
دانشگاه صنعتی شاهرود

جلسه ششم جریان در حالت تراکم پذیر ونا پایدار و جریان خزشی حول یک کره

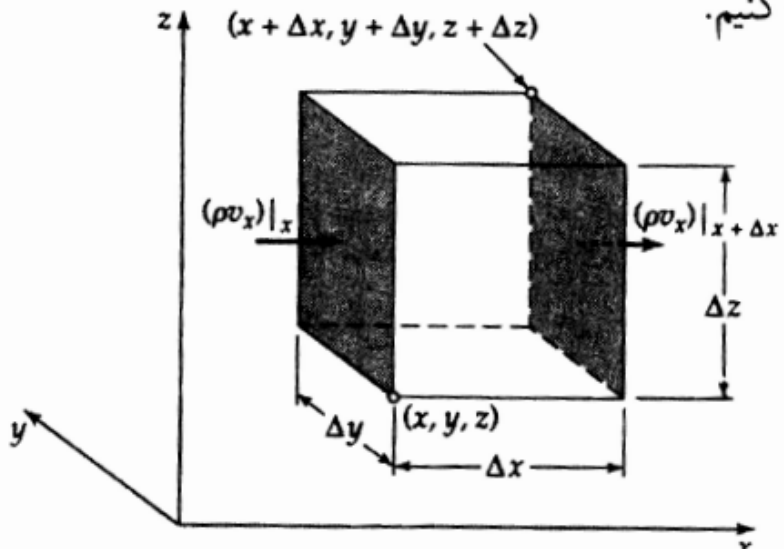
- جریان های سیالی که تاکنون بحث شدند همگی در شرایط پایا و جریان کاملا توسعه یافته هستند. اما درسیالات تراکم پذیر و همچنین سرعت فقط در یک مولفه وجود ندارد و در مولفه های دیگر هم سرعت وجود دارد.همچنین جریان پایدار نیست .
- برای معادلات بقای جرم و بقای مومنتوم برای حالتی که چگالی ممکن است با زمان تغییر کند و سرعت در سه مولفه X و Y و Z تغییر می کند می نویسیم.

قانون پیوستگی – بقای جرم

این معادله با نوشتن موازنهٔ جرم روی جزءِ حجم $\Delta x \Delta y \Delta z$ ثابت در فضا به‌دست می‌آید که سیال در آن جریان دارد (شکل ۱.۳ـ۱ را ببینید):

{آهنگ خروج جرم} − {آهنگ ورود جرم} = {آهنگ افزایش جرم} (۱.۳ـ۱)

حال باید این بیان سادهٔ فیزیکی را به زبان ریاضی ترجمه کنیم.



شکل ۱.۳ـ۱ جزء حجم ثابت $\Delta x \Delta y \Delta z$ که سیال در آن جریان دارد پیکان‌ها شار جرم ورودی و خروجی در دو وجه سایه‌خوردهٔ واقع در x و $x + \Delta x$ را نشان می‌دهد.

کار را با درنظر گرفتن دو وجه سایه‌خورده آغاز می‌کنیم که بر محور x عمودند. آهنگ ورود جرم به جزءِ حجم، ازطریق وجه سایه‌خورده در x برابر است با: $(\rho v_x)|_x \Delta y \Delta z$، و آهنگ خروج جرم از وجه سایه‌خورده در $x + \Delta x$ برابر است با: $(\rho v_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. برای دو وجه دیگر هم می‌توان عبارت‌های مشابهی نوشت. آهنگ افزایش جرم در داخل جزءِ حجم برابر است با: $\Delta x \Delta y \Delta z (\partial \rho / \partial t)$. بنابراین موازنهٔ جرم چنین نوشته می‌شود:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta y \Delta z [\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x}] + \Delta z \Delta x [(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+\Delta z}] \qquad (۲_۱.۳)$$

با تقسیم کردن کل معادله بر $\Delta x \Delta y \Delta z$ و گرفتن حد وقتی Δx، Δy، و Δz، به‌سمت صفر میل می‌کنند، و آن‌گاه استفاده از تعریف‌های مشتق‌های جزئی، نتیجه می‌شود:

