نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : ۱۴۰۳ / ۳ / ۲۶

وقت : **۱۳۵ دقیقه**

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم : ریاضی ۱ فنی هماهنگ

(مهندسی معدن، شیمی و مواد، نقشه برداری، ساخت و تولید)

نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

توجه:

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. به هیچ سوالی در جلسه امتحان پاسخ داده نمی‌شود. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

سوال ۱ – انتگرال های نامعین زیر را محاسبه کنید. **(۱۵+۱۵ نمره)**

$$I=\int \frac{۲}{x^{۲}+۲x}\,dx \,, \qquad J=\int \frac{۱}{۱+\cos(x)}\,dx$$

سوال ۲- انتگرال معین $K=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos(x)\sin^{۲}(x)\,dx$ **را محاسبه کنید.** **(۱۵ نمره)**

سوال ۳- حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور بین دو منحنی $y=x^{۲}$ **و** $y=\sqrt{x}$ **را حول محور** x **ها بیابید.** **(۱۵ نمره)**

سوال ۴ – مساحت محدود به زیر منحنی $f(x)=\ln(x)$ **را در ربع اول دستگاه مختصات و در فاصله** $[۱,e]$ **بیابید.** **(۱۵ نمره)**

سوال ۵ – مشتق توابع زیر را بیابید. **(۱۰+۱۰ نمره)**

$$f(x)=\ln(۱+۲x)+\sinh(۲x), \qquad g(x)=\int_{۰}^{۱+x^{۲}} e^{\sqrt{t}}\,dt$$

سوال ۶ – چهار جمله اول ناصفر بسط مکلورن تابع $f(x)=e^{۳x}$ **را بیابید.** **(۱۰ نمره)**

سوال ۷- شعاع و بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}(x-۲)^{n}$ **را بیابید.** **(۱۵ نمره)**

موفق باشید.

پاسخنامه امتحان پایان ترم ریاضی ۱ هماهنگ (امتحان نوع ۲) - ۱۴۰۳/۳/۲۶

دانشکده علوم ریاضی – دانشگاه صنعتی شاهرود

جواب سوال ۱ - محاسبه انتگرال $I=\int \frac{۲}{x^۲+۲x}\,dx$ با روش تجزیه کسر

$$I=\int \frac{۲}{x^۲+۲x}\,dx=\int \frac{۲}{x(x+۲)}\,dx=\int \left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+۲}\right)dx=\int \frac{(A+B)x+۲A}{x(x+۲)}\,dx \quad \rightarrow$$

$$A+B=۰,\quad ۲A=۲,\quad \rightarrow \quad A=۱,\quad B=-۱ \quad \rightarrow \quad I=\int \left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۲}\right)dx=\ln(x)-\ln(x+۲)+c$$

روش اول: محاسبه انتگرال $J=\int \frac{۱}{۱+\cos(x)}\,dx$ با تغییر متغیر نصف طول قوس

$$J=\int \frac{۱}{۱+\cos(x)}\,dx,\quad z=\tan(\frac{x}{۲}),\ dx=\frac{۲dz}{۱+z^۲},\ \cos(x)=\frac{۱-z^۲}{۱+z^۲} \quad \rightarrow \quad J=\int \frac{\frac{۲dz}{۱+z^۲}}{۱+\frac{۱-z^۲}{۱+z^۲}}=\int dz=z=\tan(\frac{x}{۲})+c$$

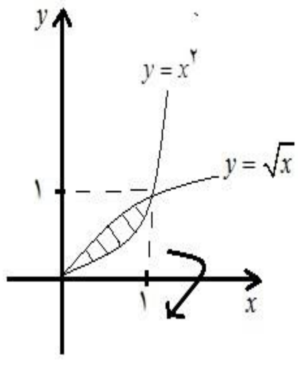
روش دوم: محاسبه انتگرال $J=\int \frac{۱}{۱+\cos(x)}\,dx$ با استفاده از رابطه مثلثاتی $۲\cos^۲(\frac{x}{۲})=۱+\cos(x)$

$$J=\int \frac{۱}{۱+\cos(x)}\,dx=\int \frac{۱}{۲\cos^۲(\frac{x}{۲})}\,dx=\frac{۱}{۲}\int \left(۱+\tan^۲(\frac{x}{۲})\right)dx=\tan(\frac{x}{۲})+c$$

جواب سوال ۲ –

$$K=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos(x)\sin^۲(x)\,dx,\quad u=\sin(x),\quad du=\cos(x)dx\quad ,\ x\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} \rightarrow u\Big|_۰^۱ \quad \rightarrow K=\int_۰^۱ u^۲du=\frac{u^۳}{۳}\Big]_۰^۱=\frac{۱}{۳}$$

