نام و نام خانوادگی : ....
شماره دانشجویی : ....
نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**
تاریخ : ۲۶ / ۳ / ۱۴۰۳
وقت : ۱۳۵ دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم : ریاضی ۱ فنی هماهنگ

نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

توجه:

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. به هیچ سوالی در جلسه امتحان پاسخ داده نمی‌شود. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

سوال ۱ – انتگرال های نامعین زیر را محاسبه کنید. (۱۵+۱۵ نمره)

$$I=\int \frac{x^{۲}+۳x+۳}{x^{۳}+x}\,dx\,, \qquad J=\int \frac{۱}{۱-\cos(x)}\,dx$$

سوال ۲- انتگرال معین $K=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۳}(x)\,dx$ **را محاسبه کنید.** (۱۵ نمره)

سوال ۳- حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور بین دو منحنی $y=x^{۲}$ **و** $y=\sqrt{x}$ **را حول محور** x **ها بیابید.** (۱۵ نمره)

سوال ۴ – مساحت محدود به زیر منحنی $f(x)=x\ln(x)$ **را در ربع اول دستگاه مختصات و در فاصله** $[۱,e]$ **بیابید.** (۱۵ نمره)

سوال ۵ – مشتق توابع زیر را بیابید. (۱۰+۱۰ نمره)

$$f(x)=\ln(\sqrt{۱+x})+e^{\sinh(x)}, \qquad g(x)=\int_{۰}^{۱+x^{۲}} \frac{۱}{۱+e^{\sqrt{t}}}\,dt$$

سوال ۶ – چهار جمله اول ناصفر بسط مکلورن تابع $f(x)=xe^{۳x}$ **را بیابید.** (۱۰ نمره)

سوال ۷- شعاع و بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۴n}(x-۲)^{n}$ **را بیابید.** (۱۵ نمره)

موفق باشید.

پاسخنامه امتحان پایان ترم ریاضی ۱ هماهنگ (امتحان نوع ۱) - ۱۴۰۳/۳/۲۶

دانشکده علوم ریاضی – دانشگاه صنعتی شاهرود

جواب سوال ۱ -

$$I=\int \frac{x^2+3x+3}{x^3+x}\,dx=\int \frac{x^2+3x+3}{x(x^2+1)}\,dx=\int (\frac{A}{x}+\frac{2Bx+C}{x^2+1})\,dx=\int \frac{(A+2B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)} \quad \rightarrow$$

$$A+2B=1,\quad C=3,\quad A=3 \quad \rightarrow \quad B=-1 \quad \rightarrow \quad I=\int (\frac{3}{x}+\frac{2x+3}{x^2+1})\,dx=I=\int (\frac{3}{x}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3}{x^2+1})\,dx$$

$$\rightarrow \quad I=3\ln(x)-\ln(x^2+1)+3\tan^{-1}(x)+c$$

روش اول: محاسبه $J=\int \frac{1}{1-\cos(x)}\,dx$ با تغییر متغیر نصف طول قوس

$$J=\int \frac{1}{1-\cos(x)}\,dx,\quad z=\tan(\frac{x}{2}),\ dx=\frac{2dz}{1+z^2},\ \cos(x)=\frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \rightarrow \quad J=\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1-\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int \frac{dz}{z^2}=\frac{-1}{z}=\frac{-1}{\tan(\frac{x}{2})}$$

روش دوم : محاسبه $J=\int \frac{1}{1-\cos(x)}\,dx$ با رابطه مثلثاتی $2\sin^2(\frac{x}{2})=1-\cos(x)$

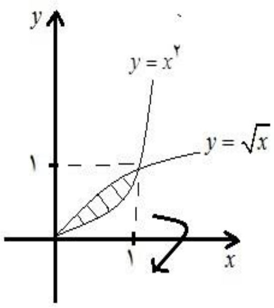
$$J=\int \frac{1}{1-\cos(x)}\,dx=\int \frac{1}{2\sin^2(\frac{x}{2})}\,dx=\int \frac{1}{2}\left(1+\cot^2(\frac{x}{2})\right)dx=-\cot(\frac{x}{2})+c=-\frac{1}{\tan(\frac{x}{2})}+c$$

