



دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

بهترین هم تقریب روی فضاهای نرم دار

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

استاد مشاور

پژوهشگر

مدایت اله کندی

شهریور ۱۳۹۱

توان ابداع ریاضی استدلال نیست بلکه تحلیل است

(دورگان)

نام خانوادگی: گندمی

نام: هدایت الله

عنوان پایان نامه: بهترین هم تقریب روی فضاهاى نرمدار

استاد راهنما: دکتر مهدی ایرانمنش

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی محض

گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: صنعتی شاهرود

دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۱

تعداد صفحه:

۱۰۱

کلیدواژه ها: بهترین هم تقریب، زیرفضای چبیشف، ابر صفحه ϵ ، بهترین هم تقریب، ϵ - هم چبیشف، فضای 2 -نرم دار، نقطه تابش، نقطه هم تابش، بهترین هم تقریب همزمان، هم چبیشف همزمان، نگاشت انقباضی، نگاشت غیر انبساطی، مجموعه های محدب، توابع ستاره گون، ϵ -بهترین هم تقریب همزمان، نگاشت حافظ هم تقریب، ϵ -نگاشت حافظ هم تقریب.

چکیده: در این پایان نامه، مسئله ی بهترین هم تقریب در فضاهاى نرم دار مورد بررسی قرار گرفته است. مفهوم بهترین هم تقریب همزمان و ϵ -هم تقریب همزمان نیز ارائه شده است. نظریه هم تقریب در ابتدا توسط فرانچتی و فوری در سال ۱۹۷۲ بیان شد. فرض کنیم که X یک فضای نرم دار با نرم $\| \cdot \|$ باشد همچنین فرض کنیم که G یک زیر مجموعه ی ناتهی از X و $x \in X$ باشد. آنگاه $g_0 \in G$ ، بهترین هم تقریب برای x از G نامیده می شود، اگر

$$\|g - g_0\| \leq \|x - g\| \quad (\forall g \in G)$$

مجموعه ی بهترین هم تقریب های x از G را با نماد $R_G(x)$ نشان می دهیم. همچنین نتایج مربوط به بهترین هم تقریب یکنواخت روی $C[a, b]$ ارائه شده است.

پیشگفتار

مفهوم هم تقریب در ابتدا بوسیله فرانچتی^۱ و فوری^۲ ارائه شد. این مفهوم به وسیله پاپینی^۳ و سینگر^۴ نامگذاری شد. متعاقب آن رائو^۵ و همکارانش این نظریه را توسیع قابل توجهی دادند. قسمت اعظمی از این نظریه به سوالاتی از قبیل وجود، یکتایی، و مشخصه‌ی بهترین هم تقریب می پردازد. بعضی از خواص نیم پیوستگی و پیوستگی عملگر هم تصویر متریک، همچنین توسط رائو و ساراوان^۶ برخی از قضایای بهترین هم تقریب روی فضا‌های خارج قسمت بدست آمد. در این راستا در فصل اول مفاهیم و تعاریفی که در فصول بعد مورد استفاده قرار می گیرد را بیان می کنیم و در فصل دوم مفاهیم ε -هم تقریب و ε -هم چبیشف را ذکر کرده و خواص بهترین هم تقریب روی این مجموعه ها را ذکر می کنیم. در فصل سوم در ابتدا ارتباط بین بهترین تقریب و بهترین هم تقریب را ذکر کرده و در ادامه مفاهیمی همچون نگاشته‌های حافظ بهترین هم تقریب و ε -هم تقریب را بیان کرده و مفهوم فضای 2 -نرم و بهترین هم تقریب روی این فضا مورد بررسی قرار گرفته و همچنین برخی از روشهای تشخیص بهترین هم تقریب را ذکر کرده ایم. در فصل آخر در ابتدا مفهوم بهترین هم تقریب همزمان را آورده و در ادامه بعضی از خواص بهترین هم تقریب همزمان روی فضای خارج قسمت را بیان کرده و بعنوان آخرین مبحث مفهوم ε -بهترین هم تقریب

^۱ Francheti

^۲ Furi

^۳ Papini

^۴ Singer

^۵ Rao

^۶ Saravan

همزمان و بعضی از خواص آن را ذکر کرده و اثبات نموده ایم.

فهرست مطالب

ج	فهرست مطالب
۱	پیشینه و تعاریف مقدماتی
۲	۱.۱ پیش گفتار
۲	۲.۱ مفاهیم مقدماتی
۱۷	۲ خواص ε -بهترین هم تقریب و ε -هم چبیشف
۱۸	۱.۲ پیش گفتار
۱۸	۲.۲ خواص اولیه
۳۱	۳.۲ فضای ۲-نرم
۳۵	۴.۲ بهترین تقریب و بهترین هم تقریب در فضای ۲-نرم
۳۹	۳ بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب
۴۰	۱.۳ پیش گفتار
۴۰	۲.۳ ارتباط بین بهترین تقریب و بهترین هم تقریب
۴۷	۳.۳ بهترین هم تقریب روی فضای خارج قسمت
۵۷	۴.۳ نگاشت های حافظ بهترین هم تقریب
۶۰	۵.۳ ε - حافظ هم تقریب
	۶.۳ بعضی از روش های یافتن بهترین هم تقریب در فضاهای
۶۳	نرم دار
۷۳	۷.۳ بعضی از تساویهای بهترین هم تقریب

۷۷	۴	بهترین هم تقریب های همزمان
۷۸	۱.۴	پیش گفتار
۷۸	۲.۴	مفاهیم مقدماتی
۸۲	۳.۴	بهترین هم تقریبهای همزمان روی فضای خارج قسمت
۸۸	۴.۴	ε -بهترین هم تقریب های همزمان
۹۴		مراجع
۹۶		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۹۸		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فصل ۱

پیشینه و تعاریف مقدماتی

۱.۱ پیش گفتار

در ابتدای این فصل مفاهیم و تعاریف فضاها را که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرد را بیان کرده ایم همچنین به بیان مفاهیمی در رابطه با مفهوم نظریه تقریب می پردازیم.

۲.۱ مفاهیم مقدماتی

تذکر ۱.۲.۱. در سراسر این پایان نامه منظور از K ، میدان اعداد حقیقی یا مختلط است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی (مختلط) باشد. تابع

$$\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$$

را یک نرم روی X نامیم هرگاه

$$\|x\| = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0.$$

(الف)

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in K \text{ و هر } x \in X.$$

(ب) به ازای هر

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, x, y \in X.$$

(ج) به ازای هر

اگر نرم $\|\cdot\|$ روی X وجود داشته باشد، $(X, \|\cdot\|)$ را یک فضای نرمدار می نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ی ناتهی باشد یک متر روی X

نگاشتی مانند $d: X \times X \rightarrow R$ است که در شرایط زیر صدق کند. یعنی

برای هر $x, y, z \in X$ داریم:

$$d(x, y) \geq 0 \text{ الف:}$$

$$d(x, y) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = y \text{ ب:}$$

$$\text{ج: } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{د: } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

تعریف ۴.۲.۱. فضای متریک (X, d) فشرده نامیده می شود اگر هر دنباله در X یک زیر دنباله همگرا در X داشته باشد.

تعریف ۵.۲.۱. فضای نرم دار X تام نامیده می شود اگر هر دنباله کوشی در X به عنصری در X همگرا باشد.

تعریف ۶.۲.۱. فضای نرم دار تام، فضای باناخ نامیده می شود.

تعریف ۷.۲.۱. فضای برداری X ، جمع مستقیم دو زیر فضای Y و Z از X است که به صورت $X = Y \oplus Z$ نوشته می شود اگر هر $x \in X$ یک نمایش یکتای به صورت $x = y + z$ داشته باشد که $y \in Y$ و $z \in Z$.

تعریف ۸.۲.۱. نگاشت $T : (X, d) \rightarrow (Y, d^*)$ در نقطه $x_0 \in X$ پیوسته است اگر $x_n \rightarrow x_0$ آنگاه

$$T(x_n) \rightarrow T(x_0)$$

تعریف ۹.۲.۱. مجموعه ی G را در X به طور کراندار فشرده گوئیم هرگاه هر دنباله کراندار در G ، زیر دنباله ی همگرا در X داشته باشد.

واضح است که هر مجموعه فشرده یک مجموعه ی به طور کراندار فشرده است.

تعریف ۱۰.۲.۱. مجموعه $G \subseteq X$ را محدب گوئیم هرگاه به ازای هر $x, y \in G$ پاره خط واصل بین x و y کاملاً در G قرار گیرد. یعنی هرگاه $x, y \in G$ آنگاه

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq G$$

به عنوان مثالهایی از مجموعه های محدب می توانیم به کل فضا، زیر فضاها، گوی ها، مجموعه های تک عضوی و مجموعه ی تهی اشاره کنیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای نرمداری باشند و $R_c(Y)$ نشان دهنده ی مجموعه ی همه ی زیر مجموعه های بسته و ناتهی از Y باشد. نگاشت $\psi : X \rightarrow R_c(Y)$ نیم پیوسته بالایی نامیده می شود اگر مجموعه ی $\{x \in X : \psi(x) \subseteq V\}$ برای هر مجموعه ی باز V در Y باز باشد، یا برای هر مجموعه بسته N ، مجموعه ی $\{x \in X : \psi(x) \cap N \neq \emptyset\}$ در Y بسته باشد. به طور مشابه مفهوم نیم پیوستگی پائینی تعریف می شود.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم W یک زیر فضا از فضای خطی V باشد. هم مجموعه ی عنصر $x \in V$ با توجه به W به صورت $x + W$ نشان داده می شود که به صورت مجموعه ی زیر تعریف می شود:

$$x + W = \{x + w : w \in W\}$$

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنیم W زیر فضایی از فضای برداری X باشد. برای هر $x \in X$ فرض کنیم $\Pi(x)$ هم مجموعه ی عنصر x با توجه به W باشد. این هم مجموعه ها عناصر فضای برداری X/W هستند، که فضای خارج

قسمت X با W نامیده می شود و اعمال جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \Pi(x + y), \quad \Pi(\alpha x) = \alpha \Pi(x)$$

تعریف ۱۴.۲.۱. تابع خطی Λ از فضای نرم دار X در K را تابع خطی گویند.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد. مجموعه متشکل از تابع های خطی پیوسته روی X را با X^* نشان می دهیم و آن را دوگان X می نامیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. زیر مجموعه ی G از فضای نرم دار X را یک مخروط با راس $x_0 \in G$ گوئیم هرگاه به ازای هر $x \in G$ و به ازای هر $\lambda > 0$ داشته باشیم

$$x_0 + \lambda(x - x_0) = \lambda x + (1 - \lambda)x_0 \in G$$

مثال ۱۷.۲.۱. هر زیر فضای G از X ، یک مخروط با راس در هر نقطه دلخواه $x_0 \in G$ است، ولی عکس این مطلب همیشه درست نیست.

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنیم $f \in X^* \setminus \{0\}$ و $c \in R$. در این صورت مجموعه

$$H = \{y \in X : f(y) = c\}$$

رایک ابرصفحه گوئیم و آن را با $H = \langle f, c \rangle$ نشان می دهیم. همچنین تعریف می کنیم :

$$Ker f := \langle f, 0 \rangle$$

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه ی ناتهی باشد. گردایه ی τ از زیر مجموعه های X را یک توپولوژی بر روی X می نامند اگر

الف: τ شامل مجموعه ی تهی $(\emptyset)$ و X باشد.

ب: τ شامل اجتماع هر تعداد (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه های موجود در آن باشد.

ج: اشتراک هر دو عضو τ به τ تعلق داشته باشد.

در این صورت زوج (X, τ) را یک فضای توپولوژیک می نامند.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنیم S یک فضای توپولوژیک باشد. گردایه ی Γ از همسایگی های نقطه $p \in S$ ، پایه موضعی در p نامیده می شود، اگر هر همسایگی از p شامل اعضایی از Γ باشد.

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنیم τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد به طوریکه

الف: هر نقطه از X یک مجموعه ی بسته باشد.

ب: اعمال فضای برداری با توجه به توپولوژی τ پیوسته باشد.

تحت این شرایط، τ یک توپولوژی برداری روی X نامیده می شود و X یک فضای برداری توپولوژیک نامیده می شود.

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک با توپولوژی τ باشد. X موضعاً محدب نامیده می شود، هرگاه پایه موضعی β وجود داشته باشد، به طوریکه اعضای مجموعه های محدب می باشند. حال توپولوژی تعریف شده روی β را توپولوژی موضعاً محدب می گویند.

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنیم G یک زیر مجموعه ی ناتهی از فضای خطی نرم دار X باشد عنصر $g_0 \in G$ یک بهترین تقریب $x \in X$ از G نامیده می شود اگر برای هر $g \in G$ داشته باشیم

$$\|x - g_0\| \leq \|x - g\|$$

اگر هر $x \in X$ حداقل یک بهترین تقریب در G داشته باشد، G را زیر فضای تقریب پذیر (وجودی) از X می نامند. اگر هر $x \in X$ بهترین تقریب یکتا در G داشته باشد، G را زیر فضای چبیشف از X می نامند. اگر هر $x \in X$ حداکثر یک بهترین تقریب در G داشته باشد، آنگاه G را زیر فضای شبه چبیشف از X می نامیم.

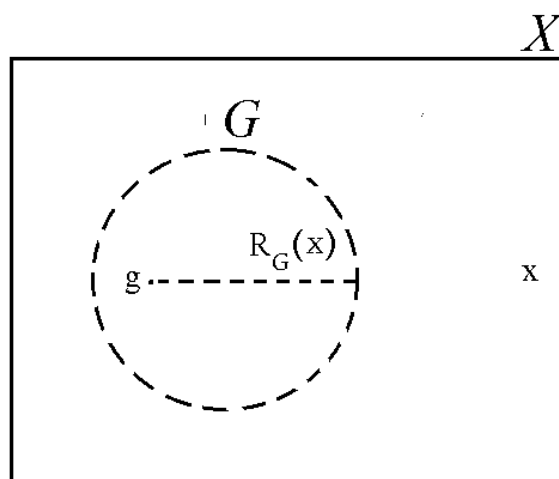
تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنیم G یک زیر مجموعه ی ناتهی از فضای خطی نرم دار X باشد عنصر $g_0 \in G$ یک بهترین هم تقریب $x \in X$ از G نامیده می شود اگر برای هر $g \in G$ داشته باشیم

$$\|g_0 - g\| \leq \|x - g\|$$

مجموعه ی همه ی چنین عناصر $g_0 \in G$ بهترین هم تقریب برای $x \in X$ نامیده می شوند، که آن را با نماد $R_G(x)$ نشان می دهیم.

تذکر ۲۵.۲.۱. مجموعه ی $R_G(x)$ شامل همه ی بهترین هم تقریب های $x \in X$ بوده که به صورت زیر بیان می شود

$$R_G(x) = \{g_0 \in G : \|g_0 - g\| \leq \|x - g\|, \forall g \in G\}$$



شکل ۱.۱: شکل بهترین هم تقریب

اگر هر $x \in X$ حداقل یک بهترین هم تقریب در G داشته باشد G را زیر فضای هم تقریب پذیر از X می نامند. اگر هر $x \in X$ بهترین هم تقریب یکتا در G داشته باشد G را زیر فضای هم چبیشف از X می نامند و اگر هر $x \in X$ حداکثر یک بهترین هم تقریب در G داشته باشد آنگاه G را زیر فضای شبه هم چبیشف از X می نامند.

تذکر ۲۶.۲.۱. فرض کنیم G یک زیر مجموعه ی ناتهی از فضای خطی نرم دار حقیقی X باشد. اگر $0 \in G$ یا اگر G زیر فضای خطی از X باشد، آنگاه اگر $g_0 \in R_G(x)$ آنگاه $\|g_0\| \leq \|x\|$.

تعریف ۲۷.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار و G یک زیر مجموعه از X و $\epsilon > 0$ باشد. نقطه ی $g_0 \in G$ یک $-\epsilon$ بهترین تقریب برای $x \in X$ نامیده می شود اگر برای هر $g \in G$ داشته باشیم

$$\|x - g_0\| \leq \|x - g\| + \epsilon$$

تذکر ۲۸.۲.۱. برای $x \in X$ مجموعه ی همه ی ϵ -بهترین تقریب های x در G را با نماد $P_G(x, \epsilon)$ نشان داده و به صورت زیر نشان می دهیم

$$P_G(x, \epsilon) = \{g_0 \in G : \|x - g_0\| \leq \|x - g\| + \epsilon, \forall g \in G\}$$

در سراسر این پایان نامه منظور از $B(X)$ گوی واحد X است مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنیم که X یک فضای نرم دار باشد. گوی واحد X را با نماد $B(X)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$B(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

تعریف ۳۰.۲.۱. فضای X را هموار گویند، هرگاه برای هر $x \in B_X$ عضو یکتایی چون $f \in B_{X^*}$ موجود باشد به طوریکه $\|f\| = 1$ ، $f(x) = \|x\|$ که در آن B_{X^*} ، گوی واحد X^* است.

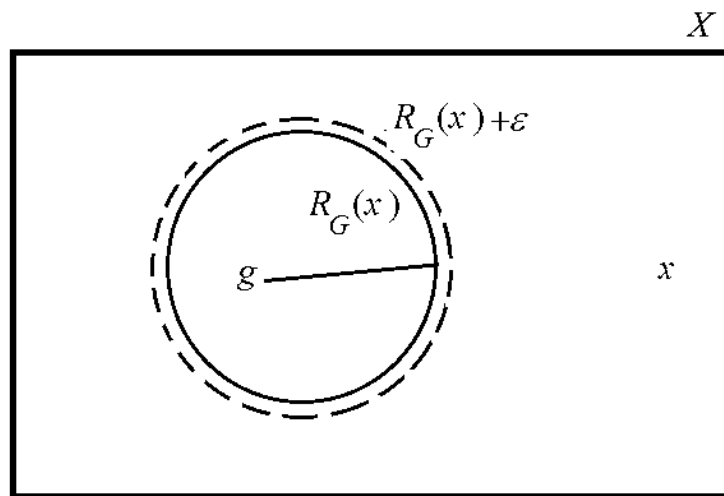
به عنوان مثال فضاهای $L^p(X)$ و فضاهای هیلبرت، فضاهای هموار هستند. برای اثبات همواری این فضاها می توانید به بخش ۶.۱۰ از منبع [۳] مراجعه نمائید.

تعریف ۳۱.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار بوده و G یک زیر مجموعه از X باشد و $\epsilon > 0$ ، آنگاه نقطه ی $g_0 \in G$ یک ϵ -بهترین هم تقریب برای $x \in X$ نامیده می شود هرگاه برای هر $g \in G$ داشته باشیم

$$\|g_0 - g\| \leq \|x - g\| + \epsilon$$

تذکر ۳۲.۲.۱. فرض کنیم $x \in X$ ، مجموعه ی همه ی ϵ -بهترین هم تقریب های x در G را با $R_G(x, \epsilon)$ نشان داده و به صورت زیر بیان می کنیم

$$R_G(x, \epsilon) = \{g_0 \in G : \|g_0 - g\| \leq \|x - g\| + \epsilon, \forall g \in G\}$$



شکل ۲.۱: شکل ϵ -بهترین هم تقریب

تعریف ۳۳.۲.۱. فرض کنیم $\epsilon > 0$ و X یک فضای نرم دار و $x, y \in X$ باشد ϵ, x -متعامد با y نامیده می شود و با نماد $x \perp_\epsilon y$ نشان داده می شود، هرگاه برای هر اسکالر α که $|\alpha| \leq 1$ ، داشته باشیم

$$\|x + \alpha y\| + \epsilon \geq \|x\|$$

هم چنین برای زیر مجموعه ی G_1 و G_2 از X می گوئیم $G_1 \perp_\epsilon G_2$ اگر و فقط اگر برای هر $g_1 \in G_1$ و $g_2 \in G_2$ داشته باشیم $g_1 \perp_\epsilon g_2$.

تعریف ۳۴.۲.۱. فرض کنید A یک مجموعه ی محدب ناتهی دلخواه از فضای نرم دار X و $0 \leq \alpha \leq 1$ یک اسکالر باشد، در این صورت:

$$L(A) = \{\alpha x + (1 - \alpha)y : x, y \in A\}$$

منیفلد خطی تولید شده توسط A می باشد. برای هر z دلخواه از A

$$L(A) - z := \{x - z : x \in L(A)\}$$

یک زیر فضای خطی از X می باشد. همچنین $\dim L(A) - z = \dim A$.

