \frac{l - 0.5}{K}, \quad l = 1, 2, \dots, K, \quad (29.1)$$

بطوریکه  $K$  تعداد گره‌های گسسته‌سازی است، و اندازه‌ی  $K$  بصورت توانی از دو است و با افزایش توان تعداد نقاط کالوکیشن نیز بصورت تصاعدی افزایش می‌یابد. مشتق متغیرهای حالت  $\dot{x}(\tau)$  و متغیرهای کنترل  $u(\tau)$  را با موجک هار با  $K$  نقطه‌ی کالوکیشن بصورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\dot{x}(\tau) \approx C_x^T \Phi(\tau),$$

$$u(\tau) \approx C_u^T \Phi(\tau),$$

که در آن:

$$C_x^T = [C_{x1}, C_{x2}, \dots, C_{xK}], \quad C_u^T = [C_{u1}, C_{u2}, \dots, C_{uK}].$$

با استفاده از ماتریس عملگر انتگرالگیری در  $P$  (۱۲.۱) متغیر حالت بصورت زیر بیان می‌شود:

$$x(\tau) = \int_0^\tau \dot{x}(\tau') d\tau' + x_* \approx \int_0^\tau C_x^T \Phi(\tau') d\tau' + x_* \approx C_x^T P \Phi(\tau) + x_*.$$

پیش از این اشاره شد که با توسیع ماتریس  $\Phi(t)$  در  $K$  نقطه کالوکیشن (۲۹.۱)، ماتریس هر  $\hat{\Phi}_{K \times K}$  نتیجه می‌شود.

$$\dot{x}(\tau_l) \approx C_x^T \Phi(\tau_l), \quad u(\tau_l) \approx C_u^T \Phi(\tau_l), \quad x(\tau_l) \approx C_x^T P \Phi(\tau_l) + x_0, \quad l = 1, \dots, K.$$

با استفاده از توضیح بالا می‌توانیم متغیرها را در نقاط کالوکیشن با استفاده از ضرب بردار ضرایب هر در بردار ستونی متناظر آن در ماتریس هر تقریب بزنیم.

### ۲.۶.۱ برنامه‌ریزی غیرخطی

هنگامی که از روش کالوکیشن هر در مسائل کنترل بهینه استفاده می‌کنیم، متغیرهای برنامه‌ریزی غیرخطی مجموعه‌ای شامل بردار ضرایب مجهول مشتق متغیر حالت، متغیر کنترل، زمان اولیه و نهایی بصورت زیر است:

$$x = [C_{x1}, C_{x2}, \dots, C_{xK}, C_{u1}, C_{u2}, \dots, C_{uK}, t_0, t_f].$$

بنابراین تابع هدف مساله کنترل بهینه رابطه (۲۶.۱) بصورت زیر است:

$$J \approx \psi(t_f, x(\tau_K)) + (t_f - t_0) \int_0^1 h(\tau, t_f, (C_x^T P \Phi(\tau) + x_0), C_u^T \Phi(\tau)) d\tau,$$

از آن جاکه توابع هر در هر زیر بازه دارای مقادیر ثابت هستند می‌توانیم تابع هدف مساله را بصورت زیر بنویسیم:

$$J \approx \psi(t_f, x(\tau_K)) + \frac{t_f - t_0}{K} \sum_{l=1}^K h(\tau_l, t_f, (C_x^T P \Phi(\tau_l) + x_0), C_u^T \Phi(\tau_l)),$$

و قید (۲۸.۱) بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$s(\tau_l, t_f, (C_x^T P \Phi(\tau_l) + x_0), C_u^T \Phi(\tau_l)) \leq 0.$$

اگر  $x(\tau)$  و  $\dot{x}(\tau)$ ،  $u(\tau)$  در رابطه (۲۷.۱) را با بسط موجک هر در (۱.۶.۱) جایگزین کنیم داریم:

$$C_x^T \Phi(\tau_l) \approx (t_f - t_0) g(\tau_l, t_f, (C_x^T P \Phi(\tau_l) + x_0), C_u^T \Phi(\tau_l)).$$

مجموعه نقاط کالوکیشن شامل زمان اولیه و نهایی  $t_0$  و  $t_f$  نیستند بنابراین متغیرهای حالت مربوط به آنها را می

توان بصورت زیر نوشت [۵]:

$$x_0 \approx x(\tau_1) - \frac{\dot{x}(\tau_1)}{2K}, \quad x_1 \approx x(\tau_K) + \frac{\dot{x}(\tau_K)}{2K}.$$

با این روش مسائل کنترل بهینه به مسائل بهینه‌سازی غیرخطی تبدیل می‌شود. در این پایان نامه مسائل بهینه‌سازی

غیرخطی را با نرم‌افزار لینگو ۱۱<sup>۵۰</sup> حل می‌کنیم.

---

<sup>۵۰</sup>Lingo software 11



## فصل ۲

حل مسائل افق نامتناهی به روش موجک هار

## ۱.۲ مقدمه

در سال‌های اخیر مطالعه در مورد ساختار مسائل کنترل بهینه در بازه‌های نامتناهی و بازه‌های بزرگ، بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۲۲]-[۹]. این نوع مسائل در مهندسی [۲۴] و [۲۳]، مدل‌های رشد اقتصادی<sup>۱</sup> [۲۲] و [۲۸]-[۲۵]، فیزیک حالت جامد<sup>۲</sup> [۲۹] و [۳۰] و نظریه تعادل ترمودینامیکی مواد<sup>۳</sup> کاربرد فراوان دارند [۳۳]-[۳۱]. در این فصل به حل مسائل کنترل بهینه‌ی افق نامتناهی با استفاده از ویژگی‌های موجک هار می‌پردازیم. این نوع مسائل پیش از این به روش نظریه اندازه<sup>۴</sup> حل شده است [۱۲]. اما این روش پیچیدگی محاسباتی بالایی دارد. به‌منظور حل مساله به روش موجک هار، ابتدا مساله افق نامتناهی<sup>۵</sup> را به مساله افق متناهی<sup>۶</sup> تبدیل می‌کنیم یعنی بازه  $(0, \infty)$  را به بازه  $(0, 1)$  انتقال می‌دهیم. فرض می‌کنیم متغیرهای کنترل و مشتقات متغیرهای حالت مساله کنترل بهینه می‌توانند بر حسب موجک هار به همراه ضرایب مجهولشان نوشته شوند. متغیرهای حالت به وسیله ماتریس عملگر انتگرالگیری هار به دست می‌آید. بنابراین همه‌ی متغیرهای معادله‌های سیستم غیرخطی را با سری هار بیان می‌کنیم. سرانجام با در نظر گرفتن پارامترهای مجهول که قیدها را برآورده و تابع هدف را بهینه می‌کنند، مساله برنامه ریزی غیرخطی بدست آمده را حل می‌کنیم. در پایان، کاربرد این روش کالوکیشن پیشنهادی را با دو مثال نشان می‌دهیم.

<sup>۱</sup>Economic growth models

<sup>۲</sup>Solid-state physics

<sup>۳</sup>Theory of thermodynamical equilibrium for material

<sup>۴</sup>Measure theory

<sup>۵</sup>Infinite- Horizon problem

<sup>۶</sup>Finite Horizon problem

## ۲.۲ معرفی مساله افق نامتناهی و تبدیل آن به مساله افق متناهی

مساله کنترل بهینه‌ای که در این قسمت بررسی می‌کنیم، بصورت زیر است:

$$\text{minimize } \int_0^{\infty} \varphi(t, x(t), u(t)) dt, \quad (۱.۲)$$

subject to

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (۲.۲)$$

$$x(0) = x_0, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^1, \quad (۳.۲)$$

که در آن  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in A \subseteq \mathbb{R}^n$  و  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$  بترتیب بردارهای حالت و کنترل سیستم در زمان  $t \geq 0$  می‌باشند.

مجموعه‌های  $A$  و  $U$  بترتیب مجموعه‌هایی فشرده و ناتهی در  $\mathbb{R}^n$  و  $\mathbb{R}^m$  هستند و بردار  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  حالت ابتدایی سیستم می‌باشد.

توابع برداری  $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  و عددی  $\varphi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$  را توابع اندازه‌پذیر لبگ در نظر می‌گیریم که به طور پیوسته در  $t$  مشتق‌پذیرند. مجموعه جواب کنترل‌های قابل قبول برای سیستم (۲.۲) مجموعه‌ی توابع اندازه‌پذیر لبگ  $U \rightarrow [0, \infty) : u$  می‌باشد. متغیر حالت شدنی  $x$  متناظر متغیر کنترل  $u$  که بر روی بازه  $[0, \infty) : t$  تعریف شده است، شرایط مرزی (۳.۲) را برآورده می‌کند. فرض کنیم متناظر هر متغیر کنترل شدنی  $u$ ، متغیر حالت شدنی  $x$  موجود و نیز انتگرال (۱.۲) مطلقاً همگرا<sup>۷</sup> باشد.

زوج مرتب شدنی  $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$  جواب بهینه مسائل (۱.۲) و (۲.۲) است، اگر برای هر جواب شدنی  $(x(\cdot), u(\cdot))$  داشته باشیم:

$$\int_0^{\infty} \varphi(t, x(t), u(t)) dt \geq \int_0^{\infty} \varphi(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt.$$

<sup>۷</sup>Absolutely convergent

به منظور استفاده از توابع هار از تبدیل زیر استفاده می‌کنیم:

$$t = \tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), \quad t \in [0, \infty), \quad (4.2)$$

که در آن  $\tau \in [0, 1)$ . بنابراین مساله (۳.۲) - (۱.۲) به مساله کنترل بهینه زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{minimize } J = \int_{[0,1)} \frac{\pi}{\Psi} g\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), x\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), u\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right)\right) \sec^{\Psi}\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right) d\tau, \quad (5.2)$$

subject to

$$\dot{x}\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right) = f\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), x\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), u\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right)\right), \quad \tau \in [0, 1), \quad (6.2)$$

$$x(0) = x^0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 1^-} x\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right) = x^1, \quad \tau \in [0, 1), \quad (7.2)$$

$$\left(x\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), u\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right)\right) \in A \times U, \quad \tau \in [0, 1). \quad (8.2)$$

فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} y(\tau) = x\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right), \\ v(\tau) = u\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right)\right). \end{cases}$$

با استفاده از این انتقال، مساله کنترل بهینه موجود در روابط (۵.۲)-(۸.۲) بصورت ساده زیر جایگزین می‌شود:

$$\text{minimize } J = \int_{[0,1)} \frac{\pi}{\Psi} g\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), y(\tau), v(\tau)\right) \sec^{\Psi}\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right) d\tau, \quad (9.2)$$

subject to

$$\dot{y}(\tau) = \frac{\pi}{\Psi} f\left(\tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), y(\tau), v(\tau)\right) \sec^{\Psi}\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), \quad (10.2)$$

$$y(0) = y^0 = x^0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y(\tau) = y^1 = x^1, \quad (11.2)$$

$$(y(\tau), v(\tau)) \in A \times U. \quad (12.2)$$

اکنون با استفاده از ویژگی‌های موجک هار، مساله افق متناهی بالا را می‌توان حل کرد.

## ۳.۲ کالوکیشن مستقیم هار در مساله افق متناهی

### روش گسسته‌سازی هار

در فصل قبل توضیح دادیم که چگونه یک تابع را با استفاده از موجک هار و ماتریس عملگر انتگرالگیری متناظرش تقریب می‌زنیم. با اعمال این روش بر روی مسائل کنترل بهینه افق متناهی، متغیرهای حالت و کنترل تقریبی قیده‌های مساله، به دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود. به همین منظور بازه استاندارد  $(0, 1]$  را بصورت زیر تقسیم بندی می‌کنیم:

$$\tau_l = \frac{l - 0.5}{K}, \quad l = 1, 2, \dots, K, \quad (13.2)$$

که در آن  $K$  تعداد نقاطی است که در مینیمم سازی مساله استفاده می‌شود. این نقاط، همان نقاط کالوکیشن هستند که با فواصل یکسان  $\frac{1}{K}$  از هم در سراسر بازه  $(0, 1]$  توزیع شده‌اند. با فرض اینکه مشتق متغیر حالت  $\dot{y}(\tau)$  و متغیر کنترل  $u(\tau)$  را بتوان بر حسب موجک هار در  $K$  نقطه کالوکیشن تقریب زد، داریم:

$$\dot{y}(\tau) \approx C_y^T \Phi(\tau), \quad (14.2)$$

$$v(\tau) \approx C_v^T \Phi(\tau), \quad (15.2)$$

که در آن:

$$C_y^T = [C_{y1}, C_{y2}, \dots, C_{yK}], \quad C_v^T = [C_{v1}, C_{v2}, \dots, C_{vK}].$$

با استفاده از ماتریس عملگر انتگرالگیری  $P$  در (۱۲.۱)، متغیر حالت  $y(\tau)$  بصورت زیر بیان می‌شود:

$$y(\tau) = \int_0^\tau \dot{y}(\tau') d\tau' + y_0 \approx \int_0^\tau C_y^T \Phi(\tau') d\tau' + y_0 \approx C_y^T P \Phi(\tau) + y_0.$$

همانطور که در فصل یک اشاره شد، با توسیع ماتریس  $\Phi(t)$  در  $K$  نقطه کالوکیشن، ماتریس هار  $\hat{\Phi}_{K \times K}$  نتیجه می‌شود. با استفاده از این ماتریس داریم:

$$\dot{y}(\tau_l) \approx C_y^T \Phi(\tau_l), \quad v(\tau_l) \approx C_v^T \Phi(\tau_l), \quad y(\tau_l) \approx C_y^T P \Phi(\tau_l) + y_0, \quad l = 1, \dots, K. \quad (۱۶.۲)$$

بنابر عبارت بالا، می‌توان متغیرها را در هر نقطه کالوکیشن با ضرب بردار ضرایب هار در ستون متناظر ماتریس هار تقریب بزنیم.

