



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۲/۹/۶

مدت : ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس ریاضی ۲- فنی (۸ گروه باهنک)

نیمسال اول سال تحصیلی ۱۴۰۲-۰۳

توجه : از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

- سوال ۱ - فصل مشترک دو صفحه $2x + y - 4z - 16 = 0$ و $x - 2y + 3z + 2 = 0$ را بدست آورید. سپس مقدار a را چنان بیابید که صفحه $ax + 2y - z = 5$ با فصل مشترک فوق موازی باشد. ۱۵ نمره
- سوال ۲ - رویه $\rho = 2 \cos \varphi + 4 \sin \varphi \cos \theta$ در مختصات کروی داده شده است. ۱۵ نمره
معادله رویه در دستگاه دکارتی را نوشته و شکل تقریبی آن را رسم کنید.
- سوال ۳ - منحنی C توسط تابع برداری $r(t) = (t, t \sin t, t \cos t)$ داده شده است. ۱۵ نمره
انحنای منحنی را در نقطه $t = 0$ بدست آورید.
- سوال ۴ - فرض کنید $w = f(x, y)$ و مشتقات جزئی مرتبه دوم f موجود و پیوسته باشند ۱۵ نمره
و $x = t^2, y = \ln t$.
مطلوب است محاسبه w_t و w_{tt} بر حسب مشتقات جزئی f .
- سوال ۵ - اکسترمم‌های تابع $f(x, y, z) = xyz$ با شرط $xy + yz + zx = 12$ را بیابید. ۲۰ نمره

موفق باشید

پاسخ سوال ۱ - برای پیدا کردن فصل مشترک دو صفحه، یکی از متغیرها را، مثلاً z ، بر حسب دو متغیر دیگر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2x + y - 4z - 16 = 0 \\ x - 2y + 3z + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow 5x - 5z - 30 = 0 \rightarrow z = x - 6$$

$$\begin{cases} 2x + y - 4z - 16 = 0 \\ x - 2y + 3z + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow 5y - 10z - 20 = 0 \rightarrow z = \frac{y - 4}{2}$$

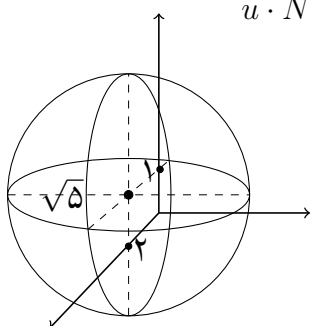
اکنون داریم $z = \frac{y - 4}{2} = x - 6$ که معادله فصل مشترک دو صفحه داده شده است.

بردار هادی این خط راست، بردار $u = (1, 2, 1)$ و بردار قائم صفحه 5 عبارت $ax + 2y - z = 5$ است از:

$$N = (a, 2, -1)$$

اگر این فصل مشترک با صفحه موازی باشد آنگاه باید بر بردار قائم صفحه عمود باشد. پس باید داشته باشیم:

$$u \cdot N = 0 \rightarrow (1, 2, 1) \cdot (a, 2, -1) = a + 3 = 0 \rightarrow a = -3$$



پاسخ سوال ۲ - برای نوشتن معادله رویه در دستگاه دکارتی،

دو طرف معادله را در ρ ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= 2\rho \cos \varphi + 4\rho \sin \varphi \cos \theta \\ \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 &= 2z + 4x \\ \rightarrow (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 &= 5 \end{aligned}$$

این رویه، یک کره با شعاع $\sqrt{5}$ و به مرکز نقطه $(1, 0, 2)$ است.

پاسخ سوال ۳ - داریم: $r'(t) = (1, \sin t + t \cos t, \cos t - t \sin t) \rightarrow r'(0) = (1, 0, 1)$

$$r''(t) = (0, 2 \cos t - t \sin t, -2 \sin t - t \cos t) \rightarrow r''(0) = (0, 2, 0), |r'(0)| = \sqrt{2}$$

اکنون می‌توانیم انحنای منحنی را $t = 0$ محاسبه کنیم:

$$\kappa(0) = \frac{|r'(0) \times r''(0)|}{|r'(0)|^3} = \frac{|(1, 0, 1) \times (0, 2, 0)|}{\sqrt{2}^3} = \frac{|(-2, 0, 2)|}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 1$$

پاسخ سوال ۴ - برای محاسبه مشتقات خواسته شده، باید از قاعده مشتق زنجیری استفاده کنیم.

$$w_t = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} = 2t f_x + \frac{1}{t} f_y \quad \text{داریم } \frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$\begin{aligned} w_{tt} &= \frac{dw_t}{dt} = 2f_x + 2t \frac{df_x}{dt} - \frac{1}{t^2} f_y + \frac{1}{t} \frac{df_y}{dt} \\ &= 2f_x + 2t(2t f_{xx} + \frac{1}{t} f_{xy}) - \frac{1}{t^2} f_y + \frac{1}{t}(2t f_{yx} + \frac{1}{t} f_{yy}) \\ &= 4t^2 f_{xx} + \frac{1}{t^2} f_{yy} + 2(f_{xy} + f_{yx}) + 2f_x - \frac{1}{t^2} f_y \end{aligned}$$

پاسخ سوال ۵ - از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. برای این کار، تابع g متغیره را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$g(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(xy + yz + zx - 12)$$

اکنون باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g_z = 0 \\ g_\lambda = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} yz - \lambda(y+z) = 0 \\ xz - \lambda(x+z) = 0 \\ xy - \lambda(x+y) = 0 \\ xy + yz + zx = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xyz - \lambda(xy+zx) = 0 \\ xyz - \lambda(xy+yz) = 0 \\ xyz - \lambda(zx+yz) = 0 \\ xy + yz + zx = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda xy = \lambda yz = \lambda zx \\ xy + yz + zx = 12 \end{cases}$$

اگر $\lambda = 0$ آنگاه حداقل دو متغیر از سه متغیر x و y و z باید برابر ۰ باشند و شرط $xy + yz + zx = 12$ نقض می شود.

پس داریم $xy = yz = zx = 4$ و با توجه به شرط آخر خواهیم داشت $xy = yz = zx = 4$.

این تساوی ها نشان می دهد که $x = y = z = \pm 2$ و $f(2, 2, 2) = 8$ و $f(-2, -2, -2) = -8$.

همچنین، می توانستیم بنویسیم $(xyz)^2 = (xy)(yz)(zx) = 4^3 = 64$ و در نتیجه $xyz = 8$ یا $xyz = -8$.

می توان دید که با توجه به شرط داده شده داریم $\max f = 8$ و $\min f = -8$.