برای اثبات فرض کنیم τ متعلق به $\ell(A - z)$ دلخواه باشد. بنابراین اسکالر α و $x, \xi \in A$ وجود دارند به طوریکه

$$\begin{aligned} \tau &= \alpha(x - z) + (1 - \alpha)(\xi - z) \\ &= \alpha x - \alpha z + \xi - z - \alpha \xi + \alpha z \\ &= [\alpha x + (1 - \alpha)\xi] - z \end{aligned}$$

بنابراین τ متعلق به $\ell(A) - z$ است که نتیجه می شود

$$\ell(A - z) \subseteq \ell(A) - z \quad (I)$$

فرض کنید τ دلخواه و متعلق به $\ell(A) - z$ باشد، بنابراین اسکالر α و $x, \xi \in A$ وجود دارد به طوریکه

$$\begin{aligned} \tau &= [\alpha x + (1 - \alpha)\xi] - z \\ &= \alpha x - \alpha z + \alpha z + (1 - \alpha)\xi - z \\ &= \alpha x - \alpha z + \alpha z + \xi - \alpha \xi - z \\ &= \alpha(x - z) + (1 - \alpha)(z - \xi) \end{aligned}$$

بنابراین τ متعلق به $\ell(A - z)$ است که نتیجه می دهد

$$\ell(A) - z \subseteq \ell(A - z) \quad (II)$$

لذا از (I) و (II) نتیجه می شود که $\ell(A - z) = \ell(A) - z$ بعد مجموعه ی محدب A را به صورت $\dim A = \dim \ell(A)$ تعریف می کنیم. برای هر y متعلق به A داریم

$$\begin{aligned} \dim A &= \dim \ell(A) \\ &= \dim[(\ell(A) - y)] \\ &= \dim(A - y) \end{aligned}$$

بنابراین $\dim A = \dim(A - y)$.

تعریف ۳۵.۲.۱. فرض کنیم $\epsilon > 0$ بوده و G یک زیر فضا از فضای نرمدر X باشد. تعریف می کنیم:

$$\check{G}_\epsilon = \{x \in X : \|g\| \leq \|x - g\| + \epsilon, \forall g \in G\}$$

تعریف ۳۶.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار باشد و G و H زیر مجموعه های از X باشند و نیز $\epsilon > 0$ باشد. تعریف می کنیم

$$R_G(H, \epsilon) = \cup_{h \in H} R_G(h, \epsilon)$$

تعریف ۳۷.۲.۱. فرض کنیم که X و Y دو فضای خطی نرم دار باشند. نگاشتی مانند $T : X \rightarrow Y$ حافظ هم تقریب نامیده می شود اگر برای هر زیر فضای G از X و هر $x \in X$ داشته باشیم

$$T(R_G(x)) = R_{T(G)}(T(x))$$

تعریف ۳۸.۲.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای خطی نرم دار بوده و $\varepsilon > 0$ باشد. نگاشتی مانند $T: X \rightarrow Y$ ، ε -حافظ هم تقریب نامیده می شود اگر و فقط اگر برای هر زیر فضای G از X و هر $x \in X$ داشته باشیم

$$T(R_G(x, \varepsilon)) = R_{T(G)}(Tx, \varepsilon)$$

تعریف ۳۹.۲.۱. فضای خطی حقیقی X یک فضای ضرب داخلی نامیده می شود، اگر برای هر زوج از عناصر $x, y \in X$ اسکالر حقیقی و تعریف شده $\langle x, y \rangle$ به طوریکه خواص زیر برای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha \in R$ برقرار باشد

$$\text{الف: } \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\text{ب: } \langle x, x \rangle = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = 0$$

$$\text{ج: } \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$\text{د: } \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$\text{ه: } \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

تذکر ۴۰.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد و نیز داشته باشیم $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}}$ آنگاه گزاره های زیر برقرار است.

الف: (نامساوی کوشی شوارتز). برای هر $x, y \in X$ داریم

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}$$

ب: (نامساوی مثلث). برای هر $x, y \in X$ داریم

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

ج: (قانون متوازی الاضلاع). برای هر $x, y \in X$ داریم

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

د: (قانون فیثاغورث). برای هر $x, y \in X$ اگر $\langle x, y \rangle = 0$ داریم

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

تعریف ۴۱.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار باشد و $x, y \in X$ گوئیم $x \perp y$ اگر و فقط اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ ، $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ در حالت کلی اگر G_1 و G_2 زیر مجموعه هایی از X باشند، تعریف می کنیم $G_1 \perp G_2$ اگر و فقط اگر به ازای هر $g_1 \in G_1$ و $g_2 \in G_2$ داشته باشیم $g_1 \perp g_2$.

تذکر ۴۲.۲.۱. در این پایان نامه هر دو مفهوم تعامد و تعامد به معنای بیرکھف یکی می باشد. لذا گاهی اوقات از نوشتن اندیس (B) خودداری نموده ایم.

قضیه ۴۳.۲.۱. اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد آنگاه داریم، $x \perp y$ اگر و فقط اگر $\langle x, y \rangle = 0$

برهان. ابتدا فرض کنیم $x \perp y$ و $\langle x, y \rangle \neq 0$. α را به صورت روبه رو تعریف

می کنیم $\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ در این صورت

$$\begin{aligned} \|x + \alpha y\|^2 &= \left\langle x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y, x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y \right\rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \\ &< \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \end{aligned}$$

در نتیجه $\|x + \alpha y\| < \|x\|$ ، این نشان می دهد که x بر y عمود نیست و این

خلاف فرض است پس $\langle x, y \rangle = 0$.

برعکس، فرض کنیم که $\langle x, y \rangle = 0$ ، در این صورت برای هر اسکالر α داریم

$$\begin{aligned}\|x + \alpha y\|^2 &= \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle \\ &= \|x\|^2 + |\alpha|^2 \|y\|^2 \\ &\geq \|x\|^2\end{aligned}$$

در نتیجه $x \perp y$.

تذکره ۴۴.۲.۱. تعبیر هندسی تعامد در فضای $X = R^2$ به این صورت است. فرض کنیم که x و y دو بردار در فضای $X = R^2$ باشند، می دانیم در مثلث قائم الزاویه اندازه وتر از اندازه هر کدام از اضلاع دیگر بیشتر است و در اینجا به ازای هر α ، وتر همان $x + \alpha y$ و سایر اضلاع دیگر x و αy می باشد.

در ادامه، گزاره ای را بیان می کنیم که در فصول بعد از آن استفاده زیادی می شود.

گزاره ۴۵.۲.۱. فرض کنیم X ، یک فضای نرم دار روی میدان K بوده و G زیر فضایی از X باشد، همچنین $x_0 \in X$ به گونه ای باشد که $d(x_0, G) = d > 0$ ، آنگاه $f \in X^*$ وجود دارد به طوریکه :

$$\text{الف: } f(x_0) = 1$$

$$\text{ب: } f(G) = 0 \quad (i.e., f(g) = 0, \forall g \in G)$$

$$\text{ج: } \|f\| = \frac{1}{d}$$

تعریف ۴۶.۲.۱. فرض کنیم $f \in X$ باشد، آنگاه عنصر $g_f \in G$ یک نقطه ی

هم تابش از G متناظر با f نامیده می شود هرگاه اگر $g_f \in R_G(f)$ آنگاه برای هر $\alpha > 0$ نتیجه بدهد $g_f \in R_G(g_f + \alpha(f - g))$. اگر هر نقطه G یک نقطه ی هم تابش G باشد آنگاه G یک مجموعه ی هم تابش نامیده می شود.

فصل ۲

خواص ε -بهترین هم تقریب
و ε -هم چبیشف

۱.۲ پیش گفتار

در این فصل قصد داریم مفهوم ε -هم تقریب و ε -هم چبیشف را بیان کنیم. همچنین مفهوم فضاهاى ۲-نرم را بیان می کنیم و به بررسی خواص این فضا، و بهترین هم تقریب روی این فضا می پردازیم.

۲.۲ خواص اولیه

در این فصل نشان می دهیم اگر G یک زیرمجموعه ناتهی از فضای خطی نرمدار X و $y \in X$ باشد، بازاء هر اسکالر α و $\varepsilon > 0$ ، G یک ε -هم تقریب است اگر و فقط اگر $G+y$ یک ε -هم تقریب باشد و نیز نشان می دهیم G ، ε -هم تقریب است اگر و فقط اگر αG ، $|\alpha|\varepsilon$ -هم تقریب بوده و $R_G(y) = \cap_{\varepsilon>0} R_G(y, \varepsilon)$ باشد. همچنین نشان می دهیم که اگر G زیر فضایی از فضای نرمدار X بوده و $\varepsilon > 0$ باشد آنگاه G ، ε -هم تقریب است اگر و فقط اگر $X = G + \check{G}_\varepsilon$ باشد. همچنین G ، ε -هم چبیشف است اگر و فقط اگر $X = G \oplus \check{G}_\varepsilon$ بعلاوه در پایان فصل نشان می دهیم $\check{G} = \cap_{\varepsilon>0} \check{G}_\varepsilon$.

این فصل را با قضایای راجع به ε -بهترین هم تقریب شروع می کنیم

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنیم G زیر فضایی از فضای خطی نرم دار X و $\varepsilon > 0$

باشد آنگاه برای هر $x \in X$ ، $g_0 \in R_G(x, \varepsilon)$ اگر و تنها اگر $G \perp_\varepsilon (x - g_0)$

برهان. فرض کنیم $g_0 \in R_G(x, \varepsilon)$ و $g \in G$ باشد برای α ، که $|\alpha| \leq 1$ و $\alpha \neq 0$ ،

قرار می دهیم $g_1 = g_0 - \frac{1}{\alpha}g$ در این صورت $g_1 \in G$ زیرا G یک زیر فضا است

لذا از آنجائیکه $g_0 \in R_G(x, \varepsilon)$ ، لذا داریم

$$\|g_0 - g_1\| \leq \|x - g_1\| + \varepsilon$$

در نتیجه، $\|g_0 - (g_0 - \frac{1}{\alpha}g)\| \leq \|x - (g_0 - \frac{1}{\alpha}g)\| + \varepsilon$ و لذا

$$\|\frac{1}{\alpha}g\| \leq \|x - g_0 + \frac{1}{\alpha}g\| + \varepsilon$$

حال با ضرب طرفین در $|\alpha|$ نتیجه می شود که

$$\|g\| \leq \|g + \alpha(x - g_0)\| + |\alpha|\varepsilon \leq \|g + \alpha(x - g_0)\| + \varepsilon, \quad (|\alpha| \leq 1)$$

□

بنابراین $g \perp_\varepsilon (x - g_0)$ در نتیجه داریم $G \perp_\varepsilon (x - g_0)$

برای اثبات قسمت عکس داریم: فرض کنیم $g \in G$ ، آنگاه برای هر α که

$|\alpha| \leq 1$ و $g_1 \in G$ داریم $\|g_1\| \leq \|\alpha(x - g_0) + g_1\| + \varepsilon$ ، فرض کنیم $g \in G$ باشد

با قرار دادن $g_1 = g_0 - g$ و $\alpha = 1$ نتیجه می شود که $\|g - g_0\| \leq \|x - g\| + \varepsilon$

بنابراین طبق تعریف $g_0 \in R_G(x, \varepsilon)$.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنیم G یک زیر مجموعه ی ناتهی از فضای خطی

نرمدار X بوده و $\varepsilon > 0$ باشد. آنگاه برای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر α داریم

$$\text{الف: } R_{G+y}(x + y, \varepsilon) = R_G(x, \varepsilon) + y$$

$$\text{ب: } R_{\alpha G}(\alpha x, \alpha \varepsilon) = |\alpha| R_G(x, \varepsilon)$$

برهان. الف: $g_0 \in R_{G+y}(x + y, \varepsilon)$ اگر و فقط اگر $g_0 \in G + y$ و نیز

$$\|g_0 - (g + y)\| \leq \|x + y - (g + y)\| + \varepsilon$$

فصل ۲. خواص ε -بهترین هم تقریب و ε -هم چبیشف ۲۰

برای هر $g+y \in G+y$ ، اگر و فقط اگر $g_0-y \in G$ و $\| (g_0-y) - g \| \leq \| x-g \| + \varepsilon$ برای هر $g \in G$ ، اگر و فقط اگر $g_0-y \in R_G(x, \varepsilon)$ ، اگر و فقط اگر $g_0 \in R_G(x, \varepsilon)+y$ بنابراین $R_{G+y}(x+y, \varepsilon) = R_G(x, \varepsilon) + y$ $\square$

برای برهان قسمت ب داریم: این قضیه برای حالتی که $\alpha = 0$ است بدیهی می باشد، زیرا هر دو طرف صفر می شود. فرض کنیم $\alpha \neq 0$ ، آنگاه $g_0 \in R_{\alpha G}(\alpha x, \alpha \varepsilon)$ اگر و فقط اگر $g_0 \in \alpha G$ و نیز

$$\| g_0 - \alpha g \| \leq \| \alpha x - \alpha g \| + |\alpha| \varepsilon$$

برای هر $g \in G$ ، اگر و فقط اگر $(\frac{1}{|\alpha|} g_0) \in R_G(x, \varepsilon)$ ، اگر و فقط اگر

$$g_0 \in |\alpha| R_G(x, \varepsilon)$$

بنابراین $R_{\alpha G}(\alpha x, \alpha \varepsilon) = |\alpha| R_G(x, \varepsilon)$ $\square$

نتیجه ۳.۲.۲. فرض کنیم G یک زیر مجموعه ی ناتهی از فضای نرمدار X بوده و $\varepsilon > 0$ باشد. آنگاه برای هر $y \in X$ و هر اسکالر $\alpha \neq 0$ داریم.

الف: G, ε -هم تقریب است، اگر و فقط اگر $G+y, \varepsilon$ -هم تقریب باشد.
ب: G, ε -هم تقریب است، اگر و فقط اگر $\alpha G, |\alpha| \varepsilon$ -هم تقریب باشد.

برهان. الف: G, ε -هم تقریب است اگر و فقط اگر $R_G(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ ، اگر و فقط اگر $R_G(x, \varepsilon) + y \neq \emptyset$ ، طبق مورد الف قضیه ۲.۲.۲، $R_{G+y}(x+y, \varepsilon) \neq \emptyset$ ، اگر و فقط اگر $G+y, \varepsilon$ -هم تقریب باشد.

برای اثبات ب داریم: G, ε -هم تقریب است، اگر و فقط اگر $R_G(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ ، اگر و فقط اگر $|\alpha| R_G(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ ، طبق مورد ب قضیه ۲.۲.۲، $R_{\alpha G}(\alpha x, \alpha \varepsilon) \neq \emptyset$ ،

، اگر و فقط اگر αG ، $|\alpha| \varepsilon$ -هم تقریب باشد. $\square$

قضیه زیر ارتباط بهترین هم تقریب و ε -بهترین هم تقریب را بیان می کند.

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنیم G یک زیر مجموعه ی ناتهی از فضای نرمدار X

بوده و $x \in X$ باشد، آنگاه داریم $R_G(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} R_G(x, \varepsilon)$

برهان. طبق تعریف $R_G(x, \varepsilon)$ و $R_G(x)$ برای هر $\varepsilon > 0$ داریم $R_G(x) \subseteq R_G(x, \varepsilon)$

بنابراین $\bigcap_{\varepsilon > 0} R_G(x, \varepsilon) \supseteq R_G(x)$

بر عکس : فرض کنیم $g_0 \in \bigcap_{\varepsilon > 0} R_G(x, \varepsilon)$ ، آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ داریم

$g_0 \in R_G(x, \varepsilon)$ بنابراین برای هر $g \in G$ و هر $\varepsilon > 0$ داریم

$$\|g_0 - g\| \leq \|x - g\| + \varepsilon$$

بنابراین برای هر $g \in G$ داریم $\|g_0 - g\| \leq \|x - g\|$ بدین معنی که

$g_0 \in R_G(x)$ پس $R_G(x) \supseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} R_G(x, \varepsilon)$ در نتیجه $R_G(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} R_G(x, \varepsilon)$.

$\square$

نتیجه ۵.۲.۲. الف: به ازای هر $\varepsilon > 0$ هر مجموعه ی هم تقریب، ε -هم تقریب است.

ب: به ازای هر $\varepsilon > 0$ هر مجموعه ی هم چبیشف، ε -هم چبیشف است.

برهان. الف: فرض کنیم $g_0 \in R_G(x)$ آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ داریم

$$\|g_0 - g\| \leq \|x - g\| \leq \|x - g\| + \varepsilon$$

یعنی هر مجموعه y هم تقریب، یک مجموعه y ε -هم تقریب می باشد.
 ب: در قسمت بالا نشان دادیم هر مجموعه y هم تقریب، ε -هم تقریب می باشد. حال بایستی نشان دهیم اگر $g_1, g_2 \in R_G(x, \varepsilon)$ باشد آنگاه $g_1 = g_2$ طبق تعریف برای هر $\varepsilon > 0$ داریم

$$\|g - g_1\| \leq \|x - g_1\| + \varepsilon$$

و نیز

$$\|g - g_2\| \leq \|x - g_2\| + \varepsilon$$

اگر قرار دهیم $\varepsilon = 1/n$ و از طرفین هر دو رابطه هنگامی که n به سمت بینهایت میل کند حد بگیریم، آنگاه

$$\|g - g_1\| \leq \|x - g_1\|$$

و نیز

$$\|g - g_2\| \leq \|x - g_2\|$$

در نتیجه داریم $g_1, g_2 \in R_G(x)$ حال چون طبق فرض G ، هم چبیشف می باشد لذا $g_1 = g_2$. $\square$

قضیه ۶.۲.۲. فرض کنیم G یک زیر فضا از فضای نرمدار X و $\varepsilon > 0$ باشد آنگاه G ، ε -هم تقریب است اگر و فقط اگر $X = G + \check{G}_\varepsilon$

برهان. فرض کنیم G ، ε -هم تقریب بوده و $x \in X$ باشد آنگاه $g_0 \in R_G(x, \varepsilon)$ و لذا $(x - g_0) \in \check{G}_\varepsilon$ بنابراین $x = g_0 + (x - g_0) \in G + \check{G}_\varepsilon$ در نتیجه $X = G + \check{G}_\varepsilon$

برعکس : فرض کنیم

$$X = G + \check{G}_\varepsilon = \{g_0 + y : g_0 \in G, y \in \check{G}_\varepsilon\}$$

و $x \in X$ باشد. آنگاه $x = g_0 + y$ که $g_0 \in G$ و $y \in \check{G}_\varepsilon$ می باشد. از آنجائیکه $y \in \check{G}_\varepsilon$ ، بنابراین $\|y - g\| + \varepsilon \leq \|g\|$ ، اما چون $x = g_0 + y$ در نتیجه $y = x - g_0$ لذا $\|g\| + \varepsilon \leq \|(x - g_0) - g\|$ ، این نتیجه می دهد $\|g\| + \varepsilon \leq \|x - (g + g_0)\|$ و چون $g \in G$ دلخواه می باشد لذا قرار می دهیم $g = g - g_0$ ، با جایگذاری داریم

$$\|g - g_0\| \leq \|x - g\| + \varepsilon$$

و لذا نتیجه می شود که $g_0 \in R_G(x, \varepsilon)$ و در نتیجه G ، ε -هم تقریب است. $\square$

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنیم G ، یک زیر فضا از فضای نرمدار X باشد آنگاه G ،

ε -هم چبیشف می باشد. اگر و فقط اگر $X = G \oplus \check{G}_\varepsilon$

برهان. فرض کنیم G ، ε -هم چبیشف باشد طبق قضیه ۶.۲.۲، هر $x \in X$ را می توان به صورت $x = g_0 + y$ نوشت که در آن $g_0 \in G$ و $y \in \check{G}_\varepsilon$ اکنون فرض کنیم $x = g_1 + y_1 = g_2 + y_2$ که $y_1, y_2 \in \check{G}_\varepsilon$ و $g_1, g_2 \in G$. از آنجائیکه $(x - g_1), (x - g_2) \in \check{G}_\varepsilon$ داریم $G \perp_\varepsilon (x - g_1), G \perp_\varepsilon (x - g_2)$ بنابراین طبق قضیه ۱.۲.۲، $g_1, g_2 \in R_G(x, \varepsilon)$ ، چون G ، ε -هم چبیشف می باشد لذا $g_1 = g_2$

و بنابراین $y_1 = y_2$ و در نتیجه داریم $X = G \oplus \check{G}_\varepsilon$

برعکس: فرض کنیم $X = G \oplus \check{G}_\varepsilon$ طبق قضیه ۶.۲.۲، G ، ε -هم تقریب است فرض کنیم $x \in X$ و نیز $g_1, g_2 \in R_G(x, \varepsilon)$ آنگاه

$$(x - g_1), (x - g_2) \in \check{G}_\varepsilon$$

و بنابراین $y_1, y_2 \in \check{G}_\varepsilon$ وجود دارد به طوریکه $x = g_1 + y_1 = g_2 + y_2$ ، لذا $g_1 = g_2$ و در نتیجه G ، ε -هم چبیشف می باشد. $\square$

قضیه ۸.۲.۲. فرض کنیم G یک زیر فضا از فضای نرم دار X بوده همچنین $\varepsilon \geq \alpha > 0$ باشد. آنگاه $\check{G} \subseteq \check{G}_\alpha \subseteq \check{G}_\varepsilon$ و بنابراین $\check{G} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \check{G}_\varepsilon$.

