نام و نام خانوادگی : .... گروه آموزشی : **ریاضی**

شماره دانشجویی : .... تاریخ : **۱۴۰۲/۳/۲۱**

نام مدرس : .... وقت : **۱۳۵** دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس معادلات فنی (۱۰ گروه هماهنگ)

نیمسال (~~اول~~ / دوم) **۱۴۰۲-۱۴۰۱**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید،

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست،

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- تابع $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ **یک جواب برای معادله همگن متناظر معادله زیر می باشد. یک جواب خصوصی برای این معادله بیابید.** **(۲۰ نمره)**

$$xy'' + 2y' + xy = 1, \quad x > 0$$

سوال ۲- معادله اویلر زیر را حل کنید. **(۱۵ نمره)**

$$x^2 y'' + 3xy' + y = \ln(x), \quad x > 0$$

سوال ۳- دستگاه زیر را حل کنید. **(۱۵ نمره)**

$$\begin{cases} 16Dx - (D-3)y = 6e^{-t} \\ (D-5)x + y = 5 \end{cases}$$

سوال ۴- تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر را بیابید. **(۲۰ نمره)**

$$F(s) = \frac{s\,e^{-\pi s}}{s^2 + 4s + 20}, \qquad G(s) = \frac{2s+1}{s^3 - 5s^2 + 6s}$$

سوال ۵- تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید. **(۲۰ نمره)**

$$f(t) = t\cos(2t), \qquad g(t) = \int_0^t e^{-3\tau}\cos(2\tau)\,d\tau$$

سوال ۶- مساله مقدار اولیه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید. **(۱۵ نمره)**

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = e^{-t} \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

سوال ۷- جواب عمومی معادله زیر را با روش سری های توانی حول نقطه $x = 0$ **بدست آورید.** **(۱۵ نمره)**

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

موفق باشید.

محمد هادی نوری

۱۴۰۲/۳/۲۱

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس معادلات دیفرانسیل

نیمسال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

حل سوال ۱)

$$xy''+۲y'+xy=۱,\quad x>۰$$

معادله همگن متناظر $xy''+۲y'+xy=۰,\quad x>۰,\quad \to y''+\frac{۲}{x}y'+y=۰,\quad p(x)=\frac{۲}{x}$

فرمول آبل $$y_۲(x)=y_۱^۲(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_۱^۲(x)}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{e^{-\int\frac{۲}{x}dx}}{\frac{\sin^۲ x}{x^۲}}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{x^۲\times e^{-۲\ln x}}{\sin^۲ x}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{۱}{\sin^۲ x}dx=\frac{\sin x}{x}(-\cot x)=\frac{-\cos x}{x}$$

روش تغییر پارامترها $$y_p=y_۱v_۱+y_۲v_۲=\frac{\sin x}{x}v_۱-\frac{\cos x}{x}v_۲,\qquad y''+\frac{۲}{x}y'+y=\frac{۱}{x},\qquad R(x)=\frac{۱}{x},$$

رو نسکی $$W(x)=\begin{vmatrix}y_۱ & y_۲\\ y_۱' & y_۲'\end{vmatrix}=y_۱y_۲'-y_۱'y_۲=\frac{\sin x}{x}\left(\frac{(\sin x)x+\cos x}{x^۲}\right)-\left(\frac{(\cos x)x-\sin x}{x^۲}\right)\left(\frac{-\cos x}{x}\right)=\frac{۱}{x^۲},\quad x>۰$$

$$v_۱=\int\frac{-y_۲R(x)}{w(x)}dx=\int\frac{\left(\frac{\cos x}{x}\right)\left(\frac{۱}{x}\right)}{\left(\frac{۱}{x^۲}\right)}dx=\int\cos x\,dx=\sin x,\quad v_۱=\int\frac{y_۱R(x)}{w(x)}dx=\int\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{۱}{x}\right)}{\left(\frac{۱}{x^۲}\right)}dx=\int\sin x\,dx=-\cos x,$$

$$y_p=y_۱v_۱+y_۲v_۲=\frac{\sin x}{x}v_۱-\frac{\cos x}{x}v_۲=\frac{\sin x}{x}\sin x-\frac{\cos x}{x}(-\cos x)=\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{x}=\frac{۱}{x}$$

