نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۲/۳/۲۰**

وقت : **۱۳۵** دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم درس **ریاضی۱** (۱۶ گروه هماهنگ)

نیمسال (~~**اول**~~ / دوم) **۱۴۰۲**- **۱۴۰۱**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- تابع $f(x)=\int_{۱}^{x}\sqrt{۱+t^{۶}}\,dt$ $(x\geq ۱)$ **مفروض است.**

الف) $f'(x)$ **را محاسبه کنید.** **(۵ نمره)**

ب) نشان دهید که این تابع یک به یک است. **(۵ نمره)**

ج) $\left(f^{-۱}\right)'(۰)$ **را محاسبه کنید.** **(۵ نمره)**

سوال ۲- مطلوست محاسبه $A=\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\left(\sin(x)\right)^{\sin(x)}$. **(۱۵ نمره)**

سوال ۳- انتگرال های نامعین زیر را محاسبه کنید.

$K=\int\frac{x^{۲}+۲}{x^{۳}+x}\,dx$ **(۲۰ نمره)**

$L=\int\frac{۱}{x^{۲}\sqrt{۶۴-x^{۲}}}\,dx$ **(۱۵ نمره)**

سوال ۴: ناحیه محدود به منحنی $y=\ln(x)$ **و خطوط** $y=۰$، $x=e$ **و** $x=e^{۲}$ **مفروض است.**

الف: این ناحیه را در صفحه xy **مشخص کنید (رسم کنید).** **(۵ نمره)**

ب: مساحت این ناحیه را بدست آورید. **(۱۰ نمره)**

سوال ۵: حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y=۱+\sin(x)$ **و خطوط** $x=۰$ ، $x=\pi$ **و** $y=۰$ **را حول محور** x **ها بیابید.** **(۱۵ نمره)**

سوال ۶: شعاع و بازه همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{۲^{n}}(x-۳)^{n}$ **را بیابید.** **(۱۵ نمره)**

سوال ۷: چهار جمله اول بسط مکلورن تابع $f(x)=(۱+۲x)^{\frac{۱}{۳}}$ **را بیابید.** **(۱۰ نمره)**

موفق باشید.

پاسخ سوال۱ :

الف) $f'(x)=\sqrt{۱+x^{۶}}, \quad x\geq ۱$

ب) $f'(x)=\sqrt{۱+x^{۶}}\geq ۱>۰, \quad x\geq ۱ \quad \rightarrow \quad f'(x)>۰ \quad \rightarrow$ (f صعودی اکید) $\rightarrow$ (f یک به یک است)

ج: $\left(f^{-۱}\right)'(۰)=\dfrac{۱}{f'(۱)}=\dfrac{۱}{\sqrt{۲}}$

پاسخ سوال۲ : $f(x)=(\sin(x))^{\sin(x)}, \quad A=\lim\limits_{x\to ۰^+}(\sin(x))^{\sin(x)}=۰^{۰}$ مبهم

$$\ln(f(x))=\ln\left((\sin(x))^{\sin(x)}\right)=\sin(x)\ln(\sin(x)) \rightarrow \lim_{x\to ۰^+}\ln(f(x))=\lim_{x\to ۰^+}(\sin(x)\ln(\sin(x)))=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\ln(\sin(x))}{(\frac{۱}{\sin(x)})}=\frac{-\infty}{+\infty}$$ مبهم

قاعده هوپیتال $$\lim_{x\to ۰^+}\ln(f(x))\overset{H}{=}\lim_{x\to ۰^+}\frac{\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)}{\left(\frac{-\cos(x)}{\sin^{۲}(x)}\right)}=\lim_{x\to ۰^+}(-\sin(x))=۰$$

$$\ln\left(\lim_{x\to ۰^+}(f(x))\right)=۰ \rightarrow A=\lim_{x\to ۰^+}(f(x))=e^{۰}=۱$$

پاسخ سوال ۳:

$$K=\int\frac{x^{۲}+۲}{x^{۳}+x}\,dx, \qquad \frac{x^{۲}+۲}{x^{۳}+x}=\frac{x^{۲}+۲}{x(x^{۲}+۱)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^{۲}+۱}=\frac{A(x^{۲}+۱)+(Bx+C)x}{x(x^{۲}+۱)}=\frac{(A+B)x^{۲}+Cx+A}{x(x^{۲}+۱)}$$