برهان. فرض کنیم $x \in \check{G}$ آنگاه برای هر $g \in G$ ، داریم $\|g\| \leq \|x - g\|$ ، و لذا $\|g\| \leq \|x - g\| + \alpha$ بنابراین $x \in \check{G}_\alpha$ در نتیجه $\check{G} \subseteq \check{G}_\alpha$ ، حال فرض کنیم $x \in \check{G}_\alpha$ آنگاه $\|g\| \leq \|x - g\| + \alpha \leq \|x - g\| + \varepsilon$ بنابراین $x \in \check{G}_\varepsilon$ در نتیجه $\check{G}_\alpha \subseteq \check{G}_\varepsilon$ ، حال طبق روابط فوق داریم $\check{G} \subseteq \check{G}_\alpha \subseteq \check{G}_\varepsilon$ چون $\varepsilon > 0$ دلخواه بوده و نشان دادیم که برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\check{G} \subseteq \check{G}_\varepsilon$ است لذا $\check{G} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \check{G}_\varepsilon$.
برعکس: فرض کنیم $x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \check{G}_\varepsilon$ آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $x \in \check{G}_\varepsilon$ یعنی برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $g \in G$ داریم $\|g\| \leq \|x - g\| + \varepsilon$ آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\|g\| \leq \|x - g\| + 1/n, \quad (\forall g \in G)$$

حال اگر $n \rightarrow \infty$ میل کند لذا برای هر $g \in G$ داریم $\|g\| \leq \|x - g\|$ بنابراین $x \in \check{G}$ و $\bigcap_{\varepsilon > 0} \check{G}_\varepsilon \subseteq \check{G}$ در نتیجه داریم $\check{G} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \check{G}_\varepsilon$ $\square$

گزاره ۹.۲.۲. فرض کنیم G یک زیر فضا از فضای نرم دار X بوده و $\varepsilon > 0$ باشد، همچنین فرض کنیم $B(X)$ نشان دهنده ی گوی واحد از X باشد

آنگاه داریم $G \cap \check{G}_\varepsilon \subseteq G \cap \varepsilon B(X)$

برهان. فرض کنیم $x \in G \cap \check{G}_\varepsilon$ ، آنگاه برای هر $g \in G$ طبق تعریف $\check{G}_\varepsilon$ با جایگذاری $g = x$ داریم $\|x\| \leq \varepsilon$ ، بنابراین $x \in G \cap \varepsilon B(X)$ این اثبات را کامل می کند. $\square$

قضیه ۱۰.۲.۲. فرض کنیم G یک زیر فضا از فضای خطی نرم دار X و $f \in X \setminus \overline{G}$ و $\varepsilon > 0$ باشد آنگاه $g_0 \in P_G(f, \varepsilon)$ اگر و فقط اگر $h \in X^*$ موجود باشد به طوریکه $\|h\| = 1$ و برای هر $g \in G$ ، $h(g) = 0$ و نیز

$$h(f - g_0) \geq \|f - g_0\| - \varepsilon, \quad (\forall g \in G)$$

برهان. فرض کنیم $g_0 \in P_G(f, \varepsilon)$ ، آنگاه برای هر $g \in G$ داریم :

$$\|f - g_0\| \leq \|f - g\| + \varepsilon$$

اکنون طبق قضیه ۴۵.۲.۱، $f_0 \in X^*$ وجود دارد به طوریکه

$$f_0(f) = 1, \quad \|f_0\| = 1 / \|f - g_0\|$$

برای هر $g \in G$ ، $f_0(g) = 0$. اکنون تابع f_0 را در نظر می گیریم، آنگاه $h \in X^*$ و $\|h\| = \|f - g_0\| \cdot \|f_0\| = \|f - g_0\| \cdot \|f - g_0\|^{-1} = 1$ و نیز $h(g) = \|f - g_0\| f_0(g) = 0$ همچنین داریم

$$h(f - g_0) = \|f - g_0\| f(f - g_0) = \|f - g_0\|, \quad (\forall g \in G)$$

زیرا $f(f - g_0) = 1$. از آنجائیکه $\varepsilon > 0$ است لذا، $h(f - g_0) \geq \|f - g_0\| - \varepsilon$

بر عکس: فرض کنیم $h \in X^*$ وجود داشته باشد به طوریکه $\|h\| = 1$ ،
 $h(g) = 0$ و $h(f - g_0) \geq \|f - g_0\| - \varepsilon$ ، نشان می دهیم $g_0 \in P_G(f, \varepsilon)$ برای این
 منظور به روابط زیر توجه می کنیم :

$$\begin{aligned} \|f - g_0\| - \varepsilon &\leq |h(f - g_0)| \\ &= |h(f) - h(g_0)| \\ &= |h(f) - h(g)| \\ &= |h(f - g)| \\ &\leq \|h\| \cdot \|f - g\| \\ &= \|f - g\| \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $g \in G$ داریم $\|f - g\| - \varepsilon \leq \|f - g_f\|$ ، لذا

$$\|f - g_f\| \leq \|f - g\| + \varepsilon$$

□

در نتیجه $g_f \in P_G(f, \varepsilon)$.

در تذکر بعد ارتباط بین منیفلد خطی با زیر فضا بیان شده است.

تذکر ۱۱.۲.۲. فرض کنیم V مجموعه ای در فضای خطی نرم دار X بوده،
 و نیز $x_0 \in X$ باشد. در این صورت V را یک منیفلد خطی گوییم هرگاه به
 صورت،

$$V = x_0 + G = \{x_0 + g : g \in G\}$$

تعریف شده باشد که در آن G یک زیر فضای خطی X می باشد.

قضیه ۱۲.۲.۲. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار بوده و G یک زیر فضا از X باشد به طوریکه $f \in X \setminus \overline{G}$ و $\varepsilon > 0$ باشد. اگر برای هر $g \in G$ ، $h^g \in X^*$ موجود باشد، به طوریکه $h^g(g) \geq \|g - g_0\| - \varepsilon$ ، $h^g(g_0) = h^g(f)$ ، $\|h^g\| = 1$ ، $g_0 \in R_G(f, \varepsilon)$ آنگاه

برهان. فرض کنیم $g \in G$ و $V = \langle g_0, f \rangle$ یک منیفلد خطی تولید شده بوسیله g_0 و f باشد. حال اگر $v \in V$ آنگاه $v = \alpha f + (1 - \alpha)g_0$ در نتیجه $h^g(v) = h^g(\alpha f + (1 - \alpha)g_0) = 0$ بنابراین $h^g(g - g_0) \geq \|g - g_0\| - \varepsilon$ و لذا $\|h^g\| = 1$ آنگاه طبق قضیه ۱۰.۲.۲، $g_0 \in P_{\langle g_0, f \rangle}(g, \varepsilon)$ و بنابراین طبق قضیه ۵.۶.۳ داریم $g_0 \in R_G(f, \varepsilon)$. $\square$

قضیه ۱۳.۲.۲. فرض کنیم G یک زیر فضا از فضای نرم دار X بوده و $x \in X$ باشد، همچنین $\varepsilon > 0$ باشد و $\delta \geq \varepsilon$ ، آنگاه $R_G(x, \varepsilon) \subseteq R_G(x, \delta)$ **برهان.** فرض کنیم $g_0 \in R_G(x, \varepsilon)$ ، آنگاه برای هر $g \in G$ داریم

$$\|g - g_0\| \leq \|x - g\| + \varepsilon$$

به وضوح $\|g - g_0\| \leq \|x - g\| + \delta$ ، بنابراین $g_0 \in R_G(x, \delta)$ در نتیجه

$$R_G(x, \varepsilon) \subseteq R_G(x, \delta).$$

$\square$

قضیه ۱۴.۲.۲. فرض کنیم G یک زیر مجموعه ی محدب از فضای خطی نرم دار X بوده و $x \in X$ باشد، آنگاه $R_G(x, \varepsilon)$ محدب می باشد.

برهان. فرض کنیم $g_1, g_2 \in R_G(x, \varepsilon)$ آنگاه داریم

$$\|g - g_1\| \leq \|x - g\| + \varepsilon, \quad (\forall g \in G)$$

و

$$\|g - g_2\| \leq \|x - g\| + \varepsilon, \quad (\forall g \in G)$$

حال برای هر $\alpha \in [0, 1]$ داریم

$$\begin{aligned} \|g - (\alpha g_1 + (1 - \alpha)g_2)\| &= \|\alpha g - \alpha g + g - \alpha g_1 - g_2 + \alpha g_2\| \\ &= \|\alpha(g - g_1) + (1 - \alpha)(g - g_2)\| \\ &\leq \alpha \|g - g_1\| + (1 - \alpha) \|g - g_2\| \\ &\leq \alpha (\|x - g\| + \varepsilon) + (1 - \alpha) (\|x - g\| + \varepsilon) \\ &= \|x - g\| + \varepsilon \end{aligned}$$

بنا براین $(\alpha g_1 + (1 - \alpha)g_2) \in R_G(x, \varepsilon)$ در نتیجه $R_G(x, \varepsilon)$ محدب می باشد.

□

تذکر ۱۵.۲.۲. فرض کنیم G یک زیر فضا از فضای خطی نرمدار X بوده و

$$R_G^{-1}(0, \varepsilon) = \{x \in X : \|g\| \leq \|x - g\| + \varepsilon, \forall g \in G\} = \{x \in X : G \perp_\varepsilon x\}$$

به طوریکه مجموعه آخری را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$\check{G}_\varepsilon = \{x \in X : G \perp_\varepsilon x\}$$

مثال ۱۶.۲.۲. فرض کنیم $X = R^2$ یک فضای خطی نرم دار با نرم تعریفشده به صورت $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ باشد. و $G = \{(x, y) : y = x\}$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد آنگاه به وضوح داریم $\check{G}_\varepsilon = \{(x, y) : -2\varepsilon < x + y < 2\varepsilon\}$ و

$$\check{G} = \{(x, y) : x = -y\}$$
 نیز

برهان. طبق تذکر ۱۵.۲.۲ داریم

$$\begin{aligned}\check{G}_\varepsilon &= \{(x, y) \in X : \| (g_1, g_2) \| \leq \| (x - g_1, x - g_2) \| + \varepsilon, \forall (g_1, g_2) \in G\} \\ &= \{(x, y) \in X : |g_1| + |g_2| \leq \| (x - g_1, x - g_2) \| + \varepsilon, \forall (g_1, g_2) \in G\} \\ &= \{(x, y) \in X : 2|g_1| \leq |x - g_1| + |x - g_2| + \varepsilon, \forall (g_1, g_2) \in G\}\end{aligned}$$

اکنون با استفاده از نامساوی مثلث و خاصیت ربع اول و سوم دستگاه مختصات، که بایستی طول و عرض نقطه هم علامت باشد. حکم مورد نظر ثابت می شود. $\square$

لم ۱۷.۲.۲. فرض کنیم G یک زیر فضا از فضای خطی نرمدار X بوده و $x \in X$ باشد، همچنین $\varepsilon > 0$ ، آنگاه $g_0 \in R_G(x, \varepsilon)$ اگر و فقط اگر $(x - g_0) \in \check{G}_\varepsilon$ برهان. با توجه به قضیه ۱.۲.۲ و نتیجه ۱۵.۲.۲، $g_0 \in R_G(x, \varepsilon)$ اگر و فقط اگر

$$G \perp_\varepsilon (x - g_0)$$

اگر و فقط اگر $(x - g_0) \in \check{G}_\varepsilon$. $\square$

نتیجه ۱۸.۲.۲. فرض کنیم G یک زیر فضا از فضای خطی نرمدار X بوده و $\varepsilon > 0$ باشد، همچنین $x \in X$ ، آنگاه $R_G(x, \varepsilon) = G \cap (x - \check{G}_\varepsilon)$.

برهان. $g_0 \in G \cap (x - \check{G}_\varepsilon)$ اگر و فقط اگر $g_0 \in G$ و $g_0 \in (x - \check{G}_\varepsilon)$ اگر و فقط اگر $\check{g} = x - g_0 \in \check{G}_\varepsilon$ و $g_0 \in G$ اگر و فقط اگر $\check{g} \in \check{G}_\varepsilon$ که $g_0 = x - \check{g}$ و $g_0 \in G$ اگر و فقط اگر $g_0 \in R_G(x, \varepsilon)$ در نتیجه $R_G(x, \varepsilon) = G \cap (x - \check{G}_\varepsilon)$ $\square$

در اینجا ابتدا مطلب زیر را یادآوری می کنیم.
فرض کنیم X یک فضای خطی نرمدار بوده و G و H زیر مجموعه های
از X باشند، همچنین $\varepsilon > 0$ ، تعریف می کنیم

$$R_G(H, \varepsilon) = \cup_{h \in H} R_G(h, \varepsilon)$$

قضیه ۱۹.۲.۲. فرض کنیم G و G^* زیر فضاهایی از فضای خطی نرمدار X
بوده و $x \in X, G \subseteq G^*$ و $\varepsilon > 0$ باشد، آنگاه

$$R_G(R_{G^*}(x, \varepsilon)) \subseteq R_G(x, \varepsilon)$$

برهان. فرض کنیم $g_0 \in R_G(R_{G^*}(x, \varepsilon))$ آنگاه $g_0 \in R_G(g_0^*)$ برای $g_0^* \in R_{G^*}(x, \varepsilon)$ ،
طبق قضیه ۱.۲.۲، $G^* \perp_\varepsilon (x - g_0^*)$ لذا طبق تعریف تعامد $G \perp (g_0^* - g)$ ، بنابراین
خواهیم داشت

$$\|g^* + \alpha(x - g_0^*)\| + \varepsilon \geq \|g^*\|, \quad (|\alpha| < 1, g^* \in G)$$

و

$$\|g + \alpha(g_0^* - g_0)\| \geq \|g\|, \quad (\alpha \in R, g \in G)$$

اکنون از آنجائیکه $g + \alpha(g_0^* - g_0) \in G^*$ برای $|\alpha| \leq 1$ و

$$\begin{aligned} \|g + \alpha(x - g_0)\| + \varepsilon &= \|g + \alpha(g_0^* - g_0) + \alpha(x - g_0^*)\| + \varepsilon \\ &\geq \|g + \alpha(g_0^* - g_0)\| \\ &\geq \|g\| \end{aligned}$$

لذا از آنجائیکه

$$\|g + \alpha(x - g_0)\| + \varepsilon \geq \|g\|$$

بنابراین برای هر $g \in G$ داریم $G \perp_\varepsilon (x - g_0)$ یعنی $g_0 \in R_G(x, \varepsilon)$ در نتیجه

□

داریم $R_G(R_{G^*}(x, \varepsilon)) \subseteq R_G(x, \varepsilon)$

۳.۲ فضای ۲-نرم

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنیم X یک فضای خطی با بعد بزرگتر از ۱ باشد.

فرض کنیم $\|\cdot, \cdot\|$ یک تابع با مقدار حقیقی روی $X \times X$ باشد به طوریکه

الف: $\|x, y\| = 0$ اگر و تنها اگر x و y بردارهای وابسته ی خطی باشند.

ب: برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $\|x, y\| = \|y, x\|$

ج: برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم $\|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$

در این صورت $\|\cdot, \cdot\|$ یک ۲-نرم روی X است. و $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای

۲-نرم نامیده می شود. ۲-نرمها نامنفی هستند و برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in R$

خواهیم داشت $\|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$ در حقیقت برای یک عضو ثابت $b \in X$

و $x \in X$ $P_b(x) = \|x, b\|$ یک نیم نرم است. و خانواده ی $P = \{P_b : b \in X\}$

از نیم نرمها یک توپولوژی موضعاً محدب روی X تعریف می کند. با این

توپولوژی، هر فضای ۲-نرم یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب

است. برای درک بهتر فضاهای ۲-نرم مثال زیر را می آوریم.

مثال ۲.۳.۲. فرض کنیم P_n مجموعه ی همه ی چند جمله ایهای حقیقی

از درجه کوچکتر یا مساوی n روی بازه $[0, 1]$ باشد. با در نظر گرفتن جمع

معمولی و ضرب اسکالر P_n ، یک فضای برداری خطی روی میدان اعداد

حقیقی می باشد. فرض کنیم $\{x_0, x_1, \dots, x_{2n}\}$ نقاط ثابت مجزا در بازه $[0, 1]$ باشد حال ۲- نرم روی P_n را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|f, g\| = \sum_{k=0}^{2n} |f(x_k)g(x_k)|$$

در این صورت $(P_n, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم است.

تعریف ۳.۳.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم و W_1 و W_2 دو زیر فضای X باشند. نگاشت $f: W_1 \times W_2 \rightarrow R$ یک ۲-نگاشت دو خطی روی $W_1 \times W_2$ نامیده می شود، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in W_1$ و $y_1, y_2 \in W_2$ و هر $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ داشته باشیم

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2) \quad (۱)$$

$$f(\lambda_1 x_1, \lambda_2 y_1) = \lambda_1 \lambda_2 f(x_1, y_1) \quad (۲)$$

تعریف ۴.۳.۲. ۲-نگاشت دو خطی $f: W_1 \times W_2 \rightarrow R$ کران دار نامیده می شود، هرگاه عدد حقیقی نامنفی M موجود باشد به طوریکه برای هر $x \in W_1$ و $y \in W_2$ داشته باشیم

$$|f(x, y)| \leq M \|x, y\|$$

تعریف ۵.۳.۲. نرم ۲-تابعک دو خطی $f: W_1 \times W_2 \rightarrow R$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|f\| = \inf\{M \geq 0 : |f(x, y)| \leq M \|x, y\|\}$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup\{|f(x, y)| : (x, y) \in W_1 \times W_2, \|x, y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|f(x, y)| : (x, y) \in W_1 \times W_2, \|x, y\| = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{|f(x, y)|}{\|x, y\|} : (x, y) \in W_1 \times W_2, \|x, y\| > 0\right\}\end{aligned}$$

تعریف ۶.۳.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم، W زیر فضایی از X و $x \in X$ باشد. در این صورت $x \perp^2 y$ اگر و فقط اگر برای هر $z \in X$ و $y \in W$ داشته باشیم

$$\|x, z\| \leq \|x + y, z\|$$

گفته می شود $x \perp^2 y$ اگر و فقط اگر $\langle y \rangle \perp^2 x$ و $W \perp^2 x$ اگر و فقط اگر برای هر $y \in W$ ، $y \perp^2 \langle x \rangle$

تعریف ۷.۳.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم و $z \in X$ ، $z \neq 0$ باشد. در این صورت X_z^* را فضای باناخ همه ی ۲-تابع های دو خطی کراندار روی $X \times \langle z \rangle$ تعریف می کنیم که $\langle z \rangle$ زیر فضای تولید شده به وسیله z می باشد.

تعریف ۸.۳.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم، W زیر فضایی از X و $x \in X$ باشد. در این صورت $y_0 \in W$ ، ۲-بهترین هم تقریب از $x \in X$ در W نامیده می شود هرگاه برای هر $y \in W$ و $z \in X$ داشته باشیم

$$\|y - y_0, z\| \leq \|y - x, z\|$$

هرگاه برای هر $x \in X \setminus \overline{W}$ حداقل یک 2 -بهترین هم تقریب در W وجود داشته باشد، در این صورت W زیر فضای 2 -هم تقریب X نامیده می شود. هرگاه برای هر $x \in X \setminus \overline{W}$ یک 2 -بهترین هم تقریب منحصر بفرد در W وجود داشته باشد، در این صورت W زیر فضای هم چبیشف از X نامیده می شود. برای هر $x \in X$ تعریف می کنیم :

$$R_W^2(x) = \{y_0 \in W : \|y - y_0, z\| \leq \|y - x, z\|, \forall y \in W, \forall z \in X\}$$

ونیز

$$\tilde{W}_2 = \{x \in W : \|y, z\| \leq \|x - y, z\|, \forall y \in W, \forall z \in x\}$$

در مثال زیر می خواهیم بررسی کنیم تحت چه شرایطی بهترین هم تقریب 2 -بهترین هم تقریب با هم برابر می شوند.

مثال ۹.۳.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم دار باشد. برای هر $x, y \in X$ تعریف می کنیم: $\|x, y\| = \|x\| \|y\|$ در این صورت $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای 2 -نرم است و برای هر $x \in X$ $R_W^2(x) = R_W(x)$.

تعریف ۱۰.۳.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای 2 -نرم و W زیر فضای ناتهی از X باشد.

