کنترل چند متغیره

دکتر الفی

جلسه اول 91,7,2

1. پایان ترم
2. میان ترم

16 نمره

3. تکالیف بازخوردی 3 نمره
4. پروژه پایان دوره 3 نمره

صورت کسب 50 از امتحان نمره تاخیر 4 وزده می‌شود و بعد از این صورت پروژه مفروض می‌شود.

Multi variable

سیستم: مجموعه‌ای از اعضا که در کنار هم هدف مشترکی را دنبال می‌کنند.

کنترل: در اختیار در آوردن آن

- انواع سیستم‌ها:

خطی یا غیر خطی

وابسته به زمان یا مستقل از زمان

پایدار یا ناپایدار بودن سیستم

تا حی سیستم‌ها علی هستند چون الان انرژی مصرف می‌کنیم تا انرژی در آن ذخیره کنیم.

- تقسیم بندی براساس داده‌ها:

گسسته یا پیوسته بودن با زمان

- تقسیم بندی براساس ورودی و خروجی:

SISO - SIMO - MIMO - MISO

سیستم خطی: خاصیت همنی و جمع پذیری در سیستم خطی (که پرکاربردترند) هست

یعنی خاصیت جمع آثار دارند.

وقتی سیستمی مستقل از زمان باشد یعنی با شیفت که بر ان زمان t داریم برای تمامی لحظات خواهیم داشت.

پایداری BIBO: ورودی محدود خروجی محدود دارد

تکلیف:

سیستم $y = y_p + y_h$

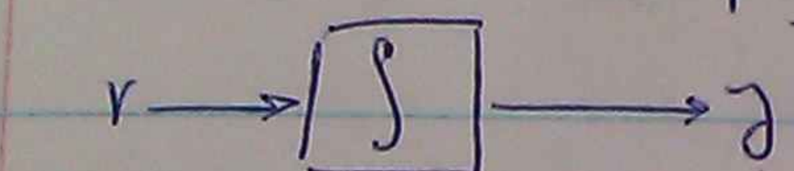
y_p: پاسخ خصوصی حالت صفر به ازای ورودی (شرایط اولیه = صفر)

y_h: پاسخ همن پاسخ ورودی صفر به ازای شرایط اولیه

آیا پایداری یا ناپایداری خروجی به y_h بستگی دارد یا فقط ناشی از y_p است؟

تابع تبدیل را همیشه برای سیستم‌های LTI تعریف می‌کنیم.

سیستم انتگرال‌گیر سیستم خطی است.

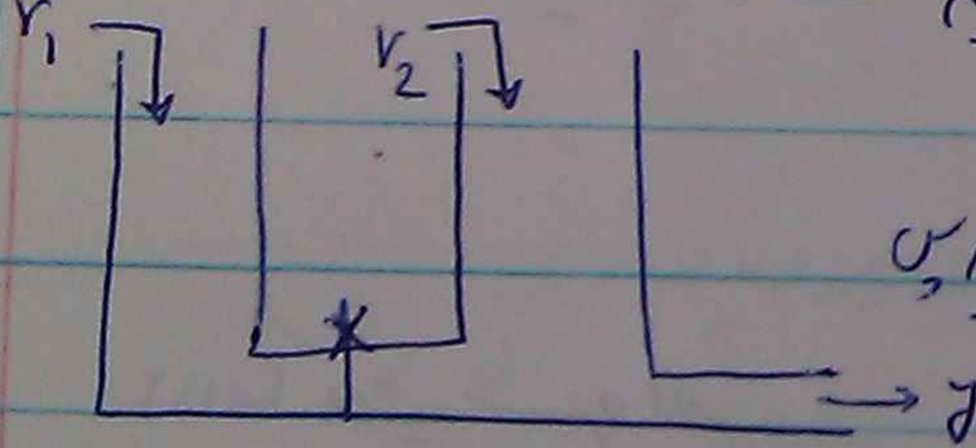


$$y = \int_{-\infty}^{t} r(\tau)\,d\tau$$

در این سیستم ورودی محدود است اما با عمل کردن $+\infty \to t$ خروجی نامحدود می‌شود در نتیجه سیستم ناپایدار است.

در این نوع بحث که ما بحث می‌کنیم در مورد سیستم‌های پیوسته با زمان خطی مستقل از زمان MIMO می‌باشد و سیستم LTI نیز باید باشد.

مثال کنترل ارتفاع را در تقطیر مانند شکل زیر با ورودی و خروجی. در واقع LTI گونه شبیه سیستم توصیف انتقال سیستم است.



در LTI با شرط صفر بودن ورودی صفر خروجی صفر داریم پس

$$\text{تابع تبدیل} = \left.\frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}}\right|_{\text{شرایط اولیه صفر}}$$

$G_{(s)}$: ماتریس تابع انتقال (تابع تبدیل)

$$G_{(s)} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix}$$

$n \times m$ ← خروجی

m ← ورودی

$$Y_{(s)} = G_{(s)} \cdot R_{(s)}$$

خرض کنید ماتریس انتقال قطری باشد:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$$

معادلات دوری که وابسته به تک ورودی هستند و مستقل از هم مرتبا باشند. در سیستمی که چندین ورودی برای کنترل سیستم داریم که ورودی که لازم هم کوپلیه باشند برای این که راز ماتریس انتقال قطری استفاده می‌کنیم. با این روش کنترل سیستم که دچار مشکل نمی‌شویم.

