نام و نام خانوادگی : ....
شماره دانشجویی : ....
نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**
تاریخ : **۱۴۰۲/۲/۱۱**
وقت : **۸۰** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم درس **معادلات فنی** (**۱۰ گروه هماهنگ**)

نیمسال (~~**اول**~~ / **دوم**) **۱۴۰۱-۱۴۰۲**

توجه :
از نوشتن با مداد خودداری نمایید،
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست،
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- معادله دیفرانسیل مرتبه اول_ زیر را حل کنید. (۱۵ نمره)

$$(x-4y-9)dx+(4x+y-2)dy=0,\quad x\geq 2$$

سوال ۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را بدست آورید. (۱۵ نمره)

$$y(x+y)dx+(x+2y-1)dy=0.$$

سوال ۳- معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را حل کنید. (۱۵ نمره)

$$y(1+2y\ln x)dx-(2x\ln x)dy=0,\quad x\geq 3$$

سوال ۴- می دانیم که تابع $y_1(x)=x$ یک جواب برای معادله دیفرانسیل $xy''+xy'-y=0$ می باشد. با روش کاهش مرتبه مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید. (۲۰ نمره)

$$\begin{cases} xy''+xy'-y=1, & x\geq 1 \\ y(1)=0, & y'(1)=1 \end{cases}$$

سوال ۵- یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر با روش ضرائب نامعین بدست آورید. (۱۵ نمره)

$$y''+4y=6\sin 2x$$

موفق باشید.

حل سوال ۱) معادله با تغییر متغیر قابل تبدیل به یک معادله دیفرانسیل همگن است:

$$(x-4y-9)dx+(4x+y-2)dy=0 \quad\to\quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{-x+4y+9}{4x+y-2},\quad \begin{cases}-t+4s+9=0\\ 4t+s-2=0\end{cases}\quad t=1,\quad s=-2 \quad\to$$

$$\begin{cases}X=x-t=x-1\\ Y=y-s=y+2\end{cases} \to\quad Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{-X+4Y}{4X+Y}=\frac{-1+4\frac{Y}{X}}{4+\frac{Y}{X}}\quad,\quad v=\frac{Y}{X},\quad Y'=v'X+v \quad\to\quad v'X+v=\frac{-1+4v}{4+v}\quad\to$$

$$v'X=\frac{-1+4v}{4+v}-v=-\frac{1+v^2}{4+v}\quad\to\quad \frac{4+v}{1+v^2}dv=-\frac{1}{X}dX\quad\to\quad \int\frac{4+v}{1+v^2}dv=-\int\frac{1}{X}dX\quad\to$$

$$4\tan^{-1}(v)+\frac{1}{2}\ln(1+v^2)=-\ln X+c\quad\to\quad 4\tan^{-1}(\frac{Y}{X})+\frac{1}{2}\ln(1+\frac{Y^2}{X^2})=-\ln X+c\quad\to$$

$$4\tan^{-1}\left(\frac{y+2}{x-1}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{(y+2)^2}{(x-1)^2}\right)=-\ln(x-1)+c$$

حل سوال ۲) این معادله قابل تبدیل به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول کامل است:

$$y(x+y)dx+(x+2y-1)dy=0\quad\to\qquad M=y(x+y),\quad N=x+2y-1,\quad \left(\frac{\partial M}{\partial y}=x+2y\right)\neq\left(\frac{\partial N}{\partial x}=1\right)$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{x+2y-1}{x+2y-1}=1\quad\to\quad g(x)=1,\quad \mu(x)=e^{\int g(x)dx}=e^{\int dx}=e^x\quad\to$$

$$ye^x(x+y)dx+e^x(x+2y-1)dy=0\quad\to\quad M_1=ye^x(x+y),\quad N_1=e^x(x+2y-1),\quad \frac{\partial M_1}{\partial y}=xe^x+2ye^x=\frac{\partial N_1}{\partial x}\quad\to$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N_1\quad\to\quad f(x,y)=\int N_1(x,y)dy=\int e^x(x+2y-1)dy=e^x\left(xy+y^2-y\right)+h(x),\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=M_1\quad\to$$

$$e^x\left(xy+y^2-y\right)+ye^x+h'(x)=ye^x(x+y)\quad\to\quad h'(x)=0\to\quad h(x)=\overline{c}\quad\to$$

$$f(x,y)=e^x\left(xy+y^2-y\right)+\overline{c}=c_1\quad\to\quad e^x\left(xy+y^2-y\right)=c$$