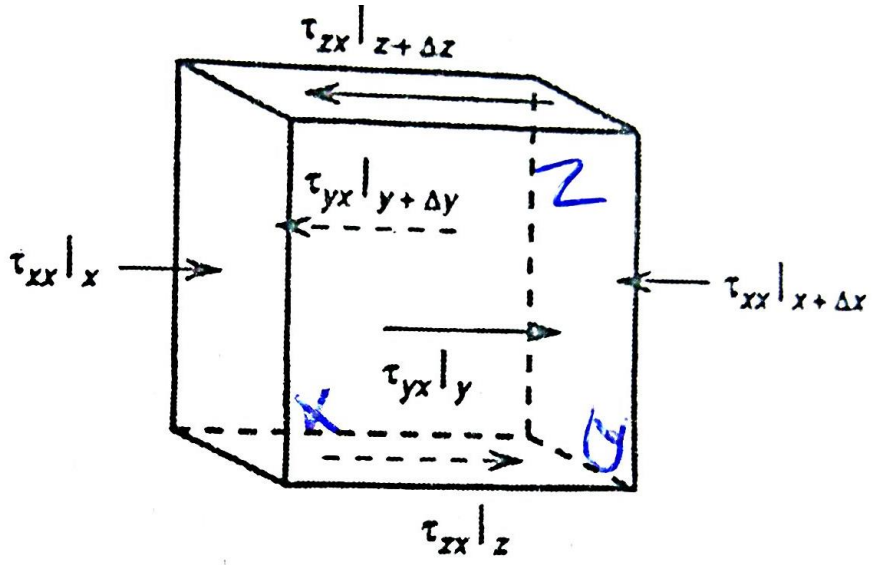
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right) \qquad (۳_۱.۳)$$

این معادلهٔ پیوستگی است، که آهنگ زمانی تغییر چگالی سیال در نقطه‌ای ثابت در فضا را توصیف می‌کند. با استفاده از نمادگذاری برداری، می‌توان این معادله را به‌صورت موجزتر زیر نوشت:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \qquad (۴_۱.۳)$$

آهنگ افزایش جرم در واحد حجم		آهنگ خالص اضافه شدن جرم به‌ازای واحد حجم، ازطریق همرفت

قانون بقای مومنتوم برای نیروی ویسکوز در جهت X



جهات نیروهای ویسکوزی مطابق با انتقال ممنتوم

قانون بقای مومنتوم برای مومنتوم ناشی از جابه جایی در جهت X

جرم در جهت x در x با نرخ $\rho v_x|_x \Delta y \Delta z$ وارد شده در جهت x در $x+\Delta x$ با نرخ $\rho v_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ خارج می‌شود. با توجه به اینکه ممنتوم از حاصلضرب جرم در سرعت بدست می‌آید اختلاف بین نرخ مولفه x ممنتوم جابجایی ورودی و خروجی در حجم معیار چنین است.

$$\rho v_x v_x|_x \Delta y \Delta z - \rho v_x v_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \qquad \text{(iii)}$$

به همین ترتیب جرم در جهت x در y با نرخ $\rho v_y|_{\Delta x} \Delta z$ وارد و در جهت x در $y+\Delta y$ با نرخ $\rho v_y|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$ خارج می‌شود. این نرخ انتقال جرم به واسطه مولفه x ممنتوم جابجایی بوده که وارد حجم معیار می‌گردد و با حاصلضرب نرخ انتقال جرم $\rho v_y|_y \Delta x \Delta z$ در مولفه x سرعت، v_x بدست می‌آید (یعنی $\rho v_x v_y|_y \Delta x \Delta z$). و به همین ترتیب برای خروجی ممنتوم جابجایی در جهت x بصورت $\rho v_x v_y|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$ می‌باشد. اختلاف بین نرخ مولفه x ممنتوم جابجایی ورودی و خروجی در جهت y این چنین است.

$$\rho v_x v_y|_y \Delta x \Delta z - \rho v_x v_y|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \qquad \text{(iv)}$$

و به طور مشابه اختلاف بین نرخ مولفه x ممنتوم جابجایی ورودی و خروجی در جهت z اینگونه است.

$$\rho v_x v_z|_z \Delta x \Delta y - \rho v_x v_z|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y \qquad \text{(v)}$$

قانون بقای مومنتوم برای سایر نیروها در جهت X

اگر فشار استاتیک در سیال در جهت x در x بصورت $P|_x$ و در جهت x در $x+\Delta x$ بصورت $P|_{x+\Delta x}$ باشد. نیروی ناشی از فشار در موازنه ممنتوم در جهت x بدین شکل است.

$$P|_x \, \Delta y \, \Delta z - P|_{x+\Delta x} \, \Delta y \, \Delta z \qquad \textbf{(vi)}$$

و تاثیر جاذبه اینگونه است

$$\rho g_x \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \qquad \textbf{(vii)}$$

برای موازنه ممنتوم، مجموع ترم‌های روابط (i) تا (vii) برابر با نرخ انباشتگی ممنتوم در حجم معیار در جهت x می‌باشد که بدین صورت نشان داده می‌شود.