حل سوال ۲)

$$x^۲y''+۳xy'+y=\ln(x),\quad x>۰$$

$$x=e^t,\quad D=\frac{d}{dx},\ D'=\frac{d}{dt}\quad\to\quad x^۲y''=xD^۲y=D'(D'-۱)y,\quad xy'=xDy=D'y,$$

$$D'(D'-۱)y+۳D'y+y=\left(D'^۲+۲D'+۱\right)y=t,\quad x>۰\quad\to\quad\lambda^۲+۲\lambda+۱=۰\to\lambda_۱=\lambda_۲=-۱$$

$$y_g=c_۱e^{-t}+c_۲te^{-t},\quad y_p=\frac{۱}{D'^۲+۲D'+۱}\{t\}=\frac{۱}{۱+\left(D'^۲+۲D'\right)}\{t\}=\left(۱-(D'^۲+۲D')\right)\{t\}=t-۲$$

$$y=y_g+y_p=e^{-t}(c_۱+c_۲t)+t-۲=\frac{۱}{x}(c_۱+c_۲\ln x)+\ln x-۲$$

حل سوال ۳)

$$\begin{cases}۱۶Dx-(D-۳)y=۶e^{-t}\\(D-۵)x+y=۵\end{cases}\quad\to\quad\left(۱۶D+(D-۳)(D-۵)\right)x=\left(D^۲+۸D+۱۵\right)x=(D+۵)(D+۳)x=۶e^{-t}+(D-۳)\{۵\}=۶e^{-t}-۱۵$$

$$x_g=c_۱e^{-۳t}+c_۲e^{-۵t},\quad x_p=\frac{۱}{(D+۵)(D+۳)}\left\{۶e^{-t}-۱۵\right\}=\frac{۱}{(D+۵)(D+۳)}\{۶e^{-t}\}-\frac{۱}{(D+۵)(D+۳)}\{۱۵\}=\frac{۳}{۴}e^{-t}-۱$$

$$x=x_g+x_p=c_۱e^{-۳t}+c_۲e^{-۵t}+\frac{۳}{۴}e^{-t}-۱,\quad (D-۵)x+y=۵\quad\to\quad y=۵-(D+۵)x$$

$$y=۵-(D-۵)\left\{c_۱e^{-۳t}+c_۲e^{-۵t}+\frac{۳}{۴}e^{-t}-۱\right\}=۵-\left((-۳c_۱e^{-۳t}-۵c_۲e^{-۵t}-\frac{۳}{۴}e^{-t})-(۵c_۱e^{-۳t}+۵c_۲e^{-۵t}+\frac{۱۵}{۴}e^{-t}-۵)\right)$$

$$\begin{cases}x=c_۱e^{-۵t}+c_۲e^{-۳t}+\frac{۳}{۴}e^{-t}-۱\\[2mm] y=۸c_۱e^{-۵t}+۱۰c_۲e^{-۳t}+\frac{۹}{۲}e^{-t}\end{cases}$$

حل سوال ۴)

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\{\frac{s e^{-\pi s}}{s^{۲}+۴s+۲۰}\}=L^{-1}\{\frac{(s+۲-۲)e^{-\pi s}}{(s+۲)^{۲}+۴^{۲}}\}=L^{-1}\{(\frac{(s+۲)}{(s+۲)^{۲}+۴^{۲}}-\frac{۲}{(s+۲)^{۲}+۴^{۲}})e^{-\pi s}\}$$

$$\to\ L^{-1}\{F(s)\}=\left(e^{-۲(t-\pi)}\cos(۴(t-\pi))-\frac{۱}{۲}e^{-۲(t-\pi)}\sin(۴(t-\pi))\right)H(t-\pi),\qquad (H(t-\pi)=U(t-\pi))$$

$$L^{-1}\{G(s)\}=L^{-1}\{\frac{۲s+۱}{s^{۳}-۵s^{۲}+۶s}\}=L^{-1}\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s-۲}+\frac{c}{s-۳}\}=L^{-1}\{\frac{۱/۶}{s}+\frac{-۵/۲}{s-۲}+\frac{۷/۳}{s-۳}\}=\frac{۱}{۶}-\frac{۵}{۲}e^{۲t}+\frac{۷}{۳}e^{۳t}$$