### برنامه ریزی غیرخطی

با اعمال روش کالوکیشن هار بر مسائل کنترل بهینه، درایه‌های بردار مجهول  $y$  شامل ضرایب متغیرهای حالت و کنترل به عنوان متغیرهای برنامه‌ریزی غیرخطی در نظر گرفته می‌شوند. یعنی داریم:

$$y = [C_{y1}, C_{y2}, \dots, C_{yK}, C_{v1}, C_{v2}, \dots, C_{vK}].$$

بنابراین تابع هدف (۹.۲) بصورت زیر بیان می‌شود:

$$J \approx \int_{[0,1]} \frac{\pi}{\Psi} g \left( \tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right), (C_y^T P \Phi(\tau) + y_0), C_v^T \Phi(\tau) \right) \sec^2\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau\right) d\tau,$$

از آنجاکه موجک هار در هر زیر بازه ثابت است، معادله‌ی بالا بصورت زیر جایگزین می‌شود:

$$J \approx \frac{\pi}{\Psi K} \sum_{l=1}^K g \left( \tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau_l\right), (C_y^T P \Phi(\tau_l) + y_0), C_v^T \Phi(\tau_l) \right) \sec^2\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau_l\right).$$

با جایگزین کردن روابط (۱۶.۲)، در (۱۰.۲) داریم:

$$C_y^T \Phi(\tau_l) \approx \frac{\pi}{\Psi} f \left( \tan\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau_l\right), (C_y^T P \Phi(\tau_l) + y_0), C_v^T \Phi(\tau_l) \right) \sec^2\left(\frac{\pi}{\Psi}\tau_l\right).$$

بنابراین قیدهای معادله سیستم به عنوان قیدهای مساله برنامه ریزی غیرخطی در نظر گرفته می‌شوند. از آنجاکه زمان ابتدایی و نهایی را به عنوان نقاط کالوکیشن در نظر نگرفتیم، مقادیر متغیرهای حالت در این نقاط از روابط زیر بدست می‌آید:

$$y_0 \approx y(\tau_1) - \frac{\dot{y}(\tau_1)}{\Psi K}, \quad y_1 \approx y(\tau_K) + \frac{\dot{y}(\tau_K)}{\Psi K}.$$

اکنون توانستیم مساله کنترل بهینه (۳.۲) - (۱.۲) را بصورت مساله برنامه ریزی غیرخطی بیان کنیم. مساله بدست آمده را به کمک نرم افزار لینگو ۱۱ حل می‌کنیم.

## ۴.۲ مثال‌های عددی

مثال ۱.۴.۲. مساله کنترل بهینه زیر را در نظر بگیرید [۱۲]:

$$\text{minimize } \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^2(t) + 4u^2(t)) dt, \quad (17.2)$$

subject to

$$\ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) + u(t), \quad (18.2)$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0. \quad (19.2)$$

با فرض  $x_1(t) = x(t)$  و  $x_2(t) = \dot{x}(t)$ ، مساله (۱۸.۲) - (۱۷.۲) بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{minimize } \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + 4x_2^2(t)) dt, \quad (20.2)$$

subject to

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (21.2)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t), \quad (22.2)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0. \quad (23.2)$$

مسیرهای بهینه بصورت زیر است:

$$x_1(t) = \left[ 0 + \left( 0 + \frac{0}{\sqrt{2}} \right) t \right] \exp\left(\frac{-t}{\sqrt{2}}\right),$$

$$x_2(t) = \left[ 0 - \left( 0 + \frac{0}{\sqrt{2}} \right) \frac{t}{\sqrt{2}} \right] \exp\left(\frac{-t}{\sqrt{2}}\right).$$

با تغییر متغیر (۴.۲)، مساله کنترل بهینه (۲۳.۲) - (۲۰.۲) بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{minimize } \int_{[0,1]} \frac{\pi}{4} (y_1^2(\tau) + 4v^2(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\tau\right) d\tau,$$

subject to

$$\dot{y}_1(\tau) = \frac{\pi}{4} y_2(\tau) \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\tau\right),$$

$$\dot{y}_2(\tau) = \frac{\pi}{4} (-y_2(\tau) + v(\tau)) \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\tau\right),$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y_1(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y_2(\tau) = 0.$$

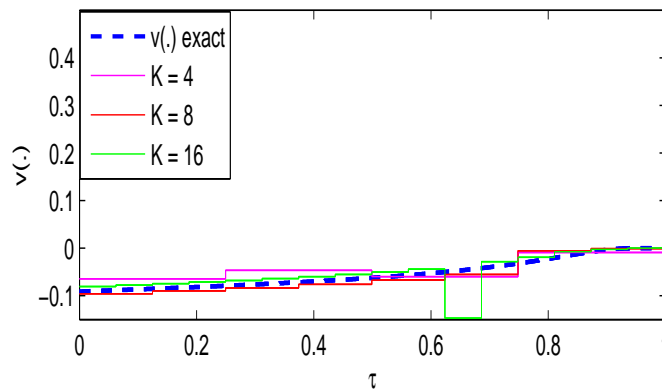
با استفاده از روش موجک هار، مقدار بهینه تابع هدف  $J$  برای  $K = 4, 8$  و  $16$  بترتیب برابر است با

$$0.198, 0.450, 0.387, 0.424.$$

در شکل ۱.۲-۳.۲ نمودارهای  $v(\tau)$  و مسیرهای متناظر  $y_1(\tau)$  و  $y_2(\tau)$  به همراه نمودارهای تقریب موجک

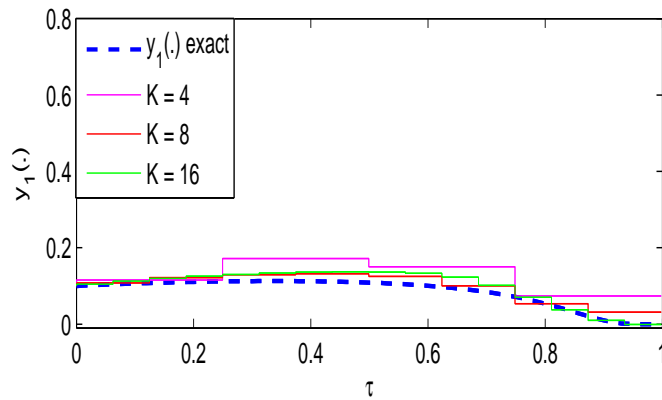
نشان داده شده است. این نمودارها نشان می‌دهند که با افزایش تعداد نقاط کالوکیشن، نمودارهای تقریبی به

نمودارهای تحلیلی نزدیکتر می‌شود.

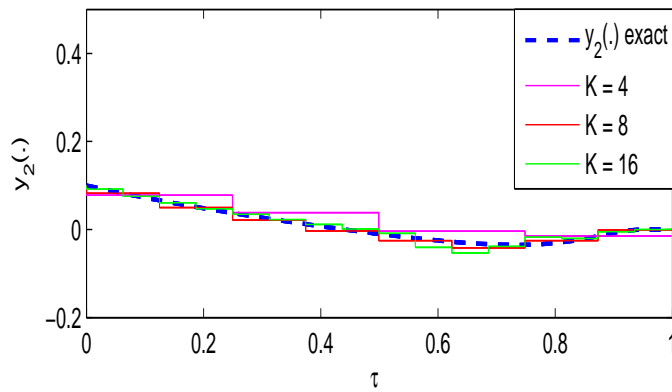


شکل ۱.۲: کنترل‌های بهینه دقیق و تقریبی  $v(\cdot)$





شکل ۲.۲: مسیرهای بهینه دقیق و تقریبی  $y_1(\cdot)$



شکل ۳.۲: مسیرهای بهینه دقیق و تقریبی  $y_2(\cdot)$

مثال ۲.۴.۲. مساله کنترل بهینه زیر را در نظر بگیرید [۳۴]:

$$\text{minimize } \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} (\ln^{\gamma} x(t) + u^{\gamma}(t)), dt,$$

subject to

$$\dot{x}(t) = x(t) \ln x(t) + x(t)u(t), \quad x(0) = \exp(\gamma).$$

به منظور حل مساله به روش موجک هار از تغییر متغیر (۴.۲) استفاده می‌کنیم و به مساله کنترل بهینه زیر می‌رسیم:

$$\text{minimize } \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{[0,1]} (\ln y^\nu(\tau) + v^\nu(\tau)) \sec^\nu\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\tau\right) d\tau,$$

subject to

$$\dot{y}(\tau) = \sec^\nu\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\tau\right)(y(\tau) \ln y(\tau) + y(\tau)v(\tau)), \quad y(0) = \exp(\sqrt{2}).$$

جواب دقیق مساله اولیه بصورت زیر است:

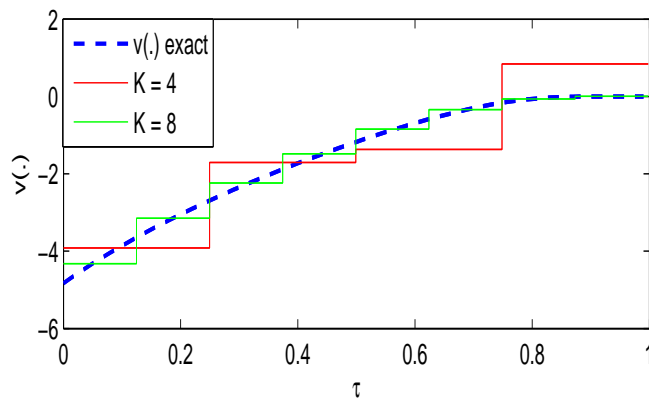
$$x(t) = \exp(\sqrt{2} \exp(-t\sqrt{2})),$$

$$u(t) = -\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) \exp(-t\sqrt{2}).$$

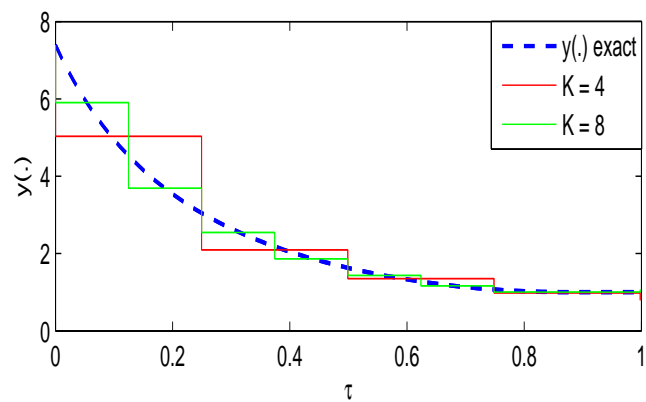
شکل‌های ۴.۲ و ۵.۲ نمودارهای کنترل و مسیر دقیق و تقریبی موجک هار را نشان می‌دهد. مقدار تقریبی تابع

هدف به ازای نقاط کالوکیشن ۸ و  $K = 4$  بترتیب برابر است با  $4/86$  و  $4/84$ . مقدار دقیق تابع هدف  $4/83$

می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌کنید با افزایش تعداد نقاط کالوکیشن تقریب بهتر شده است.



شکل ۴.۲: کنترل‌های بهینه تحلیلی و تقریبی



شکل ۵.۲: مسیرهای بهینه دقیق و تقریبی

## فصل ۳

# حل سیستم‌های تنظیم‌کننده‌ی خطی به روش موجک هار

## ۱.۳ مقدمه

مسائل کنترل بهینه درجه‌ی دوم خطی<sup>۱</sup> نقش مهمی در حساب تغییرات ایفا می‌کند. یکی از انواع مسائل کنترل بهینه درجه‌ی دوم سیستم‌های تنظیم‌کننده خطی<sup>۲</sup> است. در این فصل حل عددی این نوع مسائل را به روش موجک هار بررسی می‌کنیم. ابتدا این نوع سیستم‌ها را بررسی خواهیم کرد سپس جواب تقریبی را با جواب دقیق مقایسه می‌کنیم. نشان خواهیم داد که برای مسائل تنظیم‌کننده خطی، قانون کنترل بهینه می‌تواند بصورت یک تابع خطی، متغیر با زمان از متغیرهای حالت بدست آید. تحت شرایط خاصی که بحث خواهیم کرد، قانون کنترل بهینه غیر متغیر با زمان خواهد شد. در پایان نیز مثال‌هایی از این نوع سیستم حل می‌کنیم. سپس کنترل بهینه و مسیرهای متناظر را به روش موجک هار تقریب می‌زنیم و از روی نمودار جواب تقریبی را با جواب دقیق مقایسه می‌کنیم.

## ۲.۳ سیستم‌های تنظیم‌کننده خطی

سیستمی با معادلات خطی زیر که ممکن است دارای ضرایب متغیر با زمان باشد، بصورت زیر بیان شده است:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t). \quad (1.3)$$

تابع هدفی که باید حداقل شود بصورت زیر است:

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Hx(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt, \quad (2.3)$$

که در آن زمان نهایی  $t_f$  ثابت<sup>۳</sup> است،  $H$  و  $Q$  ماتریس‌های حقیقی، متقارن نیمه معین مثبت و  $R$  ماتریس حقیقی، متقارن معین مثبت می‌باشد. فرض می‌شود که حالت‌ها و کنترل‌ها محدود نیستند و  $x(t_f)$  آزاد<sup>۴</sup> یا غیرمعین است. می‌خواهیم بردار حالت را بدون صرف نیروی کنترل زیادی نزدیک مبدا قرار دهیم.