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

با تقسیم طرفین این معادله به $\Delta x \, \Delta y \, \Delta z$ داریم.

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} = -\left(\frac{\tau_{xx}|_{x+\Delta x} - \tau_{xx}|_x}{\Delta x} + \frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y}{\Delta y} + \frac{\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z}{\Delta z}\right)$$

$$-\left(\frac{\rho v_x v_x|_{x+\Delta x} - \rho v_x v_x|_x}{\Delta x} + \frac{\rho v_x v_y|_{y+\Delta y} - \rho v_x v_y|_y}{\Delta y} + \frac{\rho v_x v_z|_{z+\Delta z} - \rho v_x v_z|_z}{\Delta z}\right)$$

$$-\frac{P|_{x+\Delta x} - P|_x}{\Delta x} + \rho g_x$$

معادلات ناویر استوکس در جهات مختلف

که در شرایط حدی $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$ داریم.

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) - \left[\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z}\right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \qquad (۵-۳)$$

به طور مشابه برای موازنه ممنتوم در جهت y

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) - \left[\frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial z}\right] - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \qquad (۶-۳)$$

و با موازنه ممنتوم در جهت z

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) - \left[\frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z}\right] - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \qquad (۷-۳)$$

معادلات ناویر – استوکس

کلیه معادلات (۳-۵) ، (۳-۶)، (۳-۷) در قالب یک معادله کلی با فرم خلاصه‌نویسی به عنوان معادله بقاء ممنتوم بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v = -[\nabla.\tau] - [\nabla.\rho vv] - \nabla P + \rho g \qquad (۳-۸)$$

در معادله (۳-۸)، v بردار سرعت بوده و ترم سمت چپ معرف مجموع مولفه بردار سرعت می‌باشد

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t}$$

ترم $\nabla.\tau$ تنسور تنش[1] نام دارد که شامل نه مختصه τ می‌باشد.

$$\tau_{zz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{yy}, \tau_{yx}, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$$

ترم $\nabla.\rho vv$ از حاصلضرب دیادیک[2] ρv در v بدست می‌آید. که بیانگر نه مولفه شار ممنتوم می‌باشد ترم ∇P فرم مختصر برای

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

بوده و ρg نشانگر مولفه‌های نیروی ثقلی می‌باشد.

$$\rho g_x + \rho g_y + \rho g_z$$

قوانین عمومی ویسکوزیته نیوتن برای بیش از یک بعد

برای دستیابی به توزیع سرعت از معادله (۳-۸)، نیاز به ارتباط بین تنش‌ها و گرادیان سرعت می‌باشد که توسط قوانین عمومی ویسکوزیته نیوتن در ذیل داده شده‌اند.

تنش‌های نرمال

$$\tau_{xx} = -2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\eta\,(\nabla \cdot v) \qquad (۳-۹)$$

$$\tau_{yy} = -2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\eta\,(\nabla \cdot v) \qquad (۳-۱۰)$$

$$\tau_{zz} = -2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\eta\,(\nabla \cdot v) \qquad (۳-۱۱)$$

تنش‌های برشی

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \qquad (۳-۱۲)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \qquad (۳-۱۳)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \qquad (۳-۱۴)$$

تمام وضعیت‌های جریان مورد بحث قبل در مورد جریان یک بعدی، کاملاً توسعه یافتـه و در حالت پایا برای یک سیال غیر قابل تراکم پذیر (یعنی سیالی با دانسیته ثابت) بود. از ایـن رو بـرای یک جریان یک بعدی پایا در جهت x با دانسیته ثـابت داریـم. $\nabla.v = 0$ و از معادلـه (۳-۳) مقـدار ثابت= v_x , $v_z = v_y = 0$ که در ادامه داریم. $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$ و

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

معادلات ناویر استوکس برای سیالاتی با دانسیته و ویسکوزیته ثابت

برای یک سیال با دانسیته ثابت معادله پیوستگی، رابطه (۳-۳) می‌دهد.

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$$

و مولفه x ترم $\nabla.\rho vv$ در رابطه (۳-۸) می‌تواند بدین صورت نوشته شود.

$$\rho(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z})$$

$$= \rho[v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_x(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z})]$$

با استفاده از معادله (۳-۳) ترم پرانتز داخلی صفر است. با جایگذاری از معادلـه (۳-۹) و (۳-۱۲) و (۳-۱۳) و با توجه به اینکه $\nabla . v = 0$، مولفه x ترم $\nabla . \tau$ در معادله (۳-۸) می‌توانـد بدیـن صورت نوشته شود.

$$\frac{\partial}{\partial x}(-2\eta\frac{\partial v_x}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\eta\frac{\partial v_y}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_x}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\eta\frac{\partial v_z}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_x}{\partial z})$$

$$= -\eta(2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2})$$

$$= -\eta(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z})]$$

که باز ترم پرانتزهای داخلی صفر است. موازنه ممنتوم در جهت x برای یک سـیال بـا ρ و η ثابت بدینگونه است.