$G(11)$ گوئیا وابسته است. $\Longrightarrow$ $G(55)=0$ ماتریس $G(11)$ در خروجی ۵۵

$G(11)$ گوئیا وسته است. $\Longrightarrow$ یک ماتریس ثابت باشد $=G(55)$

انتشاش چیست؟ عوامل تاثیر گذار خراصم و مانند قابل پیش بینی که در سیستم وارد می‌شود

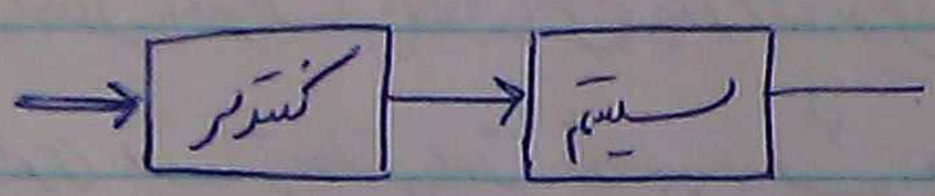
d اغتشاش

r → سیستم → y

در کنترل سیستم حوزه خروجی برای ما مهم است عوامل خراصی که در خروجی تاثیر می‌گذارند (خروجی ناخواسته) رفع می‌دهند اغتشاش باری نامیده می‌شوند

عوامل مزاحمی که سرعت شنی بالا را خراب می‌دهند نویز نامیده می‌شوند. نویز عموماً از سنسوری که می‌آید چون ما هیچ یک را در اختیار داریم

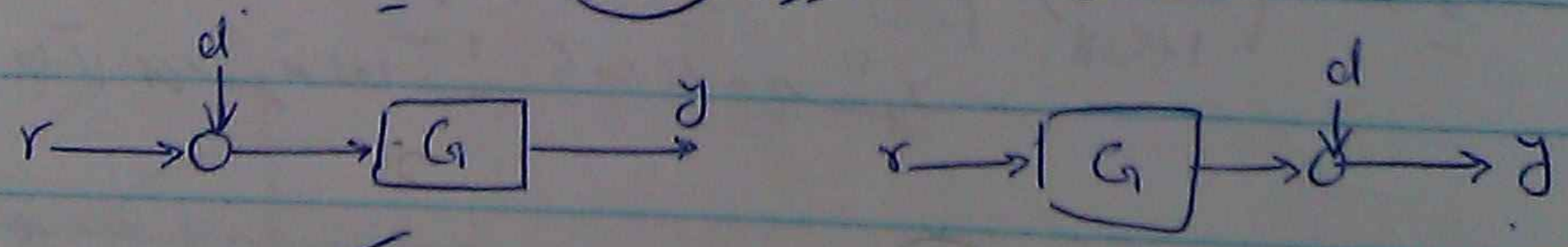
نیروهای برای درست کردن رفتار نامطلوب سیستم نیازمند جبران ساز داریم.



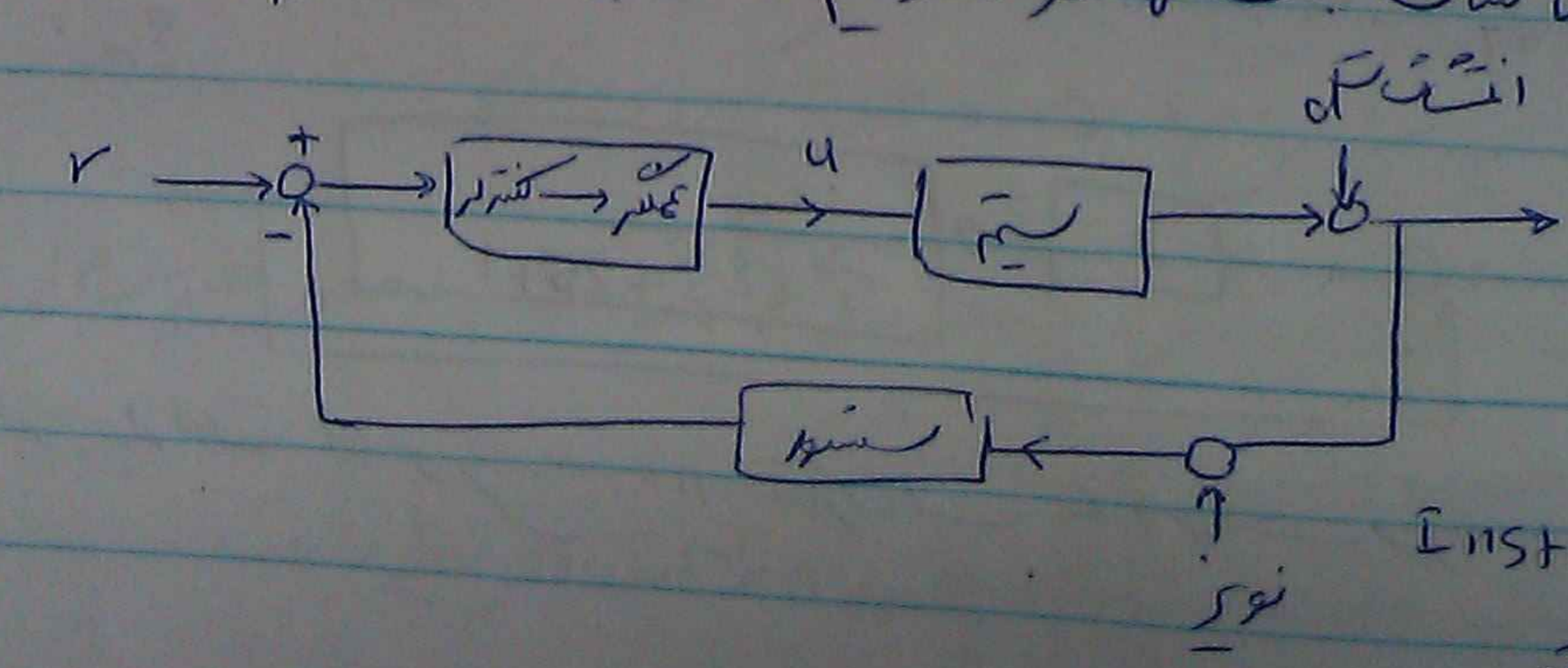
تکلیف: تحقیق کنید علت اینکه سیستم‌ها در طبیعت وجود دارند تفاضل صورت و خرج حداقل یک واحد است. (تحقیق پذیری)

مدل کردن اغتشاش:

اغتشاشات ممکن است در ورودی اثر بگذارند و یا در خروجی



اغتشاشات باعث می‌شوند نتوانیم از حلقه باز استفاده کنیم.