<sup>۱</sup>Linear quadratic optimal control problems

<sup>۲</sup>Linear regulator systems

<sup>۳</sup>Consistant

<sup>۴</sup>Free

برای بدست آوردن جواب دقیق مساله (۲.۳)-(۱.۳) هامیلتونین<sup>۵</sup> را بصورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) \\ + p^T(t)A(t)x(t) + p^T(t)B(t)u(t).$$

شرایط لازم برای بهینگی عبارتند از:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (۳.۳)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -Q(t)x(t) - A^T(t)p(t),$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = R(t)u(t) + B^T(t)p(t) = 0. \quad (۴.۳)$$

معادله (۴.۳) می‌تواند برای  $u$  حل شود، لذا

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p(t). \quad (۵.۳)$$

چون  $R$  ماتریس مثبت معین است  $R^{-1}$  وجود خواهد داشت. جایگزینی معادله (۵.۳) در معادله (۳.۳) ایجاب

می‌کند که

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p(t).$$

باشد بنابراین مجموعه‌ای از  $2n$  معادله دیفرانسیل خطی همگن خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}. \quad (۶.۳)$$

پاسخ این معادلات به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ p(t_f) \end{bmatrix} = \phi(t_f, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix},$$

<sup>۵</sup>Hamiltonian

که در آن  $\phi$  ماتریس انتقال سیستم<sup>۶</sup> (۶.۳) می‌باشد. با مجزا کردن ماتریس انتقال داریم:

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ p(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t_f, t) & \phi_{12}(t_f, t) \\ \phi_{21}(t_f, t) & \phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \quad (۷.۳)$$

که  $\{\phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{21}, \phi_{22}\}$  ماتریس‌های  $n \times n$  می‌باشند. از معادلات شرایط حدی [۳۵]، درمی‌یابیم که

$$p(t_f) = Hx(t_f).$$

با جایگزینی این مقدار  $p(t_f)$  در معادله (۷.۳) خواهیم داشت:

$$x(t_f) = \phi_{11}(t_f, t)x(t) + \phi_{12}(t_f, t)p(t),$$

$$Hx(t_f) = \phi_{21}(t_f, t)x(t) + \phi_{22}(t_f, t)p(t).$$

با جایگزینی معادله بالایی در معادله پایینی داریم:

$$H\phi_{11}(t_f, t)x(t) + H\phi_{12}(t_f, t)p(t) = \phi_{22}(t_f, t)p(t) + \phi_{21}(t_f, t)x(t).$$

که چون برای  $p(t)$  حل شود، داریم:

$$p(t) = [\phi_{22}(t_f, t) - H\phi_{12}(t_f, t)]^{-1} [H\phi_{11}(t_f, t) - \phi_{21}(t_f, t)]x(t). \quad (۸.۳)$$

کالمن<sup>۷</sup> [۳۶] نشان داده است که به ازای هر  $t \in [t_0, t_f]$  ماتریس معکوس مورد لزوم معادله فوق وجود دارد.

معادله (۸.۳) بصورت زیر نیز می‌تواند نوشته شود:

$$p(t) = K(t)x(t). \quad (۹.۳)$$

که بدین معنی است که  $p(t)$  تابع خطی از حالت‌های سیستم است.  $K$  یک ماتریس  $n \times n$  است. در حقیقت  $K$

<sup>۶</sup>transition matrix

<sup>۷</sup>Kalman

به  $t_f$  نیز بستگی دارد، لیکن  $t_f$  مشخص است. با جایگزینی در معادله (۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t), \\ &= F(t)x(t). \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

معادله فوق نشان می‌دهد که قانون کنترل بهینه، قانونی است خطی، متغیر با زمان و ترکیبی از حالت‌های سیستم است. برای تعیین ماتریس ضریب تقویت بازخور<sup>۱</sup>  $F$ ، احتیاج به ماتریس انتقال سیستم (۶.۳) می‌باشد. اگر تمام ماتریس‌های بکارگرفته‌شده  $\{A, B, R, Q\}$  ثابت باشند، ماتریس انتقال مورد نیاز با برآورد تبدیل معکوس لاپلاس ماتریس

$$\left\{ sI - \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \right\}^{-1},$$

و جایگزینی  $(t_f - t)$  برای  $t$  بدست می‌آید. متأسفانه وقتی مرتبه سیستم بالا باشد این کار بسیار مشکل و وقت گیر است. اگر هر کدام از ماتریس‌های موجود در (۶.۳) متغیر با زمان باشند، در آن حالت به‌طور کلی باید برای برآورد  $\phi(t_f, t)$  از روش‌های عددی استفاده نمود.

راه دیگری نیز وجود دارد و آن این است که می‌توان نشان داد که ماتریس  $K$  در معادله دیفرانسیل ماتریسی زیر با شرایط حدی  $K(t_f) = H$  صدق می‌کند.

$$\dot{K} = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t). \quad (۱۱.۳)$$

این معادله دیفرانسیل ماتریسی از نوع ریکاتی می‌باشد. معادله (۱۱.۳) را معادله ریکاتی می‌نامیم. چون  $K$  یک ماتریس  $n \times n$  است، معادله (۱۱.۳) سیستمی از  $n^2$  معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌باشد. می‌توان نشان داد که  $K$  متقارن است بنابراین به جای  $n^2$  باید  $\frac{(n)(n+1)}{2}$  معادله دیفرانسیل مرتبه اول حل شود. این انتگرالگیری از زمان  $t = t_f$  شروع شده و در جهت عکس پیش می‌رود تا به زمان  $t = t_0$  برسد،  $K(t)$  ذخیره شده و ماتریس ضریب تقویت بازخور از معادله (۱۰.۳) تعیین می‌شود. یافتن جواب دقیق مساله تنظیم کننده در مسائل با بعد

<sup>۱</sup>Feedback gain matrix



بزرگ کاری دشوار و با خطای محاسباتی بالایی همراه است. به‌عنوان مثال برای مسائل با بعد بالا محاسبه‌ی  $R^{-1}$  بسیار دشوار است. بنابراین ناگزیریم با استفاده از روش‌های عددی به حل مساله (۲.۳) با تابع هدف (۱.۳) بپردازیم. یکی از کاراترین روش‌ها استفاده از روش موجک هار است که در فصل اول توضیح نسبتاً کاملی در مورد آن ارائه شد. اینک به حل چند مثال عددی با استفاده از روش موجک هار می‌پردازیم.

### ۳.۳ مثال‌های عددی

مثال ۱.۳.۳. قانون کنترل بهینه را برای سیستم

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t),$$

چنان بیابید که تابع هدف

$$J = \frac{1}{2} H x^2(T) + \int_0^T \frac{1}{2} u^2(t) dt.$$

را حداقل کند. مقادیر موقعیت‌ها و کنترل‌های قابل قبول محدود نمی‌باشند، زمان نهایی  $T$  مشخص می‌باشد،

$H > 0$  و  $x(T)$  آزاد یا غیرمعیّن است. از معادله (۶.۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix},$$

که دارای ماتریس انتقال زیر می‌باشد:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{at} & \frac{1}{a} e^{-at} - \frac{1}{a} e^{at} \\ 0 & e^{-at} \end{bmatrix},$$

بنابراین از معادله (۸.۳) و (۹.۳) داریم:

$$K(t) = \left[ e^{-a(T-t)} - \frac{H}{a} [e^{-a(T-t)} - e^{a(T-t)}] \right]^{-1} [H e^{a(T-t)}].$$

و از معادله (۱۰.۳) قانون کنترل بهینه عبارتست از:

$$u(t) = -2K(t)x(t),$$

که در آن:

$$H = \{5, 0.5, 0.05\}, a = \{0.2, -0.2\}, x(0) = 5, T = 15. \quad (12.3)$$

نمودارهای ۶.۳ - ۱.۳ منحنی‌های دقیق و تقریبی کنترل بهینه  $u(t)$  و مسیرهای حالت متناظر را با در نظر گرفتن شرایط (۱۲.۳) به ازای  $K = 8$  و  $16$  نشان می‌دهد. مقدارهای دقیق و تقریبی تابع هدف  $J$  برای  $H$  های داده شده به ازای دو مقدار  $K$  در جداول (۱.۳) و (۲.۳) موجود است.

جدول ۱.۳: مقادیر دقیق و تقریبی تابع هدف  $J$  به ازای  $a = -0.2$

$H$	مقدار دقیق $J$	مقدار تقریبی $J (K = 8)$	مقدار تقریبی $J (K = 16)$
5	0.0060	0.0055	0.0059
0.5	0.0043	0.0041	0.0043
0.05	0.0012	0.0013	0.0012

جدول ۲.۳: مقادیر دقیق و تقریبی تابع هدف  $J$  به ازای  $a = 0.2$

$H$	مقدار دقیق $J$	مقدار تقریبی $J (K = 8)$	مقدار تقریبی $J (K = 16)$
5	2.5016	2.5055	2.5052
0.5	2.5034	2.5034	2.5030
0.05	2.4585	2.4828	2.4812

مثال ۲.۳.۳. سیستم مرتبه دوم زیر را جهت تعیین قانون کنترل بهینه تحلیلی و تقریبی مورد توجه قرار می‌دهیم

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + u(t),$$

این سیستم باید چنان کنترل شود که تابع هدف زیر حداقل شود:

$$J = \int_0^T [x_1^2(t) + \frac{1}{4}x_2^2(t) + \frac{1}{4}u^2(t)] dt.$$

با بسط معادله ریکاتی با

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \frac{1}{4}.$$

خواهیم داشت:

$$\dot{k}_{11}(t) = 2[k_{12}^2(t) - 2k_{12}(t) - 1],$$

$$\dot{k}_{12}(t) = 2k_{12}(t)k_{22}(t) - k_{11}(t) + k_{12}(t) - 2k_{22}(t), \quad (13.3)$$

$$\dot{k}_{22}(t) = 2k_{22}^2(t) - 2k_{12}(t) + 2k_{22}(t) - 1.$$

برای ورود به (۱۳.۳) تقارن  $K$  مورد استفاده قرار گرفته‌است، شرایط حدی عبارتند از:

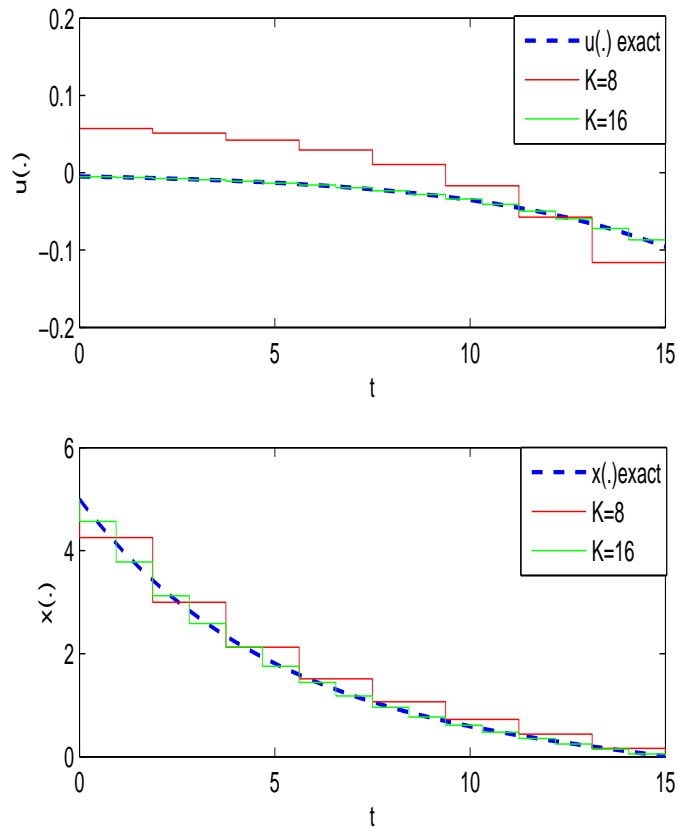
$$k_{11}(T) = k_{12}(T) = k_{22}(T) = 0,$$

و قانون کنترل بهینه بصورت زیر است:

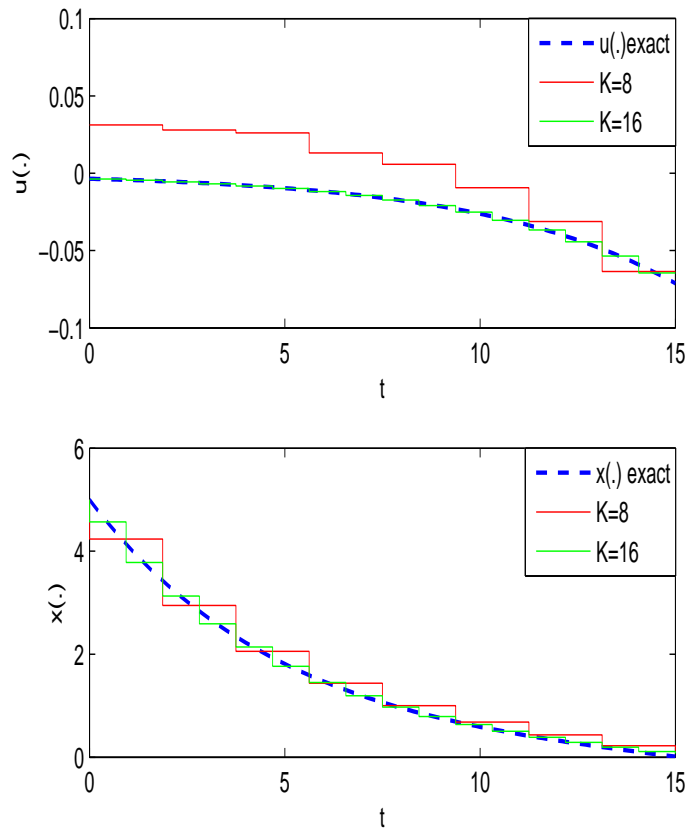
$$u(t) = -2[k_{12}(t) \quad k_{22}(t)]x(t).$$

منحنی‌های دقیق و تقریبی هار کنترل بهینه و مسیرهای متناظر آن در شکل ۷.۳ برای  $x(0) = [-4 \quad 4]^T$  و

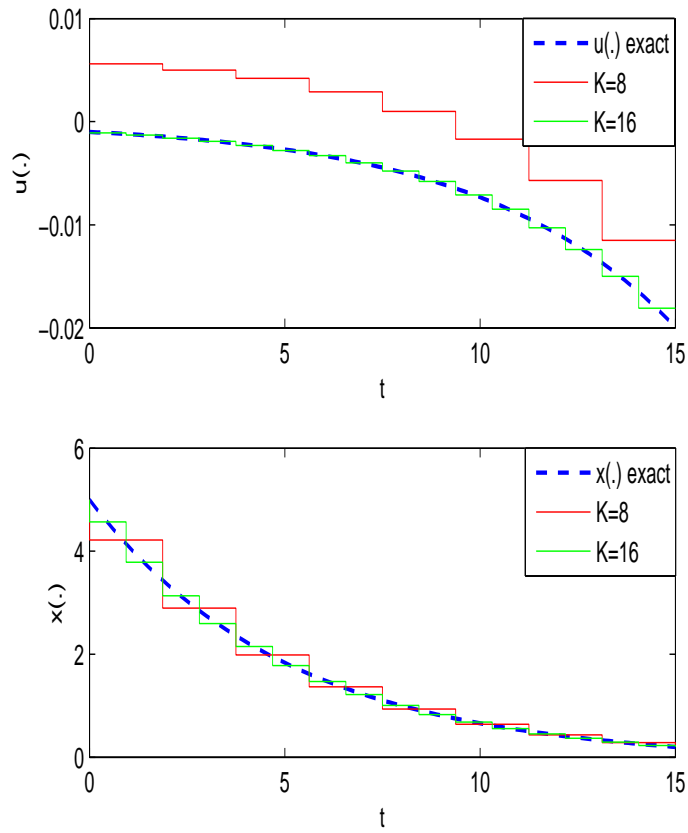
$T = 15$  نشان داده شده است.