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\rho(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z})$$

$$+\eta(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

یا

$$\rho(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z})$$

$$= \eta(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \qquad \text{(i)}$$

که طرف چپ معادله (i) مطابق ذیل در نظر گرفته می‌شود. مولفه x سرعت بستگی به موقعیت در جریان و زمان دارد.

$$v_x = v_x(t, x, y, z)$$

و از این رو

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz$$

و دیفرانسیل کامل[1] v_x نسبت به زمان اینگونه است.

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dx} \qquad \textbf{(ii)}$$

در نظر بگیرید یک ناظر به طور مستقل در جریان سیال حرکت کند آنگاه معادله (ii)نرخ

تغییرات کامل v_x با زمان مشاهده شده توسط ناظر در نقطه مشاهده که خود سیال با یک تغییر مکان معین در حرکت است را نشان می‌دهد. جائیکه حرکت مستقل ناظر با مشتق‌های $\frac{dx}{dt}$، $\frac{dy}{dt}$ و $\frac{dz}{dt}$ توصیف می‌شود. حال اگر حرکت ناظر با حرکت سیال یکی باشد. آنگاه $\frac{dx}{dt} = v_x$ ، $\frac{dy}{dt} = v_y$ و $\frac{dz}{dt} = v_z$ و در واقع مورد خاصی از مشتق کامل در معادله (ii)را می‌دهد که به آن مشتق ذاتی[1] v_x گفته می‌شود که بدین صورت ارائه می‌شود.

$$\frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \qquad \text{(iii)}$$

که فرم عمومی مشتق ذاتی بدین گونه است.

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{(iv)}$$

ترم داخل پرانتز در طرف چپ معادله (i) می‌تواند بصورت مشتق ذاتی v_x تشخیص داده شود و بنابراین معادله (i)بدینگونه نوشته می‌شود.

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

به طور مشابه برای مولفه‌های y و z به ترتیب می‌توان نوشت.

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \eta\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y$$

و

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \eta\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z$$

و معادله کامل اینگونه است.

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \eta \nabla^2 v - \nabla P + \rho g \qquad (۱۵-۳)$$