Instrumentation

ابزار دقیق

اهداف کنترل:

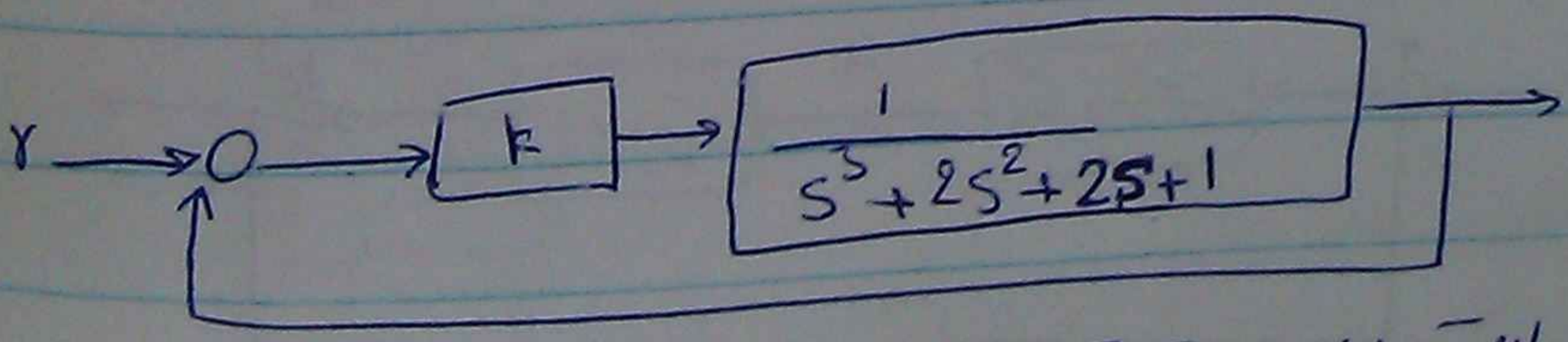
regulating = تنظیم کردن، ثابت نگه داشتن خروجی tracking = دنبال کردن

1. خواهیم y را تعقیب کند، y و r تا حد امکان (possible) هستند تا حد امکان y و r یکی شود (کنیم چون بعضی وقت‌ها نمی‌توان تفاضل را به صفر رساند)
2. تا حد امکان اثرات اغتشاش یا نویز (عوامل مزاحم) در خروجی کوچک شود.
3. پایداری سیستم حلقه بسته تضمین شود علاوه‌بر خطای ماندگار و تغییرات (۹۱۵).

یک عیب، عیب پایداری سیستم است و یک دیگر کارایی مثال سیستم حرارتی

سیستمی را با تابع تبدیل $\frac{G}{1+GH}$ در نظر بگیرید: سیستم حلقه باز پایدار است اما کارایی را که ما می‌خواهیم را ندارد. میخواهیم $\left(\frac{G}{1+GH}\right)$ را حلقه ببندیم در این حالت مرکز سیستم جابجا نمی‌شود ولی قطب‌ها جابجا می‌شود

تکلیف: اگر سیستم حلقه باز شما پایدار باشد همیشه حلقه بسته آن هم پایدار می‌شود یا نه؟



حلقه باز پایدار است ولی برای حلقه بسته با هر مقدار مثبت K ناپایدار می‌شود.

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 1 + k = 0$$

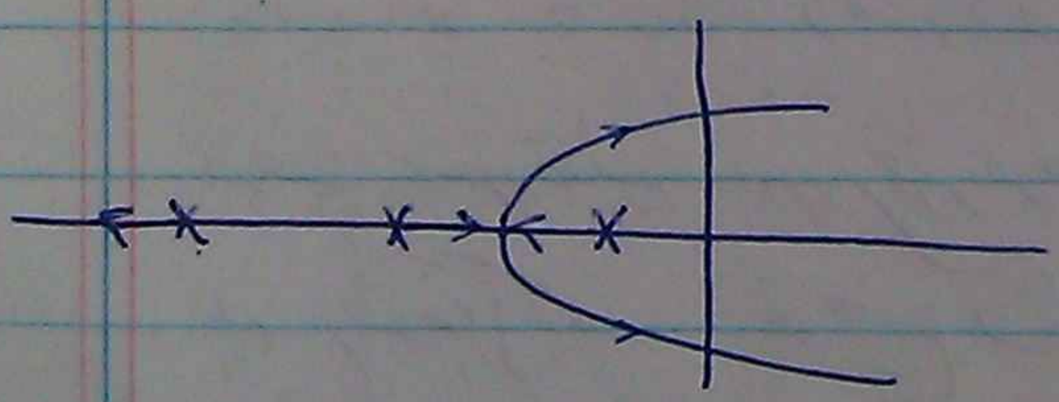
$$\rightarrow k > -1 \quad \& \quad 4 > k+1 \quad \& \quad -1 < k < 3$$

اولین خطا: خطی سازی ات نقیض سیستم non Linear را داریم خطی می‌کنیم

دومین خطا: اصطکاک و دیسکورد... چون در طراحی اصطکاک را حذف کردیم

تکلیف: چند نوع اصطکاک داریم و کدومش در سیستم عمل کنترل خطی قابل طرح است؟

سومین خطا: حفظ کیفیت سیستم (کارایی سیستم) علارغم تغییرات در سیستم مثل مقاومت که با دما تغییر می‌کند.



تا حدی این نمودگی آخرها مشکل کنترل مقاوم

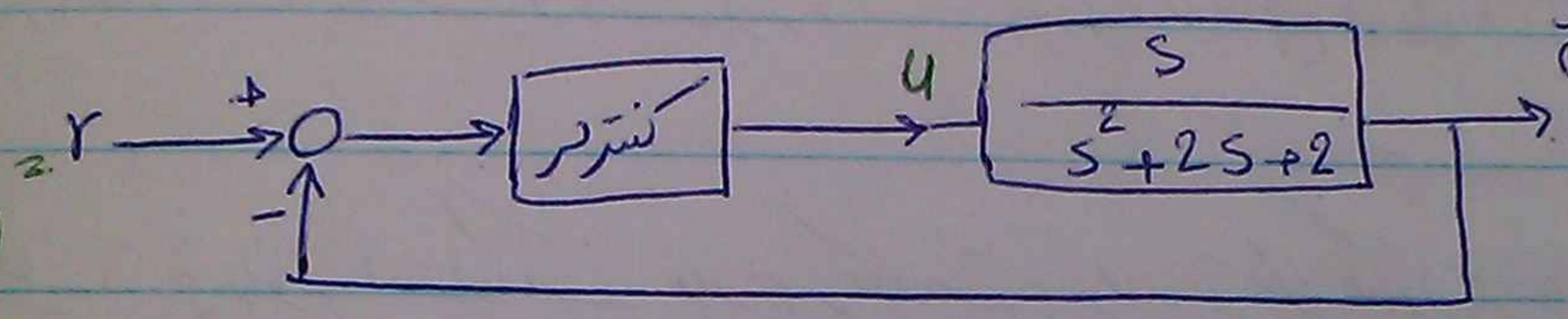
هدف: حفظ پایداری سیستم حلقه بسته و کیفیت سیستم از حضور تغییرات (تغییرات از جنس حذف و اضافه شدن)