الف: دنباله $\{y_n\}$ 2 -همگرا در W نامیده می شود هرگاه برای هر

$$z \in X \text{ داشته باشیم } \|y_n - y_0, z\| \rightarrow 0$$

ب: مجموعه W را 2 -بسته می نامیم هرگاه برای هر $z, y_0 \in X$ و

$$\{y_n\} \subset W \text{ با } \|y_n - y_0, z\| \rightarrow 0 \text{ داشته باشیم } y_0 \in W$$

ج: مجموعه W ، را 2 -کران دار می نامیم هرگاه برای هر $z \in X$ ، k_z ای وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $y \in W$ ، $\|y, z\| \leq k_z$

د: مجموعه W ، را 2 -فشرده می نامیم هرگاه هر دنباله $\{y_n\}$ در W یک زیر دنباله همگرا داشته باشد.

۴.۲ بهترین تقریب و بهترین هم تقریب در فضای 2 -نرم

در این بخش برآنیم تعاریف و قضایای بهترین تقریب و بهترین هم تقریب در فضاهای نرم دار را به فضاهای 2 -نرم تعمیم دهیم.

لم ۱.۴.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای 2 -نرم و W زیر فضای ناتهی X باشد. آنگاه $y_0 \in R_W^2(x)$ اگر و فقط اگر برای هر $y \in W$ ، $y \perp^2 x - y_0$ برهان. با توجه به تعاریف ۸.۳.۲ و ۶.۳.۲ داریم:

$$y_0 \in R_W^2(x) \iff \|y - y_0, z\| \leq \|y - x, z\|, \quad (\forall z \in X, \forall y \in W)$$

$$\iff \|y, z\| \leq \|y + y_0 - x, z\|, \quad (\forall z \in X, \forall y \in W)$$

$$\iff \left\| \left(\frac{1}{\alpha}\right)y, z \right\| \leq \left\| \left(\frac{1}{\alpha}\right)y + y_0 - x, z \right\|, \quad (\forall z \in X, \forall y \in W)$$

$$\iff \|y, z\| \leq \|y + \alpha(y_0 - x), z\|, \quad (\forall z \in X, \forall y \in W)$$

$$\iff y \perp^2 x - y_0$$

□

قبل از بیان لم ۳.۴.۲ که بسیار مهم است. ابتدا مشابه فضاهای نرم دار لم زیر را بیان می کنیم.

لم ۲.۴.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم، W زیر فضای X و $b \in X$ باشد. اگر $x_0 \in X$ به گونه ای باشد که

$$\delta_z = \inf\{\|x_0 - w, z\| : w \in W\} > 0$$

آنگاه تابع دوخطی کراندار $F : X \times \langle z \rangle \rightarrow R$ وجود دارد که

$$\|F\| = \frac{1}{\delta_z}, F(x_0 - z) = 1, F|_{W \times \langle z \rangle} = 0$$

لم ۳.۴.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم، $x, y \in X$ و $x \neq 0$ باشد. آنگاه گزاره های زیر معادلند.

الف: $x \perp^2 y$

ب: $z \in X$ و $f_z \in X_z^*$ وجود دارند به طوریکه $\|f_z(x, z)\| = \|x, z\|$ ، $\|f_z\| = 1$ و $f_z(y, z) = 0$.

برهان. فرض کنیم $x \perp^2 y$ از اینکه $x \neq 0$ و فضای X موضعاً محدب است، $z \in X$ موجود است به طوریکه $\|x, z\| \neq 0$. قرار می دهیم $W = \langle y \rangle$ پس $\delta_z > 0$ با استفاده از لم ۲.۴.۲، $F_z \in X_z^*$ وجود دارد به طوریکه $\|F_z\| = \frac{1}{\delta_z}$ ، $F_z(x, z) = \|x, z\|$ و $F_z(y, z) = 0$ ، قرار می دهیم $f_z = \delta_z F_z$ ، بنابراین $\|f_z\| = 1$ ، $f_z(y, z) = 0$ و $f_z(x, z) = \|x, z\|$ و $f_z \in X_z^*$ و $z \in X$ فرض کنیم به عکس: $\|f_z\| = 1$ ، به طوریکه $f_z \in X_z^*$ و $z \in X$ موجود باشد،

$\|f_z(x, z) - f_z(y, z)\| = 0$ و بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\|x, z\| &= f_z(x, z) = f_z(x + \alpha y, z) \\ &\leq \|f_z\| \cdot \|x + \alpha y, z\| \\ &= \|x + \alpha y, z\|\end{aligned}$$

و در نتیجه $x \perp^2 y$

□

نتیجه ۴.۴.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم و W زیر فضای ناتهی X باشد. همچنین $x \in X$ و $0 \neq x$ و $y_0 \in W$ ، آنگاه گزاره های زیر معادلند.

الف: $y_0 \in R_W^2(x)$

ب: $z \in X$ موجود است به طوریکه برای هر $y \in W$ ، بتوان $f_z \in X_z^*$ ای

یافت شود به طوریکه $\|f_z\| = 1$ ، $\|f_z(y, z)\| = \|y, z\|$ و $f_z(x, z) = f_z(y_0, z)$

لم ۵.۴.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم و W زیر فضای ناتهی

X باشد، و $x \in X$ و $0 \neq x$ آنگاه :

الف: اگر $x \in W$ در این صورت $R_W^2(x) = \{x\}$

ب: اگر $x \notin W$ ، در این صورت برای هر $x \in \overline{W} \setminus W$ ، $R_W^2(x) = \emptyset$

ج: $R_W^2(x)$ ، ۲-بسته و محدب است.

د: هرگاه برای هر $y_0 \in R_W^2(x)$ و برای $0 < \lambda < 1$ داشته باشیم

$$(1 - \lambda)x + \lambda y_0 \in W$$

آنگاه

$$(1 - \lambda)x + \lambda y_0 \in R_W^2(x)$$

برهان. برهان قسمتهای الف و د مشابه فضاهای نرم دار بوده لذا از اثبات آنها صرفنظر می کنیم.

ب: فرض کنیم $x \in \overline{W} \setminus W$ بنابراین دنباله $\{y_n\}$ در W وجود دارد به طوریکه برای هر $z \in X$ ، $\|y_n - x, z\| \rightarrow 0$ ، فرض کنیم $y_0 \in R_W^2(x)$ ، در نتیجه برای هر $z \in X$ ، $\|y_n - y_0, z\| \leq \|x - y_n, z\|$ ، بنابراین برای هر $z \in X$ ، $\|y_n - y_0, z\| \rightarrow 0$ لذا $y_0 = x$ در نتیجه $R_W^2(x) = \emptyset$ □

برهان. ج: فرض کنیم

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda)x + \lambda y_0 - y, z\| &= \|(1 - \lambda)x + \lambda y_0 - \lambda y - (1 - \lambda)y, z\| \\ &\leq (1 - \lambda) \|x - y, z\| + \lambda \|y - y_0, z\| \end{aligned}$$

از اینکه $y_0 \in R_W^2(x)$ داریم

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y_0 - y, z\| \leq \|x - y, z\|$$

□

فصل ۳

بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب

۱.۳ پیش گفتار

در این فصل به بررسی خواص بهترین تقریب و بهترین هم تقریب می پردازیم، و بررسی می کنیم که تحت چه شرایطی این دو با هم مساوی می شوند. همچنین به بررسی نگاشتهای حافظ هم تقریب و ε - حافظ هم تقریب می پردازیم، همچنین بهترین هم تقریب روی فضاهای خارج قسمت مورد بررسی قرار گرفته و در انتهای این فصل به بررسی بهترین هم تقریب روی $C[a, b]$ می پردازیم.

۲.۳ ارتباط بین بهترین تقریب و بهترین هم تقریب

در این قسمت روابط بین مجموعه های تقریب زننده و همتقریب زننده را بررسی می کنیم.

قضیه ۱.۲.۳. اگر G زیر فضای یک فضای ضرب داخلی مانند X باشد. آنگاه

$$\text{برای هر } x \in X \text{ داریم } P_G(x) = R_G(x)$$

برهان. فرض کنیم $g_0 \in P_G(x)$ آنگاه $x - g_0 \perp G$ ، یعنی برای هر $g \in G$ داریم

$$\langle x - g_0, g \rangle = 0 \text{ بنابراین } \langle g, x - g_0 \rangle = 0 \text{ و این نتیجه می}$$

دهد که $g \perp x - g_0$ و چون این رابطه به ازای هر $g \in G$ برقرار است، لذا

$$G \perp x - g_0. \text{ بنابراین } g_0 \in R_G(x) \text{ پس } P_G(x) \subset R_G(x). \text{ بطور مشابه می توان}$$

ثابت کرد که $R_G(x) \subset P_G(x)$ و حکم ثابت می شود. $\square$

تذکر ۲.۲.۳. اگر در قضیه بالا فرض زیر فضا بودن بودن G یا فرض فضای

ضرب داخلی بودن X را حذف کنیم آنگاه قضیه در حالت کلی برقرار نیست.

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۴۱

مثال ۳.۲.۳. اگر G را دایره ای در R^2 در نظر بگیرید به طوریکه x مرکز آن باشد. آنگاه $P_G(x) = G$ و $R_G(x) = \emptyset$.

قبل از بحث بیشتر، چند نماد معرفی می کنیم.
برای هر فضای باناخ X بانرم $\|\cdot\|$ ، می توانیم یک ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ را بین فضای X و فضای دوگان آن تعریف کنیم. نرم دوگان را با نماد $\|\cdot\|^*$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۴.۲.۳. برای هر $f \in X$ مشتق نرم را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\partial \|f\| = \{v \in X^* : \langle v, f \rangle = \|f\|, \|v\|^* \leq 1\}$$

مشتق جهتی $\|f\|$ از f در جهت $g \in X$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$T(f, g) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|f + tg\| - \|f\|}{t}$$

نتیجه ۵.۲.۳. می توان نشان داد که رابطه ی زیر برقرار است.

$$T(f, g) = \max_{v \in \partial \|f\|} \langle v, g \rangle$$

قضیه ۶.۲.۳. فرض کنیم G یک زیر مجموعه ی ناتهی از یک فضای ضرب داخلی X و $g_0 \in G$ باشد. در این صورت گزاره های زیر هم ارزند.
الف: g_0 یک نقطه هم تابش است.

ب: به ازای هر $x \in X \setminus \overline{G}$ ، $g_0 \in R_G(x)$ است اگر و تنها اگر به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم.

$$T(g_0 - g, f - g_0) \geq 0$$

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۴۲

ج: به ازای هر $x \in X \setminus \overline{G}$ ، $g_0 \in R_G(x)$ است، اگر و تنها اگر به ازای هر $g \in G$ ،
 $\|g_0 - g\| \in \partial$ وجود داشته باشد به طوریکه

$$\langle v_g, f - g_0 \rangle \geq 0$$

برهان. با استفاده از نتیجه ۵.۲.۳ و این حقیقت که $T(f, g) \geq 0$ است اگر و فقط اگر به ازای هر $t > 0$ داشته باشیم

$$\|f + tg\| \geq \|f\|$$

حکم ثابت می شود.

لم ۷.۲.۳. فرض کنیم G یک زیر مجموعه ی محدب ناتهی در فضای هیلبرت X باشد. آنگاه برای هر $x \in X$ داریم

$$P_G(x) \subset R_G(x)$$

برهان. فرض کنیم $x \in X$ باشد و $P_G(x) \neq \emptyset$. به ازای $y \in P_G(x)$ و به ازای هر $y \neq g \in G$ چون $y - g \in P_G(x - g)$ آنگاه

$$\langle y - g, x - g \rangle = 0$$

در نتیجه روابط زیر را داریم:

$$\|g - y\|^2 = \langle g - y, g - y \rangle = \langle g - y, g - x \rangle \leq \|g - y\| \cdot \|g - x\|$$

بنابراین،

$$\|g - y\| \leq \|g - x\|, \quad (\forall g \in G \setminus \{y\})$$

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۴۳

که نتیجه می دهد $y \in R_G(x)$.

توجه می کنیم شرط محدب بودن G باعث می شود که بتواند مینیمم خود را اختیار کند. برای کسب اطلاعات بیشتر به منبع [۴] مراجعه شود.

□

تذکر ۸.۲.۳. در قضیه فوق اگر شرط محدب بودن را برداریم آنگاه قضیه برقرار نیست.

شرطهایی برای هم ارزی مجموعه های بهترین هم تقریب ها و بهترین تقریب ها در قضیه زیر ارائه شده است.

قضیه ۹.۲.۳. فرض کنیم که X یک فضای هیلبرت، و $x \in X$ و G یک مخروط ناتهی در X با راس y باشد. در این صورت

$$R_G(x) = P_G(x)$$

برهان. فرض کنیم که G یک مخروط ناتهی با راس y در فضای هیلبرت X باشد. و فرض کنیم $y \in R_G(x)$ ، آنگاه طبق قضیه ۶.۲.۳ داریم :

$$\langle v_g, x - y \rangle \geq 0 \quad (\forall g \in G \setminus \{y\})$$

که در آن

$$v_g = \frac{y - g}{\|y - g\|}$$

اکنون برای هر $g \in G$ داریم :

$$\|x - y\| = \frac{\langle x - y, x - y \rangle}{\|x - y\|} \leq \frac{\langle x - g, x - y \rangle}{\|x - y\|} \leq \|g - x\|$$

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۴۴

بنابراین داریم $y \in P_G(x)$

برعکس: فرض کنیم که $y \in P_G(x)$ آنگاه برای هر $g \in G$ ، $y \in P_{[y,g]}(x)$ که $[y, g]$ پاره خطی با نقاط انتهایی y و g می باشد. این رابطه بنابر ویژگیهای بهترین تقریب در یک فضای هیلبرت نشان می دهد که $\langle x - g, x - y \rangle \geq 0$ ، بنابراین $y \in R_G(x)$ ، لذا حکم ثابت شد. $\square$

تذکر ۱۰.۲.۳. قضیه فوق برای زیر مجموعه ی محدب کلی G از فضای هیلبرت برقرار نیست.

مثال ۱۱.۲.۳. فرض کنیم $X = R^2$ فضای اقلیدسی ۲-بعدی با نرم اقلیدسی باشد. و فرض کنیم G ، پاره خطی با نقاط انتهایی $(0, 0)$ و $(1, 0)$ باشد. فرض کنیم برای یک $0 < t < 1$ دلخواه $x = (t, 1)$ ، نشان می دهیم $y = (0, 0) \in R_G(x)$ ، اما $y \notin P_G(x) = \{(t, g)\}$ ، بنابراین $P_G(x) \neq R_G(x)$

برهان. می دانیم که نرم اقلیدسی بصورت زیر می باشد

$$\| (x_1, x_2) \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

حال چون

$$0 \leq g \leq 1, 0 \leq h \leq 1, -1 \leq g - h \leq 1 \Rightarrow |g - h| \leq 1 \leq \sqrt{(1 - h)^2 + 1}$$

لذا داریم

$$\begin{aligned} R_G(x) &= \{g \in G : \|g - h\| \leq \|h - x\|, \forall h \in G\} \\ &= \{(g, 0) : |g - h| \leq \sqrt{(1 - h)^2 + 1}\} \\ &= \{(g, 0) : |g - h| \leq \sqrt{(1 - h)^2 + 1}, 0 \leq h \leq 1\} = G \end{aligned}$$

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۴۵

و در نتیجه $R_G(x) = G$ اما $P_G(x) = \{(t, 0)\}$ □

قضیه ۱۲.۲.۳. اگر G یک زیر فضا از فضای خطی نرم دار X باشد. آنگاه داریم

$$G \cap \check{G} = \{0\}$$

برهان. فرض کنیم $g \in G \cap \check{G}$ باشد. می خواهیم نشان دهیم $g = 0$ ، برای دیدن این موضوع فرض کنیم $g \in \check{G}$ ، آنگاه طبق تذکر ۱۵.۲.۲ برای $g \in G$ داریم $G \perp g$ ، این ایجاب می کند که برای هر $h \in G$ داریم $h \perp g$ ، بنابراین برای هر $h \in G$ و هر اسکالر α داریم $\|h + \alpha g\| \geq \|h\|$ ، اکنون فرض کنیم $\alpha = -1/2$ و $h = g$ ، آنگاه داریم، $\|g - \frac{1}{2}g\| \geq \|g\|$ و بنابراین $\|1/2g\| \geq \|g\|$ در نتیجه $g = 0$ یعنی $G \cap \check{G} \subseteq \{0\}$ اما $\{0\} \subseteq G \cap \check{G}$ ، چون G و $\check{G}$ هر دو زیر فضا بوده و هر زیر فضای شامل صفر فضا می باشد. بنابراین داریم □ $G \cap \check{G} = \{0\}$

گزاره ۱۳.۲.۳. فرض کنیم G ، یک زیر فضا از فضای باناخ هموار X باشد. آنگاه $\check{G}$ یک زیر فضای خطی بسته از X می باشد.

برهان. طبق لم ۲.۶.۳ می توانیم ثابت کنیم که $\check{G} = \bigcap_{g \in G} \ker f^g$ ، از آنجائیکه $\ker f^g$ یک زیر فضای خطی بسته می باشد.

$$\ker f^g = \{x \in X : f^g(x) = 0, \forall g \in G\}$$

و چون $\|f^g\| = 1$ ، یعنی تابع خطی f^g کران دار می باشد و چون در فضاهای نرم دار پیوستگی و کران دار بودن معادلند، لذا $\ker f^g$ یک زیر

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۴۶

فضای خطی بسته می باشد و چون اشتراک دلخواه از مجموعه های بسته، بسته می باشد لذا $\tilde{G}$ یک زیر فضای بسته از X می باشد. $\square$

قضیه ۱۴.۲.۳. اگر G یک زیر مجموعه از فضای خطی نرم دار X باشد. آنگاه برای هر $g \in G$ داریم.

$$d(g, \tilde{G}) = \|g\|$$

برهان. اگر $u \in \tilde{G}$ آنگاه $u \perp G$ بوده و در نتیجه برای هر $g \in G$ داریم، $g \perp u$ آنگاه برای هر $g \in G$ و هر اسکالر α داریم $\|g + \alpha u\| \geq \|g\|$ ، اکنون اگر $\alpha = -1$ انتخاب شود، آنگاه برای هر $g \in G$ داریم $\|g\| \leq \|g - u\|$ ، حال اگر $g \in G$ را ثابت در نظر بگیریم، آنگاه داریم :

$$\|g\| \leq \|g - u\|, \quad (\forall u \in \tilde{G})$$

بنابراین داریم

$$\|g\| \leq \inf_{u \in \tilde{G}} \|g - u\| = d(g, \tilde{G}) \leq \|g - 0\| = \|g\|$$

$\square$

که $0 \in \tilde{G}$ ، لذا داریم $d(g, \tilde{G}) = \|g\|$.

قضیه ۱۵.۲.۳. فرض کنیم G یک زیر فضای هم تقریب از فضای باناخ هموار X باشد. آنگاه $\tilde{G}$ یک زیر فضای تقریب از X می باشد.

برهان. فرض کنیم که G هم تقریب باشد. آنگاه $X = G + \tilde{G}$ ، بنابراین داریم

$$x = g_1 + g_2 \quad \text{که } g_1 \in G \text{ و } g_2 \in \tilde{G}, \text{ لذا } x - g_1 = g_2 \text{ بنابراین}$$

$$\|x - g_2\| = \|x - (x - g_1)\| = \|g_1\| = d(g_1, \tilde{G})$$

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۴۷

اکنون از آنجائیکه $\|x - g_2\| = d(g_1, \check{G})$ ، بنابراین برای هر $x \in X$ داریم $g_2 \in P_{\check{G}}(x)$ و در نتیجه $P_{\check{G}} \neq \emptyset$ ، یعنی $\check{G}$ تقریب پذیر می باشد. توجه داریم که طبق گزاره ۱۳.۲.۳، $\check{G}$ زیرفضای خطی بسته از X است. $\square$

قضیه ۱۶.۲.۳. فرض کنیم G یک زیرفضای هم چبیشف از فضای باناخ هموار X باشد. آنگاه $\check{G}$ یک زیر فضای چبیشف از X می باشد.

برهان. از آنجائیکه G هم چبیشف می باشد، بنابراین داریم $X = G \oplus \check{G}$ ، طبق قضیه ۱۵.۲.۳، $\check{G}$ یک زیرفضای تقریب پذیر از X می باشد. اکنون کافی است ثابت کنیم مجموعه $P_{\check{G}}(x)$ برای هر $x \in X$ تک عضوی می باشد. برای دیدن این موضوع، فرض کنیم $g_1, g_2 \in P_{\check{G}}(x)$ آنگاه داریم $x - g_1 = \check{g}_1 \in \check{G}$ و $x - g_2 = \check{g}_2 \in \check{G}$ بنابراین $x = g_1 + \check{g}_1 = g_2 + \check{g}_2$ در نتیجه $g_1 = g_2$ ، $\check{g}_1 = \check{g}_2$ چون می دانیم که $G \cap \check{G} = \{0\}$ بنابراین $P_{\check{G}}(x)$ تک عضوی می باشد. یعنی $\check{G}$ یک زیر فضای چبیشف از X می باشد.