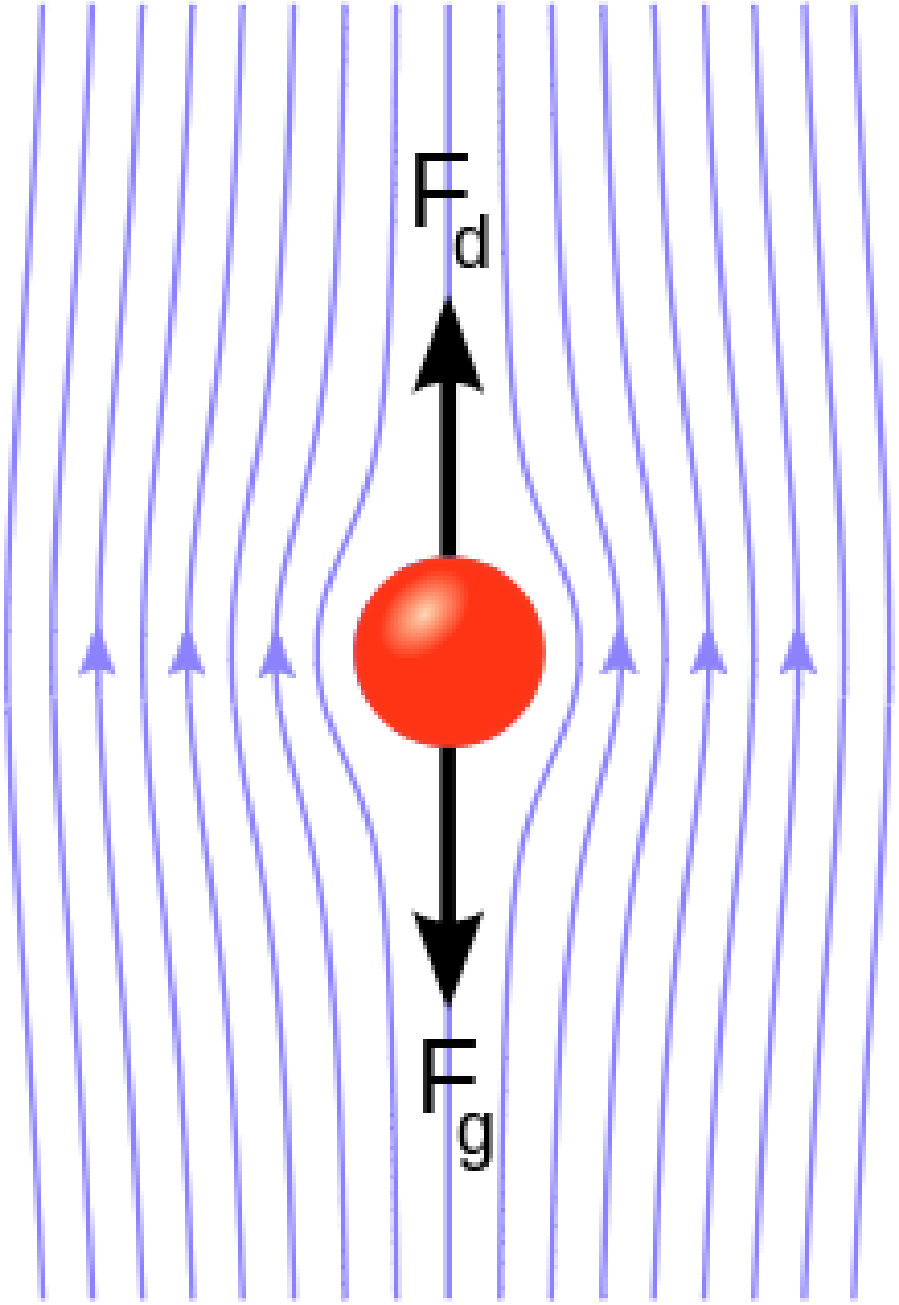
جریان خزشی حول یک کره

کره‌ای به شعاع R و قطر D از ماده‌ای به دانسیتهٔ ρ_s در یک سیالی با دانسیته ρ رها می‌شود ($\rho_s > \rho$). کره شروع به فرورفتن در سیال می‌نماید. این به واسطهٔ نیروی ثقل $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g$ که به سمت‌پایین بر کره عمل می‌کند بوده که از نیروی شناوری، $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$ که‌به طرف‌بالا رها شده است

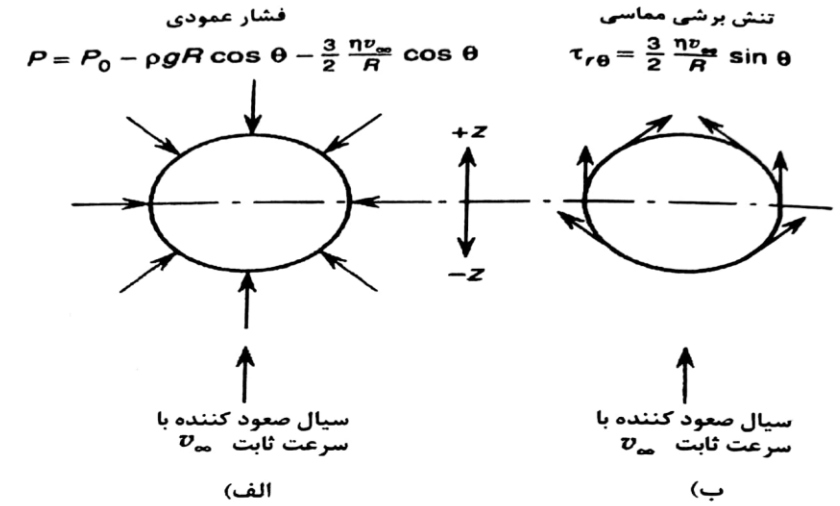
اعمال می‌شود، بزرگتر است. نیروی خالصی به طرف پایین وارد می‌شود و باعث می‌شود کره به سمت پایین شتاب بگیرد. اما یک نیروی دراگ کندکننده روی کره اعمال می‌گردد که با افزایش سرعت کره اندازه این نیرو نیز افزون می‌گردد. نهایتاً کره به یک سرعتی می‌رسد که در آن نیروی دراگ بازدارنده برابر با $\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_s - \rho)g$ شود. از آن پس کره با این سرعت ثابت به فرورفتن خود ادامه می‌دهد. این سرعت را سرعت حدی[1]، v_t گویند. اگر دانسیته و ویسکوزیته سیال و سرعت ترمینالی کره به گونه‌ای باشد که عدد رینولدز که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{Re} = \frac{Dv_t\rho}{\eta}$$