از ویژگی هدف ریشه بودن حلقه‌ای ط اعتقادی مرتفع مالت.

u: optimal control effort
تلاش کنترلی

کنترلر P

مثلاً خروجی هدف ما این بود که خروجی پله را دنبال کند. مثال زیر را در نظر بگیرید:



کنترلر P ها low pass filter هستند. حذف صفر و قطب روی محور موهومی ممنوع است چون سبب ناپایداری داخلی است.

$$e=\frac{1}{1+k_p} \qquad k_p=\lim_{s\to 0} k(s)\frac{s}{s^2+2s+2} \Rightarrow k(s)=\frac{1}{s^2} : k_p\to\infty \Rightarrow e\to 0$$

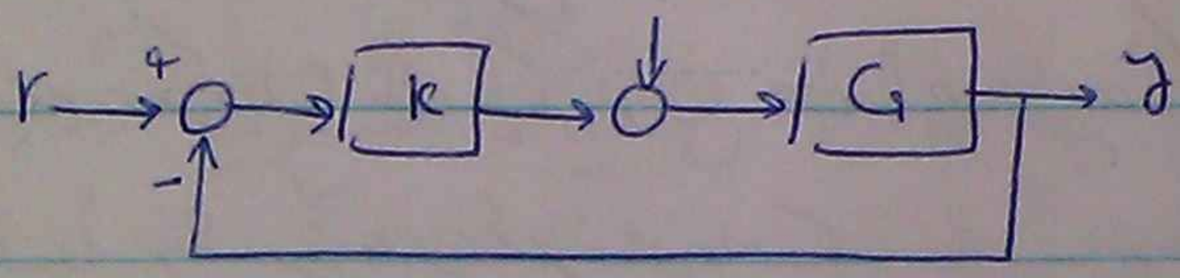
برای اینکه سیستم بتواند ورودی پله را دنبال کند باید کار $K(S)$ (مشتق گیر) حداقل 2 قطب در $S=0$ داشته باشد تا این عمل سبب ناپایداری داخلی می‌شود چون حذف همزمان صفر و قطب از روی محور موهومی رخ می‌دهد در نتیجه این سیستم نمی‌تواند ورودی پله را دنبال کند. توضیح بیشتر آنکه سیستم فرض یک مشتق گیر می‌باشد که خطیت پایین تر داشته است.

همانطور که خواهیم دید y به صورت پله‌ای باشد بایستی شتاب u به صورت سیب باشد در عمل ورودی u به صورت شیب زیاد شده تا جایی که سیستم اشباع می‌شود و لذا u مقدار ثابتی خواهد شد در نتیجه y شروع به صفر شدن می‌کند.

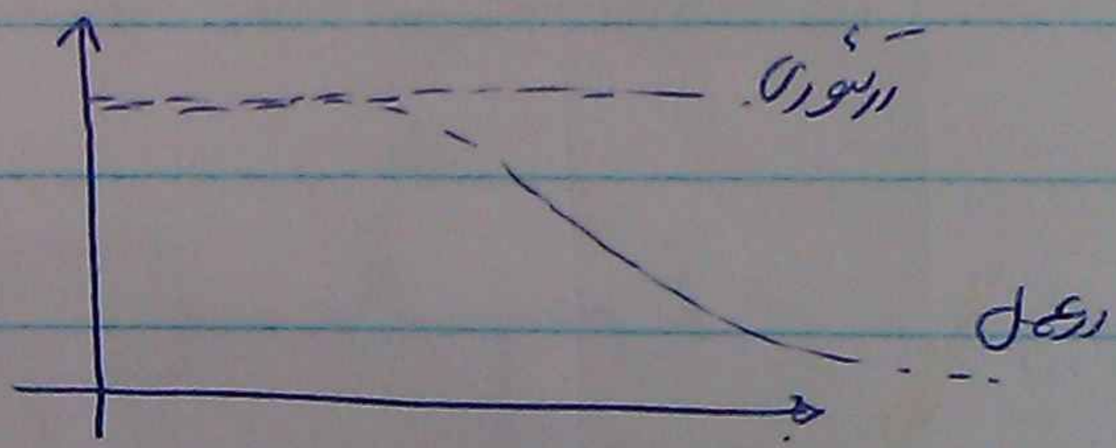
جلسه نهم: 91,7,9

اهداف کنترل

۱. ردیابی



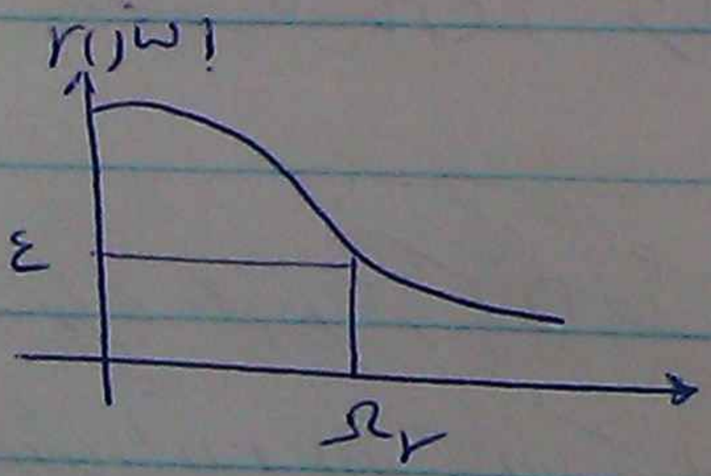
$$\frac{y}{R} = \frac{G_1 K}{1 + G_1 K}$$



چون فیلتر پایین گذر است و تابع انتقال آن سره می باشد.

