



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۳ / ۲ / ۱۴۰۳

وقت : ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

دانشکده علوم ریاضی
امتحان میان ترم : ریاضی ۱ فنی هماهنگ
نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

توجه:

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

به هیچ سوالی در جلسه امتحان پاسخ داده نمی شود.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

سوال ۱ - الف: ریشه های معادله $z^4 = -2\sqrt{3} + 2i$ را در دستگاه اعداد مختلط \mathbb{C} بیابید. (۱۰ نمره)

ب: مکان هندسی نقاطی را در دستگاه اعداد مختلط \mathbb{C} بیابید که در معادله $\left| \frac{z-3}{z+i} \right| \leq 1$ صدق می کند. (۱۰ نمره)

سوال ۲- تابع $f(x) = \frac{1+x^3}{1-2x^3}$ مفروض است:

الف: ضابطه تابع معکوس این را بیابید. (۱۰ نمره)

ب: زوج یا فرد بودن این تابع را بررسی کنید. (۵ نمره)

سوال ۳ - بدون استفاده از هوییتال و هم ارزی حدود زیر را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos(4x)}}{x}, \quad B = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2} - \sqrt[3]{x-2}}$$

سوال ۴ - معادله خط مماس بر نمودار تابع $y(x)$ که در معادله زیر صدق می کند را در نقطه $A = (\frac{\pi}{4}, 1)$ بدست

آورید. (۱۰ نمره) $\tan^{-1}(y) - y + x = \frac{\pi}{2} - 1$

سوال ۵ - نمودار تابع زیر را با بیان جزییات (مجانب ها، اکسترمم و ...) رسم کنید. (۱۵ نمره)

$$f(x) = \frac{-6x+6}{x^2+3}$$

موفق باشید.

جواب سوال ۱ -

الف:

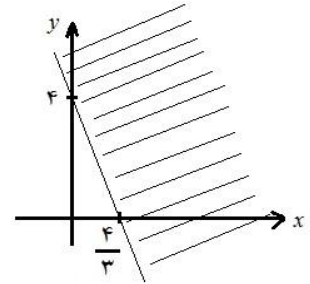
$$z^4 = -2\sqrt{3} + 2i, \quad w = -2\sqrt{3} + 2i, \quad r = 4, \quad \theta = \frac{5\pi}{6}, \quad n = 4 \rightarrow z_k = r^n e^{\frac{(\theta + 2k\pi)}{n}i} = 4^4 e^{\frac{(\frac{5}{6} + 2k)}{4}\pi i}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

ب:

$$\left| \frac{z-3}{z+i} \right| \leq 1, \quad z = x+iy \rightarrow \left| \frac{(x-3)+iy}{x+i(1+y)} \right| \leq 1 \rightarrow |(x-3)+iy| \leq |x+i(1+y)|$$

$$(x-3)^2 + y^2 \leq x^2 + (1+y)^2 \rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2y + 1$$

$$\rightarrow y + 3x \geq 4 \rightarrow D = \{z = x+iy : y + 3x \geq 4\}$$



جواب سوال ۲ -

$$y = f(x) = \frac{1+x^3}{1-2x^3}, \quad x \neq \sqrt[3]{2} \rightarrow y(1-2x^3) = 1+x^3 \rightarrow x^3(1+2y) = y-1 \rightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y-1}{1+2y}}$$

الف:

ب: روش اول: دامنه تابع $f(x) = \frac{1+x^3}{1-2x^3}$ یعنی $D_f = \mathbb{R} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ متقارن نیست و بنابراین این تابع نه زوج است و نه فرد.

روش دوم: این تابع نه زوج است و نه فرد $\rightarrow f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x) \rightarrow$ متقارن نیست و بنابراین این تابع نه زوج است و نه فرد.

جواب سوال ۳ -

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos(4x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2\sin^2(2x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2} \frac{\sin(2x)}{x} = 2\sqrt{2}.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3}{t^3-t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t-1} = 0.$$

جواب سوال ۴ -

$$\tan^{-1}(y) - y + x = \frac{\pi}{2} - 1 \rightarrow \frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0 \rightarrow \frac{y'y''}{1+y^2} = 1 \rightarrow y' = \frac{1+y^2}{y^2}$$

$$y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1+y^2(\frac{\pi}{4})}{y^2(\frac{\pi}{4})} = \frac{1+1^2}{1} = 2 \rightarrow y - y(\frac{\pi}{4}) = y'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) \rightarrow y - 1 = 2(x - \frac{\pi}{4}) \rightarrow y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$$

جواب سوال ۵ -

$$f(x) = \frac{-6x+6}{x^2+3}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{-6(x^2+3)-2x(-6x+6)}{(x^2+3)^2} = \frac{6(x^2-2x-3)}{(x^2+3)^2} = 0 \rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 3$$

مجانب قائم ندارد $\rightarrow x^2+3 \neq 0$ و $y=0$ مجانب افقی $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f'		+	-	+
f		\nearrow	\searrow	\nearrow
		max	min	