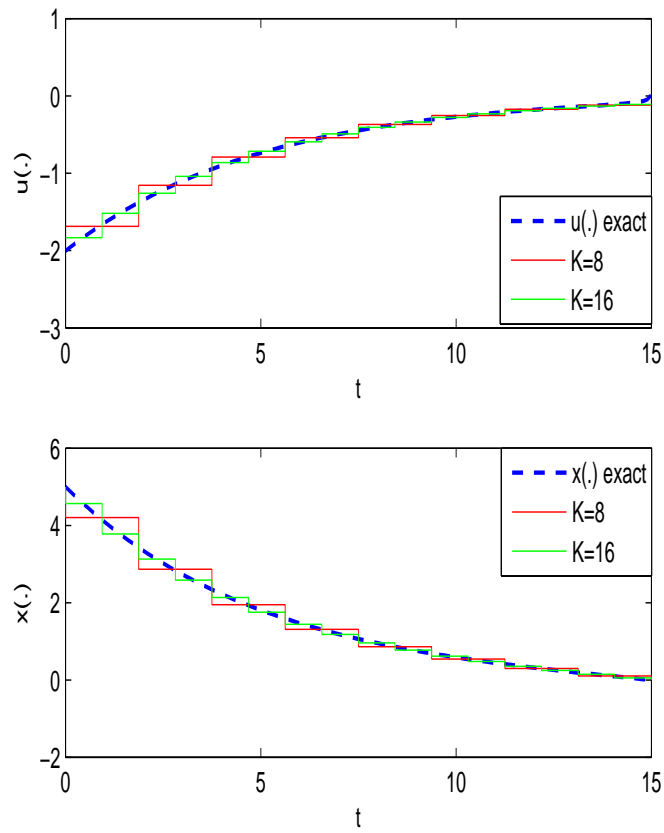
شکل ۱.۳: منحنی‌های کنترل و مسیر بهینه متناظر در حالت  $a = -0.2, H = 5$



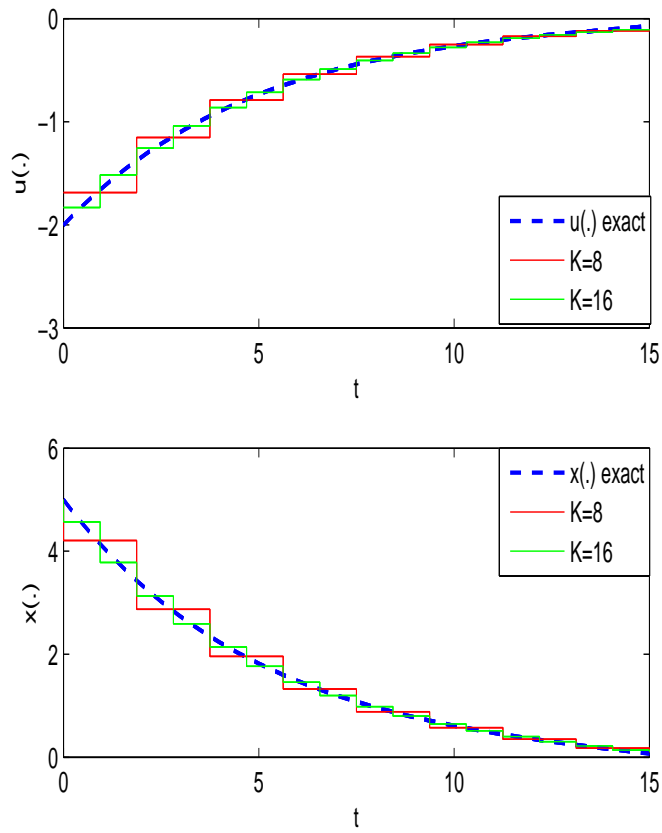
شکل ۲.۳: منحنی‌های کنترل و مسیر بهینه متناظر در حالت  $a = -0.2, H = 0.5$



شکل ۳.۳: منحنی‌های کنترل و مسیر بهینه متناظر در حالت  $a = -0.2$ ,  $H = 0.05$

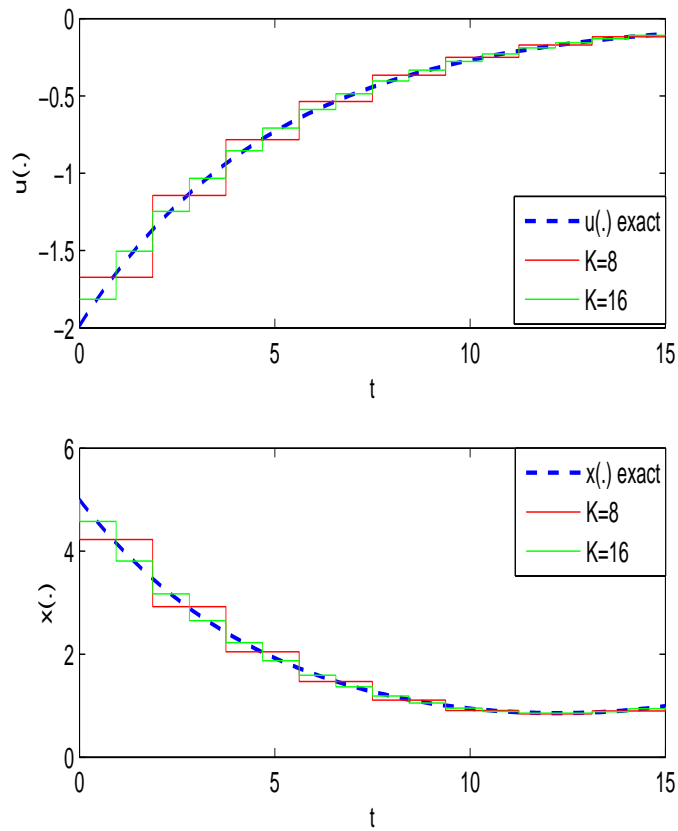


شکل ۴.۳: منحنی‌های کنترل و مسیر بهینه متناظر در حالت  $a = 0.2, H = 5$

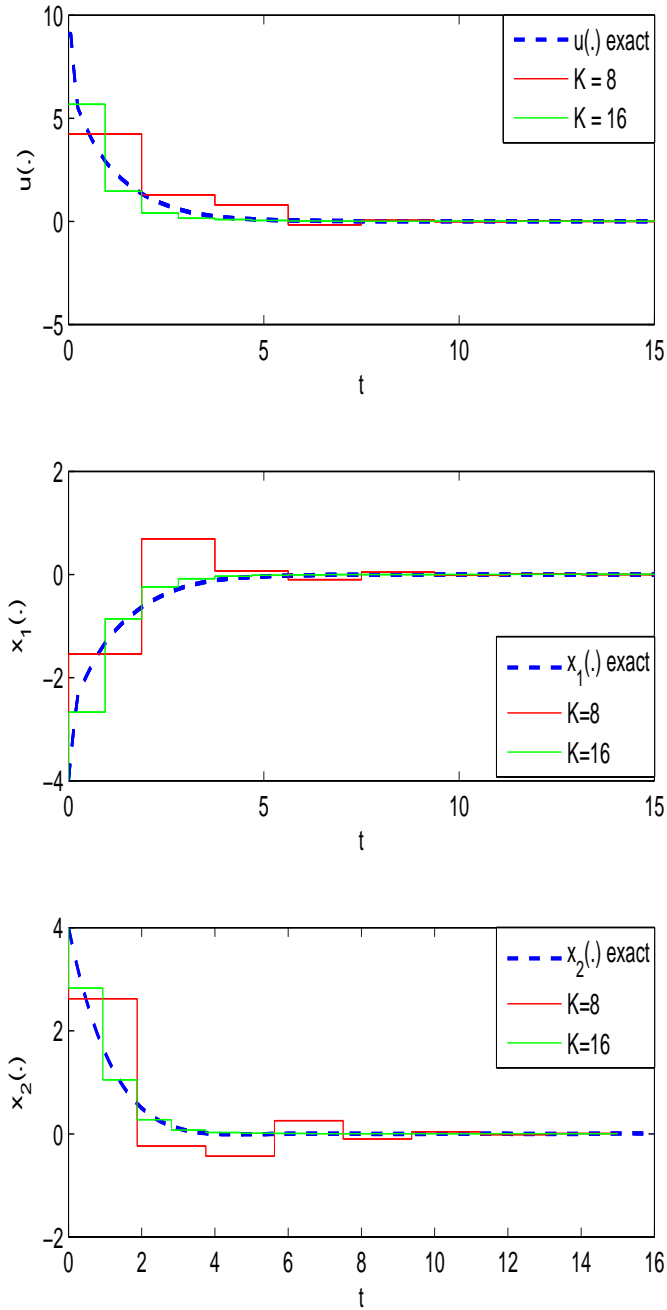


شکل ۵.۳: منحنی‌های کنترل و مسیر بهینه متناظر در حالت  $a = ۰/۲, H = ۰/۵$





شکل ۶.۳: منحنی‌های کنترل و مسیر بهینه متناظر در حالت  $a = 0.2, H = 0.05$



شکل ۷.۳: منحنی‌های بهینه کنترل و مسیرهای تحلیلی و تقریبی مثال ۲.۳.۳

## فصل ۴

حل مسائل کنترل بهینه زمانی پرتاب موشک به  
روش موجک هار

## ۱.۴ مقدمه

مسائل کنترل بهینه شامل رده وسیعی از مسائل بهینه سازی می‌باشند. این نوع مسائل در زمینه های مختلف علوم و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. بسیاری از مسائل کنترل بهینه تحت قیودی از متغیرهای حالت و کنترل می‌باشند. لذا حل اینگونه از مسائل سخت و حل آنالیزی آنها در بسیاری از موارد فاقد جواب می‌باشد. بنابراین روش‌های عددی در حل بسیاری از این مسائل مناسب مورد نیاز است. در حال حاضر مدل‌های عددی بسیاری برای مسائل کنترل بهینه در کتب مختلف موجود می‌باشد [۵۱] - [۳۷].

مسائل کنترل مینیمم زمان، یک رده‌ی مهم از مسائل کنترل بهینه است که در موضوعات مختلفی مورد استفاده قرار می‌گیرد. استفاده این رده از مسائل هم توسط ریاضی‌دانان و هم مهندسیین رشته های مختلف، نشان از جایگاه این مسائل در بین علوم دیگر است [۶۶] - [۵۲]. مشهورترین نوع مسائلی که در این خصوص مورد مطالعه قرار گرفته است سیستمهای کنترل زمانی است که هدف آن مینیمم سازی زمان حرکت یک شیء است.

برای مثال در صنایع هوافضا<sup>۱</sup> مینیمم سازی زمان پرواز در وسایل مورد نظر می‌باشد که این وسایل ممکن است راکت، هواپیما و شاتلهای فضایی باشند [۳۵] و [۴۵]-[۶۷].

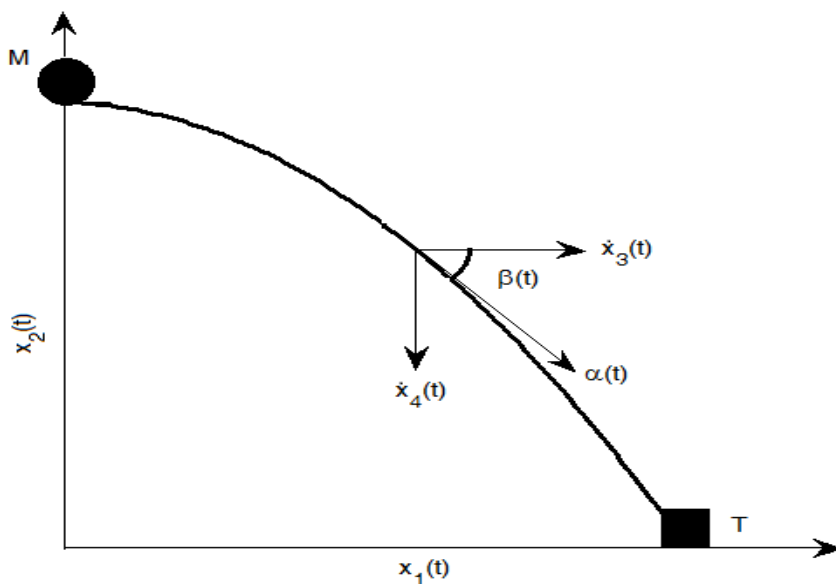
در این فصل با استفاده از روش موجک هار به حل مسائل کنترل بهینه‌ی زمانی حرکت راکت به سوی اهداف ثابت و متحرک می‌پردازیم. در این مدلسازی مساله، شتاب و زاویه پرتاب راکت به‌عنوان ورودی‌های کنترل می‌باشد و مینیمم سازی زمان پرواز مورد بررسی قرار می‌گیرد. زمان بهینه در مساله کنترل بهینه زمانی با بکارگیری یک روش بهینه سازی بر اساس موجک هار بدست خواهد آمد.