اگر $r(jw)$ بیشترین انرژی خود را در محدوده فرکانسی ω_b داشته باشد آنگاه برای ردیابی کردن این ورودی مناسب است $\frac{G_1(jw) \cdot K(jw)}{1 + G_1 K(jw)}$ باید در این محدوده تقریباً برابر ۱ باشد.

یعنی در بهره بیشترین را داشته باشد.



بدین منظور لازم است در حوزه فرکانسی بهره مقدار $|G_1 K|$ ها بزرگ انتخاب شود.

مثال

خیلی دوست دارم حلقه بسته انشعال پیدا کنم نه تنها ورودی که ثابت (مرجع صفر) را بدون خطا دنبال می‌کند همچنین فرکانس‌های پایین را بعلن خطا (تقریباً) می‌توانم بدون خطا دنبال کنم.

برای صفر کردن خطا باید با لی خاکرین پایداری داخلی انشعال پیدا کنم.

$e = \frac{1}{1+K_p}$ $\quad K_p = \lim_{s \to 0} G_1 H_{(s)}$ عمیقاً سرک بوفرکانس کم دین است.

$iP\ G_1 H_{(s)} \alpha \frac{1}{s} \Rightarrow K_p = \lim_{s \to 0} \frac{K}{s} = \infty \longrightarrow e = \frac{1}{1+\infty} = 0$

2. حذف (کاهش در واقع کاهش) خطا

حذف انشعال: تراز انتقال عوامل مزاحم را حذف کنیم.

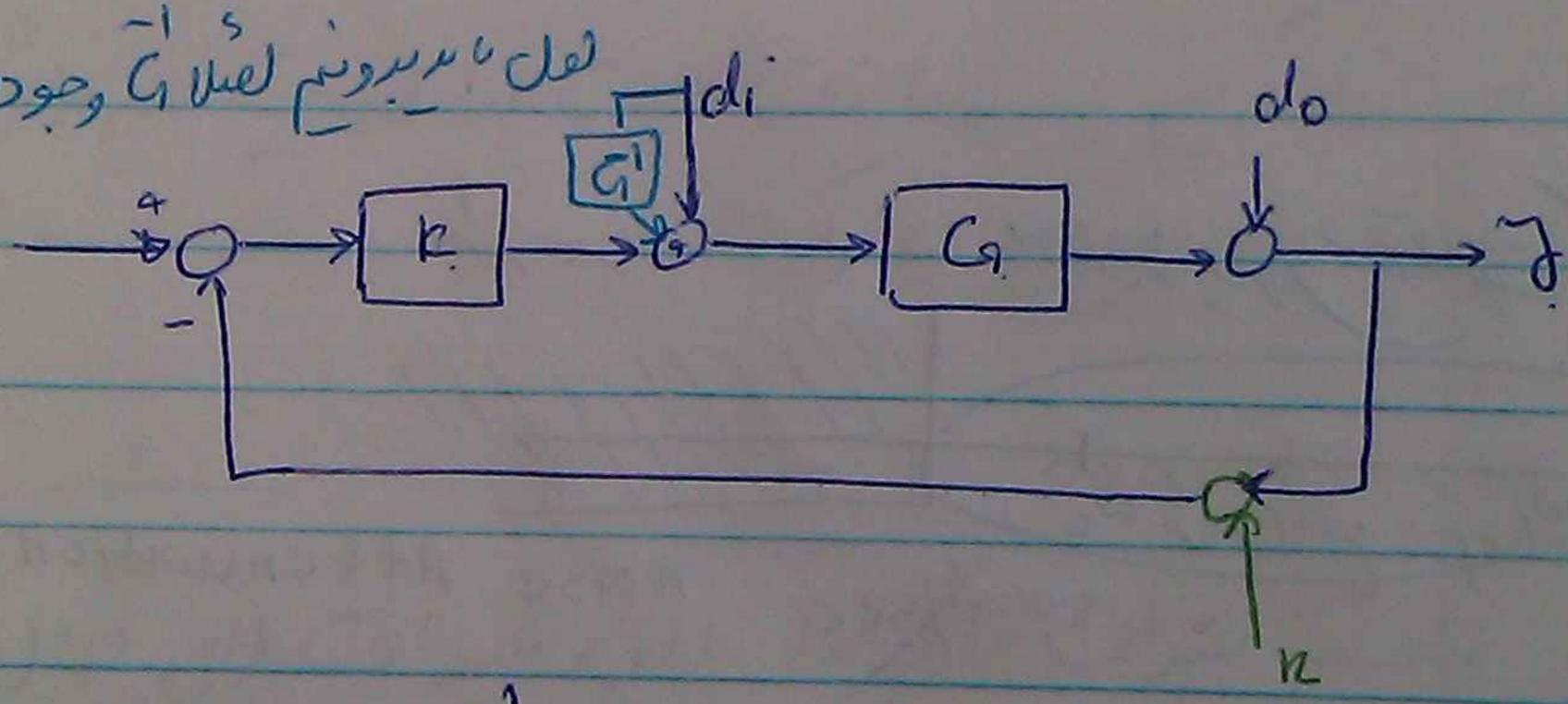
راستین محدوده‌ای که D بیشترین انرژی را دارد بدون این است صفر باشد.

$$\gamma(s) = \frac{G(s)}{1+KG(s)} \qquad D(s)$$

برای تحلیل اثر انشعال بروی خروجی باید در فرکانس‌هایی که D بیشترین انرژی خود را دارد باید مقدار $\frac{G(s)}{1+KG(s)}$ کوچک باشد.

حوزه‌ی s_2 یا s_1 تقویبا همپوشانی ندارد چون هردو تقریبا برخورهای بالایین هستند.

اگر اثر اغتشاش برخروجی را در تقریب اول $\frac{y}{d_i} = \frac{G}{1+KG}$ بنویسیم آنگاه واضح است که با انتخاب $|K(j\omega)| \gg 1$ در فرکانس‌هایی که بیشترین انرژی خود در آن وجود دارد اثر اغتشاش برخروجی کم می‌شود.



برای حذف اثر اغتشاش راه حل دیگری وجود دارد با ایجاد G_1^{-1} را در مسیر d_i برای حذف کردن آن قرار می‌دهیم به شرطی که inverce وجود داشته باشد.

