نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۳ / ۰۳ / ۲۷**

وقت : **۱۳۵ دقیقه**

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل هماهنگ

نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

توجه:

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. به هیچ سوالی در جلسه امتحان پاسخ داده نمی‌شود. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

سوال ۱ – جواب عمومی معادله زیر را بیابید . (۲۰ نمره)

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^3}$$

....

سوال ۲– معادله ی اویلر زیر را حل کنید . (۱۵ نمره)

$$x^2y'' + 6xy' + 6y = 2\ln(x)$$

....

سوال ۳ – دستگاه زیر را حل کنید . (۲۰ نمره)

$$\begin{cases}(D^2-1)x + (D-1)y = e^{2t}\\ (D+1)x - y = 2e^{2t}\end{cases}$$

....

سوال ۴ – جواب عمومی معادله زیر را با روش سری های توانی حول نقطه ی $x_0 = 0$ به دست آورید . (۱۵ نمره)

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

....

سوال ۵ –الف) تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \int_0^t (e^{2x} - \cos(3x) + x)\, dx$ را به دست آورید . (۱۰ نمره)

ب) تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(S) = \ln\left(\frac{S+2}{S-3}\right)$ را بیابید . (۱۰ نمره)

....

سوال ۶ – معادله ی انتگرالی زیر را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس حل کنید . (۱۵ نمره)

$$x(t) - \int_0^t x(z)\sin(t-z)\, dz = e^{-4t}$$

....

سوال ۷ – مساله ی مقدار اولیه ی زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید . (۱۵ نمره)

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t \end{cases} \quad \text{و} \quad x(0) = x'(0) = 0$$

دانشگاه صنعتی شاهرود

پاسخنامه امتحان پایان ترم معادلات هماهنگ ۱۴۰۳/۳/۲۷

دانشکده علوم ریاضی – دانشگاه صنعتی شاهرود

جواب سوال ۱ –

$$r^2+6r+9=0 \to (r+3)^2=0 \to r_1 = r_2=-3$$

$$\begin{cases} y_1=e^{-3x} \\ y_2=xe^{-3x} \end{cases}, \quad y_h=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}$$

$$w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & (1-3x)e^{-3x} \end{vmatrix}=e^{-6x}$$

$$v_1=\int \frac{-y_2R(x)}{w(y_1,y_2)}dx=\int \frac{-xe^{-3x}\times \frac{e^{-3x}}{x^3}}{e^{-6x}}dx=\int -\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{x}$$

$$v_2=\int \frac{y_1R(x)}{w(y_1,y_2)}dx=\int \frac{e^{-3x}\times \frac{e^{-3x}}{x^3}}{e^{-6x}}dx=\int \frac{1}{x^3}dx=\frac{-1}{2x^2}$$

$$y_p=y_1v_1+y_2v_2=\frac{e^{-3x}}{x}-\frac{e^{-3x}}{2x}=\frac{e^{-3x}}{2x}, \qquad y_g=y_h+y_p=\left(c_1+c_2x+\frac{1}{2x}\right)e^{-3x}$$

جواب سوال ۲ –

$$,\ ,\ x^2y''+6xy'+6y=2\ln(x), \quad x=e^t$$

$$[D'(D'-1)+6D'+6]y=2t, \qquad \left({D'}^2+5D'+6\right)y=2t$$

$$r^2+5r+6=0, \qquad (r+2)(r+3)=0\ , \qquad r_1=-2\ ,r_2=-3$$

$$y_h=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}=c_1x^{-2}+c_2x^{-3}$$

$$y_p=\frac{1}{{D'}^2+5D'+6}(2t) \to y_p=\frac{1}{(D'+2)(D'+3)}(2t)$$

$$y_p=\left(\frac{1}{D'+2}-\frac{1}{D'+3}\right)(2t)=\left[\frac{1}{2\left(1+\frac{D'}{2}\right)}-\frac{1}{3\left(1+\frac{D'}{3}\right)}\right](2t)$$

$$y_p=\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{D'}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{D'}{3}\right)\right](2t)\ , \qquad y_p=\frac{2}{3}t-\frac{5}{18}=\frac{2}{3}\mathrm{Ln}\,x-\frac{5}{18}$$

$$y_g=y_h+y_p=\frac{c_1}{x^2}+\frac{c_2}{x^3}+\frac{2}{3}\mathrm{Ln}\,x-\frac{5}{18}$$

