نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۱/۱۰/۱۷**

وقت : **۱۳۵** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس **ریاضی۱ فنی** (۱۸ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۴۰۲-۱۴۰۱**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- الف) همگرایی یا واگرایی دنباله عددی $\left\{ n\sin(\frac{۱}{n}) \right\}$ را مشخص کنید. **(۱۰ نمره)**

ب) مقدار $A = \lim\limits_{x \to ۰^{+}} \left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{۱}{x}}$ را بدست آورید. **(۱۰ نمره)**

سوال ۲- مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = e^{\sqrt{x}}$ و محور xها در فاصله $۰ \le x \le ۴$ را بیابید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۳- ناحیه محدود به منحنی‌های $y = ۲$ و $y = x^{۲} + ۱$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم.
حجم جسم حاصل را بیابید. **(۱۵ نمره)**

انتگرال‌های نامعین زیر را محاسبه کنید.

سوال ۴- $$I_{۱} = \int \frac{x^{۲}+۱}{(x+۲)(x^{۲}-۳x+۴)}\,dx$$ **(۲۰ نمره)**

سوال ۵- $$I_{۲} = \int \frac{x^{۳}}{\sqrt{(۲۵-x^{۲})^{۳}}}\,dx$$ **(۱۵ نمره)**

سوال ۶- $$I_{۳} = \int \frac{۵-۷\sin x}{۱+\cos x}\,dx$$ **(۱۵ نمره)**

سوال ۷- شعاع و بازه همگرایی سری توانی $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^{n}}{n+۱}(۳x-۵)^{n}$ را بدست آورید. **(۲۰ نمره)**

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : الف) باید وجود $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}$ را بررسی کنیم. اگر تابع $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ را در نظر بگیریم آنگاه برای هر عدد $n=1,2,3,\cdots$ داریم $f(n)=n\sin\frac{1}{n}$ بنابر این در صورت وجود حد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ خواهیم داشت $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ و دنباله همگرا خواهد بود و اگر حد وجود نداشته باشد سری واگرا خواهد بود.

به کمک تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$ مقدار حد را محاسبه می کنیم.
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1$$

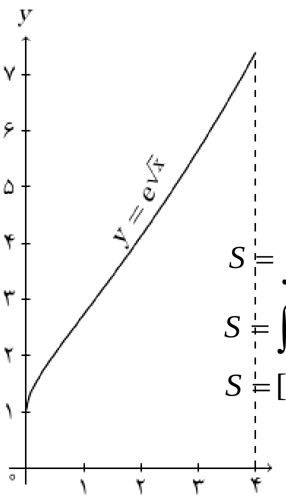
پس $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1$ یعنی دنباله $\{n\sin\frac{1}{n}\}$ به ۱ همگرا است.

ب) این حد به صورت مبهم 1^∞ است و برای محاسبه آن از لگاریتم استفاده می‌کنیم. یعنی حد $\ln A=\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}$ را بررسی می‌کنیم. اما $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln A=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}$ هم به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. از صورت و مخرج مشتق می‌گیریم و حد جدید را محاسبه می‌کنیم :
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[\ln(\cos\sqrt{x})]'}{[x]'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-1}{2\cos\sqrt{x}}\times\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=\frac{-1}{2}\times 1=\frac{-1}{2}$$

البته چون $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}$ به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است می‌توان یک بار دیگر از قاعده هوپیتال استفاده کرد :
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[-\sin\sqrt{x}]'}{[2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}]'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\cos\sqrt{x}}{2(\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x})}=\frac{-1}{2}$$

با توجه به وجود این حد ، طبق قاعده هوپیتال داریم
$$\lim_{x\to 0^+}\ln A=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}=\frac{-1}{2}$$

که نتیجه می‌دهد :
$$\lim_{x\to 0^+} A=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\cos\sqrt{x})}{x}=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$



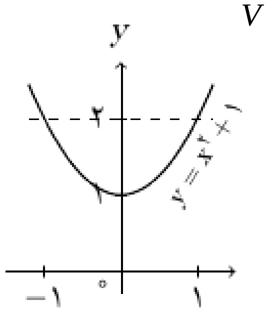
پاسخ سوال۲ : مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با :
$$S=\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$$

برای حل این انتگرال معین از تغییر متغیر $x=t^2$ استفاده می‌کنیم :
$$S=\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx=\int_0^2 2te^t dt$$

اکنون به کمک روش انتگرالگیری جزء به جزء داریم :
$$S=[2(t-1)e^t]_0^2=2(e^2+1)$$

پاسخ سوال۳ : نقاط برخورد خط و سهمی عبارتند از : $(1,2)$ و $(-1,2)$

<u>روش اول :</u> (به کمک روش قرص مستدیر) حجم جسم دوار برابر است با :
$$V=\pi\int_{-1}^{1}[4-(x^2+1)^2]dx$$
$$V=2\pi\int_0^1(-x^4-2x^2+3)dx=2\pi[\frac{-1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x]_0^1=2\pi[\frac{-1}{5}-\frac{2}{3}+3]=\frac{64\pi}{15}$$



