



گروه آموزشی : ریاضی

نام و نام خانوادگی : .....

تاریخ : ۱۳ / ۲ / ۱۴۰۳

شماره دانشجویی : .....

وقت : ۹۰ دقیقه

نام مدرس : .....

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم : ریاضی ۱ فنی هماهنگ

(رشته های مهندسی معدن، نقشه کشی، ساخت و تولید، شیمی و مواد)

نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

### توجه:

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

به هیچ سوالی در جلسه امتحان پاسخ داده نمی شود.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

سوال ۱ - الف: ریشه های معادله  $z^4 = 16i$  را در دستگاه اعداد مختلط  $\mathbb{C}$  بیابید. (۱۰ نمره)

ب: مکان هندسی نقاطی را در دستگاه اعداد مختلط  $\mathbb{C}$  بیابید که در معادله  $\left| \frac{1}{z+i} \right| \geq 1$  صدق می کند. (۱۰ نمره)

سوال ۲- تابع  $f(x) = \frac{1}{1+3x^3}$  مفروض است:

الف: ضابطه تابع معکوس آن را بیابید. (۱۰ نمره)

ب: زوج یا فرد بودن این تابع را بررسی کنید. (۵ نمره)

سوال ۳ - بدون استفاده از هوییتال و هم ارزی حدود زیر را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x}, \quad B = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}-1}$$

سوال ۴ - معادله خط مماس بر نمودار تابع  $y = \tan^{-1}(2x) - x^2 + 1$  را در نقطه  $x = 0$  بدست آورید. (۱۰ نمره)

سوال ۵ - نمودار تابع زیر را با بیان جزییات (مجانب ها، اکسترمم و ...) رسم کنید. (۱۵ نمره)

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$$

موفق باشید.

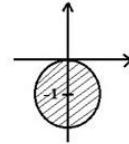
جواب سوال ۱ -

الف:  $z^4 = 16i, w = 16i, r = 16, \theta = \frac{\pi}{4}, n = 4 \rightarrow z_k = r^n e^{\frac{(\theta + 2k\pi)}{n}i} = 2e^{\frac{(1+4k)\pi i}{4}}, k = 0, 1, 2, 3$

ب:

$$\left| \frac{1}{z+i} \right| \geq 1, z = x+iy \rightarrow \left| \frac{1}{x+i(1+y)} \right| \geq 1 \rightarrow |x+i(1+y)| \leq 1$$

$$\rightarrow x^2 + (1+y)^2 \leq 1 \rightarrow D = \{z = x+iy : x^2 + (1+y)^2 \leq 1\}$$



جواب سوال ۲ -

الف:  $y = f(x) = \frac{1}{1+3x^3}, x \neq \frac{-1}{\sqrt[3]{3}} \rightarrow y + 3yx^3 = 1 \rightarrow x^3 = \frac{1-y}{3y} \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1-y}{3y}} \rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{1-y}{3y}}$

ب: روش اول: دامنه تابع  $f(x) = \frac{1}{1+3x^3}$  یعنی  $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1}{\sqrt[3]{3}} \right\}$  که متقارن نیست و بنابراین این تابع نه زوج است و نه فرد.

روش دوم: این تابع نه زوج است و نه فرد  $\rightarrow f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x) \rightarrow f(x) = \frac{1}{1+3x^3}, f(-x) = \frac{1}{1-3x^3}$

جواب سوال ۳ -

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2\sin^2(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2} \frac{\sin(x)}{x} = \sqrt{2}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}-1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}-1} \times \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} \times \frac{\sqrt{x-1}+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$$

جواب سوال ۴ -

$$y = \tan^{-1}(2x) - x^2 + 1, y(0) = 1 \rightarrow y' = \frac{2}{1+4x^2} - 2x, y'(0) = 2 \rightarrow y - y(0) = y'(0)(x-0) \rightarrow y = 2x + 1$$

جواب سوال ۵ -

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4}, D_f = \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-16x}{(x^2+4)^2} = 0 \rightarrow x = 0, f(0) = \frac{1}{4}$$

مجانب قائم ندارد  $\rightarrow x^2+4 \neq 0$  و مجانب افقی  $y = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