اگر SISO باشد G_1^{-1} باید حداقل فیزیم فاز باشد.

$$\frac{y}{r} = \frac{-KG_1}{1+KG_1}$$

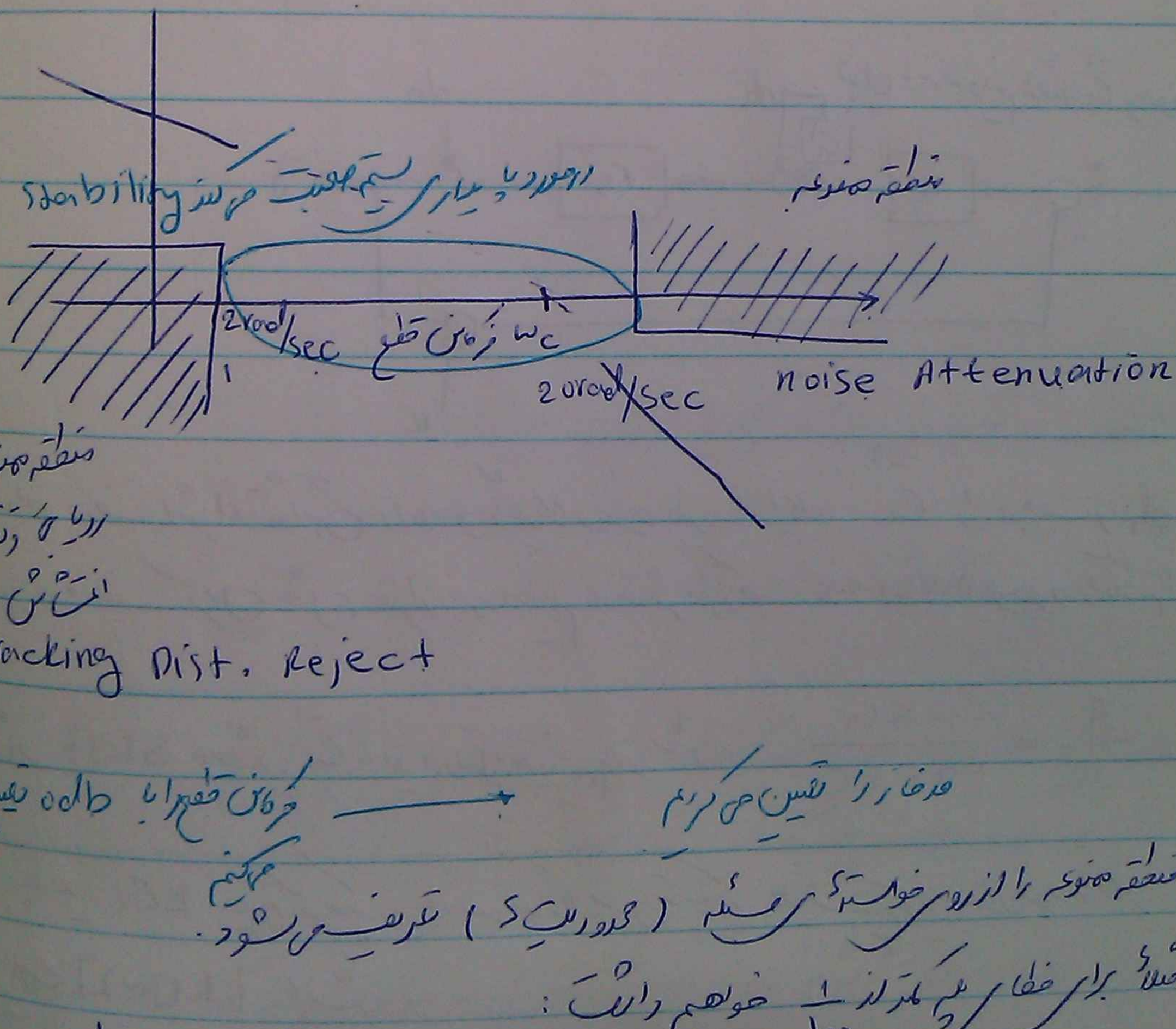
باید KG_1 خیلی کوچک باشد در فرکانس‌هایی که r بیشترین مقدار خود را دارد.

$|K(j\omega)| \ll 1$ باشد.

خوشبختانه بازه نوسز در فرکانس‌های بالاست برخلاف d که در فرکانس‌های پایین است پس تناقض در اینجا به کوچک و بزرگ بودن K وجود ندارد چون در فرکانس‌های متفاوت اتفاق می‌افتد.

شرط پایداری سیستم‌های MIMO به این بستگی دارد. مطالب گفته شده برای SISO بود.

تابع تبدیل حلقه باز $|L| = |G_1 K(s)|$



حد خطا را تعیین می‌کنیم ⟵ کرکان خطا را با db تعیین می‌کنیم

ناحیه ممنوعه را از روی خواسته‌ای مسئله (حدود K_p) تعریف می‌شود.

مثلاً برای خطای پله کمتر از $\frac{1}{100}$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{100} \longrightarrow K_p = 99 = \lim_{s \to 0} |G_1(s)| = 99$$

حیطه پایداری (stability) بازه فرکانس هایی را تعیین می‌کند و در پایین و کاهش حتما فرکانس بالا و پایین را تعیین می‌کند

فرکانس بالاتر را 2 decad بالاتر از فرکانس پایین می‌گیریم از این تعریف به عنوان Loopshaping (شکل دهی حلقه) یاد می‌کنند

از یک برای حدفاز استفاده می‌کنیم . یک دقت خاصی لازم داریم برای کران این حدود دقت برای پایداری داخلی ایجاد می‌کند

$$\frac{1}{S+1} \longrightarrow \frac{1}{S+a} \qquad 0.5 < a < 1.5$$

در سیستم تغییرات داریم حالا با این تغییرات کاری انجام می‌شود.