<u>روش دوم :</u> به کمک روش پوسته استوانه‌ای خواهیم داشت :
$$V=2\pi\int_1^2 2y\sqrt{y-1}\,dy$$
$$V=4\pi\int_1^2[(y-1)\sqrt{y-1}+\sqrt{y-1}]dy$$
$$=4\pi[\frac{2}{5}(y-1)^2\sqrt{y-1}+\frac{2}{3}(y-1)\sqrt{y-1}]_1^2=4\pi(\frac{2}{5}+\frac{2}{3})=\frac{64\pi}{15}$$

پاسخ سوال۴ : این انتگرال را به کمک روش تجزیه کسرها حل می‌کنیم. قرار می‌دهیم :

$$\frac{x^2+1}{(x+2)(x^2-3x+4)}=\frac{a}{x+2}+\frac{bx+c}{x^2-3x+4}\quad\to\ a=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+1}{x^2-3x+4}=\frac{5}{14}$$

$$\frac{bx+c}{x^2-3x+4}=\frac{x^2+1}{(x+2)(x^2-3x+4)}-\frac{5}{14(x+2)}=\frac{3(x+2)(3x-1)}{14(x+2)(x^2-3x+4)}=\frac{9x-3}{14(x^2-3x+4)}$$

اکنون داریم

$$I_1=\int\frac{x^2+1}{(x+2)(x^2-3x+4)}dx=\frac{1}{14}\int(\frac{5}{x+2}+\frac{9x-3}{x^2-3x+4})dx$$

$$I_1=\frac{1}{14}\int(\frac{5}{x+2}+\frac{9(x-\frac{3}{2})+\frac{21}{2}}{(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}})dx=\frac{1}{14}[5\int\frac{1}{x+2}dx+\frac{9}{2}\int\frac{2x-3}{x^2-3x+4}dx+\frac{21}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}dx]$$

انتگرال‌های اول و دوم به سادگی حل می‌شوند اما برای انتگرال سوم باید از تغییر متغیر $x-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}\tan u$ استفاده کنیم.

$$I_1=\frac{1}{14}[5\ln(x+2)+\frac{9}{2}\ln(x^2-3x+4)+\frac{21}{2}\times\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x-3}{\sqrt{7}}]+c$$

$$I_1=\frac{1}{14}[5\ln(x+2)+\frac{9}{2}\ln(x^2-3x+4)+3\sqrt{7}\arctan\frac{2x-3}{\sqrt{7}}]+c_1$$

پاسخ سوال۵ : روش اول : برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $t^2=25-x^2$ استفاده می‌کنیم.

$$I_2=\int\frac{x^3}{\sqrt{(25-x^2)^3}}dx=\int\frac{(25-t^2)}{t^3}(-tdt)=\int(1-\frac{25}{t^2})dt=t+\frac{25}{t}+c=\sqrt{25-x^2}+\frac{25}{\sqrt{25-x^2}}+c$$

روش دوم : می‌توان از تغییر متغیر $x=5\sin t$ هم استفاده کرد.

$$I_2=\int\frac{x^3}{\sqrt{(25-x^2)^3}}dx=\int\frac{125\sin^3 t}{125\cos^3 t}(5\cos t dt)=5\int\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}dt=5\int\frac{\sin t(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t}dt$$

$$=5\int(\frac{\sin t}{\cos^2 t}-\sin t)dt=5(\frac{1}{\cos t}+\cos t)+c=\frac{25}{\sqrt{25-x^2}}+\sqrt{25-x^2}+c$$

پاسخ سوال۶ : داریم :

$$I_3=\int\frac{5-7\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{5-7\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{5}{1+\cos x}dx+7\int\frac{-\sin x}{1+\cos x}dx$$

$$\to\quad I_3=\int\frac{5}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+7\int\frac{-\sin x}{1+\cos x}dx=5\tan\frac{x}{2}+7\ln(1+\cos x)+c=\frac{5\sin x}{1+\cos x}+7\ln(1+\cos x)+c$$

پاسخ سوال۷ : سری توانی را به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}(3x-5)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{n+1}(x-\frac{5}{3})^n$ بازنویسی می‌کنیم.

چون $a_n=\frac{6^n}{n+1}$ پس شعاع همگرایی سری برابر است با :

$$R=\lim_{n\to\infty}(\frac{6^n}{n+1}\div\frac{6^{n+1}}{n+2})=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}(\frac{n+2}{n+1})=\frac{1}{6}$$

چون $a=\frac{5}{3}$ پس $a+R=\frac{11}{6}$ و $a-R=\frac{3}{2}$.

اگر $x=\frac{3}{2}$ آنگاه به سری عددی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ می‌رسیم که یک سری متناوب نزولی و در نتیجه همگرا است اما اگر $x=\frac{11}{6}$ آنگاه به سری عددی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ می‌رسیم که یک سری واگرا است. بنابر این، بازه همگرایی سری عبارت است از : $[\frac{3}{2},\frac{11}{6})$