## ۲.۴ مساله کنترل بهینه زمانی پرتاب موشک

فرض کنید راکت  $M$  با نیروی جلوبرنده<sup>۲</sup>  $F = M\alpha(t)$  روی محور  $x_2(t)$  عمل می‌نماید. مطلوب است که  $M$  هدف  $T$  را در سه حالت مختلف مورد اصابت قرار می‌دهد. این هدف یا روی محور  $x_1(t)$  ثابت است یا در امتداد

<sup>۱</sup>Aerospace industries

<sup>۲</sup>Trust



شکل ۱.۴: نمایش برخورد موشک به هدف.

محور  $x_1(t)$  در حال حرکت و یا اینکه در امتداد دو محور  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  در حال حرکت می‌باشد. در این طرح هدف مینیمم سازی زمان پرواز راکت از لحظه پرتاب تا برخورد به هدف می‌باشد. شکل (۱.۴) شرح مساله را نمایش می‌دهد.

از لحاظ فیزیکی می‌توان حرکت راکت را بصورت زیر فرمول‌بندی نمود [۵۲]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_3(t) = \alpha(t) \cos \beta(t), \\ \dot{x}_4(t) = \alpha(t) \sin \beta(t) - g, \end{cases} \quad (1.4)$$

که در آن  $x_1(t)$ ،  $x_2(t)$ ،  $x_3(t)$ ،  $x_4(t)$ ،  $\alpha(t)$  و  $\beta(t)$  بترتیب موقعیت افقی، موقعیت عمودی، سرعت افقی، سرعت عمودی، شتاب راکت و زاویه پرتاب راکت می‌باشد و  $g$  شتاب گرانش زمین است. مساله کنترل بهینه زمانی در سیستم فوق، هدایت راکت از  $x_0 \in \mathbb{R}^4$  تا  $x_f \in \mathbb{R}^4$  در حداقل زمان می‌باشد. کنترل‌های مورد استفاده

در مساله  $\alpha(t)$  و  $\beta(t)$  است که در اینجا شتاب راکت ثابت در نظر گرفته می‌شود. بنابراین متغیرهای حالت و کنترل مساله بشکل زیر است:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad u_1(t) = \alpha(t), \quad u_2(t) = \beta(t).$$

با توجه به تعاریف بالا مساله کنترل بهینه زمانی حرکت راکت بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{minimize } \int_0^{t_f} dt, \quad (2.4)$$

subject to

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.4)$$

$$\dot{x}_2 = x_3, \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_3 = \alpha(t) \cos \beta(t), \quad (5.4)$$

$$\dot{x}_4 = \alpha(t) \sin \beta(t) - g, \quad (6.4)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \quad (7.4)$$

که در آن  $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))$ ،  $x_0$  مقادیر اولیه متغیرهای حالت و  $x_f$  مقادیر نهایی متغیرهای حالت است. همانطور که در فصل اول اشاره شد، مشتق متغیرهای حالت، متغیرهای کنترل و حالت بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\dot{x}_i(\tau_l) \approx C_i^T \Phi(\tau_l), \quad l = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, 4,$$

$$\beta(\tau_l) \approx C_\beta^T \Phi(\tau_l), \quad l = 1, \dots, K,$$

$$\alpha(\tau_l) \approx C_\alpha^T \Phi(\tau_l), \quad l = 1, \dots, K,$$

$$x_i(\tau_l) \approx C_i^T P \Phi(\tau_l) + x_i(0), \quad l = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, 4,$$

که در آن  $x_i(\circ)$  مقدار متغیر  $x_i$  در زمان  $\circ$  و  $K$  تعداد نقاط کالوکیشن است.  
به کمک روابط بالا مساله کنترل بهینه (۷.۴)–(۲.۴) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{minimize } t_f \quad (۸.۴)$$

subject to

$$C_1^T \Phi(\tau_l) \approx t_f (C_1^T P \Phi(\tau_l) + x_1(\circ)), \quad l = 1, 2, \dots, K, \quad (۹.۴)$$

$$C_2^T \Phi(\tau_l) \approx t_f (C_2^T P \Phi(\tau_l) + x_2(\circ)), \quad l = 1, 2, \dots, K, \quad (۱۰.۴)$$

$$C_3^T \Phi(\tau_l) \approx t_f ((C_3^T \Phi(\tau_l)) \cos(C_3^T \Phi(\tau_l))), \quad l = 1, 2, \dots, K, \quad (۱۱.۴)$$

$$C_4^T \Phi(\tau_l) \approx t_f ((C_4^T \Phi(\tau_l)) \sin(C_4^T \Phi(\tau_l)) - g), \quad l = 1, 2, \dots, K, \quad (۱۲.۴)$$

$$x_i(\circ) \approx x_i(\tau_1) - \frac{\dot{x}_i(\tau_1)}{2K}, \quad x_i(t_f) \approx x_i(\tau_K) + \frac{\dot{x}_i(\tau_K)}{2K}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (۱۳.۴)$$

که در آن  $x_i(\circ)$  و  $x_i(t_f)$  بترتیب مقادیر  $x_i$  در زمان  $\circ$  و  $t_f$  است. اکنون به کمک نرم افزار لینگو ۱۱، ضرایب  $\{C_\alpha, C_\beta, C_i; i = 1, 2, 3, 4\}$  زمان نهایی  $t_f$  و  $x_i(\circ)$  و  $x_i(t_f)$  را در مساله کنترل بهینه (۱۳.۴)–(۸.۴) محاسبه می‌کنیم.

## ۳.۴ مثال‌های عددی

در این بخش برای هر حالت مثال عددی ارائه شده است [۵۲].

مساله کنترل بهینه (۷.۴) – (۲.۴) را با شرایط مرزی زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1(\circ) = x_2(\circ) = x_3(\circ) = x_4(t_f) = \circ, & x_2(\circ) = 1\circ, \\ x_1(t_f) = 1\circ\circ, & x_3(t_f) = x_4(t_f) = \text{نامعلوم}. \end{cases}$$

مثال ۱.۳.۴. در این حالت مساله را برای حالت هدف ثابت با در نظر گرفتن شرایط مرزی بالا حل می‌کنیم. بعلاوه

$$\text{داریم: } \alpha(t) = 100.$$

پس از بازنویسی مساله بر حسب موجک هار، با جایگذاری  $x_i(0)$  در قیدهای مربوطه، قیدهای نهایی (۱۳.۴)

بصورت زیر جایگزین می‌شود:

$$x_1(t_f) \approx 100 \approx x_1(\tau_K) + \frac{\dot{x}_1(\tau_K)}{2K},$$

$$x_2(t_f) \approx 0 \approx x_2(\tau_K) + \frac{\dot{x}_2(\tau_K)}{2K},$$

$$x_3(t_f) \approx x_3(\tau_K) + \frac{\dot{x}_3(\tau_K)}{2K},$$

$$x_4(t_f) \approx x_4(\tau_K) + \frac{\dot{x}_4(\tau_K)}{2K}.$$

با استفاده از تقریب موجک، زمان بهینه  $t_f$  برای دو حالت ۸ و  $K = 4$  برابر است با  $1/414$ .

جواب بهینه تحلیلی مساله بصورت زیر است:

$$\beta(t) = -0.11, \quad t_f = 1/414,$$

$$x_1(t) = 49.999 t^2, \quad x_2(t) = -5 t^2 + 10,$$

$$x_3(t) = 100 t, \quad x_4(t) = -10 t.$$

شکل (۲.۴) مسیرهای دقیق و تقریبی هار را برای دو حالت ۸ و  $K = 4$  نشان می‌دهد.

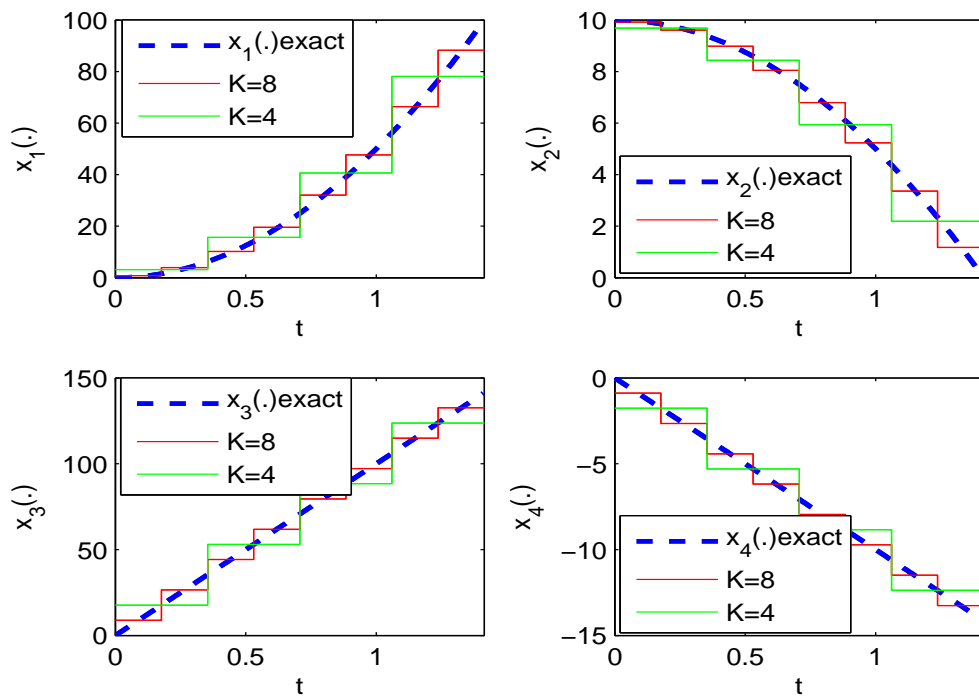
مثال ۲.۳.۴. در اینجا هدف در امتداد محور  $x_1$  در حال حرکت می‌باشد، مسیر هدف بصورت زیر است:

$$x_1(t) = 100 + 0.5 t^2,$$

$$x_2(t) = 0.$$

با جایگذاری  $x_i(0)$  در قیدها، برای قیدهای نهایی (۱۳.۴) داریم:





شکل ۲.۴: مسیرهای بهینه دقیق و تقریبی مثال ۱.۳.۴

$$x_1(t_f) \approx 100 + 0.5t_f^2 \approx x_1(\tau_K) + \frac{\dot{x}_1(\tau_K)}{2K},$$

$$x_2(t_f) \approx 0 \approx x_2(\tau_K) + \frac{\dot{x}_2(\tau_K)}{2K},$$

$$x_3(t_f) \approx x_3(\tau_K) + \frac{\dot{x}_3(\tau_K)}{2K},$$

$$x_4(t_f) \approx x_4(\tau_K) + \frac{\dot{x}_4(\tau_K)}{2K}.$$

با استفاده از تقریب موجک، زمان بهینه  $t_f$  برای دو حالت ۸ و ۴  $K = 4$  برابر است با ۱/۴۲۱. کنترل و

مسیرهای بهینه تحلیلی بصورت زیر است:

$$\beta(t) = -0.06, \quad t_f = 1/421,$$

$$x_1(t) = 50 t^2, \quad x_2(t) = -4/957 t^2 + 10,$$

$$x_3(t) = 99/999 t, \quad x_4(t) = -9/914 t.$$

نمودارهای (۳.۴) نشان‌دهنده مسیرهای دقیق و تقریبی برای دو حالت ۸ و ۴  $K = 4$  است.