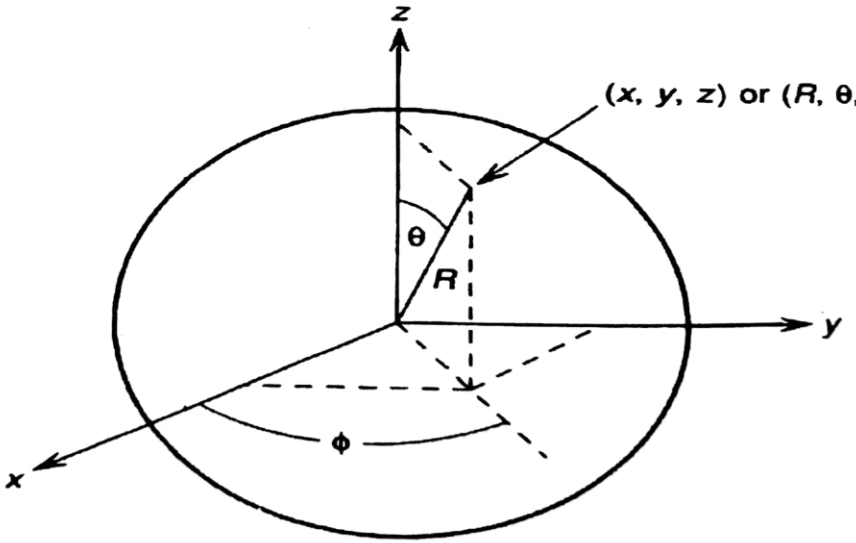
کمتر از ۰/۱ باشد آنگاه آن جریان خزنده سیال عبور کننده از یک کره به صورت زیر آنالیز می‌گردد. یک کره ثابت در یک سیالی که با یک سرعت ثابت v_∞ در جهت مثبت z در حرکت است را در نظر بگیرید (که معادل این است که سیال ساکن و کره در جهت منفی z با سرعت ثابت v_∞ حرکت کند). کره دو نوع تنش را تجربه می‌کند، یکی تنش که در جهت عمود بر سطح کره عمل می‌کند. مطابق شکل ۳-۹ (الف) و دیگری تنش که به طور مماسی بر سطح کره می‌کند که در شکل ۳-۹ (ب) نشان داده شده است. در شکل ۳-۹ (الف) فشار عمود بر سطح کره توسط معادله زیر بیان می‌شود.


F_d
F_g

$$P = P_o - \rho g z - \frac{3}{2}\frac{\eta v_\infty}{R}\cos\theta \qquad (۳-۲۷)$$



شکل ۳-۹ الف) فشار عمودی اعمالی بر کره فرو رفته در جریان سیال ب) تنش برشی مماسی اعمال شده کره فرو رفته در جریان سیال



شکل ۳-۱۰ مقایسه مختصات کارتزین با مختصات کروی

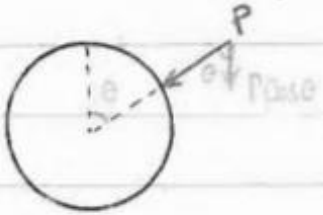
اندازه گیری نیروی قائم بر کره در جریان خزشی حول یک کره

نیروی قائم از دو طریق ایجاد می شود

۱- فشار عمومی برسیال

۲- تنش برشی مماسی

هدف : مؤلفه‌ی در جهت جریان سیال، نیروهای وارد بر جامد؛



چون P هم با θ و هم با r متغیر است باید انتگرال

بگیریم :

نرمال $F_n = \int P\cos\theta \, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (P|_{r=R, z=r\cos\theta}\cos\theta)\, R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$

$$F_n = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{سیال}} g + 2\pi\mu R V_\infty$$

نیروی اول از نوع ارشمیدسی است پس نتیجه می شود که نیروی ارشمیدسی چه در سیال ساکن و

چه در سیال متحرک وجود دارد و همواره در جهت کاهش نیروی وزن است .

$$F_n = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (-P\cos\theta) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$F_n = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(-P_0 + \rho g R\cos\theta + \frac{3}{2}\frac{\eta v_\infty}{R}\cos\theta\right)\cos\theta \, R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

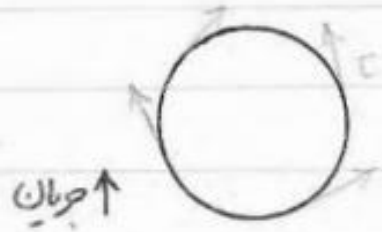
$$\int_0^{\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = -\frac{2}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{3}(-1-1) = \frac{2}{3}$$

$$F_n = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_g + 2\pi\eta R v_\infty$$

تنش های برشی بدلیل چسبندگی سیال به سطح جامد بوجود می آید. این تنش ها مماسی اند.