حل سوال ۵)

$$L\{f(t)\}=L\{t\cos(۲t)\}=-\frac{d}{ds}L\{\cos(۲t)\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^{۲}+۴}\right)=\frac{-\left(s^{۲}+۴-۲s^{۲}\right)}{(s^{۲}+۴)^{۲}}=\frac{s^{۲}-۴}{(s^{۲}+۴)^{۲}},$$

$$L\{g(t)\}=L\left\{\int_{۰}^{t}e^{-۳\tau}\cos(۲\tau)\,d\tau\right\}=\frac{L\left\{e^{-۳\tau}\cos(۲\tau)\right\}}{s}=\frac{\frac{s+۳}{(s+۳)^{۲}+۴}}{s}=\frac{s+۳}{s\left((s+۳)^{۲}+۴\right)}$$

حل سوال ۶)

$$\begin{cases}x''(t)+۲x'(t)+x(t)=e^{-t}\\ x(۰)=x'(۰)=۰\end{cases}\ \to\ L\{x''(t)+۲x'(t)+x(t)\}=L\{e^{-t}\},\quad X(s)=L\{x(t)\}\ \to\ L\{x''(t)\}+۲L\{x'(t)\}+L\{x(t)\}=\frac{۱}{s+۱}$$

$$\left(s^{۲}X(s)-sx(۰)-x'(۰)\right)+۲\left(sX(s)-x(۰)\right)+X(s)=\frac{۱}{s+۱}\ \to\ (s^{۲}+۲s+۱)X(s)=\frac{۱}{s+۱}\ \to X(s)=\frac{۱}{(s+۱)^{۳}}\ \to\ x(t)=\frac{۱}{۲}t^{۲}e^{-t}$$

حل سوال ۷)

$$(۱-x^{۲})y''-۲xy'+۲y=۰,\quad y(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n,\quad y'(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}na_nx^{n-۱},\quad y''(x)=\sum_{n=۲}^{\infty}n(n-۱)a_nx^{n-۲}$$

$$(۱-x^{۲})\sum_{n=۲}^{\infty}n(n-۱)a_nx^{n-۲}-۲x\sum_{n=۱}^{\infty}na_nx^{n-۱}+۲\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n=۰\ \to$$

$$\sum_{n=۲}^{\infty}n(n-۱)a_nx^{n-۲}-\sum_{n=۲}^{\infty}n(n-۱)a_nx^n-۲\sum_{n=۱}^{\infty}na_nx^n+۲\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n=۰\ \to$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۲)(n+۱)a_{n+۲}x^n-\sum_{n=۰}^{\infty}n(n-۱)a_nx^n-۲\sum_{n=۰}^{\infty}na_nx^n+۲\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n=۰\ \to$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\left[(n+۲)(n+۱)a_{n+۲}-n(n-۱)a_n-۲na_n+۲a_n\right]x^n=\sum_{n=۰}^{\infty}\left[(n+۲)(n+۱)a_{n+۲}-(n+۲)(n-۱)a_n\right]x^n=۰\ \to$$

$$(n+۲)(n+۱)a_{n+۲}-(n+۲)(n-۱)a_n=۰,\quad n\ge ۰\ \to\ a_{n+۲}=\frac{n-۱}{n+۱}a_n,\quad n\ge ۰$$

$$a_۲=-a_۰,\quad a_۳=۰,\quad a_۴=\frac{۱}{۳}a_۲=\frac{-۱}{۳}a_۰,\quad a_۵=۰,\quad ....$$

$$y(x)=a_۰+a_۱x+a_۲x^{۲}+a_۳x^{۳}+a_۴x^{۴}+...=a_۰(۱-x^{۲}-\frac{۱}{۳}x^{۴}+...)+a_۱x$$