جواب سوال ۳-

$$\begin{cases}(D^2-1)x+(D-1)y=e^{2t}\\ (D+1)x-y=2e^{2t}\end{cases}$$

از ضرب معادله دوم در $(D-1)$ و جمع دو معادله بدست می آوریم:

$$2(D^2-1)x=3e^{2t} \quad \rightarrow \quad x_h=c_1e^{-t}+c_2e^{t} \quad و \quad x_p=\frac{1}{2(D^2-1)}(3e^{2t})=\frac{e^{2t}}{2}$$

$$x=x_h+x_p=c_1e^{-t}+c_2e^{t}+\frac{e^{2t}}{2}$$

با جایگذاری در معادله دوم داریم :

$$(D+1)x-y=2e^{2t}\rightarrow y=(D+1)\left(c_1e^{-t}+c_2e^{t}+\frac{e^{2t}}{2}\right)-2e^{2t}\rightarrow$$

$$y=-c_1e^{-t}+c_2e^{t}+e^{2t}+c_1e^{-t}+c_2e^{t}+\frac{e^{2t}}{2}-2e^{2t}=\ 2c_2e^{t}-\frac{e^{2t}}{2}$$

جواب سوال ۴ –

$$y''+2xy'+2y=0$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \quad و \quad y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1} \quad و \quad y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\,a_nx^{n-2}+2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\ \rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\,a_nx^{n-2}+2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\,a_{n+2}x^{n}+2\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+2(n+1)a_n]\,x^n=0\rightarrow$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+2(n+1)a_n=0 \qquad ,n\geq 0\ \rightarrow\quad a_{n+2}=\frac{-2}{n+2}a_n\ \ ,n\geq 0\ \rightarrow$$

$$a_2=-a_0\,,a_3=\frac{-2}{3}a_1\,,a_4=-\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}a_0\,,a_5=\frac{-2}{5}a_3=\frac{4}{15}a_1$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots$$

$$=a_0+a_1x-a_0x^2-\frac{2}{3}a_1x^3+\frac{1}{2}a_0x^4+\frac{4}{15}a_1x^5+\cdots$$

$$=a_0\left(1-x^2+\frac{1}{2}x^4+\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+\cdots\right)$$

جواب سوال ۵ –

الف) $L\left\{\int_0^t (e^{2x} - \cos 3x + x)\, dx\right\} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s^2}\right)$

ب) $F(s) = \text{Ln}\left(\frac{s+2}{s-3}\right) = \text{Ln}(s+2) - \text{Ln}(s-3)\,, \quad f(x) = L^{-1}\{F(s)\}$

$F'(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-3} \;\to\; L^{-1}\{F'(s)\} = e^{-2x} - e^{3x} \;\to\; f(x) = \frac{-1}{x}(e^{-2x} - e^{3x}) = \frac{1}{x}(e^{3x} - e^{-2x})$

جواب سوال ۶ –

$$x(t) = e^{-4t} + \int_0^t x(z)\sin(t-z)\, dz \quad \to \quad L\{x(t)\}$$

$$= L\left\{e^{-4t} + \int_0^t x(z)\sin(t-z)\, dz\right\} \to$$

$$L\{x\} = L\{e^{-4t}\} + L\{x\}L\{\sin t\} \quad \to \quad L\{x\} = \frac{1}{s+4} + L\{x\} \times \frac{1}{s^2+1} \to$$

$$\frac{s^2}{s^2+1} L\{x\} = \frac{1}{s+4} \quad \to \quad L\{x\} = \frac{s^2+1}{s^2(s+4)} \quad \to \quad L\{x\} = \frac{1}{s+4} + \frac{1}{s^2(s+4)}$$

$$L\{x\} = \frac{1}{s+4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{s+4}\right) \to L\{x\}$$
$$= \frac{17}{16}\left(\frac{1}{s+4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$x(t) = \frac{17}{16}e^{-4t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{16}$$

جواب سوال ۷ –

$$x(0) = x'(0) = 0 \quad \text{و} \quad x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t \end{cases}$$

$$L\{x''\} + 2L\{x'\} + L\{x\} = L\{e^{-t} + (0 - e^{-t})H(t-1)\} \to$$

$$s^2 L\{x\} - sx(0) - x'(0) + 2\big(sL\{x\} - x(0)\big) + L\{x\} = \frac{1}{s+1} - \frac{e^{-s}}{e(s+1)} \to$$

$$(s^2 + 2s + 1)L\{x\} = \frac{1}{s+1} - \frac{e^{-s}}{e(s+1)} \quad \to \quad L\{x\} = \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{e^{-s}}{e(s+1)^3}$$

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{-t} - \frac{(t-1)^2}{2e} e^{-(t-1)} H(t-1)}$$

$$\boldsymbol{= \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 e^{-t} & 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{2}t^2 e^{-t} - \frac{(t-1)^2}{2e} e^{-(t-1)} & 1 \le t \end{cases}}$$