



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۲/۹/۹

وقت : ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم : ریاضی ۱ فنی هماهنگ

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۲-۱۴۰۳

توجه:

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

به هیچ سوالی در جلسه امتحان پاسخ داده نمی شود.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

سوال ۱- الف: حاصل $A = (i - \sqrt{3})^{30}$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

ب: معادله مختلط $z^2 - 2iz + 3 = 0$ را حل کنید. (۱۰ نمره)

سوال ۲- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 5x - 6}{x - 1}}$ را بیابید. (۱۰ نمره)

سوال ۳- الف: مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته باشد. (۱۰ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 4) \sin\left(\frac{1}{x-2}\right), & x \neq 2 \\ a + 2, & x = 2 \end{cases}$$

ب: مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \right)$ را بیابید. (۱۰ نمره)

سوال ۴- مقدار تقریبی $\sin(28^\circ)$ را با استفاده از مشتق بیابید (توجه کنید که $1^\circ = \frac{\pi}{180}$). (۱۰ نمره)

سوال ۵- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x - 3}$ را با بیان جزئیات (نقاط اکسترمم و مجانبها) رسم کنید. (۲۰ نمره)

موفق باشید.

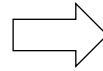
سوال ۱ - الف:
$$\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \\ \theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad i - \sqrt{3} \equiv 2e^{\frac{5\pi i}{6}}$$

$$(i - \sqrt{3})^{30} = \left(2e^{\frac{5\pi i}{6}}\right)^{30} = 2^{30}e^{25\pi i} = 2^{30}(\cos(24\pi + \pi) + i \sin(24\pi + \pi)) = -2^{30}$$

ب:
$$z = \frac{+2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{+2i \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{+2i \pm 4i}{2} = i \pm 2i \rightarrow z = 3i \text{ یا } -i$$

سوال ۲ -
$$x \neq 1 \text{ و } y = \frac{(x-6)(x+1)}{x-1} \geq 0 \text{ باید بنابراین } f(x) = \sqrt{\frac{x^2-5x-6}{x-1}} = \sqrt{\frac{(x-6)(x+1)}{x-1}}$$

x	$-\infty$	-1	+1	6	$+\infty$
$x^2 - 5x - 6$	+	-	-	-	+
$x - 1$	-	-	+	+	+
y	-	+	-	-	+



$$D = [-1, 1) \cup [6, +\infty)$$

سوال ۳ - الف:
$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \sin\left(\frac{1}{x-2}\right) = \text{حد راست} = \text{حد چپ}$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x-2}\right) \leq 1 \Rightarrow -(x^2 - 4) \leq (x^2 - 4) \sin\left(\frac{1}{x-2}\right) \leq (x^2 - 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow 2} -(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \sin\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$$

از طرفی $f(2) = a + 2$ و تابع در نقطه $a = 2$ پیوسته است اگر $f(2) = \text{حد راست} = \text{حد چپ}$ ؛ بنابراین $a = -2$

ب: (راه حل اول)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt[3]{x}+1}}{\sqrt[3]{x^2+\sqrt[3]{x}+1}}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1) \times (\sqrt{x}+1)}{(x-1) \times (\sqrt[3]{x^2+\sqrt[3]{x}+1})}\right) = \frac{2}{3}$$

(راه حل دوم) $t \rightarrow 1$ و $x = t^6$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^2-1}{t^3-1}\right) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}\right) = \frac{2}{3}$$

سوال ۴ -
$$f(x) = \sin(x) \quad f'(x) = \cos(x) \quad f(x+h) \cong f(x) + f'(x) \times h$$

$$\sin(28^\circ) = \sin(30^\circ - 2^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{180}\right) \cong \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \frac{-2\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\pi}{180} \cong 0.48$$

سوال ۵ - $f(x) = \frac{x^2}{x^2-2x-3} = \frac{x^2}{(x+1)(x-3)} \rightarrow D_{f(x)} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

مجاذب عمودی دوم : $\lim_{t \rightarrow -1} f(x) = \pm\infty$ مجاذب عمودی اول : $\lim_{t \rightarrow 3} f(x) = \pm\infty$ مجاذب افقی : $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$

مجاذب عمودی دوم : $x = -1$ مجاذب عمودی اول : $x = 3$ مجاذب افقی : $f(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^2-2x-3) - (2x-2)(x^2)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{-2x^2-6x}{(x^2-2x-3)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = -3 \rightarrow y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

آزمون مشتق اول برای اکسترمم:

x	min نسبی			max نسبی			
	$-\infty$	-3	-1	0	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	+	-	-	-	
	↘	↗	↗	↘		↘	
$f(x)$	1	$\frac{3}{4}$	$+\infty - \infty$	0	$-\infty + \infty$	$\frac{16}{5}$	1

نمودار