۳.۳ بهترین هم تقریب روی فضای خارج قسمت

در آغاز این بخش ابتدا تعریف زیر را یادآوری می کنیم

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنیم که X و Y فضاهای نرم دار باشند و $R_c(Y)$ نشان دهنده ی مجموعه ی همه ی زیرمجموعه های بسته و ناتهی از Y باشد. نگاشت $\psi : X \rightarrow R_c(Y)$ نیم پیوسته بالایی نامیده می شود هرگاه مجموعه $\{x \in X : \psi(x) \subseteq v\}$ برای هر مجموعه باز v در Y باز باشد یا مجموعه $\{x \in X : \psi(x) \cap N \neq \emptyset\}$ برای هر مجموعه بسته ی N در Y بسته باشد.

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۴۸

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنیم X یک فضای نرم دار باشد و M زیر فضای هم تقریب پذیر از X باشد. آنگاه R_M نیم پیوسته ی بالایی می باشد اگر و فقط اگر $F + \check{G}$ برای هر مجموعه ی بسته F در M بسته باشد.

برهان. فرض کنیم R_M نیم پیوسته ی بالایی بوده و F مجموعه ی بسته در M باشد. می خواهیم ثابت کنیم $F + \check{M}$ بسته است. فرض کنیم $\{g_n\}$ دنباله ای در $F + \check{M}$ باشد که $g_n \rightarrow g_0$ ، آنگاه $g_n = u_n + v_n$ به طوریکه $u_n \in F$ و $v_n \in \check{M}$ ، از آنجائیکه $u_n \in F \cap R_M(u_n + v_n)$ نتیجه می شود $g_0 \in \{x \in X : F \cap R_M(x)\} \neq \emptyset$ بنابراین $g_n \in \{x \in X : F \cap R_M(x)\} \neq \emptyset$ نتیجه $F \cap R_M(g_0) \neq \emptyset$ ، یعنی $z \in F \cap R_M(g_0)$ وجود دارد به طوریکه $g_0 - z \in \check{M}$ حال چون $z \in F$ لذا داریم $g_0 \in F + \check{M}$.

برعکس: فرض کنیم $F + \check{M}$ برای هر مجموعه ی بسته ی F در M بسته باشد. می خواهیم ثابت کنیم R_M نیم پیوسته ی بالایی می باشد. برای این منظور، فرض کنیم F مجموعه ای بسته در M و $\{g_n\}$ دنباله ای در $\{x \in X : F \cap R_M(x)\} \neq \emptyset$ باشد که همگرا به g_0 می باشد. حال اگر

$$z_n \in F \cap R_M(g_n)$$

آنگاه $g_n \in F + \check{M}$ و $F + \check{M}$ بسته است، بنابراین $g_0 \in F + \check{M}$ ، اکنون برای $z \in F$ و $x \in \check{M}$ داریم $g_0 = z + x$ که ایجاب می کند $z \in F \cap R_M(z + x)$ در نتیجه

$$g_0 \in \{x \in X : F \cap R_M(x) \neq \emptyset\}$$

□

نتیجه ۳.۳.۳. زیر مجموعه E از X به طور کران دار فشرده می باشد اگر و فقط اگر بستار $E \cap B$ برای هر گوی بسته B در X فشرده باشد.

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنیم M زیر فضای هم تقریب از فضای نرم دار X باشد. اگر $\check{M}$ به طور کراندار فشرده باشد آنگاه احکام زیر برقرار می باشد.

الف: R_M نیم پیوسته ی بالایی می باشد.

ب: $R_M(x)$ برای هر $x \in X$ فشرده می باشد.

برهان. الف: فرض کنیم F مجموعه ای بسته در M بوده و $g_n \in F + \check{M}$ و نیز $g_n \rightarrow g_0$ ، آنگاه $\{g_n\}$ کران دار می باشد و $g_n = u_n + v_n$ برای $u_n \in F$ و $v_n \in \check{M}$ ، نتیجه می شود که $\|g_n\| = \|u_n + v_n\| \leq \|u_n\| + \|v_n\|$ بنابراین $\{u_n\}$ کران دار می شود. همچنین دنباله $\{v_n\}$ نیز کران دار می شود، آنگاه زیر دنباله $\{v_{n_k}\}$ همگرا به $v_0 \in \check{M}$ وجود دارد. از آنجائیکه $u_{n_k} \rightarrow g_0 - v_0$ و F بسته می باشد بنابراین $g_0 - v_0 \in F$ در نتیجه $g_0 \in F + \check{M}$

ب: فرض کنیم $x \in X$ بوده و $\{g_n\}$ دنباله ای در $R_M(x)$ باشد از آنجائیکه $x - g_n \in \check{M}$ و نیز $\|x - g_n\| \leq 2 \|x\|$ ، آنگاه زیر دنباله $\{x - g_{n_k}\}$ که به $u_0 \in \check{M}$ همگرا می باشد از آنجائیکه $x - u_0 = g_0$ بنابراین داریم $g_0 \in R_M(x)$

□

لذا حکم ثابت می شود.

قضیه ۵.۳.۳. فرض کنیم M زیر فضایی هم تقریب از فضای نرم دار X باشد. حال اگر $\check{M}$ مجموعه ای محدب باشد، آنگاه M هم چبیشف می باشد.

برهان. فرض کنیم $x \in X$ و $g_1, g_2 \in R_M(x)$ باشد. آنگاه $x - g_1, x - g_2 \in \check{M}$

قرار می دهیم $x - g_1 = \check{g}_1$ و $x - g_2 = \check{g}_2$ و فرض کنید $x = g_1 + \check{g}_1 = g_2 + \check{g}_2$

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۵۰

از آنجائیکه $\frac{1}{2}(\check{g}_1 - \check{g}_2) \in \check{M}$ ، نتیجه می شود که $g_1 - g_2 \in M \cap \check{M} = \{0\}$ ، در نتیجه داریم $g_1 = g_2$. $\square$

مثال ۶.۳.۳. فرض کنیم $X = R^2$ یک فضای خطی نرم دار با نرم

$$\|(x, y)\| = |x| + |y|$$

بوده و فرض کنیم $M = \{(x, y) \in R^2 : x = y\}$ ، آنگاه X یک فضای باناخ حقیقی بوده و M یک زیر فضای هم چبیشف از X می باشد. در حقیقت داریم

$$\check{M} = \{(x, y) : y = -x\}$$

و نیز

$$R_M(x, y) = \left\{ \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right) : (x, y) \in X \right\}$$

حال از آنجائیکه $\check{M}$ زیر فضای متناهی البعد از X است. طبق قضیه ۲.۳.۳، R_M نیم پیوسته ی بالایی می باشد.

تذکر ۷.۳.۳. فرض کنیم M یک زیر فضا از فضای خطی نرم دار X باشد. برای $x \in X$ ، فرض کنیم $d(x, M)$ نشان دهنده ی فاصله ی بین x و مجموعه M باشد. یعنی

$$d(x, M) = \inf \{ \|x - g\| : g \in M \}$$

آنگاه فضای خارج قسمت $\frac{X}{M}$ مجهز به نرم زیر می باشد:

$$\|x + M\| = \inf \{ \|y\| : y \in x + M \} = d(x, M)$$

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۵۱

هنگامی که X یک فضای نرم دار یا یک فضای باناخ باشد و M یک زیر فضای بسته از X باشد آنگاه $\frac{X}{M}$ یک فضای خطی نرم دار یا یک فضای باناخ می باشد.

لم ۸.۳.۳. فرض کنیم M یک زیر فضای بسته از فضای نرم دار X بوده و نیز فرض کنیم W یک زیر فضای هم تقریب از X شامل M باشد. آنگاه $\frac{W}{M}$ هم تقریب با $\frac{X}{M}$ می باشد.

□

برهان. به منبع [۶] مراجعه شود.

نتیجه ۹.۳.۳. فرض کنیم M یک زیر فضای بسته از فضای نرم دار X باشد و فرض کنیم W زیر فضای هم تقریب از X شامل M باشد. اگر $\frac{W}{M}$ هم تقریب در $\frac{X}{M}$ باشد آنگاه W هم تقریب در X می باشد.

قضیه ۱۰.۳.۳. فرض کنیم M یک زیر فضای هم چبیشف از فضای نرم دار X بوده و W زیر فضایی از X شامل M باشد. اگر $\frac{W}{M}$ هم چبیشف در $\frac{X}{M}$ باشد. آنگاه W هم چبیشف در X است.

برهان. اگر $x \in X$ و $y_1, y_2 \in R_W(x)$ آنگاه به وضوح داریم

$$y_1 + M, y_2 + M \in R_{\frac{W}{M}}(x + M)$$

از آنجائیکه $\frac{W}{M}$ هم چبیشف می باشد آنگاه $y_1 - y_2 \in M$ اکنون از آنجائیکه

$y_1, y_2 \in R_W(x)$ آنگاه برای $i = 1, 2$ داریم $x - y_i \in \check{W}$ و $M \subseteq W$ بنابراین برای

$i = 1, 2$ داریم $x - y_i \in \check{M}$ و چون برای $i = 1, 2$ داریم $0 \in R_M(x - y_i)$ همچنین

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۵۲

اکنون از آنجائیکه $y_1 - y_2 \in R_M(x - y_2)$ هم چبیشف می باشد لذا به

□

وضوح داریم $y_1 = y_2$.

قضیه ۱۱.۳.۳. فرض کنیم M زیرفضایی بسته از فضای نرم دار X بوده و

فرض کنیم W زیر فضای هم چبیشف از X شامل M باشد. آنگاه $\frac{W}{M}$ هم چبیشف در $\frac{X}{M}$ می باشد.

برهان. طبق لم ۸.۳.۳، $\frac{W}{M}$ هم تقریب پذیر می باشد، فرض کنیم

$$(x + M) \in \left(\frac{X}{M}\right) \setminus \left(\frac{W}{M}\right)$$

دلخواه بوده و

$$y_1 + M, y_2 + M \in R_{\frac{W}{M}}(x + M)$$

طبق نتیجه ۹.۳.۳، $m_1, m_2 \in M$ وجود دارد به طوریکه برای $i = 1, 2$ داریم

$$m_i + y_i \in R_W(x) \text{ از آنجائیکه } W \text{ هم چبیشف می باشد لذا}$$

$$m_1 + y_1 = m_2 + y_2$$

□

در نتیجه $y_1 + M_1 = y_2 + M_2$ و لذا حکم ثابت شده است.

قضیه ۱۲.۳.۳. فرض کنیم M زیر فضای هم تقریب پذیر از فضای نرم دار

X بوده و فرض کنیم W زیر فضای هم تقریب از X شامل M باشد. اگر

$$\Pi : X \longrightarrow \frac{X}{M}$$

نگاشت کانونی باشد آنگاه داریم:

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۵۳

$$\prod(R_W(x)) = R_{\overline{W}}(x + M)$$

برهان. حالت رفت بدیهی می باشد یعنی به وضوح در این حالت داریم:

$$\prod(R_W(x)) \subseteq R_{\overline{W}}(x + M)$$

بر عکس: در این حالت فرض کنیم $g \in R_W(x)$ و $a \in W$ ، آنگاه برای هر $b \in M$ داریم

$$\begin{aligned} \| (g + M) - (a + M) \| &= d(g - a, M) \\ &\leq \| g - (a + b) \| \\ &\leq \| x - (a + b) \| \\ &= \| (x - a) + b \| \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\| (g + M) - (a + M) \| \leq \| (x + M) - (a + M) \|$$

که ایجاب می کند $\prod(g) = g + M \in R_{\overline{W}}(x + M)$ در نتیجه حکم ثابت شد. $\square$

قضیه ۱۳.۳.۳. فرض کنیم M زیر فضای هم تقریب پذیر از فضای نرم دار X بوده و فرض کنیم W زیر فضای هم تقریب پذیر از X شامل M باشد. اگر $\check{W}$ محدب باشد آنگاه $\frac{W}{M}$ هم چبیشف در $\frac{X}{M}$ است.

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۵۴

برهان. ابتدا ثابت می کنیم که $\widetilde{W/M} = R_{W/M}^{-1}(M)$ محدب می باشد. برای این منظور فرض کنیم $x + M, y + M \in \frac{\widetilde{W}}{M}$ و $0 < \lambda < 1$ باشد. از آنجائیکه $M \in R_{W/M}(y + M)$ و $M \in R_{W/M}(x + M)$ می باشد طبق قضیه ۱۲.۳.۳ $\Pi(g) = M = \Pi(h)$ و $g \in R_W(x)$ ، $h \in R_W(y)$ وجود دارد به طوریکه $\Pi(g) = M = \Pi(h)$ ، (زیرا نگاشت طبیعی پوشا می باشد). بنابراین $x - g, y - h \in \check{W}$ چون طبق فرض قضیه $\check{W}$ محدب می باشد. لذا

$$\lambda(x - g) + (1 - \lambda)(y - h) \in \check{W}$$

که ایجاب می کند

$$\lambda g + (1 - \lambda)h \in R_W(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

همچنین طبق قضیه ۱۲.۳.۳ داریم

$$\Pi(\lambda g + (1 - \lambda)h) = \lambda g + (1 - \lambda)h + M = M$$

یعنی

$$M \in R_{\frac{W}{M}}(\lambda x + (1 - \lambda)y + M)$$

ولذا

$$\lambda(x + M) + (1 - \lambda)(y + M) \in \frac{\widetilde{W}}{M}$$

بنابراین طبق قضیه ۱۱.۳.۳ و ۸.۳.۳ زیرفضای $\frac{W}{M}$ هم چبیشف می

□

باشد.

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۵۵

لم ۱۴.۳.۳. فرض کنیم که M هم تقریب پذیر و زیر مجموعه ای به طور کراندار فشرده از فضای نرم دار X باشد. آنگاه احکام زیر را داریم

الف: R_M نیم پیوسته ی بالایی می باشد.

ب: $R_M(x)$ برای هر $x \in X$ فشرده می باشد.

□

برهان. به منبع [۶] مراجعه شود.

قضیه ۱۵.۳.۳. فرض کنیم M زیر فضایی بسته از فضای نرم دار X بوده و W زیر فضای هم تقریب از X شامل M باشد. آنگاه احکام زیر برقرار می باشند.

الف: $\Pi(\widetilde{W}) \subseteq (\frac{\widetilde{W}}{M})$

ب: اگر W به طور کراندار فشرده و M تقریب پذیر باشد آنگاه $R_{\frac{W}{M}}$ نیم پیوسته ی بالایی می باشد.

برهان. الف: اگر $x \in \widetilde{W}$ و $g \in W$ باشد آنگاه برای هر $h \in M$ داریم :

$$\|g + M\| \leq \|g + h\| \leq \|g - x + h\|$$

و بنابراین

$$\|g + M\| \leq \|(g - x) + M\|$$

و در نتیجه طبق تعریف نگاشت طبیعی داریم:

$$\Pi(x) \in (\frac{\widetilde{W}}{M})$$

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۵۶

ب: ابتدا ثابت می کنیم فضای خارج قسمت $\frac{W}{M}$ به طور کراندار فشرده می باشد برای این منظور، اگر $\{g_n + M\}$ دنباله کران دار دلخواهی در $\frac{W}{M}$ باشد آنگاه $h_n \in M$ وجود دارد به طوریکه $\{g_n + h_n\}$ دنباله کران دار در W می باشد. لذا $g_0 \in W$ و زیر دنباله همگرا $\{g_{n_k} + h_{n_k}\}$ وجود دارد به طوریکه $g_{n_k} + h_{n_k} \rightarrow g_0$ ، از آنجائیکه

$$d(g_{n_k} - g_0, M) = d(g_{n_k} - g_0 - h_{n_k}, M) \leq \|g_{n_k} - h_{n_k} - g_0\|$$

نتیجه می شود که $g_{n_k} + M \rightarrow g_0 + M$ علت این است که چون

$$d(g_{n_k} - g_0, M) \leq \|g_{n_k} - h_{n_k} - g_0\|$$

از طرفی طبق فرض $h_{n_k} + g_{n_k} \rightarrow g_0$ ، لذا حکم مربوطه برقرار است. بنابراین $\frac{W}{M}$ به طور کراندار فشرده می باشد حال از آنجائیکه $\frac{W}{M}$ هم تقریب پذیر می باشد طبق لم ۱۴.۳.۳ R_W نیم پیوسته ی بالایی می باشد. $\square$

قضیه ۱۶.۳.۳. فرض کنیم M زیر فضای تقریب پذیر از فضای نرم دار X بوده و W زیر فضای هم تقریب پذیر از X شامل M باشد به طوریکه برای هر $x \in X$ ، $R_W(x)$ فشرده باشد، آنگاه برای هر $x \in X$ ، $R_W(x + M)$ فشرده است.

برهان. از آنجائیکه W هم تقریب پذیر است بنابراین $\frac{W}{M}$ هم تقریب پذیر است. فرض کنیم $x + M \in \frac{X}{M}$ و $g_n + M \in R_W(x + M)$ دلخواه باشند و

($n = 1, 2, \dots$) آنگاه برای هر $g + M \in \frac{W}{M}$ داریم:

$$\begin{aligned} \| (g_n - g) + M \| &= \| (g_n + M) - (g + M) \| \\ &\leq \| (x + M) - (g + M) \| \\ &= \| (x - g) + M \| \\ &\leq \| x - g \| \end{aligned}$$

از آنجائیکه M تقریب پذیر است، $m_n \in M$ وجود دارد به طوریکه به ازای $n \geq 1$ داریم $g_n + m_n \in R_W(x)$ از آنجائیکه $R_W(x)$ فشرده می باشد زیر دنباله $\{g_n + m_n\}$ از $\{g_n + m_n\}$ وجود دارد به طوریکه زیر دنباله $\{g_{n_k} + m_{n_k}\}$ همگرا به عنصر $d_0 \in R_W(x)$ بوده در نتیجه $d_0 + M_{\frac{W}{M}}(x + M)$ اکنون برای هر $f \in (\frac{x}{m})^*$ داریم

$$\| f(g_{n_k} + M) \| = f \circ \Pi(g_{n_k}) = f \circ \Pi(g_{n_k} + m_{n_k}) \longrightarrow f \circ \Pi(d_0) = f(d_0 + M)$$

حال از آنجائیکه $f \circ \Pi \in X^*$ می باشد نتیجه می شود زیر دنباله $\{g_{n_k} + M\}$ همگرا به عنصر $d_0 + M$ می باشد، یعنی $(g_{n_k} + m_{n_k}) + M \longrightarrow d_0 + M$ بنابراین برای هر $x + M \in \frac{X}{M}$ ، $R_{\frac{W}{M}}(x + M)$ فشرده می باشد، لذا $\frac{W}{M}$ شبه هم چبیشف می باشد. $\square$

۴.۳ نگاشت های حافظ بهترین هم تقریب

مشابه مفهوم نگاشت های حافظ بهترین تقریب، مفهوم نگاشت های حافظ بهترین هم تقریب را داریم. ابتدا تعریف زیر را که در فصل اول بیان کردیم

را یادآوری می کنیم.

تعریف ۱.۴.۳. فرض کنیم که X و Y دو فضای خطی نرم دار باشند. نگاشت مانند $T : X \rightarrow Y$ حافظ هم تقریب نامیده می شود اگر برای هر زیر فضای G از X و هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$T(R_G(x)) = R_{T(G)}(T(x))$$

تعریف ۲.۴.۳. فرض کنیم X و Y فضاهای خطی نرم دار روی میدان K باشند. نگاشتی مانند $T : X \rightarrow Y$ ایزومتري نامیده می شود هرگاه حافظ نرم باشد. یعنی برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|Tx\| = \|x\|$$

قضیه ۳.۴.۳. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار باشد. اگر $T : X \rightarrow X$ عملگر ایزومتري باشد، آنگاه برای هر زیر فضای G از X و هر $x \in X$ داریم

$$T(R_G(x)) = R_{T(G)}T(x)$$

یعنی هر عملگر ایزومتري $T : X \rightarrow X$ حافظ هم تقریب می باشد.