robust control

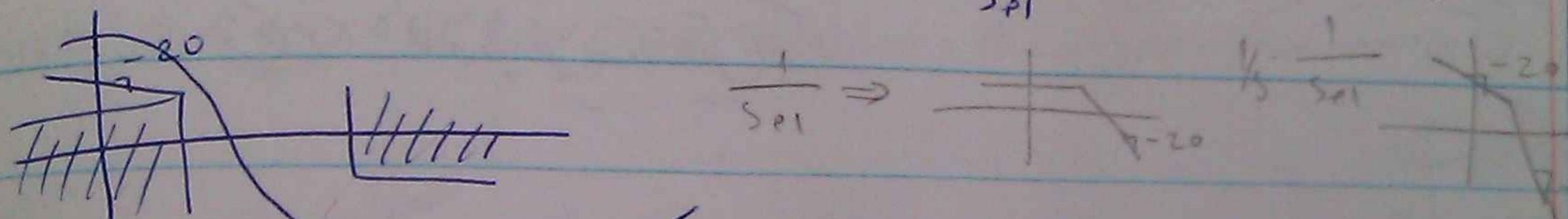
robust performance , robust stability

آنچه تاکنون بر مورد اندازه پاسخ فرکانسی در محدوده فرکانسی پایین و بالا صحبت کردیم در کنترل خطی بررسی شده است اما از این حیث فاز سیستم زمانی مهم است که اندازه پاسخ فرکانسی 1 باشد به عبارت دیگر حدفاز سیستم صحبت خواهد شد

مثال: محدوده حلقه را برای $\frac{1}{S+1}$ و سپس روی $\frac{1}{S(S+1)}$ ترسیم کنید.

$\frac{1}{s}$ اضافه می‌شود با نرم متنوعتر مارشود.

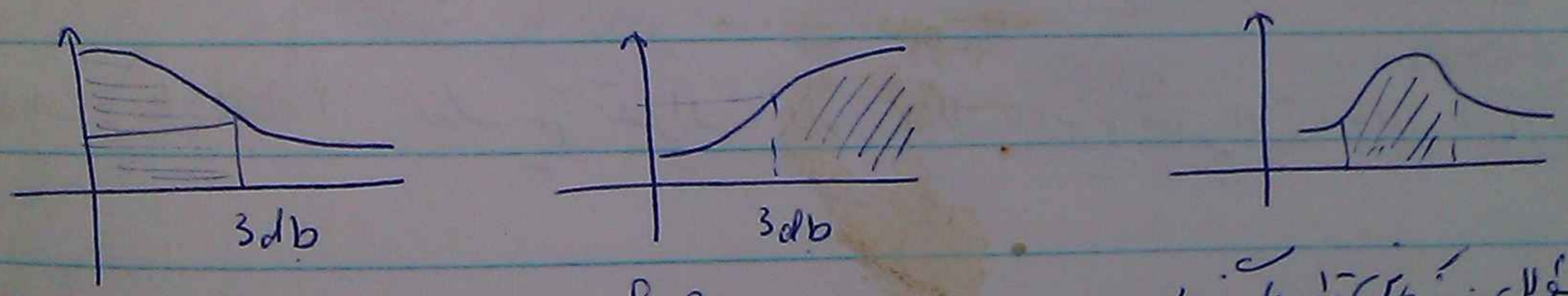
نحوه منطقه متنوعه را برای $\frac{1}{S_{P1}}$ ترسیم می‌کنیم بعد $\frac{1}{s}$ را بهش اضافه می‌کنیم.



در این درس MIMO با روش $\frac{1}{S}$ سروکار داریم که تنها با منفی اندازه سروکار خواهد داشت (در حالیکه در SISO با فاز هم سروکار داشتیم) (در MIMO اندازه فاز را هم کارآتر می‌کند.)

پهنای باند: محدوده فرکانسی که پاسخ (خروجی) برابر $-3db$ بیشترین مقدار باشد.

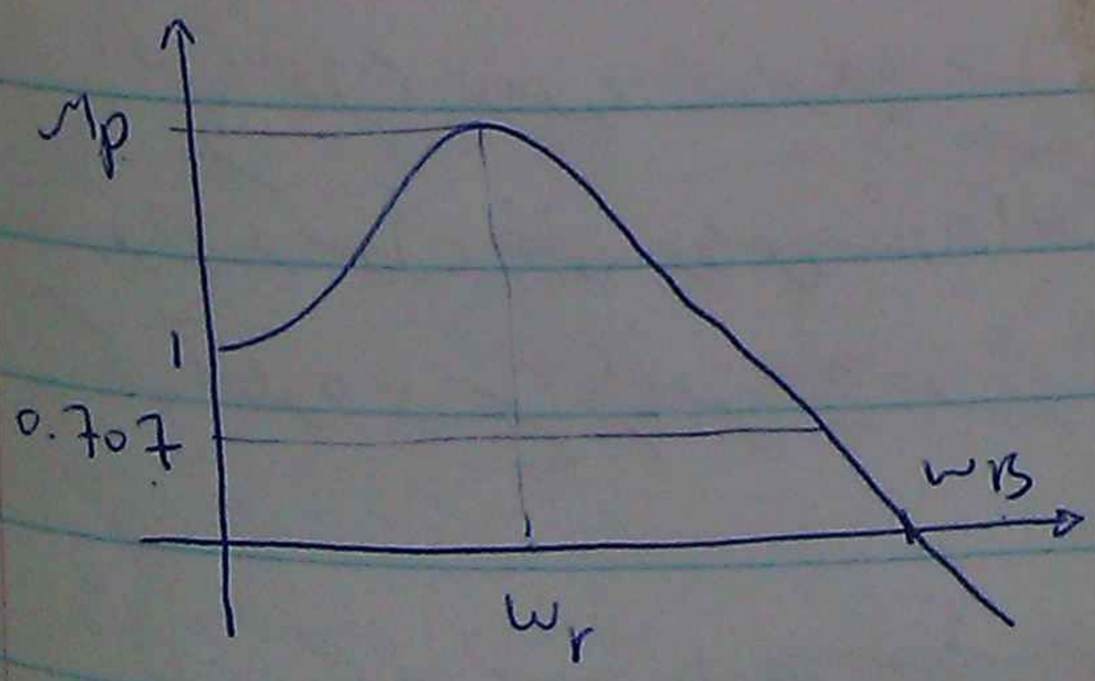
سؤال: برای هر فیلتری؟



سؤال: فرکانس قطع یا cut of freguency و پهنای باند چه ارتباطی با هم دارند؟

پهنای باند سیستم حلقه بسته: w_B

$M(jw)$



سؤال: ω_B هرچی می‌تونه باشه رابطه‌ای با ω_c داره؟

$\omega_c < \omega_B < 2\omega_c$ $\qquad$ $\omega_B \simeq 1.5\omega_c$

توجه کنید که پهنای باند سیستم حلقه‌بسته عموماً به ω_c نزدیک است.