**مثال ۳.۳.۴.** مشابه مثال (۲.۳.۴) است، با این تفاوت که هدف در امتداد محور  $x_2$  نیز در حال حرکت است. مسیر

هدف بصورت زیر می‌باشد:

$$x_1(t) = 100 + 0.5t^2,$$

$$x_2(t) = t^2 + 5.$$

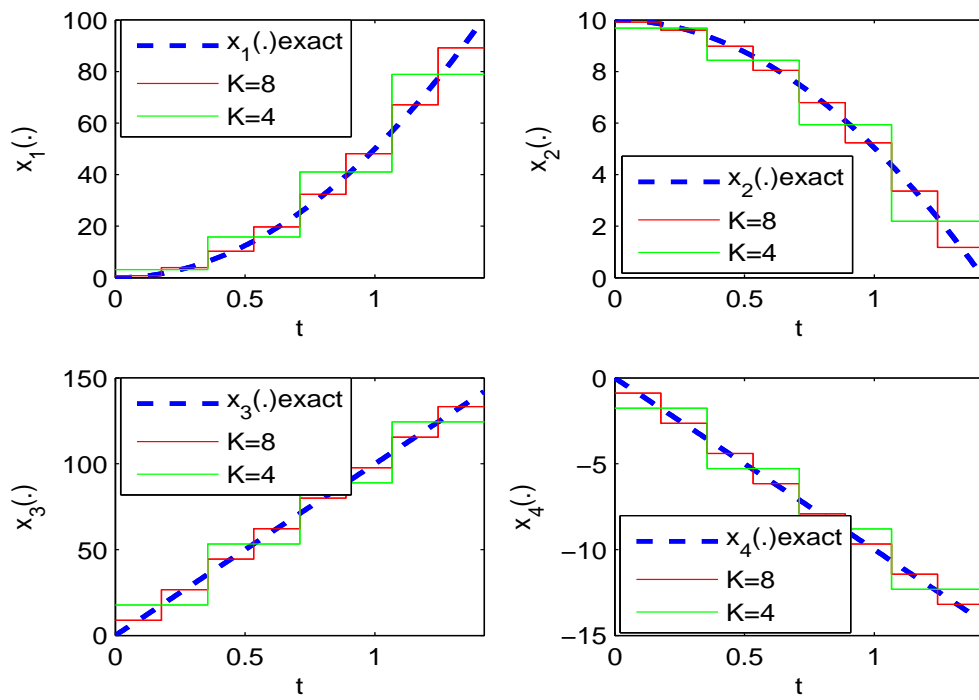
با جایگذاری  $x_i(0)$  در قیدها، برای قیدهای نهایی (۱۳.۴) داریم:

$$x_1(t_f) \approx 100 + 0.5t_f^2 \approx x_1(\tau_K) + \frac{\dot{x}_1(\tau_K)}{2K},$$

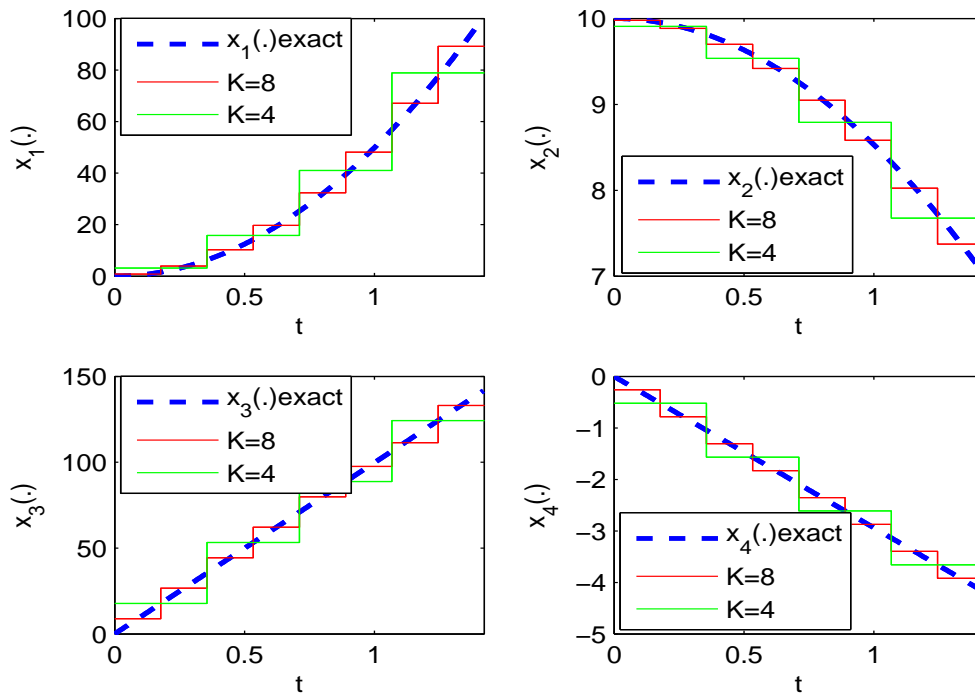
$$x_2(t_f) \approx t_f^2 + 5 \approx x_2(\tau_K) + \frac{\dot{x}_2(\tau_K)}{2K},$$

$$x_3(t_f) \approx x_3(\tau_K) + \frac{\dot{x}_3(\tau_K)}{2K},$$

$$x_4(t_f) \approx x_4(\tau_K) + \frac{\dot{x}_4(\tau_K)}{2K}.$$



شکل ۳.۴: مسیرهای بهینه دقیق و تقریبی مثال ۲.۳.۴



شکل ۴.۴: مسیرهای بهینه دقیق و تقریبی مثال ۳.۳.۴

با استفاده از تقریب موجک، زمان بهینه  $t_f$  برای دو حالت ۸ و  $K = 4$  برابر است با  $۱/۴۲۳$ .

جواب بهینه تحلیلی مساله بصورت زیر است:

$$\beta(t) = ۳/۹۴, t_f = ۱/۴۲۳,$$

$$x_1(t) = ۴۹/۸۸۱ t^۲, x_2(t) = -۱/۴۶۹ t^۲ + ۱۰,$$

$$x_3(t) = ۹۹/۷۶۳ t, x_4(t) = -۲/۹۳۸ t.$$

شکل (۴.۴) نشان‌دهنده مسیرهای بهینه دقیق و تقریبی موجک هار را برای دو حالت ۸ و  $K = 4$  است. همانطور

که ملاحظه می‌کنید، روش موجک تقریب بسیار خوبی ارائه می‌دهد. مسیرهای تقریبی با افزایش تعداد نقاط

کالوکیشن، به مسیر تحلیلی نزدیکتر شده است.

## فصل ۵

### حل سیستم‌های ردیاب خطی به روش موجک هار

## ۱.۵ مقدمه

در این فصل از پایان نامه نتایج بدست آمده در سیستم‌های تنظیم‌کننده‌های خطی را تعمیم داده تا مساله ردیابی<sup>۱</sup> را نیز در برگیرند، بدین معنی که مقدار مطلوب بردار حالت، مبدا مختصات نمی‌باشد. در انتها با ارائه چند مثال عددی [۳۵]، نتایج این روش با جواب تحلیلی مقایسه می‌شود که تاییدی بر دقت خوب روش تقریبی موجک هار است.

## ۲.۵ سیستم‌های ردیاب خطی

معادله حالت را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

و تابع هدفی که باید حداقل شود عبارتست از:

$$J = \frac{1}{\gamma} [x(t_f) - r(t_f)]^T H [x(t_f) - r(t_f)] + \frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^{t_f} \{ [x(t) - r(t)]^T Q(t) [x(t) - r(t)] + u^T(t) R(t) u(t) \} dt,$$

$$\triangleq \frac{1}{\gamma} \|x(t_f) - r(t_f)\|_H^2 + \frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^{t_f} \{ \|x(t) - r(t)\|_{Q(t)}^2 + \|u(t)\|_{R(t)}^2 \} dt.$$

که  $r(t)$  مقدار مطلوب بردار حالت می‌باشد. زمان نهایی  $t_f$  ثابت بوده،  $x(t_f)$  آزاد یا غیرمعین است و حالت‌ها و کنترل‌ها محدود نمی‌باشند،  $H$  و  $Q$  ماتریس‌های حقیقی، متقارن، نیمه معین مثبت و  $R$  ماتریسی حقیقی، متقارن و معین مثبت است. هامیلتونین سیستم بصورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{\gamma} \|x(t) - r(t)\|_{Q(t)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|u(t)\|_{R(t)}^2 + p^T(t) A(t) x(t) + p^T(t) B(t) u(t).$$

<sup>۱</sup>Tracking problem

معادلات کمک حالت عبارتند از:

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -Q(t)x(t) - A^T p(t) + Q(t)r(t),$$

و روابطی که باید برقرار شود، بصورت زیر است:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = -R(t)u(t) + B^T(t)p(t) = 0,$$

بنابراین

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p(t). \quad (1.5)$$

با جایگذاری (۱.۵) در معادلات حالت، معادلات حالت و کمک حالت زیر ایجاد می‌گردند:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q(t)r(t) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

این معادلات خطی متغیر با زمان هستند، پس همگن نمی‌باشند. پاسخ (۲.۵) بصورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ p(t_f) \end{bmatrix} = \phi(t_f, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t_f} \phi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} 0 \\ Q(\tau)r(\tau) \end{bmatrix} d\tau,$$

که در آن  $\phi$  ماتریس انتقال سیستم (۲.۵) می‌باشد. اگر  $\phi$  به اجزایی تقسیم شده و انتگرال موجود در رابطه توسط

بردار  $1 \times 2n$  بعدی

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

جایگزین شود، این معادلات می‌توانند بصورت زیر نوشته شوند:

$$x(t_f) = \phi_{11}(t_f, t)x(t) + \phi_{12}(t_f, t)p(t) + f_1(t), \quad (3.5)$$

$$p(t_f) = \phi_{21}(t_f, t)x(t) + \phi_{22}(t_f, t)p(t) + f_2(t). \quad (4.5)$$

شرایط حدی عبارتند از:

$$p(t_f) = Hx(t_f) - Hr(t_f). \quad (۵.۵)$$

با جایگذاری  $p(t_f)$  از سمت راست معادله (۵.۵) در معادله (۴.۵) و سپس جایگزینی  $x(t_f)$  از معادله (۳.۵) در معادله (۴.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} H[\phi_{11}(t_f, t)x(t) + \phi_{12}(t_f, t)p(t) + f_1(t)] - Hr(t_f) = \\ \phi_{21}(t_f, t)x(t) + \phi_{22}(t_f, t)p(t) + f_2(t). \end{aligned}$$

با حل آن برای  $p(t)$  داریم:

$$\begin{aligned} p(t) &= [\phi_{22}(t_f, t) - H\phi_{12}(t_f, t)]^{-1} [H\phi_{11}(t_f, t) - \phi_{21}(t_f, t)]x(t) \\ &+ [\phi_{22}(t_f, t) - H\phi_{12}(t_f, t)]^{-1} [Hf_1(t) - Hr(t_f) - f_2(t)], \\ &\triangleq K(t)x(t) + s(t). \end{aligned} \quad (۶.۵)$$

با دقت روی معادله‌ی (۶.۵)، تعاریف  $K(t)$  و  $s(t)$  مشخص می‌شوند، بنابراین قانون کنترل بهینه بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t) - R^{-1}(t)B^T(t)s(t), \\ &\triangleq F(t)x(t) + v(t). \end{aligned} \quad (۷.۵)$$

که در آن  $F(t)$  ماتریس تقویت‌کننده بازخور و  $v(t)$  سیگنال فرمان می‌باشد. توجه شود که  $v(t)$  به پارامترهای سیستم و سیگنال مبنای  $r(t)$  بستگی دارد. باید دقت کرد که همچون مساله تنظیم، باید قادر باشیم تمام حالت‌ها را به‌منظور طرح قانون کنترل بهینه اندازه‌گیری کنیم. اکنون با مساله تعیین ماتریس انتقال مواجه هستیم. لیکن چون گذشته راه محاسباتی ساده‌تری وجود دارد. با معادله زیر شروع می‌کنیم.

$$p(t) = K(t)x(t) + s(t). \quad (۸.۵)$$



با مشتق‌گیری از هر دو طرف نسبت به  $t$  داریم:

$$\dot{p}(t) = \dot{K}(t)x(t) + K(t)\dot{x}(t) + \dot{s}(t). \quad (9.5)$$

با جایگزینی برای  $\dot{p}(t)$  و  $\dot{x}(t)$  از معادله‌ی (۲.۵) و با استفاده از (۸.۵) برای حذف  $p(t)$  داریم:

$$\begin{aligned} & \left[ \dot{K}(t) + Q(t) + K(t)A(t) + A^T(t)K(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \right] x(t) \\ & + \left[ \dot{s}(t) + A^T(t)s(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)s(t) - Q(t)r(t) \right] = 0. \end{aligned}$$

چون این رابطه باید برای تمام  $x(t)$  و  $r(t)$  صدق کند، لذا

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t), \quad (10.5)$$

و

$$\dot{s}(t) = - \left[ A^T(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \right] s(t) + Q(t)r(t), \quad (11.5)$$

که در آن  $K$  متقارن است و  $s$  بردار  $1 \times n$  است، در نتیجه معادلات (۱۰.۵) و (۱۱.۵) تشکیل  $\left( n + \frac{n(n+1)}{2} \right)$  معادله دیفرانسیل می‌دهند.

توجه شود که معادله (۱۰.۵) مشابه معادله ریکاتی است که در مساله تنظیم کننده خطی بدست آوردیم. برای

بدست آوردن شرایط حدی از معادلات (۶.۵) و (۵.۵) داریم:

$$\begin{aligned} p(t_f) &= Hx(t_f) - Hr(t_f), \\ &= K(t_f)x(t_f) + s(t_f). \end{aligned}$$

چون این معادلات باید به ازای تمام  $x(t_f)$  و  $r(t_f)$  صدق نماید، بنابراین شرایط حدی عبارتند از:

$$K(t_f) = H, \quad (۱۲.۵)$$

$$s(t_f) = -Hr(t_f). \quad (۱۳.۵)$$

حل تحلیلی مساله‌ی ردیاب خطی بار محاسباتی بالایی دارد. به‌عنوان مثال محاسبه‌ی ماتریس انتقال و یا  $R^{-1}$  در مسائل با بعد بالا دشوار است. از اینرو از روش‌های عددی جایگزین استفاده می‌کنیم. در فصل اول حل مسائل کنترل بهینه را به روش موجک هار توضیح دادیم. در پایان نیز نتایج حاصل از این روش تقریبی را در دو مثال نشان می‌دهیم.

### ۳.۵ مثال‌های عددی

در اینجا دو مثال عددی از این نوع سیستم ارائه شده است. از روی نمودارهای کنترل و مسیر تحلیلی و تقریبی نتایج را بررسی می‌کنیم. منحنی‌های تقریبی موجک برای دو حالت ۱۶ و  $K = ۸$  رسم شده است.

#### مثال ۱.۳.۵. سیستم

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = ۲x_1(t) - x_2(t) + u(t),$$

باید چنان کنترل شود که تابعی معیار زیر را مینیمم کند.

$$J = [x_1(T) - ۱]^۲ + \int_0^T [x_1(t) - ۱]^۲ + ۰.۰۰۲۵u^۲(t) dt.$$

زمان نهایی  $T$  معین بوده و  $x(T)$  آزاد یا غیرمعین است و حالت‌ها و کنترل محدود نمی‌باشند. قانون کنترل بهینه باید بدست آید. تابعی معیار نشان می‌دهد که حالت  $x_1$  باید بدون مصرف نیروی کنترل زیادی به ۱ نزدیک شود.