هم چنین این تنش ها موجب استهلاک می شوند. (استهلاک نیرو).



$$F_\tau = \int (\tau_{r\theta}|_R \sin\theta)\, dA$$

$$= 4\pi R V_\infty \mu$$

$$F = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \rho g + ۲\pi\mu R v_\infty + ۴\pi\mu R v_\infty$$

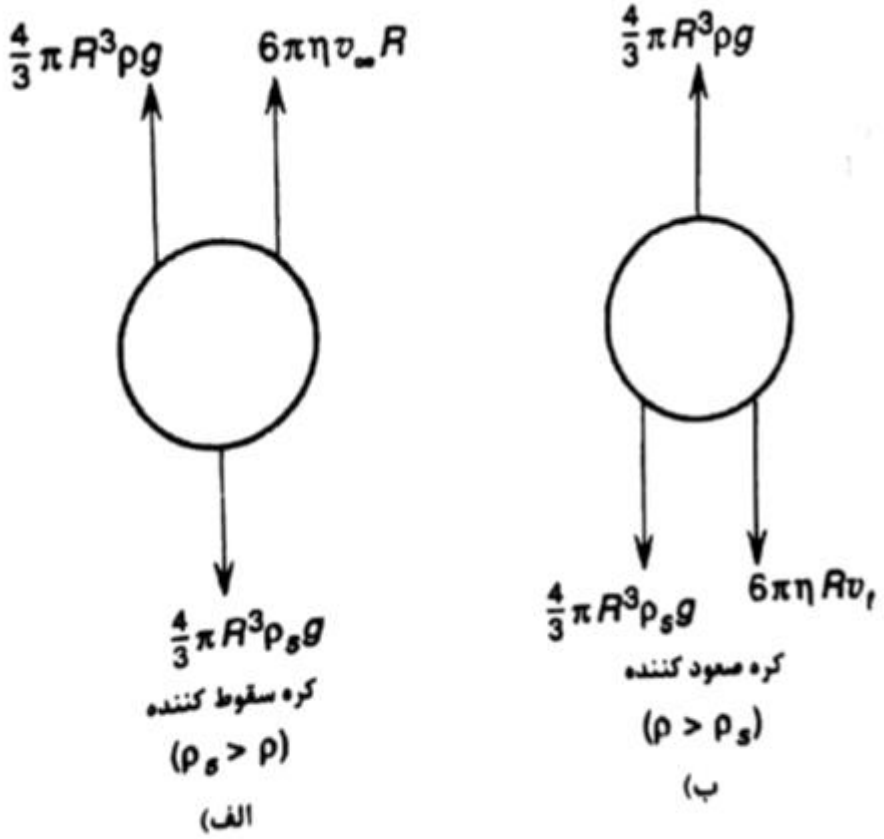
نیروی کل وارد شده برکره داخل سیال

$$\tau_{r\theta} = \frac{۳}{۲}\frac{\eta v_\infty}{R}\sin\theta$$

$$F_t = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi} (\frac{۳}{۲}\frac{\eta v_\infty}{R}\sin\theta)\sin\theta\, R^۲ \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\int_۰^{\pi} \sin^۳\theta\, d\theta = (\frac{۱}{۳}\cos^۳\theta - \cos\theta)\Big|_۰^{\pi} = \frac{۴}{۳}$$

$$F_t = ۴\pi\eta R v_\infty$$


$\frac{4}{3}\pi R^3\rho g$
$6\pi\eta v_- R$
$\frac{4}{3}\pi R^3\rho_s g$
کره سقوط کننده
$(\rho_s > \rho)$
الف)
$\frac{4}{3}\pi R^3\rho g$
$\frac{4}{3}\pi R^3\rho_s g$
$6\pi\eta R v_t$
کره صعود کننده
$(\rho > \rho_s)$
ب)

تعیین ویسکوزیته از روی سرعت حدی کره در حال سقوط

عبارتی به‌دست آورید که بتوان با استفاده از آن سرعت یک سیال را، ازطریق اندازه‌گیری سرعت حدی v_t کره‌ای کوچک به‌شعاع R در سیال به‌دست آورد.