جواب سوال ۳-



روش اول : روش حلقه ای

$$K=\int_۰^۱ \pi\left((\sqrt{x})^۲-(x^۲)^۲\right)dx=\int_۰^۱ \pi\left(x-x^۴\right)dx=\pi\left(\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۵}{۵}\right)_۰^۱=\frac{۳\pi}{۱۰}$$

روش دوم : روش پوسته استوانه ای

$$K=\int_۰^۱ ۲\pi y\left(\sqrt{y}-y^۲\right)dx=\int_۰^۱ ۲\pi\left(y^{\frac{۳}{۲}}-y^۳\right)dx=۲\pi\left(\frac{۲y^{\frac{۵}{۲}}}{۵}-\frac{y^۴}{۴}\right)_۰^۱=۲\pi\left(\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۴}\right)=\frac{۳\pi}{۱۰}$$

جواب سوال ۴ - روش جزء به جزء

$$S=\int_۱^e \ln(x)\,dx,\quad u=\ln x,\ dv=dx \quad \rightarrow du=\frac{۱}{x}dx,\ v=x,\quad S=uv\Big]_۱^e-\int_۱^e vdu$$

$$\rightarrow \quad S=x\ln x\Big]_۱^e-\int_۱^e dx=e-x\Big]_۱^e=e-(e-۱)=۱$$

جواب سوال ۵ -

$$f(x)=\ln(۱+۲x)+\sinh(۲x) \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{۲}{۱+۲x}+۲\cosh(۲x)$$

$$g(x)=\int_{۰}^{۱+x^{۲}} e^{\sqrt{t}}\, dt \quad \rightarrow \quad g'(x)=۲x\times e^{\sqrt{۱+x^{۲}}}$$

جواب سوال ۶:

روش اول :

$$e^{x}=۱+x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+.... \quad \rightarrow e^{۳x}=۱+۳x+\frac{(۳x)^{۲}}{۲}+\frac{(۳x)^{۳}}{۶}+....=۱+۳x+\frac{۹x^{۲}}{۲}+\frac{۹x^{۳}}{۲}+....$$

روش دوم:

$$\begin{cases} f(x)=e^{۳x} \quad \rightarrow \quad f(۰)=۱ \\ f^{(۱)}(x)=۳e^{۳x} \quad \rightarrow f^{(۱)}(۰)=۳ \\ f^{(۲)}(x)=۹e^{۳x} \rightarrow f^{(۲)}(۰)=۹ \\ f^{(۳)}(x)=۲۷e^{۳x} \rightarrow f^{(۳)}(۰)=۲۷ \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$f(x)=f(۰)+\frac{f^{(۱)}(۰)}{۱!}x^{۱}+\frac{f^{(۲)}(۰)}{۲!}x^{۲}+\frac{f^{(۳)}(۰)}{۳!}x^{۳}+... \quad \rightarrow \quad e^{۳x}=۱+۳x+\frac{۹x^{۲}}{۲}+\frac{۹x^{۳}}{۲}+...$$

جواب سوال ۷ -

روش اول: شعاع همگرایی $f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}(x-۲)^{n},\ x_{۰}=۲,\ a_{n}=\frac{۱}{n} \quad \rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n}}{a_{n+۱}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+۱)}{n}\right|=۱$

بررسی انتها و ابتدای بازه $f(x_{۰}-R)=f(۱)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}(-۱)^{n}, \qquad f(x_{۰}+R)=f(۳)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$

سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}(-۱)^{n}$ یک سری متناوب و همگرا و سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ یک سری هارمونیک و واگراست. لذا شعاع همگرایی بازه $I=[۱,۳)$ می باشد.

روش دوم:

شعاع همگرایی $f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}(x-۲)^{n}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{۱}{(n+۱)}(x-۲)^{n+۱}\right|}{\left|\frac{۱}{n}(x-۲)^{n}\right|}<۱ \quad \rightarrow |x-۲|<۱ \quad \rightarrow ۱<x<۳, \quad x_{۰}=۲,\ R=۱$

بررسی انتها و ابتدای بازه $f(x_{۰}-R)=f(۱)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}(-۱)^{n}, \qquad f(x_{۰}+R)=f(۳)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$

سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}(-۱)^{n}$ یک سری متناوب و همگرا و سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ یک سری واگراست. لذا بازه همگرایی، بازه $I=[۱,۳)$ می باشد.