برهان. یادآوری می کنیم که

$$T(R_G(x)) = \{Tg : g \in G, \|g - y\| \leq \|x - y\|, \forall y \in G\}$$

و

$$R_{T(G)}T(x) = \{T(g) : g \in G, \|Tg - Ty\| \leq \|Tx - Ty\|, \forall y \in G\}$$

اکنون $Tg \in T(R_G(x))$ اگر و فقط اگر $g \in G$ و به ازای هر $y \in G$ داشته باشیم

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۵۹

$$\|g - y\| \leq \|x - y\|$$

، اگر و فقط اگر $g \in G$ و به ازای هر $y \in G$ داشته باشیم

$$\|T(g - y)\| \leq \|T(x - y)\|$$

(چون T ایزومتري می باشد) اگر و فقط اگر $Tg \in T(G)$ و به ازای هر $y \in G$ داشته باشیم

$$\|Tg - Ty\| \leq \|Tx - Ty\|$$

اگر و فقط اگر $Tg \in R_{T(G)}T(x)$ بنابراین $T(R_G(x)) = R_{T(G)}T(x)$. $\square$

قضیه ۴.۴.۳. فرض کنیم که X و Y دو فضای خطی نرم دار بوده و نگاشت خطی $T: X \rightarrow Y$ حافظ هم تقریب باشد اگر G زیر فضای هم تقریبی از X باشد آنگاه $T(G)$ زیر فضای هم تقریبی از Y است.

برهان. از آنجایی که G در X هم تقریب است بنابراین $R_G(x) \neq \emptyset$ ، آنگاه $g_0 \in R_G(x)$ وجود دارد به طوریکه

$$T(g_0) \in T(R_G(x)) = R_{T(G)}T(x)$$

بنابراین $T(g_0) \in R_{T(G)}(T(x))$ ، و این یعنی $R_{T(G)}(T(x)) \neq \emptyset$ ، در نتیجه $T(G)$ در Y هم تقریب است. $\square$

قضیه ۵.۴.۳. فرض کنیم که X و Y دو فضای خطی نرم دار بوده و نگاشت خطی $T: X \rightarrow Y$ حافظ هم تقریب باشد. آنگاه برای زیر فضای G از X داریم $T(\check{G}) = \check{T}(G)$

برهان. داریم

$$\begin{aligned} T(\check{G}) = \{Tx : x \in \check{G}\} &= \{Tx : \|g\| \leq \|x - g\|, \forall g \in G\} \\ &= \{Tx : \|Tg\| \leq \|Tx - Tg\|, \forall g \in G\} \\ &= T(\check{G}) \end{aligned}$$

□

قضیه ۶.۴.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای خطی نرم دار بوده و $T : X \rightarrow Y$ نگاشت خطی باشد به طوریکه هم تقریب را حفظ کند. اگر G زیر فضای هم چبیشف از X باشد آنگاه $T(G)$ زیر فضای هم چبیشف از Y است.

برهان. فرض کنیم که G زیر فضای هم چبیشف از X بوده و نیز فرض کنیم که $y_1, y_2 \in R_{T(G)}(T(x))$ باشد، نشان می دهیم که $y_1 = y_2$. از آنجائیکه $R_{T(G)}(T(x)) = T(R_G(x))$ پس بنابراین برای $x_1, x_2 \in R_G(x)$ داریم $y_1 = Tx_1$ و $y_2 = Tx_2$ چون G هم چبیشف است پس $x_1 = x_2$ ، از آنجائیکه T یک تابع است پس بنابراین $Tx_1 = Tx_2$ ، یعنی $y_1 = y_2$ در نتیجه $T(G)$ هم چبیشف است. □

۵.۳ - ε - حافظ هم تقریب

تعریف ۱.۵.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای خطی نرم دار بوده و $\varepsilon > 0$ باشد. نگاشت مانند $T : X \rightarrow Y$ ، ε -حافظ هم تقریب نامیده می شود اگر و فقط اگر برای هر زیر فضای G از X و هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$T(R_G(x, \varepsilon)) = R_{T(G)}(Tx, \varepsilon)$$

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۶۱

قضیه ۳.۵.۲. فرض کنیم X فضای خطی نرم دار بوده و $\varepsilon > 0$ باشد. آنگاه هر عملگر ایزومتري $T: X \rightarrow X$ ، ε -حافظ هم تقریب است.

برهان. از آنجائیکه T ایزومتري است برای هر $x \in X$ داریم $\|Tx\| = \|x\|$ ، لذا

$$T(R_G(x, \varepsilon)) = \{Tg : g \in G, \|g - g_0\| \leq \|x - g\| + \varepsilon, \forall g \in G\}$$

و نیز

$$R_{T(G)}(T(x), \varepsilon) = \{T(g) : g \in G, \|T(g) - T(g_0)\| \leq \|T(x) - T(g)\| + \varepsilon, \forall g \in G\}$$

اکنون $T(g) \in T(R_G(x, \varepsilon))$ ، اگر و فقط اگر $g \in G$

$$\|g - g_0\| \leq \|x - g\| + \varepsilon$$

اگر و فقط اگر $g \in G$ و نیز

$$\|T(g - g_0)\| \leq \|T(x - g)\| + \varepsilon, \quad (\forall g \in G)$$

(زیرا T ایزومتري است) اگر و فقط اگر $Tg \in TG$ و

$$\|Tg - Tg_0\| \leq \|Tx - Tg\| + \varepsilon, \quad (\forall g \in G)$$

اگر و فقط اگر $T(g) \in R_{T(G)}(T(x), \varepsilon)$ ، بنابراین داریم

$$T(R_G(x, \varepsilon)) = R_{T(G)}(T(x), \varepsilon)$$

□

قضیه ۳.۵.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای خطی نرم دار بوده و $\varepsilon > 0$ بوده و $T: X \rightarrow Y$ نگاشت، ε -حافظ هم تقریب باشد آنگاه

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۶۲

الف: اگر T نگاشتی خطی باشد و G زیر فضای از X باشد آنگاه برای هر

$$x \in X \text{ و } y \in G, \text{ اگر } x \perp_\varepsilon y \text{ آنگاه } T(x) \perp_\varepsilon T(y)$$

$$T(\check{G}_\varepsilon) = \check{T}(G)_\varepsilon \text{ ب}$$

برهان. الف: فرض کنیم T ، ε -حافظ هم تقریب باشد اگر $x \in X$ و $y \in G$ باشند به طوریکه $x \perp_\varepsilon y$ ، لذا داریم

$$\|y + \alpha x\| + \varepsilon \geq \|y\|, \quad (|\alpha| \leq 1)$$

بنابراین

$$\|y - 0\| \leq \|y - (-\alpha x)\| + \varepsilon, \quad (\alpha x \in \langle x \rangle)$$

که $\langle x \rangle$ زیر فضای تولید شده توسط x است. این ایجاب می کند

$$0 \in R_{\langle x \rangle}(y, \varepsilon)$$

آنگاه

$$0 = T(0) \in T(R_{\langle x \rangle}(y, \varepsilon)) = R_{T(\langle x \rangle)}(Ty, \varepsilon)$$

اکنون از آنجائیکه

$$T(\langle x \rangle) = \{T(\alpha x)\} = \{\alpha T(x)\} = \langle Tx \rangle$$

لذا $0 \in R_{\langle Tx \rangle}(Ty, \varepsilon)$ ، در نتیجه

$$\|Ty - 0\| \leq \|Ty - \alpha Tx\| + \varepsilon$$

□

لذا $\|Ty\| \leq \|Ty - \alpha Tx\| + \varepsilon$ ، بنابراین داریم $T(y) \perp_\varepsilon T(x)$.

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۶۳

برهان. ب: طبق تذکر ۱۵.۲.۲ داریم

$$\begin{aligned} T(\check{G}_\varepsilon) &= \{Tg : g \in \check{G}_\varepsilon\} \\ &= \{Tg : \|g\| \leq \|x - g\| + \varepsilon, \forall g \in G\} \\ &= \{Tg : \|Tg\| \leq \|Tx - Tg\| + \varepsilon, \forall g \in G\} \\ &= T(\check{G})_\varepsilon \end{aligned}$$

□

۶.۳ بعضی از روش های یافتن بهترین هم تقریب در فضاهای نرم دار

ابتدا تعریف زیر را بیان می کنیم.

تعریف ۱.۶.۳. فرض کنیم X یک فضای نرم دار باشد. آنگاه عنصر $x \in X$ نرمال نامیده می شود، هرگاه فقط یک $f \in X^*$ وجود داشته باشد به طوریکه داشته باشیم $f(x) = \|x\|$ همچنین $\|f\| = 1$.

لم ۲.۶.۳. فرض کنیم X یک فضای نرم دار بوده و M زیر فضای خطی از X باشد، $x \in X$ و $g_0 \in X \setminus \overline{M}$ ، آنگاه $g_0 \in R_M(x)$ اگر و فقط اگر برای هر $g \in M$ ، $f_g \in X^*$ وجود داشته باشد به طوریکه $f_g(x - g_0) = 0$ ، $\|f_g\| = 1$ و $f_g(g) = \|g\|$.

□

برهان. به منبع [۱۶] مراجعه شود.

نتیجه ۳.۶.۳. فرض کنیم X یک فضای نرم دار بوده و M زیر فضای خطی از X باشد به طوریکه برای هر $g \in M$ ، g نرمال باشد، $x \in X \setminus \overline{M}$ همچنین $g_0 \in M$ ، آنگاه $g_0 \in R_M(x)$ اگر و فقط اگر برای هر $g \in M$ داشته باشیم $f_g(x - g_0) = 0$.

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۶۴

در ادامه یکی از راههای تشخیص بهترین هم تقریب در فضای L^p را بیان می کنیم.

نتیجه ۴.۶.۳. فرض کنیم $X = L^p$ بوده و M زیرفضای خطی از X و $x = \{x_n\} \in X \setminus \overline{M}$ و نیز $g_0 = \{a_n\} \in M$ باشد. آنگاه $g_0 \in R_M(x)$ اگر و فقط اگر برای هر $g = \{b_n\} \in M$ داشته باشیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

برهان. به منبع [۶] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۵.۶.۳. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار بوده، G زیر فضایی خطی از X و $x \in X$ باشد. آنگاه داریم

$$R_G(x) = \{g_0 \in G : g_0 \in \cap_{g \in G} P_{\langle g_0, x \rangle}(g)\}$$

که در آن $\langle g_0, x \rangle$ منیفلد خطی تولید شده توسط g_0 و x است.

برهان. به منبع [۱۷] مراجعه شود. $\square$

نتیجه ۶.۶.۳. فرض کنیم که X یک فضای خطی نرم دار بوده و G زیر فضای خطی از X و $x \in X \setminus G$ باشد. برای عنصر $g_0 \in G$ ، $g_0 \in R_G(x)$ اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$G \subset P_{[x-g_0]}^{-1}(0) = \{z \in X : 0 \in P_{[x-g_0]}(z)\}$$

که در آن

$$[x - g_0] = \{\alpha(x - g_0) : \alpha \in R\}$$

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۶۵

قضیه ۷.۶.۳. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار بوده، G زیر فضای خطی از X و $x \in X \setminus G$ باشد. برای عنصر $g_0 \in R_G(x)$ ، اگر و فقط اگر برای هر $g \in G$ تابع $h^g \in X^*$ موجود باشد به طوریکه

$$\|h^g\| = 1 \text{ الف}$$

$$h^g(x - g_0) \geq 0 \text{ ب}$$

$$h^g(g_0 - g) = \|g_0 - g\| \text{ ج}$$

□

برهان. به منبع [۱۶] مراجعه شود.

تعبیر هندسی قضیه بالا به این صورت است که برای هر $g \in G$ ابر صفحه H_g شامل گوی $B(g, \|g - g_0\|)$ در نقطه g_0 وجود دارد به طوریکه x و $B(g, \|g - g_0\|)$ در طرفین این ابر صفحه قرار دارند.

قضیه ۸.۶.۳. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار بوده، G یک زیر فضای خطی از X و $x \in X \setminus G$ باشد. آنگاه عنصر $g_0 \in R_G(x)$ در $g_0 \in R_G(x)$ صدق می کند اگر و فقط اگر برای هر $g \in G$ دو نقطه ی انتهایی f_1^g, f_2^g از

$$B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$$

و دو عدد $\lambda_1^g, \lambda_2^g \geq 0$ که $\lambda_1^g + \lambda_2^g = 1$ چنان موجود باشند به طوریکه

$$\lambda_1^g f_1^g(x) + \lambda_2^g f_2^g(x) = \lambda_1^g f_1^g(g_0) + \lambda_2^g f_2^g(g_0) \text{ الف}$$

$$\lambda_1^g f_1^g(g) + \lambda_2^g f_2^g(g) = \|g\| \text{ ب}$$

□

برهان. به منبع [۱۶] مراجعه شود.

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۶۶

نتیجه ۹.۶.۳. توجه می کنیم که قضیه ۸.۶.۳ در مورد ضرایب مختلط به جای دو نقطه f_i^g با سه نقطه، و به جای دو عدد λ_i^g با سه عدد برقرار می باشد، که $i = 1, 2, 3$

تذکر ۱۰.۶.۳. سینگر^۱ و پاپینی^۲ با بکار بردن قضیه ۸.۶.۳ مشخصه ی عناصر بهترین هم تقریب را در فضای $X = C(Q)$ از همه ی توابع پیوسته حقیقی مقدار روی فضای فشرده Q با نرم سوپریمم داده شده به صورت $\|x\| = \max_{q \in Q} |x(q)|$ نشان دادند. آنها همچنین بعضی کاربردها، نتایج مشخصه و وجود عناصر بهترین هم تقریب را در فضای $X = C([a, b])$ نشان دادند و بخصوص آنها، شرح چندجمله ای های هم تقریب را در فضای $C[a, b]$ کامل کردند.

روشهای که تاکنون گفته شد، راههایی برای یافتن بهترین هم تقریب در فضاهای نرم دار بود، اما در مورد فضاهای دیگر هم روشهای وجود دارد که در اینجا به ذکر یک مورد اشاره می کنیم. اما قبل از بیان این روش تعریف بسیار مهم زیر را می آوریم.

تعریف ۱۱.۶.۳. برای هر تابع $f \in C[a, b]$ ، نرم اکید یا $L_\infty - norm$ یا نرم سوپریمم را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

بهترین هم تقریب با توجه به این نرم را بهترین هم تقریب یکنواخت می نامیم.

^۱Singer

^۲Papini

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۶۷

تعریف ۱۲.۶.۳. مجموعه ی نقاط اکستریم تابع $f \in C[a, b]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$E(f) = \{t \in [a, b] : |f(t)| = \|f\|_{\infty}\}$$

حال یکی از مهم ترین معیارهای تشخیص بهترین تقریب و بهترین هم تقریب را در فضای توابع پیوسته بیان می کنیم، که به معیار کولوموگروف معروف می باشد.

قضیه ۱۳.۶.۳. فرض کنیم G زیر فضای از فضای توابع پیوسته ی $C[a, b]$ بوده، $f \in C[a, b]$ و $g_f \in G$ باشد. آنگاه احکام آمده در زیر معادل می باشند.

الف: تابع g_f بهترین تقریب یکنواخت f از G است.

ب: برای هر تابع $g \in G$ داریم

$$\min_{t \in E(f-g_f)} (f(t) - g_f(t)) \cdot g(t) \leq 0$$

معیارمشابهی برای بهترین هم تقریب یکنواخت، طبق قضیه ی زیر بیان می شود.

قضیه ۱۴.۶.۳. فرض کنیم G زیرمجموعه ای از فضای توابع پیوسته ی $C[a, b]$ بوده به طوریکه برای هر $g \in G$ و $\alpha \in [0, \infty)$ داشته باشیم $\alpha g \in G$ همچنین فرض کنیم $f \in C[a, b] \setminus G$ و $g_f \in G$ باشد، آنگاه احکام زیر معادل می باشند.

الف: تابع g_f بهترین هم تقریب یکنواخت برای f از G می باشد.

ب: برای هر تابع $g \in G$ داریم :

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۶۸

$$\min_{t \in E(g-g_f)} (f(t) - g_f(t))(g(t) - g_f(t)) \leq 0$$

برهان. ب $\leftarrow$ الف: فرض کنیم که ب برقرار باشد، آنگاه نقطه ی $t \in E(g-g_f)$ وجود دارد به طوریکه داریم :

$$(f(t) - g_f(t))(g(t) - g_f(t)) \leq 0$$

بنابراین برای هر $g \in G$ نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{\infty} &\geq |f(t) - g(t)| \\ &= |(f(t) - g_f(t)) - (g(t) - g_f(t))| \\ &= |f(t) - g_f(t)| + |g(t) - g_f(t)| \\ &\geq |g(t) - g_f(t)| \\ &= \|g - g_f\|_{\infty} \end{aligned}$$

برهان. الف $\leftarrow$ ب : اکنون فرض کنیم که ب برقرار نباشد. آنگاه تابع $g_1 \in G$ وجود دارد به طوریکه داریم

$$(f(t) - g_f(t))(g_1(t) - g_f(t)) > 0, \quad (\forall t \in E(g_1 - g_f))$$

اما از آنجائیکه $E(g_1 - g_f)$ فشرده می باشد عدد حقیقی $c > 0$ وجود دارد به طوریکه داریم

$$(f(t) - g_f(t))(g_1(t) - g_f(t)) > c, \quad (\forall t \in E(g_1 - g_f))$$

علاوه براین همسایگی U از $E(g_1 - g_f)$ وجود دارد به طوریکه برای هر $t \in U$

داریم

$$(f(t) - g_f(t))(g_1(t) - g_f(t)) > \frac{c}{2} \quad (۲.۳)$$

همچنین

$$|g_1(t) - g_f(t)| \geq \frac{1}{2} \|g_1 - g_f\|_\infty \quad (۳.۳)$$

حال از آنجائیکه $[a, b] \setminus U$ فشرده می باشد، عدد حقیقی $d > 0$ وجود دارد به طوریکه برای هر $t \in [a, b] \setminus U$ داریم

$$|g_1(t) - g_f(t)| < \|g_1 - g_f\|_\infty - d \quad (۴.۳)$$

با ضرب $f - g_f$ و اختصاص عامل مناسب و بکار بردن این حقیقت که نگاشت بهترین هم تقریب همگن می باشد، بدون کاستن از کلیت فرض می کنیم که

$$\|f - g_f\|_\infty \leq \min\{d, \frac{1}{2} \|g_1 - g_f\|_\infty\} \quad (۵.۳)$$

اکنون دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

حالت اول: فرض کنیم $t \in [a, b]$ ، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} |f(t) - g_1(t)| &= |(f(t) - g_f(t)) - (g_1(t) - g_f(t))| \\ &\leq |f(t) - g_f(t)| + |g_1(t) - g_f(t)| \\ &\leq \|f - g_f\|_\infty + \|g_1 - g_f\|_\infty - d \\ &< \|g_1 - g_f\|_\infty \end{aligned}$$

حالت دوم: فرض کنیم $t \in U$ ، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} |f(t) - g_1(t)| &= |(f(t) - g_f(t)) - (g_1(t) - g_f(t))| \\ &= ||f(t) - g_f(t)| - |g_1(t) - g_f(t)|| \\ &= -|f(t) - g_f(t)| + |g_1(t) - g_f(t)| \\ &< |g_1(t) - g_f(t)| \\ &\leq \|g_1 - g_f\|_\infty \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $t \in [a, b]$ داریم

$$|f(t) - g_1(t)| < \|g_1 - g_f\|_\infty$$

که نتیجه می دهد

$$\|f - g_1\|_\infty < \|g_1 - g_f\|_\infty$$

و این نشان می دهد g_f بهترین هم تقریب یکنواخت f از G نیست که یک تناقض است.

اگر G زیرفضایی از فضای توابع پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشد، آنگاه قضیه آمده در زیر، معیار نوعی کولوموگروف برای بهترین هم تقریب یکنواخت است.

قضیه ۱۵.۶.۳. فرض کنیم G زیر فضایی از فضای توابع پیوسته بر $[a, b]$ بوده و $f \in C[a, b] \setminus G$ باشد، همچنین $g_f \in G$ ، آنگاه احکام آمده در زیر معادل می باشند.

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۷۱

الف: تابع g_f ، بهترین هم تقریب یکنواخت برای f از G است.

ب: برای هر تابع $g \in G$ داریم

$$\min_{t \in E(g)} (f(t) - g_f(t))g(t) \leq 0$$

برهان. ب $\leftarrow$ الف : فرض کنیم که ب برقرار باشد. حال فرض کنیم که

$g \in G$ یک تابع دلخواه باشد از آنجائیکه $g_f \in G$ و $g - g_f \in G$ بوده بنابراین

طبق فرض نقطه ی $t \in E(g - g_f)$ وجود دارد به طوریکه

$$(f(t) - g_f(t))(g(t) - g_f(t)) \leq 0$$

قسمت آخر اثبات شبیه قضیه ۱۴.۶.۳ می باشد.

برعکس، الف $\leftarrow$ ب : فرض خلف می کنیم که ب برقرار نباشد، آنگاه

تابع $g_1 \in G$ وجود دارد به طوریکه برای هر $t \in E(g_1)$ داریم

$$(f(t) - g_f(t))g_1(t) > 0$$

حال فرض کنیم $g_2 = g_1 + g_f$ ، آنگاه برای هر $t \in E(g_2 - g_1)$ داریم

$$(f(t) - g_f(t))(g_2(t) - g_f(t)) > 0$$

طبق قضیه ۱۴.۶.۳ می توانیم نشان دهیم که

$$\|f - g_2\|_{\infty} < \|g_2 - g_f\|_{\infty}$$

این نشان می دهد g_f بهترین هم تقریب یکنواخت f از G نیست که یک

تناقض است.