حل سوال ۳) این معادله یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول برنولی است:

$$y(1+2y\ln x)dx-(2x\ln x)dy=0,\quad x\geq 3\quad\to\qquad y'-\frac{1}{2x\ln x}y=\frac{1}{x}y^2,\quad n=2,\quad u=y^{1-n}=y^{-1}\quad\to$$

$$u'+\frac{1}{2x\ln x}u=-\frac{1}{x}\quad\to\quad \mu(x)=e^{\int\frac{1}{2x\ln x}dx}=e^{\frac{1}{2}\ln(\ln x)}=(\ln x)^{\frac{1}{2}}\quad\to$$

$$u=\frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}\left(\int(\ln x)^{\frac{1}{2}}\times(\frac{-1}{x})dx+c\right)=\frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{-2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+c\right)=\frac{-2}{3}\ln x+c(\ln x)^{\frac{-1}{2}}\quad\to$$

$$\frac{1}{y}=\frac{-2}{3}\ln x+c(\ln x)^{\frac{-1}{2}}\quad\to\quad y\left(\frac{-2}{3}\ln x+c(\ln x)^{\frac{-1}{2}}\right)=1$$

حل سوال ۴) حل مساله با روش کاهش مرتبه:

$$\begin{cases} y = vy_1 = vx \quad \to \quad y' = v'x + v, \quad y'' = v''x + v' + v' = v''x + 2v', \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 1 \quad \to v(1) = 0, \quad v'(1) = 1 \end{cases}$$

$$xy'' + xy' - y = 1 \to \quad x(v''x + 2v') + x(v'x + v) - vx = 1 \quad \to \quad v''x^2 + (2x + x^2)v' = 1 \to$$

$$v'' + (\frac{2}{x} + 1)v' = \frac{1}{x^2}, \quad w = v', \; w'' = v' \quad \to \quad w' + (\frac{2}{x} + 1)w = \frac{1}{x^2}, \quad \mu(x) = e^{\int (\frac{2}{x}+1)dx} = e^{2\ln x + x} = x^2 e^x \to$$

$$w = \frac{1}{x^2 e^x}\left(\int x^2 e^x \times \frac{1}{x^2} dx + c\right) = \frac{1}{x^2 e^x}\left(\int e^x dx + c\right) = \frac{e^{-x}}{x^2}\left(e^x + c\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{c}{x^2} e^{-x} \quad \to$$

$$v' = \frac{1}{x^2} + \frac{c}{x^2} e^{-x}, \quad v'(1) = 1 \quad \to \quad c = 0, \quad v' = \frac{1}{x^2} \quad \to \quad v = -\frac{1}{x} + c_1, \quad v(1) = 0 \to c_1 = 1, \quad v = -\frac{1}{x} + 1 \quad \to$$

$$y = vx = x - 1$$

حل سوال ۵)

$$y'' + 4y = 6\sin 2x \quad \to \quad \lambda^2 + 4 = 0 \quad \to \quad \lambda = \pm 2i \quad \to$$

$$\begin{cases} y_p = x(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ y_p' = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x), \\ y_p'' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) \end{cases} \quad \to$$

$$\begin{cases} y_p = x(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ y_p' = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x), \\ y_p'' = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) \end{cases} \quad \& \quad y_p'' + 4y_p = 6\sin 2x \quad \to$$

$$\left(-4B + 4B\right)x\sin 2x + \left(-4A + 4A\right)x\cos 2x + \left(-4A\right)\sin 2x + \left(4B\right)\cos 2x = 6\sin 2x \quad \to$$

$$\left(-4A\right)\sin 2x + \left(4B\right)\cos 2x = 6\sin 2x \quad \to \quad \begin{cases} -4A = 6 \\ 4B = 0 \end{cases} \quad \to \quad A = \frac{-3}{2}, B = 0 \quad \to \; y_p = \frac{-3}{2} x\cos 2x$$