حل

اگر کره‌ای کوچک از حالت سکون در یک سیال ویسکوز، شروع به سقوط کند، سرعت آن افزایش می‌یابد تا این‌که به‌مقداری ثابت، موسوم به **سرعت حدی** برسد. وقتی این وضعیت حالت‌پایا برقرار شد، جمع همهٔ نیروهای وارد بر کره باید صفر باشد. نیروی گرانش وارد بر جامد درجهت سقوط عمل می‌کند و نیروهای شناوری و جنبشی درجهت مخالف عمل می‌کنند:

$$\frac{۴}{۳}\pi R^۳ \rho_s g = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \rho g + ۶\pi\mu R v_t \qquad (۱۶_۶.۲)$$

در این‌جا ρ_s و ρ، به‌ترتیب، چگالی کرهٔ جامد و سیال‌اند. با حل این معادله برای یافتن سرعت حدی، نتیجه می‌شود:

$$\mu = \frac{۲}{۹}R^۲(\rho_s - \rho)g/v_t \qquad (۱۷_۶.۲)$$

از این نتیجه فقط هنگامی می‌توان استفاده کرد که عدد رینولدز از حدود ۰٫۱ کوچک‌تر باشد.

کره‌ای توخالی به قطر ۰/۰۰۵ m و دانسیته $1500\ kg/m^3$ درداخل یک ستون‌روغن‌به دانسیته $888\ kg/m^3$ رهامی‌شودتابه‌یک‌سرعت‌حدی ۰/۰۱ m/s می‌رسد.ویسکوزیته‌روغن‌را محاسبه‌کنید.

$$= \frac{۲}{۹} R^۲ (\rho_s - \rho) g / v_t$$

$$= \frac{۲ \times ۰/۰۰۲۵^۲ \times (۱۵۰۰ - ۸۸۸) \times ۹/۸۱}{۹ \times ۰/۰۱}$$

$$= ۰/۸۳۴\ kg/m.s$$

عدد رینولدز چنین است.

$$Re = \frac{D v_t \rho}{\mu}$$

$$= \frac{۰/۰۰۵ \times ۰/۰۱ \times ۸۸۸}{۰/۸۳۴}$$

$$= ۰/۰۵۳$$

که کمتر از ۰/۱ است و نشان می‌دهد که محاسبات معتبر است.

محصول اکسیداسیون فولاد مذاب با اضافه کردن آلومینیوم، آلومینا می‌باشد. با فرض اینکه آلومینا تشکیل شده کروی باشد اندازه کوچکترین کره که می‌تواند از عمق ۱/۵ m فولاد مذاب ساکن در مدت ۲۰ دقیقه روی سطح شناور شود را محاسبه کنید.

$$\rho(\text{فولاد}) = ۷۱۶۰\ \text{kg/m}^۳$$

$$\rho(Al_۲O_۳) = ۳۹۸۰\ \text{kg/m}^۳$$

$$\mu(\text{فولاد}) = ۰/۰۰۶۱\ \text{kg/m.s}$$

با فرض اینکه کره در کف وان مذاب شکل گیرد سرعت حدی مورد نیاز $\frac{۱/۵}{۲۰\times۶۰} = ۱/۲۵\times۱۰^{-۳}\ \text{m/s}$ است. بنابراین با فرض $\text{Re} < ۰/۱$ ،می‌نیمم‌شعاع‌ازمعادله(۳-۲۵ بدست می‌آید.

$$R^۲ = \frac{۹\eta v_t}{۲(\rho-\rho_s)g} = \frac{۹\times۰/۰۰۶۱\times۱/۲۵\times۱۰^{-۳}}{۲\times(۷۱۶۰-۳۹۸۰)\times۹/۸۱}$$

$$= ۱/۱\times۱۰^{-۹}\ \text{m}^۲$$

پس

$$R = ۳/۳۲\times۱۰^{-۵}\ \ \text{m}(= ۳۳/۲\ \mu\text{m})$$

و عدد رینولدز اینگونه است.

$$\text{Re} = \frac{۲Rv_t\rho}{\eta} = \frac{۲\times۳/۳۲\times۱۰^{-۵}\times۱/۲۵\times۱۰^{-۳}\times۷۱۶۰}{۰/۰۰۶۱}$$

$$= ۰/۱$$

و بنابراین محاسبات معتبر است.

کره‌های کوچک شیشه‌ای با دانسیته $2620\ kg/m^3$ در CCl_4 با دانسیته $1590\ kg/m^3$ و ویسکوزیته $9/58 \times 10^{-4}\ Pa.s$ به پائین می‌روند. محاسبه کنید:

الف) ماکزیمم قطر کره‌ای که می‌تواند با تبعیت از قانون استوکس جریان یابد.

ب) سرعت حدی این کره با قطر بدست آمده.