پارامترهای بکارگرفته شده در این مساله ردیاب خطی بصورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \circ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} ۲ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} = H,$$

$$R = \circ / \circ \circ \circ \circ \circ, \quad r(t) = \begin{bmatrix} ۱ \\ \circ \end{bmatrix}.$$

معادلات ریگاتی و معادلات دیفرانسیل برای  $s$  از معادلات (۱۰.۵) و (۱۱.۵) با نتایج زیر بدست می‌آیند.

$$\dot{k}_{۱۱}(t) = ۲[۱ \circ \circ k_{۱۲}^{\vee}(t) - ۲k_{۱۲}(t) - ۱],$$

$$\dot{k}_{۱۲}(t) = ۲ \circ \circ k_{۱۲}(t)k_{۲۲}(t) - k_{۱۱}(t) + k_{۱۲}(t) - ۲k_{۲۲}(t),$$

$$\dot{k}_{۲۲}(t) = ۲ \circ \circ k_{۲۲}^{\vee}(t) - ۲k_{۱۲}(t) + ۲k_{۲۲}(t),$$

$$\dot{s}_1(t) = ۲[۱ \circ \circ k_{۱۲}(t) - ۱]s_2(t) + ۲,$$

$$\dot{s}_2(t) = -s_1(t) + [۱ + ۲ \circ \circ k_{۲۲}(t)]s_2(t).$$

و شرایط حدی از معادلات (۱۲.۵) و (۱۳.۵) عبارتند از:

$$K(T) = \begin{bmatrix} ۲ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \quad s(T) = \begin{bmatrix} -۲ \\ \circ \end{bmatrix}.$$

قانون کنترل بهینه از معادله (۷.۵) حاصل شده و عبارتست از:

$$u(t) = -۲ \circ \circ [k_{۱۲}(t)x_1(t) + k_{۲۲}(t)x_2(t) + s_2(t)].$$

شکل ۱.۵ منحنی های تحلیلی و تقریبی کنترل و مسیره‌های متناظر این مثال را برای  $x(\circ) = \circ$  و  $T = ۱۵$

نشان می‌دهد.

**مثال ۲.۳.۵.** سیستمی که باید کنترل شود همانند مثال قبل بوده، لیکن تابعی معیار بصورت زیر است:

$$J = \int_{\circ}^T [x_1(t) - \circ / ۲t]^2 + \circ / \circ ۲۵ u^2(t) dt.$$

$T$  مشخص بوده و  $x(T)$  آزاد یا غیر معین است و کنترل‌های قابل قبول محدود نمی‌باشند. تابع کنترل بهینه باید تعیین شود. در این مثال هدف نزدیک کردن حالت  $x_1$  به تابع شیب  $r_1(t) = 0.2t$  بدون مصرف نیروی کنترل زیادی می‌باشد. با جایگزینی

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R = 0.05, r(t) = \begin{bmatrix} 0.2t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

از (۱۰.۵) و (۱۱.۵) معادلات دیفرانسیل زیر بدست می‌آید:

$$\dot{k}_{11}(t) = 2 \cdot k_{12}^*(t) - 4k_{12}(t) - 2,$$

$$\dot{k}_{12}(t) = 2 \cdot k_{12}(t)k_{22}(t) - k_{11}(t) + k_{12}(t) - 2k_{22}(t),$$

$$\dot{k}_{22}(t) = 2 \cdot k_{22}^*(t) - 2k_{12}(t) + 2k_{22}(t),$$

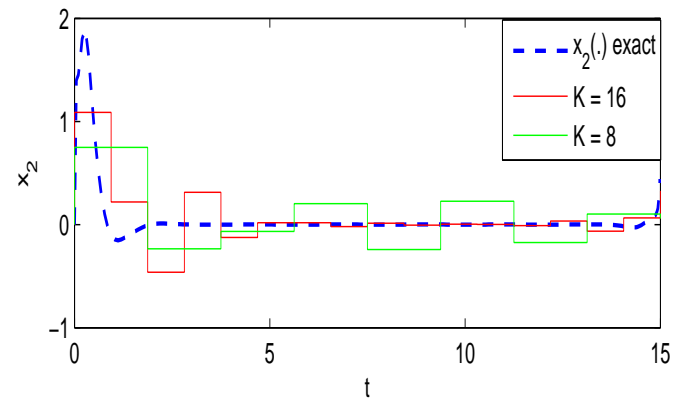
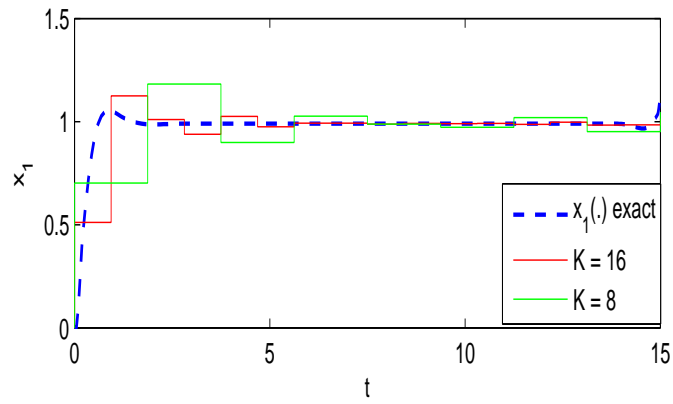
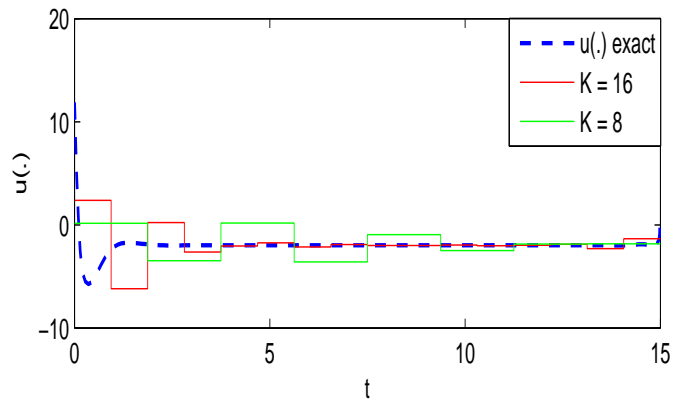
$$\dot{s}_1(t) = 2[1 \cdot k_{12}(t) - 1]s_2(t) + 0.4t,$$

$$\dot{s}_2(t) = -s_1(t) + [2 \cdot k_{22}(t) + 1]s_2(t).$$

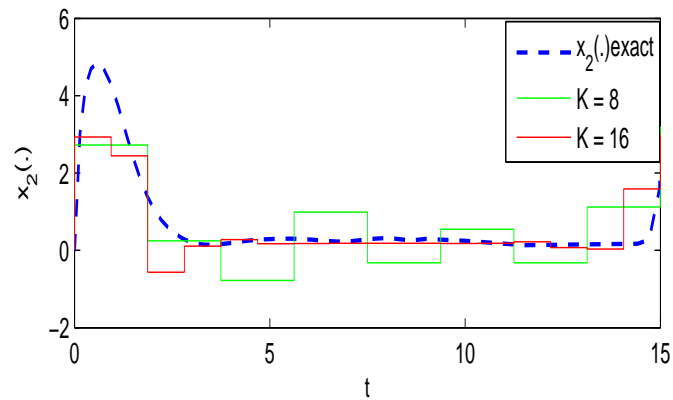
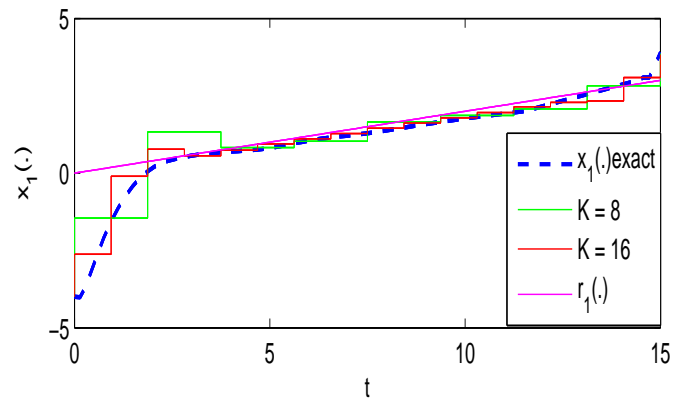
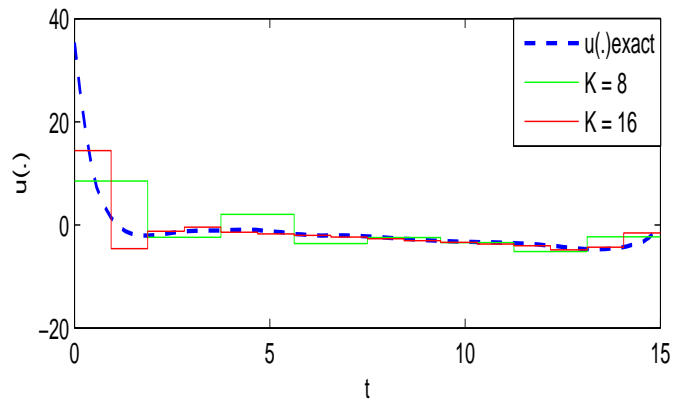
شرایط حدی برای این پنج معادله  $K(T) = 0$  و  $s(T) = 0$  می‌باشند. از معادله (۷.۵) تابع کنترل بهینه زیر را داریم

$$u(t) = -2 \cdot [k_{12}(t)x_1(t) + k_{22}(t)x_2(t) + s_2(t)].$$

منحنی‌های تحلیلی و تقریبی کنترل بهینه و مسیرهای متناظر برای  $x(0) = [-4, 0]^T$  و  $T = 15$  در شکل (۲.۵) مشاهده می‌کنید. همانطور که نمودارها نشان می‌دهد با افزایش تعداد نقاط کالوکیشن، رفتار نمودارهای تقریبی به نمودارهای تحلیلی متناظر نزدیکتر شده است.



شکل ۱.۵: منحنی‌های کنترل و مسیرهای بهینه تحلیلی و تقریبی مثال ۱.۳.۵



شکل ۲.۵: منحنی‌های کنترل و مسیرهای بهینه تحلیلی و تقریبی مثال ۲.۳.۵

## نتایج و پیشنهاداتی برای کارهای آتی

همانطور که دیدیم در حل مسائل کنترل بهینه شامل معادلات دیفرانسیل معمولی به روش موجک هار پس از تبدیل بازه‌ی زمانی مساله به بازه  $(0, 1]$ ، کلیه‌ی معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری تبدیل می‌شود. برای تقریب توابع کنترل، مسیر و مشتق مسیر از ماتریس هار، ماتریس معکوس هار و ماتریس عملگر انتگرالگیری هار استفاده می‌شود. این روش مزایایی دارد از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ماتریس هار و معکوس آن درایه‌های  $\infty$  زیادی دارند. این خاصیت باعث سادگی و کوتاهی محاسبات حتی در ماتریس‌های با ابعاد بالا می‌شود.

- جواب تقریبی با افزایش تعداد نقاط کالوکیشن به جواب بهینه نزدیکتر می‌شود.

- با توجه به ثابت بودن مقدار توابع هار در زیر بازه‌های تقسیم شده پیچیدگی محاسبات بسیار کاهش می‌یابد.

برای کارهای آتی می‌توان این روش را در حل مسائل کنترل بهینه شامل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

و یا شامل معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر پیشنهاد داد.

## مراجع و مأخذ

- [1] D. N. Burghes, A. Graham, ( 1980), ” **Introduction to Control Theory, Including Optimal Control**”, E. Horwood, Halsted Press: New Yourk.
- [2] R. S. Stankovic , B. J. Falkowski, (2003), ”The Haar wavelet transform: its status and achievements”, **Computers and Electrical Engineering**, 29, 25-44.
- [3] R. T. Lynch, J. J. Reis, (1976), **Haar transform image coding**, ”in: Proceeding National Telecommun”, Conf, Dallas, pp.44.3-1-44.3.
- [4] H. R. Marzban, M. Razaghi, (2010), ” Rationalized Haar approach for nonlinear constrained optimal control problems”, **Applied Mathematical Modelling**, 34, 174-183.
- [5] R. Dai, J. E. Cochran, (2009), ”Wavelet collocation method for optimal control problems”, **Journal of Optimization Theory and Applications**, 143, 265–278.
- [6] M. Ohkita, Y. Kobayashi, (1986), ”An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations”, **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, 9, 853-862.
- [7] M. Razzaghi, Y. Ordokhani, (2001), ”Solution of differential equations via rationalized Haar functions”, **Mathematics and Computers in Simulation**, 56, 235-246.