فصل ۳. بعضی نتایج مربوط به بهترین تقریب و بهترین هم تقریب ۷۲

تعریف ۱۶.۶.۳. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار بوده و G زیر مجموعه ای از X باشد همچنین فرض کنیم $g_f \in G$ ثابت باشد. برای هر $g \in G$ ، مجموعه ی $\ell(g, g_f)$ از توابع خطی پیوسته روی g و g_f به صورت زیر تعریف می شود:

$$\ell(g, g_f) = \{L \in G^* : L(g - g_f) = \|g - g_f\|, \|L\| = 1\}$$

که G^* نشان دهنده ی مجموعه ی تابعک های خطی پیوسته تعریف شده روی G می باشد.

اکنون یکی از مهم ترین قضایای این بخش را بیان خواهیم کرد.

قضیه ۱۷.۶.۳. فرض کنیم G زیر مجموعه ای از فضای خطی نرم دار X بوده، $f \in X \setminus G$ و $g_f \in G$ باشد. اگر برای هر $g \in G$ داشته باشیم

$$\min_{L \in \ell(g, g_f)} L(f - g_f) \leq 0$$

یا اگر برای هر $g \in G$ ، $L \in \ell(g, g_f)$ وجود داشته باشد به طوریکه $L(g_f) \geq L(f)$ ، آنگاه g_f یک بهترین هم تقریب برای f از G است.

برهان. فرض کنیم $\min_{L \in \ell(g, g_f)} L(g - g_f) \leq 0$ ، آنگاه تابعک خطی پیوسته

$L \in \ell(g, g_f)$ وجود دارد به طوریکه $L(f - g_f) \leq 0$ ، این نتیجه می دهد که

$$\|g - g_f\| = L(g - g_f) = L(g) - L(g_f) \leq L(g) - L(f) = L(g - f) \leq \|g - f\|$$

□

و لذا حکم ثابت شد.

۷.۳ بعضی از تساویهای بهترین هم تقریب

اگر g_1 و g_2 بهترین تقریب های، $f \in C[a, b] \setminus G$ بوده که متعلق به G می باشند، آنگاه واضح است که

$$\|f - g_1\| = \|f - g_2\|$$

اما در باره هم تقریب، غیر ممکن است. در حالت کلی می خواهیم رابطه ی بین $\|f - g_1\|$ و $\|f - g_2\|$ بیابیم، هنگامی که g_1 و g_2 بهترین هم تقریبهای f می باشند. در قضیه بعدی نشان دهیم که تحت نرم یکنواخت چه رابطه ای بین $f - g_1$ و $f - g_2$ برقرار است.

قضیه ۱.۷.۳. فرض کنیم G زیرمجموعه ای از $C[a, b]$ بوده و $g_1, g_2 \in G$ بهترین هم تقریب یکنواخت برای $f \in C[a, b] \setminus G$ از G باشند. اگر برای هر $g \in G \setminus \{g_i\}$ داشته باشیم :

$$\max_{t \in E(f - g_i)} (f(t) - g_i(t))(g(t) - f(t)) \geq 0 \quad (i = 1, 2) \quad (۶.۳)$$

آنگاه داریم

$$\|f - g_1\|_{\infty} = \|f - g_2\|_{\infty}$$

برهان. نقطه ی $t \in E(f - g_i)$ وجود دارد به طوریکه برای $i = 1, 2$ داریم

$$(f(t) - g_i(t))(g(t) - f(t)) \geq 0$$

بنابراین نتیجه می شود

$$\begin{aligned}
 \|f - g_1\|_{\infty} &\geq \|g_1 - g_2\|_{\infty} \\
 &\geq |g_1(t) - g_2(t)| \\
 &= |(g_1(t) - f(t)) + (f(t) - g_2(t))| \\
 &= |g_1(t) - f(t)| + |f(t) - g_2(t)| \\
 &\geq |f(t) - g_2(t)| \\
 &= \|f - g_2\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

لذا

$$\|f - g_1\|_{\infty} \geq \|f - g_2\|_{\infty} \quad (I)$$

بطور مشابه می توان نشان داد

$$\|f - g_2\|_{\infty} \geq \|f - g_1\|_{\infty} \quad (II)$$

و نتیجه با توجه به نامساویهای (I) و (II) ثابت می شود. $\square$

تذکر ۲.۷.۳. در قضیه ۱.۷.۳ تساوی برقرار است، حتی اگر شرط موجود

با شرط زیر جایگزین شود. یعنی برای $t \in E(f - g_i)$ داشته باشیم

$$\text{Sgn}(f(t) - g_i(t)) = \text{Sgn}(g(t) - f(t)), \quad (i = 1, 2)$$

گزاره ۳.۷.۳. فرض کنیم G زیر مجموعه ای از $C[a, b]$ و $g_1, g_2 \in G$ بهترین

هم تقریب یکنواخت برای $f \in C[a, b] \setminus G$ باشند. اگر

$$\max_{t \in E(f - g_1) \cap E(f - g_2)} (f(t) - g_1(t)) \cdot (g_2(t) - f(t)) \geq 0$$

آنگاه

$$\|f - g_1\|_{\infty} = \|f - g_2\|_{\infty}$$

برهان. نقطه ی $t \in E(f - g_1) \cap (f - g_2)$ وجود دارد به طوریکه

$$(f(t) - g_1(t)) \cdot (g_2(t) - f(t)) \geq 0$$

طبق مراحل اثبات قضیه ۱.۷.۳ نتیجه می شود که

$$\|f - g_1\|_{\infty} \geq \|f - g_2\|_{\infty}$$

به طور مشابه می توان نشان داد

$$\|f - g_2\|_{\infty} \geq \|f - g_1\|_{\infty}$$

□

و اثبات به پایان می رسد.

در قضیه بعد می خواهیم با استفاده از نگاشت های خطی کران دار، یک کران بالا برای بهترین هم تقریب بیابیم. لذا در ابتدا تعاریف زیر را می آوریم.

تعریف ۴.۷.۳. فرض کنید G زیر فضایی متناهی البعد از فضای خطی نرم دار حقیقی X باشد. نگاشت خطی $L: X \rightarrow G$ ، کران دار نامیده می شود هرگاه:

$$\|L\| := \sup\{\|L(f)\|: f \in X, \|f\| \leq 1\} < \infty$$

تعریف ۵.۷.۳. نگاشت خطی کران دار $L: X \rightarrow G$ یک تصویر نامیده می شود، اگر برای هر $g \in G$ داشته باشیم:

$$L(g) = g$$

در قضیه زیر برای هر $g \in G$ ، کران بالایی برای $\|g - g_f\|$ بدست می آوریم، البته برای تصویرهایی که نرم کمتر از ۱ دارند.

قضیه ۶.۷.۳. فرض کنیم G یک زیر فضای متناهی البعد از فضای خطی نرم دار X بوده و $L : X \rightarrow B$ یک تصویر باشد به طوریکه $\|L\| < 1$ ، فرض کنیم که $f \in X \setminus G$ بوده و $g_f \in G$ یک بهترین هم تقریب f باشد، آنگاه برای هر $g \in G$ داریم

$$\|g - g_f\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|} \|f - L(f)\|$$

برهان. طبق نامساوی مثلث و تعریف ۵.۷.۳ داریم

$$\begin{aligned} \|f - L(f)\| &= \|f - g + g - L(f)\| \\ &\geq \|f - g\| - \|L(f) - g\| \\ &= \|f - g\| - \|L(f - g)\| \\ &\geq \|f - g\| - \|L\| \cdot \|f - g\| \\ &= (1 - \|L\|) \|f - g\| \\ &\geq (1 - \|L\|) \|g - g_f\| \end{aligned}$$

که ایجاب می کند

$$\|g - g_f\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|} \|f - L(f)\|$$

□

فصل ۴

بهترین هم تقریب های همزمان

۱.۴ پیش گفتار

در این فصل مفهوم بهترین هم تقریب همزمان و ε -هم تقریب همزمان معرفی شده، همچنین بهترین هم تقریب های همزمان روی فضای خارج قسمت مورد بررسی قرار گرفته و در انتها مفهوم ε -بهترین هم تقریب همزمان مورد بررسی قرار گرفته است.

۲.۴ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار باشد. برای زیرمجموعه ناتهی W از X و هر $x \in X$ فاصله ی نقطه ی x از مجموعه W به صورت زیر تعریف می شود:

$$d(x, W) = \inf_{w \in W} \|x - w\|$$

یادآوری می کنیم که نقطه ی $w_0 \in W$ ، بهترین تقریب برای $x \in X$ است، اگر داشته باشیم:

$$\|x - w_0\| = d(x, W)$$

تعریف ۲.۲.۴. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار باشد. W زیر مجموعه از X بوده و B مجموعه ای کران دار در X باشد، تعریف می کنیم:

$$d(B, W) = \inf_{w \in W} \sup_{b \in B} \|b - w\|$$

تعریف ۳.۲.۴. فرض کنیم G زیر مجموعه ای از X و B زیر مجموعه کران دار از X باشد، عنصر $g_0 \in G$ بهترین هم تقریب همزمان برای B از G نامیده

می شود، هرگاه برای هر $g \in G$ داشته باشیم

$$\|g - g_0\| \leq \inf_{x \in B} \|x - g\| = d(g, B)$$

مجموعه ی همه ی بهترین هم تقریب های همزمان B از G را با نماد

$R_G(B)$ نشان می دهیم، یعنی داریم

$$R_G(B) = \{g_0 \in G : \|g - g_0\| \leq \inf_{x \in B} \|x - g\|, \forall g \in G\}$$

فرض کنیم که $\beta(X)$ نشان دهنده ی مجموعه همه ی زیر مجموعه های کران دار از X باشد. زیرمجموعه ی G هم تقریبی همزمان نامیده می شود اگر $R_G(B)$ برای هر $B \in \beta(X)$ شامل حداقل یک عنصر باشد و G هم چبیشف همزمان نامیده می شود هرگاه $R_G(B)$ برای هر $B \in \beta(X)$ شامل دقیقاً یک عنصر باشد. اگر

$$D(R_G^s) = \{B \in \beta(X) : R_G(B) \neq \emptyset\}$$

آنگاه نگاشت مقادیر مجموعه ای تابع مجموعه ای

$$R_G^s : D(R_G^s) \longrightarrow 2^G$$

به صورت زیر تعریف می شود:

$$B \longrightarrow \beta(X)$$

مجموعه ی همه بهترین هم تقریبهای همزمان، هم تصویر متریک مجموعه ای نامیده می شود.

قضیه ۴.۲.۴. فرض کنیم G زیرمجموعه ای از فضای خطی نرم دار X بوده و B زیر مجموعه ای کران دار از X باشد. آنگاه

$$R_G(B) = \cap_{x \in B} R_G(x)$$

برهان. به منبع [۱۳] مراجعه شود. $\square$

مثال ۵.۲.۴. فرض کنیم $X = C_R[-1, 0]$ نشان دهنده ی فضای همه ی توابع پیوسته حقیقی مقدار f روی بازه $[-1, 0]$ با نرم داده شده به صورت زیر باشد.

$$\|f\| = \max_{t \in [-1, 0]} |f(t)|$$

حال فرض کنیم $B = \{1, t^2, t^4, \dots\}$, $B' = \{t, t^3, t^5, \dots\}$ و $G = \{\alpha t : \alpha \geq 0\}$, $G' = \{\alpha t : \alpha \geq 1\}$ و $G' \subset G \subset X$ و B' زیرمجموعه های کران دار از X باشد. اگر $g_0(t) = \alpha_0 t \in G$ آنگاه برای هر $f \in B$ و هر $g \in G$ داریم

$$\|f - g\| = \|t^m - \alpha t\| = 1 + \alpha \quad (\forall \alpha \geq 0, m = 0, 2, 4, \dots)$$

ونیز

$$\|g - g_0\| = \|\alpha t - \alpha_0 t\| = |\alpha - \alpha_0| \quad (\forall \alpha \geq 0)$$

نتیجه می شود که

$$R_G(B) = \{\alpha_0 t : |\alpha - \alpha_0| \leq 1 + \alpha, \forall \alpha \geq 0\}$$

تعریف ۶.۲.۴. دنباله ی $\{B_n\}$ از مجموعه های در X ، همگرای مجموعه ای به زیر مجموعه ی B نامیده می شود، هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

الف: برای هر $x \in B$ و هر $n \in N$ ، در دنباله ی $\{x_n\}$ داشته باشیم $x_n \in B_n$

همچنین $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

ب: برای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح N وجود داشته باشد به طوریکه برای هر

$n \geq N$ داشته باشیم $B_n \subset B_\varepsilon$ که $B_\varepsilon = \cup_{x \in B} N(x, \varepsilon)$ (اجتماع همه ی کره های

باز با مرکز در B و شعاع ε) در این موارد می نویسیم $S - \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$

تعریف ۷.۲.۴. فرض کنیم X و Y فضاهای خطی نرم دار باشند. نگاشت

$u : \beta(X) \rightarrow 2^Y$ پیوسته ی مجموعه ای روی $\beta(X)$ نامیده می شود، هرگاه

اگر $\{B_n\}$ دنباله ای از مجموعه ها در $\beta(X)$ بوده که همگرای مجموعه ای به

$B \in \beta(X)$ باشد، آنگاه دنباله ی $u(B_n)$ همگرای مجموعه ای به $u(B)$ باشد.

فرض کنیم Λ گردایه ای از زیر مجموعه ها ی از فضای خطی نرم دار X

باشد، Λ بسته مجموعه ای نامیده می شود اگر برای هر دنباله ی $\{B_n\}$ از

مجموعه های در Λ که همگرای مجموعه ای به $B \subset X$ باشد، داشته باشیم

$$B \in \Lambda$$

تعریف ۸.۲.۴. فرض کنیم X و Y فضاهای خطی نرم دار باشند. نگاشت

$$u : B(X) \rightarrow 2^Y$$

الف: K - نیم پیوسته ی بالای مجموعه ای نامیده می شود، اگر رابطه ی

$$y \in u(B) \text{ که } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \text{ و } y_n \in U(B_n), S - \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$$

ب: نیم پیوسته ی بالای مجموعه ای نامیده می شود، اگر مجموعه ی

$$\{B \in \beta(X) : u(B) \cap N \neq \emptyset\}$$

برای هر مجموعه ی بسته ی $N \subset Y$ ، بسته ی مجموعه ای باشد.

۳.۴ بهترین هم تقریبهای همزمان روی فضای خارج قسمت

در این بخش می خواهیم بعضی از قضایای مربوط به بهترین تقریب همزمان روی فضای خارج قسمت را برای هم تقریب همزمان بیان کنیم. یادآوری می کنیم نگاشت کانونی $\Pi: X \rightarrow X/M$ که به صورت زیر تعریف می شود، یک نگاشت خطی، پیوسته و باز می باشد.

$$\Pi(x) = x + M$$

لم ۱.۳.۴. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار بوده و M زیر فضای دارای حداقل یک بهترین هم تقریب از X باشد، آنگاه برای هر مجموعه ی کران دار ناتهی B در X داریم

$$d(B, M) = \sup_{b \in B} \inf_{m \in M} \|b - m\|$$

برهان. از آنجائیکه M زیر فضای هم تقریب است، نتیجه می شود که برای هر $b \in B$ ، $m_b \in R_M(B)$ وجود دارد، به طوریکه داریم

$$\|m - m_b\| \leq \inf_{b \in B} \|b - m\|$$

لذا

$$d(B, M) = \inf_{m \in M} \sup_{b \in B} \|b - m\| \leq \sup_{b \in B} \|b - m_b\|$$

چون $m_b \in M$ بوده لذا m_b را آنقدر نزدیک به m اختیار می کنیم، تا این تفاضل از هر $\varepsilon > 0$ دلخواه کوچکتر شود. لذا

$$\leq \sup_{b \in B} \inf_{m \in M} \|b - m\| + \varepsilon \leq \inf_{m \in M} \sup_{b \in B} \|b - m\| + \varepsilon$$

چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است لذا قرار می دهیم $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ، با حد گیری از طرفین هنگامی که $n \rightarrow \infty$ داریم

$$\begin{aligned} d(B, M) &\leq \sup_{b \in B} \inf_{m \in M} \|b - m\| \leq \inf_{m \in M} \sup_{b \in B} \|b - m\| \\ &= d(B, M) \end{aligned}$$

چون اول و آخر نامساوی با هم برابر شد، لذا کلیه عبارات میانی با هم برابر می شود و لذا حکم برقرار است. $\square$

لم ۲.۳.۴. فرض کنیم که X فضای خطی نرم دار بوده و M زیر فضای دارای حداقل یک بهترین هم تقریب از X باشد همچنین فرض کنیم B زیر مجموعه ی دلخواهی از X باشد، آنگاه احکام آمده در زیر معادلند.

الف: B زیر مجموعه ی کراندار از X است.

ب: $\frac{B}{M}$ زیر مجموعه ی کران داری از $\frac{X}{M}$ است.

برهان. الف $\leftarrow$ ب : واضح است که اگر B زیر مجموعه ی کرانداری از X باشد، آنگاه $\frac{B}{M}$ زیر مجموعه ی کرانداری از $\frac{X}{M}$ است. زیرا برای هر $b \in B$ داریم

$$\|b + M\| = \inf_{m \in M} \|b - m\| \leq \|b\|$$

ب $\leftarrow$ الف : فرض کنیم $\frac{B}{M}$ زیر مجموعه ی کران داری از $\frac{X}{M}$ باشد، بنابراین داریم $\sup_{b \in B} \|b + M\| < \infty$. از آنجائیکه M زیر فضای دارای حداقل یک

بهترین هم تقریب است لذا برای هر $b \in B$ ، $m_b \in R_M(B)$ وجود دارد بطوریکه طبق تعریف بهترین هم تقریب داریم

$$\|m - m_b\| \leq \inf_{m \in M} \|b - m\|$$

طبق لم ۱.۳.۴ نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} \sup_{b \in B} \|b - m_b\| &= \sup_{b \in B} \|(b - m) + (m - m_b)\| \\ &= \sup_{b \in B} \|(b - m) + (m - m_b)\| \\ &\leq \sup_{b \in B} \|b - m\| + \sup_{b \in B} \|m - m_b\| \\ &\leq \sup_{b \in B} \|b - m\| + \sup_{b \in B} \inf_{m \in M} \|b - m\| \\ &\leq \sup_{b \in B} \|b - m\| + \inf_{m \in M} \sup_{b \in B} \|b - m\| \\ &\leq \varepsilon + \inf_{m \in M} \sup_{b \in B} \|b - m\| \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \sup_{b \in B} \|b - m_b\| &\leq \inf_{m \in M} \sup_{b \in B} \|b - m\| + \varepsilon \\ &= \sup_{b \in B} \inf_{m \in M} \|b - m\| + \varepsilon \\ &= \sup_{b \in B} \|b + M\| + \varepsilon \end{aligned}$$

اما از طرفی

$$\begin{aligned} \sup_{b \in B} (\|b\| - \|m_b\|) &\leq \sup_{b \in B} \|b - m_b\| \\ &\leq \sup_{b \in B} \|b + M\| + \varepsilon \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\sup_{b \in B} (\|b\| - \|m_b\|) \leq \sup_{b \in B} \|b + M\| + \varepsilon$$

□

که با انتقال $\|m_b\|$ به سمت راست حکم ثابت می شود.

لم ۳.۳.۴. فرض کنیم M زیر فضایی هم تقریب از فضای خطی نرم دار X بوده، $W \subseteq M$ زیر فضایی از X باشد، همچنین فرض کنیم B مجموعه ای کران دار در X باشد. اگر $m_0 \in R_M(B)$ ، آنگاه داریم

$$m_0 + W \in R_{\frac{M}{W}}\left(\frac{B}{W}\right)$$

برهان. از آنجائیکه B مجموعه ای کران دار در X است، طبق لم ۲.۳.۴ نتیجه می شود که $\frac{B}{W}$ مجموعه ای کران دار در $\frac{X}{W}$ است. حال فرض کنیم $m_0 \in R_M(B)$ و $m_0 + W \notin R_{\frac{M}{W}}\left(\frac{B}{W}\right)$ بنابراین

$$\begin{aligned} \sup_{m \in M} \|m - m' + W\| &< \sup_{m \in M} \|m - m_0 + W\| \\ &< \sup_{m \in M} \|m - m_0\| \\ &< \sup_{m \in M} \inf_{b \in B} \|b - m\| \end{aligned}$$

$$= d(B, M) \quad (۱.۴)$$

از طرف دیگر، برای هر $b \in B$ داریم

$$\|m - m' + W\| = \inf_{w \in W} \|m - m' - w\|$$

برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $w_b \in W$, $b \in B$ وجود دارد به طوریکه

$$\|m - m' - w_b\| \leq \|m - m' + W\| + \varepsilon$$

حال از آنجائیکه $m' + w_b \in M$ ، نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} d(B, M) &\leq \sup_{m \in M} \|m - (m' + w_b)\| \\ &\leq \sup_{m \in M} \|m - m' + W\| + \varepsilon \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(B, M) \leq \sup_{m \in M} \|m - m' + W\| \quad (۲.۴)$$

حال طبق نامساویهای ۲.۴ و ۱.۴ داریم

$$d(B, M) \leq \sup_{m \in M} \|m - m' + W\| \leq d(B, M)$$

□

که غیر ممکن می باشد. لذا حکم ثابت شده است.