جواب سوال ۲ –

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\sin(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(x)\right)\sin(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(x)-\sin(x)\cos^2(x)\right)dx=\left[-\cos(x)+\frac{1}{3}\cos^3(x)\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}=(0)-(-1+\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$$

جواب سوال ۳-



روش اول : روش حلقه ای

$$K=\int_0^1 \pi\left((\sqrt{x})^2-(x^2)^2\right)dx=\int_0^1 \pi\left(x-x^4\right)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)_0^1=\frac{3\pi}{10}$$

روش دوم : روش پوسته استوانه ای

$$K=\int_0^1 2\pi y\left(\sqrt{y}-y^2\right)dx=\int_0^1 2\pi\left(y^{\frac{3}{2}}-y^3\right)dx=2\pi\left(\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{y^4}{4}\right)_0^1=2\pi\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)=\frac{3\pi}{10}$$

جواب سوال ۴ -   روش جزء به جزء

$$S=\int_1^e x\ln(x)\,dx,\quad u=\ln x,\ dv=xdx \quad \rightarrow du=\frac{1}{x}dx,\ v=\frac{x^2}{2},\quad S=uv\Big]_1^e-\int_1^e vdu$$

$$\rightarrow \quad S=\frac{x^2}{2}\ln x\Big]_1^e-\int_1^e \frac{x}{2}\,dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big]_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

جواب سوال ۵ -

$$f(x)=\ln(\sqrt{1+x})+e^{\sinh(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}}+\cosh(x)e^{\sinh(x)}=\frac{1}{2(1+x)}+\cosh(x)e^{\sinh(x)}$$

$$g(x)=\int_0^{1+x^2}\frac{1}{1+e^{\sqrt{t}}}\,dt \quad \rightarrow \quad g'(x)=2x\times\frac{1}{1+e^{\sqrt{1+x^2}}}$$

جواب سوال ۶:

روش اول : $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.... \quad \rightarrow e^{3x}=1+3x+\frac{9x^2}{2!}+\frac{27x^3}{3!}+....$

$$\rightarrow \quad f(x)=xe^{3x}=x\left(1+3x+\frac{9x^2}{2!}+\frac{27x^3}{3!}+....\right)=x+3x^2+\frac{9x^3}{2}+\frac{9x^4}{2}+...$$

روش دوم:

$$\begin{cases} f(x)=xe^{3x} \quad \rightarrow \quad f(0)=0 \\ f^{(1)}(x)=e^{3x}+3xe^{3x}=(3x+1)e^{3x} \quad \rightarrow f^{(1)}(0)=1 \\ f^{(2)}(x)=3e^{3x}+3(3x+1)e^{3x}=(9x+6)e^{3x} \quad \rightarrow f^{(2)}(0)=6 \\ f^{(3)}(x)=9e^{3x}+3(9x+6)e^{3x}=(27x+27)e^{3x} \quad \rightarrow f^{(3)}(0)=27 \\ f^{(4)}(x)=27e^{3x}+3(27x+27)e^{3x}=(81x+108)e^{3x} \quad \rightarrow f^{(4)}(0)=108 \end{cases} \rightarrow$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+...=x+3x^2+\frac{9x^3}{2}+\frac{9x^4}{2}+...$$

جواب سوال ۷ -

روش اول: شعاع همگرایی $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}(x-2)^n,\ x_0=2,\ a_n=\frac{1}{4n} \quad \rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4(n+1)}{4n}\right|=1$

بررسی انتها و ابتدای بازه $f(x_0-R)=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}(-1)^n, \qquad f(x_0+R)=f(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}(-1)^n$ یک سری متناوب و همگرا و سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ یک سری واگراست. لذا شعاع همگرایی بازه $I=[1,3)$ می باشد.

روش دوم:

شعاع همگرایی $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}(x-2)^n,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{4(n+1)}(x-2)^{n+1}\right|}{\left|\frac{1}{4n}(x-2)^n\right|}<1 \quad \rightarrow |x-2|<1\rightarrow\ 1<x<3, \quad x_0=2,\ R=1$

بررسی انتها و ابتدای بازه $f(x_0-R)=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}(-1)^n, \qquad f(x_0+R)=f(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}(-1)^n$ یک سری متناوب و همگرا و سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ یک سری واگراست. لذا شعاع همگرایی، بازه $I=[1,3)$ می باشد.