



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۲/۹/۹

وقت : ۹۰ دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

امتحان میان ترم : ریاضی ۱ هماهنگ - رشته های شیمی و مواد ، معدن و صنایع

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۲-۱۴۰۳

توجه:

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

به هیچ سوالی در جلسه امتحان پاسخ داده نمی شود.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

سوال ۱- الف: عبارت $K = (i-1)^4$ را به صورت $x+iy$ بنویسید. (۱۰ نمره)

ب: معادله $z^2 - iz - 1 = 0$ را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید. (۱۰ نمره)

سوال ۲- دامنه تابع $g(x) = 2x + \sqrt{\frac{1-2x}{x-2}}$ را بیابید. (۱۰ نمره)

سوال ۳- الف: مقدار $A = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{1-\sqrt[3]{x}} \right)$ را بیابید. (۱۰ نمره)

ب: مقدار b را به گونه ای بیابید که تابع زیر در $x = -2$ پیوسته باشد. (۱۰ نمره)

$$h(x) = \begin{cases} 6-b, & x = -2 \\ (x^4 - 16) \cos\left(\frac{1}{2+x}\right), & x \neq -2 \end{cases}$$

سوال ۴- مقدار تقریبی $B = (1,95)^4$ را به کمک مشتق بیابید. (۱۰ نمره)

سوال ۵- نمودار تابع $g(x) = \frac{8x}{x^2 - 4x + 4}$ را با بیان جزئیات (نقاط اکسترمم و مجانبها) رسم کنید. (۲۰ نمره)

موفق باشید.

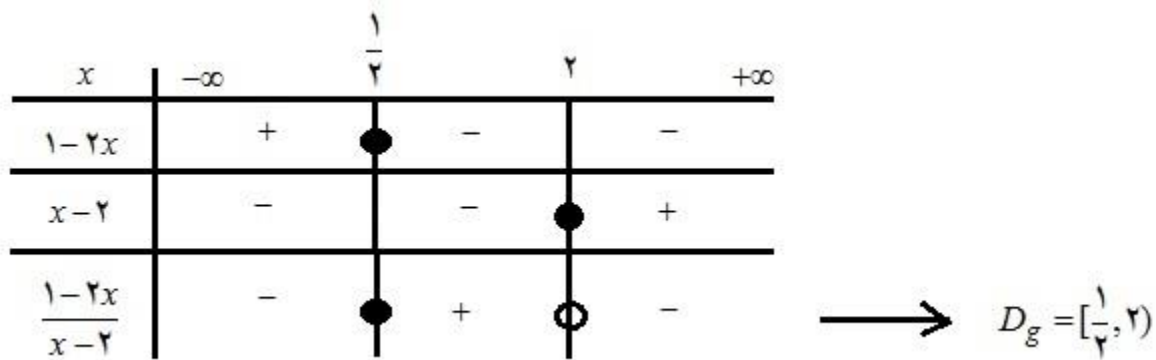
پاسخنامه میان ترم ریاضی ۱ هماهنگ (رشته های شیمی و مواد، صنایع و معدن)

جواب سوال (۱) الف: روش اول: $K = (i-1)^6 = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right)^6 = 4e^{3\pi i} = 4(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)) = -4$

روش دوم: $K = (i-1)^6 = ((i-1)^2)^3 = (-2i)^3 = -4$

ب: $z^2 - iz - 1 = 0 \rightarrow \Delta = (-i)^2 - 4(1)(-1) = 3, z = \frac{-(-i) \pm \sqrt{3}}{2(1)} \rightarrow z = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

جواب سوال (۲) $g(x) = 2x + \sqrt{\frac{1-2x}{x-2}} \rightarrow D_g = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1-2x}{x-2} \geq 0\}, \begin{cases} 1-2x=0 \rightarrow x=\frac{1}{2} \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \end{cases}$



جواب سوال (۳)

الف: روش اول: $A = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)} \right) \left(\frac{1+\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1+\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (-1) \left(\frac{1+\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}{\sqrt{x}+1} \right) = -\frac{3}{2}$

روش دوم: $x = t^6, A = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} \right) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^3-1}{1-t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(1-t)(1+t)} \right) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(-\frac{t^2+t+1}{1+t} \right) = -\frac{3}{2}$

ب: $\left(-1 \leq \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right) \leq 1, x \rightarrow -2 \right) \Rightarrow \begin{cases} -(x^6 - 16) \leq (x^6 - 16) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right) \leq (x^6 - 16), \\ \lim_{x \rightarrow -2} (x^6 - 16) = \lim_{x \rightarrow -2} (16 - x^6) = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^6 - 16) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right) = 0 \rightarrow f(-2) = 6 - b = 0 \rightarrow b = 6$

$$f(x) = x^4, \quad f'(x) = 4x^3, \quad h = -0.05, \quad a = 2$$

جواب سوال (4)

$$f(a+h) \approx f(a) + h f'(a) \rightarrow f(1.95) = 2^4 + (-0.05)(4 \times 2^3) = 16 - \frac{5}{100} \times 32 = 16 - 1.6 = 14.4$$

$$g(x) = \frac{\lambda x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{\lambda x}{(x-2)^2}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

جواب سوال (5)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\lambda x}{x^2 - 4x + 4} = 0 \rightarrow y = 0 \quad \text{مجانِب افقی}$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\lambda x}{x^2 - 4x + 4} = \infty \rightarrow x = 2 \quad \text{مجانِب قائم}$$

$$g'(x) = \frac{\lambda(x^2 - 4x + 4) - (2x - 4)(\lambda x)}{(x^2 - 4x + 4)^2} = \frac{\lambda(-x^2 + 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2} = 0 \rightarrow x = 2 \quad (\text{غير قابل قبول}) \quad \text{يا} \quad x = -2 \quad (\text{قابل قبول})$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
g'	$-$	\bullet	\circ	$-$
g	\searrow	\downarrow	\nearrow	\searrow
		-1	∞	
		min		
		$A = (x, y) = (-2, -1)$		