- [8] C. F. Chen, C. H. Hsio, (1997), "Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems", **Control Theory and Applications**, 144, 87-94.
- [9] J. Blot, (2009), "Infinite-horizon Pontryagin principles without invertibility", **Journal of Nonlinear and Convex Analysis**, 10, 177-189.
- [10] J. Blot, P. Cartigny, (2000), "Optimality in infinite-horizon variational problems under sign conditions", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 106, 411-419.
- [11] S. Effati, A. R. Nazemi, (2007), "A new approach for asymptotic stability of the nonlinear ordinary differential equations", **Journal of Applied Mathematics and Computing**, 25, 231-244.
- [12] S. Effati, A.V. Kamyad, R. A. Kamyabi-Gol, (2000), "On infinite-horizon optimal control problems", **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 19, 269-278.
- [13] H. Jasso-Fuentes, (2008), "O. Hernandez-Lerma, Characterizations of overtaking optimality for controlled diffusion processes", **Applied Mathematics and Optimization**, 57, 349-369.
- [14] A. Leizarowitz, (1985), "Infinite horizon autonomous systems with unbounded cost", **Applied Mathematics and Optimization**, 13, 19-43.
- [15] B. Mordukhovich, (1990), "Minimax design for a class of distributed parameter systems", **Automatic Remote Control**, 50, 1333-1340.
- [16] B. Mordukhovich, I. Shvartsman, (2004), "Optimization and feedback control of constrained parabolic systems under uncertain perturbations. In: Optimal Con-

- trol, Stabilization and Nonsmooth Analysis”, **Lecture Notes in Control and Information Sciences**, Springer, Berlin, 121–132.
- [17] S. Pickenhain , V. Lykina, (2006), ” Sufficiency conditions for infinite horizon optimal control problems. In: Recent Advances in Optimization”, **Proceedings of the 12th French-German-Spanish Conference on Optimization**, Avignon, Springer, Berlin, 217–232.
- [18] S. Pickenhain, V. Lykina , M. Wagner, (2008), ”On the lower semicontinuity of functionals involving Lebesgue or improper Riemann integrals in infinite horizon optimal control problems”, **Control and Cybernetics**, 37, 451–468.
- [19] T. Prieto-Rumeau , O. Hernandez-Lerma, (2005), ”Bias and overtaking equilibria for zero-sum continuous-time Markov games” , **Mathematical Methods of Operations Research**, 61, 437–454.
- [20] A. Rapaport , P. Cartigny, (2004), ”Turnpike theorems by a value function approach”, **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, 10, 123–141.
- [21] A. Rapaport , P. Cartigny, (2007), ” Nonturnpike optimal solutions and their approximations in infinite horizon”, **Journal of Optimization Theory and Applications** , 134, 1–14.
- [22] A. J. Zaslavski, (2006), ”**Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control**”, Springer, New York .
- [23] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, (1971), ”**Linear Optimal Control. Prentice-Hall**”, Englewood Cliffs.
- [24] A. Leizarowitz, (1986), ”Tracking nonperiodic trajectories with the overtaking criterion”, **Applied Mathematics and Optimization** , 14, 155–171.

- [25] D. Gale, (1967), " On optimal development in a multi-sector economy", **The Review of Economic Studies**, 34, 1–18.
- [26] V. L. Makarov, A. M. Rubinov, (1977), "**Mathematical Theory of Economic Dynamics and Equilibria**", Springer, Berlin.
- [27] A. J. Zaslavski, (2007), "Turnpike results for a discrete-time optimal control system arising in economic dynamics", **Nonlinear Analysis**, 67, 2024–2049.
- [28] A. J. Zaslavski, (2009), "Two turnpike results for a discrete-time optimal control systems", **Nonlinear Analysis**, 71, 902–909.
- [29] S. Aubry, P. Y. Le Daeron, (1983), "The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions: I. Exact results for the ground-states", **Physica D**, 8, 381–422.
- [30] A. J. Zaslavski, (1987), "Ground states in Frenkel-Kontorova model", **Mathematics of the USSR-Izvestiya**, 29, 323–354.
- [31] B. D. Coleman, M. Marcus, V. J. Mizel, (1992), "On the thermodynamics of periodic phases", **Archive for Rational Mechanics and Analysis** , 117, 321–347.
- [32] A. Leizarowitz, V. J. Mizel, (1989), "One dimensional infinite horizon variational problems arising in continuum mechanics", **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, 106, 161-194.
- [33] M. Marcus, A. J. Zaslavski, (1999), "The structure of extremals of a class of second order variational problems", **Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire**, 16, 593-629.
- [34] D. Garg, W. Hager, A. Rao, (2011), "Pseudospectral methods for solving infinite-horizon optimal control problems", **Automatica**, 47, 829–837.

- [35] D. E. Kirk, (1970), "**Optimal Control Theory: An Introduction**", Therapy, Prentice Hall, New Jersey, Englewood Cliffs.
- [36] R. E. Kalman, (1960), "Contributions to the Theory of Optimal Control", **Bol. Soc. Mat. Mex**, 102-119.
- [37] V. M. Aleksandrov, (2000), "Numerical solution for a linear optimal control problem", **Fundamental and Applied Mathematics**, 6, 33-42.
- [38] M. Athansand, P. L. Fabll, (1966), "**Optimal Control, An Introduction to the Theory and Its Applications**", McGraw-HiU, New York, N.Y, 102.
- [39] J. Betts, (1998), " Survey of numerical methods for trajectory optimization ", **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, 21, 193-207.
- [40] G. N. Elnagar, (1997), "State-control spectral Chebyshev parametrization for linearly constrained quadratic optimal control problems", **Journal of Applied Mathematics and Computing**, 79, 19-40.
- [41] H. P. Hua, (2000), "Numerical solution of optimal control problems", **Optimal Control Applications and Methods**, 21, 233-241.
- [42] H. Jaddu, E. Shimemura, (1999), "Computational method based on state parameterization for solving constrained nonlinear optimal control problems", **International Journal of Systems Science**, 30, 275-282.
- [43] G. Leitmann, (1962), "**Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems**", Academic Press, Inc, New York, N.Y.
- [44] F. L. Lewis, (1986), "**Optimal Control**", John Wiley and Sons, New York, N.Y.

- [45] Y. Liu, S. Ito, H. W. J. Lee, K. L. Teo, (2001), "Semi-infinite programming approach to continuously-constrained linear-quadratic optimal control problems", **Journal of Optimization Theory and Applications** , 108, 617-632.
- [46] Y. Liu, K. L. Teo, S. Y. Wu, (2004), "A new quadratic semi-infinite programming algorithm based on dual parametrization", **Journal of Global Optimization**, 29, 401-413.
- [47] C. P. Neuman, A. Sen, (1973), "A suboptimal control algorithm for constrained problems using cubic splines", **Automatica**, 9, 601-613.
- [48] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, (1962), "**The Mathematical Theory of Optimal Processes**", Interscience Publishers, Inc, New York, N.Y.
- [49] K. L. Teo, L. S. Jennings, H. W. J. Lee, V. Rehbock, (1999), "The control parametrization enhancing transform for constrained optimal control problems", **Journal of the Australian Mathematical Society, Series B**, 40, 314-335.
- [50] J. Vlassenbroeck, R. V. Dooren, (1998), "A Chebyshev technique for solving non-linear optimal control problems", **IEEE Transactions on Automatic Control** , 33, 333-340.
- [51] C. Z. Wu, K. L. Teo, Yi Zhao, (2008), "Numerical method for a class of optimal control problems subject to nonsmooth functional constraints", **Journal of Applied Mathematics and Computing**, 217, 311- 325.
- [52] O. Ansary , A. rahrooh, (1995), "Optimal control of a moving missile tracking a moving target ", **Conference Record, Fort Lauderdale**, 95, 123 - 126.

- [53] K. Balachandran, N. Rajagopal, (1999), "Time-optimal synthesis for a special class of second order nonlinear control system", **Elektronnoe Modelirovanie**, 1 , 106-117.
- [54] A. H. Borzabadi, H. H. Mehne, (2006), "MILP modeling for time optimal guidance to a moving target", **Journal of Applied Mathematics and Computing**, 20, 293-303.
- [55] L. Doyen, M. Quincampoix, (1997), " Multi-target control problems", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 93, 121-139.
- [56] B. Farhadinia, K. L. Teo, R. C. Loxton, (2009), "A computational method for a class of non-standard time optimal control problems involving multiple time horizons", **Mathematical and Computer Modelling**, 49, 1682-1691.
- [57] M. E. Fisher, J. L. Noakes, K. L. Teo, (1990), "A minimum trapping time problem in optimal control theory", **Journal of Australian Mathematical Society: Series B**, 32 -100-114.
- [58] C. Y. Kaya, J. L. Noakes, (1994), "A global control law with implications in time-optimal control", **Proceedings of the 3rd IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, FL, U.S.A**, 3823-3824.
- [59] C. Y. Kaya, J. L. Noakes, (2003), "Computational method for time-optimal switching control", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 117, 69-92.
- [60] H. W. J. Lee, L. S. Jennings, K. L. Teo, V. Rehbock, (1997), "Control parametrization enhancing technique for time optimal control problems", **Dynamic Systems and Applications**, 6, 243-262.

- [61] E. R. Pinch , (1993), "**Optimal Control and the Calculus of Variations**", Oxford University Press: Oxford.
- [62] H. H. Mehne, M. H. Farahi, A. V. Kamyad, (2006), "MILP modelling for the time optimal control problem in the case of multiple targets", **Optimal Control Applications and Methods**, 27, 77-91.
- [63] E. B. Meier, Jr AE Bryson, (1990), "Efficient algorithm for time optimal control of a two-link manipulator", **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, 13 , 859-866.
- [64] R. R. Mohler, (1973), "**Bilinear Control Processes**", Academic Press: New York.
- [65] R. R. Mohler, (1991), "**Applications to bilinear control, Nonlinear Systems**", vol. 2. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ.
- [66] K. L. Teo, C. C. Lim, (1988), "Time optimal control computation with application to ship steering", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 56, 145-156.
- [67] G. Leitmann, ( 1962), "**Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems**", Academic Press, Inc, New York, N.Y.
- [68] F. L. Lewis, (1986), "**Optimal Control**", John Wiley and Sons, New York, N.Y.

## واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Free	آزاد
Measure	اندازه
Measurable	اندازه‌پذیر
Locally integrable	انتگرال‌پذیر موضعی
Lebesgue integral	انتگرال لبگ
State vector	بردار حالت
Control vector	بردار کنترل
Pontryagin	پونتریاگین
Characteristic function	تابع مشخصه
Laplace transform	تبدیل لاپلاس
Rationalized Haar functions	توابع هار گویا
Consistant	ثابت
Variational Calculus	حساب تغییرات
Quadratic	درجه‌ی دوم
Sequence	دنباله
Horizontal angle	زاویه افقی
Linear regular tor systems	سیستم‌های تنظیم‌کننده‌ی خطی
Neutral element	عضو خنثی
Identity element	عضو همانی
Unique element	عضو یکتا
Nonlinear	غیرخطی
Measurable space	فضای اندازه‌پذیر
Vectoral space	فضای برداری
State space	فضای حالت
Inner product space	فضای ضرب داخلی
Hilbert space	فضای هیلبرت
Controllability	کنترل‌پذیری
Group	گروه
Transition matrix	ماتریس انتقال
Operational matrix of integration	ماتریس عملگر انتگرالگیری



Positive definite matrix	ماتریس مثبت معین
Real square matrix	ماتریس مربعی حقیقی
Positive semi-definite matrix	ماتریس نیمه‌معین مثبت
Symmetric	متقارن
State variable	متغیر حالت
Orthogonal set	مجموعه متعامد
Finite horizon problem	مساله افق متناهی
Infinite- horizon problem	مساله افق نامتناهی
Optimization problem	مساله بهینه‌سازی
Optimal control problem	مساله کنترل بهینه
Absolutely convergent	مطلقاً همگرا
Differential equations	معادلات دیفرانسیل
Frist order differential equations	معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول
Algebraic equation	معادله جبری
Haar wavelet	موجک هار
Collocation points	نقاط کالوکیشن
Measure theory	نظریه اندازه
Mapping	نگاشت
Initial state	حالت ابتدایی
Final state	حالت نهایی
Hamiltonian	هامیلتونین
Convergent	همگرا

## واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Absolutely convergent	مطلقا همگرا
Algebraic equation	معادله جبری
Characteristic function	تابع مشخصه
Collocation points	نقاط کالوکیشن
Consistant	ثابت
Controllability	کنترل پذیری
Control vector	بردار کنترل
Convergent	همگرا
Differential equations	معادلات دیفرانسیل
Final state	حالت نهایی
Finite horizon problem	مسئله افق متناهی
Free	آزاد
Frist order differential equations	معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول
Group	گروه
Haar wavelet	موجک هار
Hamiltonian	هامیلتونین
Hilbert space	فضای هیلبرت
Horizontal angle	زاویه افقی
Identity element	عضو همانی
Infinite- horizon problem	مسئله افق نامتناهی
Initial state	حالت ابتدایی
Inner product space	فضای ضرب داخلی
Laplace transform	تبدیل لاپلاس
Lebesgue integral	انتگرال لبگ
Linear regulartor systems	سیستم‌های تنظیم کننده‌ی خطی
Locally integrable	انتگرال پذیر موضعی
Mapping	نگاشت
Measurable	اندازه پذیر
Measurable space	فضای اندازه پذیر
Measure	اندازه

Measure theory	نظریه اندازه
Neutral element	عضو خنثی
Nonlinear	غیرخطی
Operational matrix of integration	ماتریس عملگر انتگرالگیری
Optimal control problem	مسأله کنترل بهینه
Optimization problem	مسأله بهینه‌سازی
Orthogonal set	مجموعه متعامد
Pontryagin	پونتریاگین
Positive definite matrix	ماتریس مثبت معین
Positive semi-definite matrix	ماتریس نیمه‌معین مثبت
Quadratic	درجه‌ی دوم
Rationalized Haar functions	توابع هار گویا
Real square matrix	ماتریس مربعی حقیقی
Sequence	دنباله
State space	فضای حالت
State variable	متغیر حالت
State vector	بردار حالت
Symmetric	متقارن
Transition matrix	ماتریس انتقال
Unique element	عضو یکتا
Variational Calculus	حساب تغییرات
Vectoral space	فضای برداری



## Abstract

In this thesis, at first, the Haar wavelet method is considered. Then after introducing the class of optimal control problems, we apply this method to those problems. The presented optimal control problems consist of the infinite-horizon optimal control problem, linear regulating systems, optimization of tracking missile time and linear tracking systems. In each chapter, after presenting the class of optimal control problems, we solve some numerical examples to demonstrate the applicability of this collocation direct method. In these examples, we compare the analytical and approximate graphs of trajectories and control together.

**Keywords:** *Haar wavelet method, optimal control problems, direct collocation infinite-horizon, linear regulating systems, optimization of tracking missile time, tracking.*



Shahrood University of Technology  
Faculty of Mathematical Sciences  
Department of Mathematics

M.S Thesis

**An application of collocation method for  
solving a class of optimal control problems**

By:

**Neda Mahmoudy**

Supervisor:

**Dr. Alireza Nazemi**

September 2012