نتیجه ۴.۳.۴. فرض کنیم M زیر فضای دارای حداقل یک بهترین هم تقریب از فضای خطی نرم دار X بوده و $W \subseteq M$ زیر فضایی از X باشد. اگر M هم تقریب همزمان باشد، آنگاه $\frac{M}{W}$ زیر فضای هم تقریب همزمان از $\frac{X}{W}$ است.

□

برهان. نتیجه از لم ۳.۳.۴ می باشد.

نتیجه ۵.۳.۴. فرض کنیم M زیر فضای دارای حداقل یک بهترین هم تقریب از فضای خطی نرم دار X بوده و $W \subseteq M$ زیر فضایی از X باشد. اگر

M هم تقریب همزمان باشد، آنگاه برای هر مجموعه ی کراندار B در X داریم

$$\Pi(R_M(B)) \subseteq R_{\frac{M}{W}}\left(\frac{B}{W}\right)$$

□

برهان. نتیجه از لم ۳.۳.۴ می باشد.

لم ۶.۳.۴. فرض کنیم M یک زیر فضای دارای حداقل یک بهترین هم تقریب از فضای خطی نرم دار X بوده و $M \supseteq W$ یک زیر فضا از X باشد. اگر B مجموعه ای کران دار در X باشد به طوریکه $w_0 \in R_W(b - m_0)$ همچنین $m_0 + W \in R_{\frac{M}{W}}\left(\frac{B}{W}\right)$ آنگاه داریم

$$w_0 + m_0 \in R_M(B)$$

برهان. ابتدا فرضیات قضیه را می نویسیم و با توجه به فرضیات، حکم را ثابت می کنیم. با توجه به مفروضات داریم

$$\|w - w_0\| \leq \inf_{b \in B} \| (b - m_0) - w \|, \quad (\forall w \in W)$$

همچنین

$$\| (m + W) - (m_0 + W) \| \leq \inf_{b \in B} \| (b + W) - (m + W) \|$$

می خواهیم نشان دهیم

$$\|m - (m_0 + w_0)\| \leq \inf_{b \in B} \|b - m\|, \quad (\forall m \in M)$$

بنابراین می توان نوشت

$$\begin{aligned}
 \| m - (m_0 + w_0) \| &= \| m - (m_0 + w_0) + w - w \| \\
 &= \| (m - m_0 + w) + (w - w_0) \| \\
 &\leq \| w - w_0 \| + \| (m - m_0) + w \| \\
 &\leq \inf_{b \in B} \| (b - m_0) - w \| + \inf_{b \in B} \| (b + W) - (m + W) \| \\
 &\leq \| (b - m_0) - w \| + \inf_{b \in B} \| (b + W) - (m + W) \| \\
 &\leq \| b - m_0 \| + \inf_{b \in B} \| (b - m) + W \| \\
 &\leq \| b - m_0 \| + \inf_{b \in B} \| b - m \| \\
 &\leq \varepsilon + \inf_{b \in B} \| b - m \|
 \end{aligned}$$

لذا با قرار دادن $\varepsilon = \frac{1}{n}$ و حدگیری از طرفین وقتی $n \rightarrow \infty$ میل می کند حکم ثابت می شود. $\square$

۴.۴ $-\varepsilon$ - بهترین هم تقریب های همزمان

فرض کنیم X یک فضای متریک بوده، G زیرمجموعه ناتهی از X و F زیرمجموعه ی کراندار ناتهی از X باشد. برای $\varepsilon > 0$ تعریف می کنیم:

$$R_{G(\varepsilon)}(F) = \{g_0 \in G : \sup_{g \in G} d(g, g_0) + \varepsilon \leq \inf_{g \in G} \sup_{y \in F} d(y, g)\}$$

عنصر $g_0 \in R_{G(\varepsilon)}(F)$ ، ε - بهترین هم تقریب همزمان از F با توجه به G نامیده می شود.

تعریف ۱.۴.۴. نگاشت $T : X \rightarrow X$ در شرط (A) صدق می کند، اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$d(Tx, y) \leq d(x, y)$$

تعریف ۲.۴.۴. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. نگاشت پیوسته $W : X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$ یک ساختار محدب روی X نامیده می شود، اگر برای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in [0, 1]$ و نیز $u \in X$ داشته باشیم:

$$d(u, W(x, y, \lambda)) \leq \lambda d(u, x) + (1 - \lambda)d(u, y)$$

فضای متریک (X, d) با ساختار محدب، یک فضای متریک محدب نامیده می شود.

تعریف ۳.۴.۴. فضای متریک محدب (X, d) در خاصیت (I) صدق می کند، اگر برای هر $x, y, p \in X$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$d(W(x, p, \lambda), W(y, p, \lambda)) \leq \lambda d(x, y)$$

که p دلخواه است، ولی نقطه ثابتی از X است و

$$W(x, p, \lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)y, \quad (x, y \in X, 0 \leq \lambda \leq 1)$$

می باشد.

تعریف ۴.۴.۴. زیر مجموعه C از فضای متریک محدب (X, d) محدب نامیده می شود، اگر برای هر $x, y \in C$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم $W(x, y, \lambda) \in C$

تعریف ۵.۴.۴. مجموعه ی C ستاره گون نامیده می شود، اگر یک $P \in C$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $x \in C$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم $W(x, p, \lambda) \in C$ ، یعنی به عبارتی مجموعه ی C ستاره گون نامیده می شود، هرگاه $x_0 \in C$ موجود باشد، به طوریکه برای $x \in C$ و $t \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$tx + (1 - t)x_0 \in C$$

تعریف ۶.۴.۴. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار بوده و S یک زیر مجموعه از X باشد. خود نگاشت T از S غیر انقباضی نامیده می شود، اگر برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم:

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

حال اگر $\|Tx - Ty\| < \|x - y\|$ که $x \neq y$ ، آنگاه نگاشت T انقباضی نامیده می شود.

تعریف ۷.۴.۴. اگر $A \in B(H)$ و $M \leq H$ باشد. می گوئیم M زیر فضای پایایی برای A می باشد اگر $Ah \in M$ هنگامی که $h \in M$ ، یا بعبارت دیگر اگر $A \subseteq M$ ، می گوئیم M یک زیر فضای کاهشی برای A است اگر $AM \subseteq M$ و

$$AM^\perp \subseteq M^\perp$$

لم ۸.۴.۴. فرض کنیم T نگاشتی از فضای متریک تام (X, d) بتوی خودش باشد و در رابطه زیر صدق کند، به طوریکه $x, y \in X$ بوده و a, b, c اعداد نامنفی هستند که $2a + 2b + 2c \leq 1$ ، آنگاه T نقطه ثابت یکتایی مانند u در X دارد.

$$d(Tx, Ty) \leq a[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + b[d(y, Tx) + d(x, Ty)] + cd(x, y)$$

□

برهان. به منبع [۱۴] لم ۲.۴ مراجعه شود.

قضیه ۹.۴.۴. فرض کنیم (X, d) فضای متریک محدب بوده که در خاصیت (I) صدق می کند و T یک خودنگاشت بوده که در شرط (A) و نامساوی زیر صدق کند، به طوریکه a و b و c اعداد نامنفی اند، که در رابطه $2a + 2b + c \leq 1$ صدق می کنند، آنگاه داریم

$$d(Tx, Ty) \leq a[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + b[d(y, Tx) + d(x, Ty)] + cd(x, y), \quad (\forall x, y \in X)$$

فرض کنیم که G زیر مجموعه ای از X باشد، همچنین فرض کنیم F زیر مجموعه ای کراندار ناتهی از X بوده به طوریکه $R_{G(\varepsilon)}(F)$ فشرده و ستاره گون باشد. آنگاه $R_{G(\varepsilon)}(F)$ شامل یک نقطه T -پایا می باشد.

برهان. داریم

$$d(Tg_0, g) + \varepsilon \leq d(g_0, g) + \varepsilon \leq \inf_{g \in G} \sup_{y \in F} d(y, g)$$

و بنابراین $Tg_0 \in R_{G(\varepsilon)}(F)$ یعنی $T : R_{G(\varepsilon)}(F) \longrightarrow R_{G(\varepsilon)}(F)$ از آنجائیکه $R_{G(\varepsilon)}(F)$ ستاره گون می باشد، نقطه ی $p \in R_{G(\varepsilon)}(F)$ وجود دارد، به طوریکه برای هر $z \in R_{G(\varepsilon)}(F)$ و $\lambda \in [0, 1]$ داریم $W(z, p, \lambda) \in R_{G(\varepsilon)}(F)$. حال فرض کنیم که $\langle k_n \rangle$ بطوریکه $0 \leq k_n < 1$ ، دنباله ای از اعداد حقیقی باشد که $k_n \rightarrow 1$ هنگامی که $n \rightarrow \infty$ ، تعریف می کنیم T_n را به صورت $T_n(z) = W(Tz, p, k_n)$ که $z \in R_{G(\varepsilon)}(F)$ می باشد. از آنجائیکه T یک خود نگاشت روی $R_{G(\varepsilon)}(F)$

است و $R_{G(\varepsilon)}(F)$ ستاره گون است و T_n نگاشتی خوش تعریف از $R_{G(\varepsilon)}(F)$ بتوی $R_{G(\varepsilon)}(F)$ می باشد. لذا

$$\begin{aligned} d(T_n y, T_n z) &= d(W(Ty, p, k_n), W(Tz, p, k_n)) \\ &\leq k_n d(Ty, Tz) \\ &\leq k_n [a[d(y, Ty) + d(z, Tz)] + b[d(z, Ty) + d(y, Tz)] + cd(y, z)] \end{aligned}$$

که $k_n[2a + 2b + 2c] \leq 1$ بنابراین طبق لم ۸.۴.۴ هر T_n یک نقطه ثابت یکتا $x_n \in R_{G(\varepsilon)}(F)$ دارد. یعنی برای هر n داریم $T_n x_n = x_n$ ، از آنجائیکه $R_{G(\varepsilon)}(F)$ فشرده می باشد، $\langle x_n \rangle$ یک زیر دنباله مانند $\{x_{n_i}\}$ دارد به طوریکه $x_{n_i} \rightarrow x \in R_{G(\varepsilon)}(F)$ اکنون ادعا می کنیم $Tx = x$ هنگامی که

$$d(x_{n_i}, Tx) \leq d(x_{n_i}, x)$$

با میل دادن $n \rightarrow \infty$ داریم $x_{n_i} \rightarrow Tx$ بنابراین $Tx = x$ یعنی $Tx = x$ پایا می باشد. در نتیجه حکم ثابت شد. $\square$

برای $F = \{x\}$ که $x \in X$ نتیجه ی زیر را در مورد ε -هم تقریب داریم.

نتیجه ۱۰.۴.۴. فرض کنیم T یک خود نگاشت بوده که در شرط (A) صدق می کند و G زیرمجموعه ای از X باشد، که روی فضای متریک محدب (X, d) در شرط (I) صدق می کند به طوریکه $R_{G(\varepsilon)}(x)$ فشرده، ناتهی و ستاره گون باشد، همچنین فرض کنیم T روی $R_{G(\varepsilon)}(X)$ غیر انبساطی باشد، آنگاه $g_0 \in R_{G(\varepsilon)}(x)$ وجود دارد به طوریکه $Tg_0 = g_0$.

تذکر ۱۱.۴.۴. دقت می کنیم که برای $F = \{x_1, x_2\}, x_1, x_2 \in X$ مجموعه ی $R_{G(\varepsilon)}(F)$ مجموعه ی ε -بهترین هم تقریب همزمان برای زوج نقاط x_1 و x_2 است. نتایج مشابه برای ε -بهترین تقریب همزمان نیز برقرار می باشد.

مراجع

- [1] G.Birkhoff, "Orthogonality in linear metric space", *Duke Math.J.I* (1935) 169-172
- [2] B.Choudhary, Sudarsan Nanda, "Functional Analysis with application", Wiley East-ern Limited, 1989
- [3] F. R. Deutsch, "Best Approximation in Inner Product Spaces", Springer, (2001).
- [4] C.Franchetti, M.Fouri, "Some characteristic properties of real Hilbert spaces", *Rev.Roumaine Math.Pures Appl.* 17(1972) 1045-1048
- [5] R.A.Holmes, "A Course on optimization and best approximation ", (CLNM 257, springer) 1972
- [6] H.Mazaheri. "Best coapproximation in quotient space", *Nonlinear Analysis* 68(2008) 3122-3126.
- [7] D.C.Soni, Govt.Girls H.S.S., Jobat 457 990, and LaI Bahadur, "A notes on coap-proximation ". (November 1989).
- [8] E. Kreyszing. "Introduction Functional Analysis with applications", John Wiley and sons, 1978.
- [9] H.Mazaheri, F.M.Maalek Ghaini, "Some results concerning proximality and co-proximality", *Nonlinear Analysis* 62(2005), 1123-1126.
- [10] H.Mazaheri, F.M.Maalek Ghaini, "Quasi-orthogonality of the best approximant sets", *Nonlinear Analysis* (2006), 65534-537.
- [11] H.Mazaheri, "The Nearest Points in Normed Linear Spaces ", *Applied Mathematical Science*, Vol.2, 2008, no. 16. 763-766.
- [12] H.Mazaheri, M.Hossein Zadeh. " The Maps preserving Approximation " *International Math . Forum*, 2, 2007, 19, 905-909.
- [13] S.M.S.Modarres , M.Deighani, "Best Simultaneous coapproximation in normed linear space", *Vali-Asr university of Rafsanjan, Iran*, 5-8 September 2011 ,pp 413-416.
- [14] T.D.Narang and S.Chandok, "Invariant points and ε -simultaneous approximation" *Hindawi Publishing corporation ,international Journal of mathematics and science*, Volume 2011, Article ID 579819, 10 pages doi:10.1155/2011/579819.
- [15] G. S. Rao, R. Saravan. "Some result concerning best uniform coapproximation ", *Journal of Inequalities in pure and applied Mathematics* , (2002) 1-13.

-
- [16] I. Singer. "The theory of best approximation and functional analysis" (1974).
- [17] P.L.Papini, I. Singer, " Best co-approximation in normed linear spaces", *Mh. Math.* 88(1972), 27-44.
- [18] S.M.Vaezpour, R.Hassani, H.Mazaheri, "On the ε -Coapproximation, international Mathematical Forum, 2, no. 53.2599-2606. 2007.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

<i>Boundedly Compact</i>	به طور کراندار فشرده
<i>Strictly Convex</i>	اکیدا "محدب"
<i>Normed Space</i>	فضای نرم دار
<i>Closure</i>	بستار
<i>Convergent</i>	همگرا
<i>Direct Sum</i>	جمع مستقیم
<i>Isometry</i>	ایزومتري
<i>Birkhoff Orthogonality</i>	تعامد بیر کهف
<i>Epsilon-Orthogonality</i>	ε -متعامد
<i>Epsilon-Best Coapproximation</i>	ε - بهترین هم تقریب
<i>Singer Orthogonality</i>	تعامد به معنای سینگر
<i>Smooth Normed Space</i>	فضای نرم دار هموار
<i>Preserving Best Coapproximation</i>	حافظ بهترین هم تقریب
<i>Quotient Space</i>	فضای خارج قسمت
<i>Best Simultaneous Coapproximation</i>	بهترین هم تقریب همزمان
<i>Adjointe</i>	الحاق
<i>Contractive</i>	انقباضی
<i>Best Approximation</i>	بهترین تقریب
<i>Continuous</i>	پیوسته
<i>Functional</i>	تابعک
<i>Complete</i>	تام

<i>Convergent sequence</i>	دنباله همگرا.
<i>Operator</i>	عملگر
<i>Compact</i>	فشرده
<i>Starshape</i>	ستاره گون
<i>Non expansive</i>	غیر انبساطی
<i>Invariant</i>	پایا
<i>Dual space</i>	فضای دوگان
<i>Inner product space</i>	فضای ضرب داخلی
<i>Self Map</i>	خود نگاشت
<i>Hilbert Space</i>	فضای هیلبرت
<i>Bounded</i>	کراندار
<i>Boundedly Compact</i>	به طور کراندار فشرده
<i>Convex</i>	محدب
<i>Triangle inequality</i>	نامساوی مثلث
<i>Coproximity map</i>	نگاشت هم تقریب
<i>Best Coapproximation</i>	بهترین هم تقریب
<i>Co chebyshev</i>	هم چبیشف
<i>Cosun</i>	هم تابش
<i>Banach Space</i>	فضای باناخ
<i>proximity map</i>	نگاشت تقریب
<i>Approximatively Compact</i>	به طور تقریبی فشرده

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

<i>Best Simultaneous Coapproximation</i>	بهترین هم تقریب همزمان
<i>Sun Point</i>	نقطه تابش
<i>Cochebyshev</i>	هم چبیشف
<i>Contractive</i>	انقباضی
<i>Direct Sum</i>	جمع مستقیم
<i>Starshape</i>	ستاره گون
<i>Nonexpansive</i>	غیر انبساطی
<i>Invariant</i>	پایا
<i>Quotient Space</i>	فضای خارج قسمت
<i>Coproximity Map</i>	نگاشت هم تقریب
<i>Simultaneous</i>	همزمان
<i>Epsilon-Orthogonality</i>	ε - تعامد
<i>Epsilon -Best Coapproximation</i>	ε - بهترین هم تقریب
<i>Best Approximation</i>	بهترین تقریب
<i>Bounded</i>	کراندار
<i>Self Map</i>	خود نگاشت
<i>Preserving Best Coapproximation</i>	حافظ هم تقریب
<i>Compact</i>	فشرده
<i>Complete</i>	تام
<i>Continuous</i>	پیوسته
<i>Convergent sequence</i>	دنباله همگرا

<i>Convex</i>	محدب
<i>Dual space</i>	فضای دوگان
<i>Singer Orthogonality</i>	تعامد به معنای سینگر
<i>Functional</i>	تابعک
<i>Hilbert Space</i>	فضای هیلبرت
<i>Uniform</i>	یکنواخت
<i>Inner product space</i>	فضای ضرب داخلی
<i>Smooth Normed Space</i>	فضای نرم دار هموار
<i>Operator</i>	عملگر
<i>Parallelogram law</i>	قانون متوازی الاضلاع
<i>Proximity map</i>	نگاشت تقریب
<i>Cosun</i>	هم تابش
<i>Best Uniform Coapproximation</i>	بهترین هم تقریب یکنواخت
<i>Triangle inequality</i>	نامساوی مثلث
<i>Best Coapproximation</i>	بهترین هم تقریب

<i>Surname: Gandomi</i>		<i>Name: Hedayat</i>	
<i>Title: Best Coapproximation in Normed Linear Spaces</i>			
<i>Supervisor: Mahdi Iranmanesh</i>			
<i>Degree: Master of Science</i>		<i>Subject: Pure Mathematics</i>	
<i>Field: Mathematical Analysis</i>			
<i>University of Shahrood</i>		<i>Faculty of Mathematical Sciences</i>	
<i>Date: Septamber 2012</i>		<i>Number of Pages: 101</i>	
<i>Keywords: best appriximation, best coapproximation, best simultaneous coapproximation, ε- simultaneous coapproximation, cochebyshev set , coproximinal set, ε- orthogonal, self map, nonexpansive map, contraction map</i>			
Abstract <i>In this paper, the problem on best coapproximation in normed space is cosidered, and the concept best simultaneous coapproximation, and ε-simultaneous coapproximation are presented. Theory of coapproximation was first introduced in 1972 by Franchetti and Furi. Let X be a normed space with norm $\ \cdot \$, let G be a nonempty subset of X and let $x \in X$. Then $g_0 \in G$ is called a best coapproximation from G to x if,</i> $\ g - g_0 \ \leq \ x - g \ \quad (\forall g \in G).$ <i>The set of best coapproximation to x from G will be denoted $R_G(x)$. We also present the results concerning best uniform coapproximation in $C[a, b]$.</i>			



University Of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

*DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE
DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS*

Best Coapproximation in Normed Linear Spaces

supervisor

Mahdi Iranmanesh

Advisor

by

HEDAYAT GANDOMI

2012