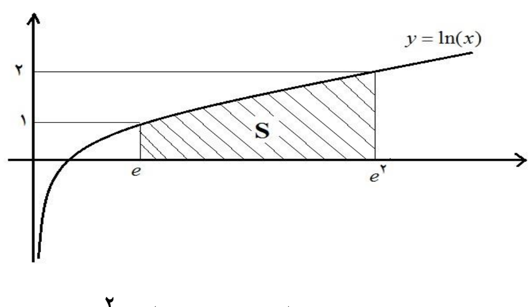
$$A+B=۱, \quad C=۰, \quad A=۲ \rightarrow (A=۲, \quad B=-۱, \quad C=۰) \rightarrow K=\int\left(\frac{۲}{x}-\frac{x}{x^{۲}+۱}\right)dx=۲\ln|x|-\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۱)+c$$

$$L=\int\frac{dx}{x^{۲}\sqrt{۶۴-x^{۲}}}, \qquad x=۸\sin(t), \quad dx=۸\cos(t)dt, \quad ۰<t<\frac{\pi}{۲} \qquad \rightarrow$$

$$L=\int\frac{dx}{x^{۲}\sqrt{۶۴-x^{۲}}}=\int\frac{۸\cos(t)dt}{۶۴\sin^{۲}(t)\sqrt{۶۴-۶۴\sin^{۲}(t)}}=\frac{۱}{۶۴}\int\frac{\cos(t)dt}{\sin^{۲}(t)\cos(t)}=\frac{۱}{۶۴}\int\frac{dt}{\sin^{۲}(t)}=\frac{۱}{۶۴}\int(۱+\cot^{۲}(t))\,dt \rightarrow$$

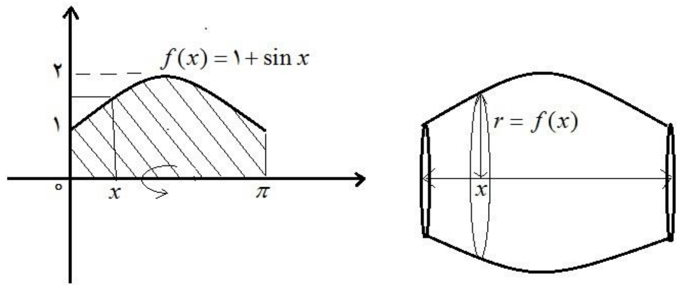
$$L=\frac{-۱}{۶۴}\cot(t)+c=\frac{-\sqrt{۶۴-x^{۲}}}{۶۴x}+c$$

پاسخ سوال۴ : الف:



ب: $$S=\int_e^{e^{۲}}\ln(x)\,dx=(x\ln x-x)\Big]_e^{e^{۲}}=\left(e^{۲}\ln e^{۲}-e^{۲}\right)-(e\ln e-e)=(۲e^{۲}\ln e-e^{۲})-(e-e)=e^{۲}-۰=e^{۲}$$

پاسخ سوال۵ :



$$V=\int_{۰}^{\pi}\pi r^{۲}dx=\int_{۰}^{\pi}\pi(۱+\sin x)^{۲}\,dx=\pi\int_{۰}^{\pi}\left(۱+۲\sin x+\sin^{۲}x\right)dx=\pi\int_{۰}^{\pi}\left(۱+۲\sin x+\frac{۱-\cos(۲x)}{۲}\right)dx \rightarrow$$

$$V=\pi\left(x-۲\cos x+\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۴}\sin(۲x)\right)\Big]_{x=۰}^{\pi}=\pi\left(\left(\frac{۳}{۲}\pi+۲\right)-(-۲)\right)=\pi\left(\frac{۳}{۲}\pi+۴\right)$$

پاسخ سوال ۶:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{۲^{n}}(x-۳)^{n},\quad x_{۰}=۳,\quad a_{n}=\frac{n}{۲^{n}},\quad R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n}}{a_{n+۱}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{۲^{n}}}{\frac{n+۱}{۲^{n+۱}}}\right)=۲\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+۱}\right)=۲,$$ شعاع همگرایی

$$x=x_{۰}-R=۱ \rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{۲^{n}}(x-۳)^{n}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{۲^{n}}(-۲)^{n}=\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}n$$ واگرا

$$x=x_{۰}+R=۵ \rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{۲^{n}}(x-۳)^{n}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{۲^{n}}(۲)^{n}=\sum_{n=۱}^{\infty}n$$ واگرا

$$I=(x_{۰}-R,x_{۰}+R)=(۱,۵)$$ بازه همگرایی

پاسخ سوال ۷:

$$f(x)=(۱+۲x)^{\frac{۱}{۳}} \rightarrow f'(x)=\frac{۲}{۳}(۱+۲x)^{\frac{-۲}{۳}},\quad f''(x)=\frac{-۸}{۹}(۱+۲x)^{\frac{-۵}{۳}},\quad f'''(x)=\frac{۸۰}{۲۷}(۱+۲x)^{\frac{-۸}{۳}}$$

$$f(۰)=۱,\quad f'(۰)=\frac{۲}{۳},\quad f''(۰)=\frac{-۸}{۹},\quad f'''(۰)=\frac{۸۰}{۲۷}$$

$$f(x)=f(۰)+\frac{f'(۰)}{۱!}x+\frac{f''(۰)}{۲!}x^{۲}+\frac{f'''(۰)}{۳!}x^{۳}+\ldots=۱+\frac{۲}{۳}x-\frac{۴}{۹}x^{۲}+\frac{۴۰}{۸۱}x^{۳}+\ldots$$