پس پهنای فرکانسی است که به اندازه 3db از پاسخ فرکانسی در فرکانس کم پایین افت پیدا می‌کند.

سؤال: آیا پهنای کمتر در چند نقطه اتفاق بیافتد (در چند نقطه قطع کند)؟

فرض کنید پهنای در چند نقطه اتفاق بیافتد که بزرگترین آنها را به عنوان پهنای می‌گیریم.

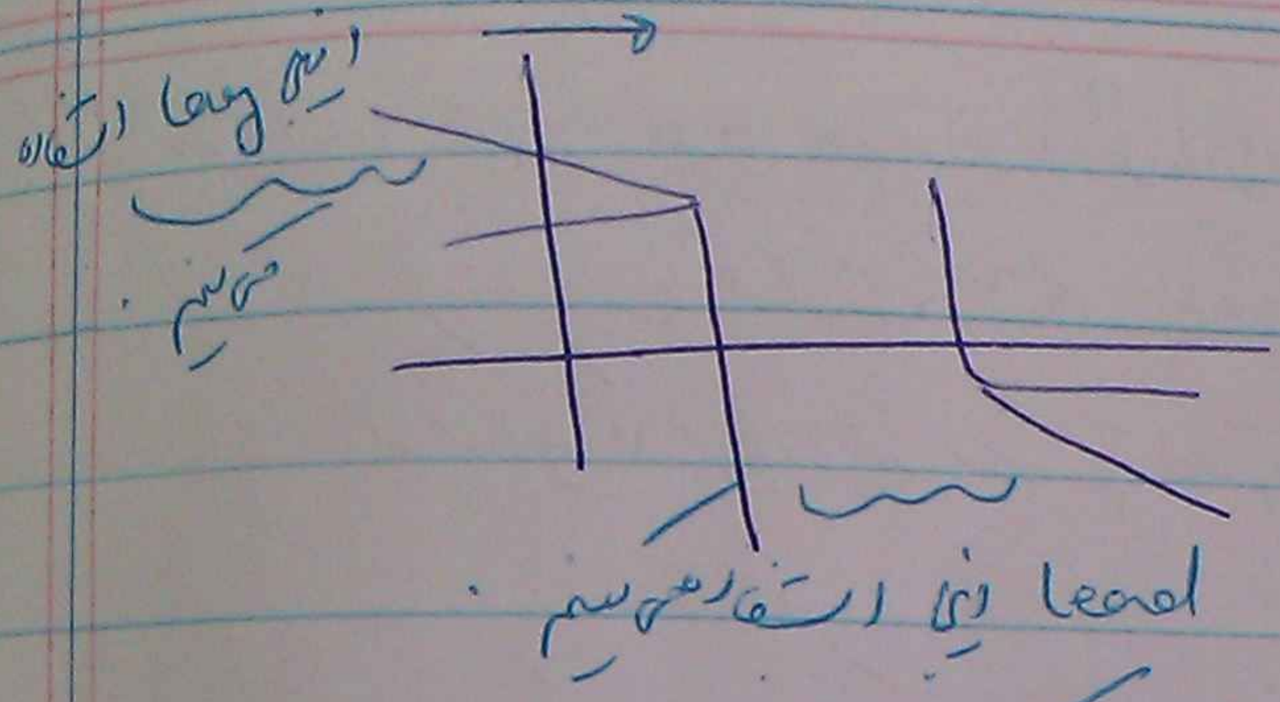
سرعت سیستم به پهنای باند ربط دارد. بین مصالحه بین پایداری و سرعت نداریم performance داریم.

$t_r \downarrow\downarrow \longrightarrow$ سیستم سریعتر $\longrightarrow$ پهنای باند بزرگتر

سریعتر از خودش عبور کند پهنای باند بزرگتر می‌شود.

دنبال‌گیر دارد حدوده نویز می‌شود.

مثال: ماشین را در نظر بگیرید) یک مصالحه trade off این دو را باید برقرار کرد



در اصطلاح فاز بازی میکنیم اما اندازش استفاده میکنیم.

جبران ساز جاها روی فرکانس قطع فاز کار میکند.

توجه کنید اصطلاح مقدار سیستم را حول ۰ dB تنظیم میکند یعنی جاهایی که جاها در فرکانس های پایین یا بزرگی اندازه کار میکند.

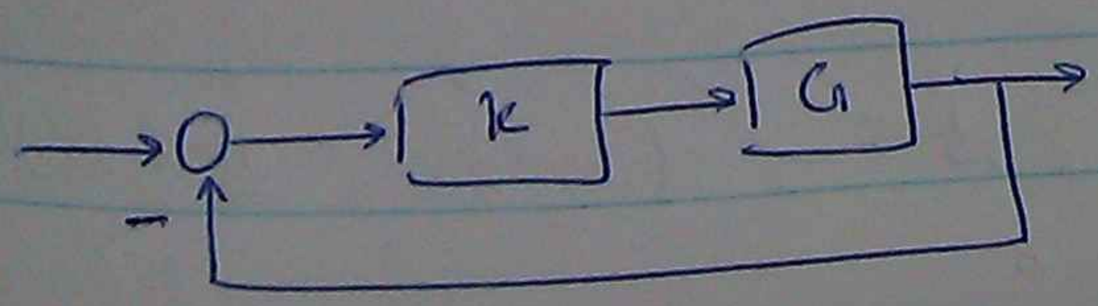
در واقع در اصطلاح از فازش استفاده میکنیم که فاز هست به سیستم بدهد و پایدارش کند از جاها از اندازش استفاده میکنیم.

کی جواب میدن برای طراحی کنترل کننده نداریم؟ زمانیکه دو حوزه همنوعه خیلی به هم نزدیک باشند. مثلاً کنترل مقاومت کشتی میشود. مثال در

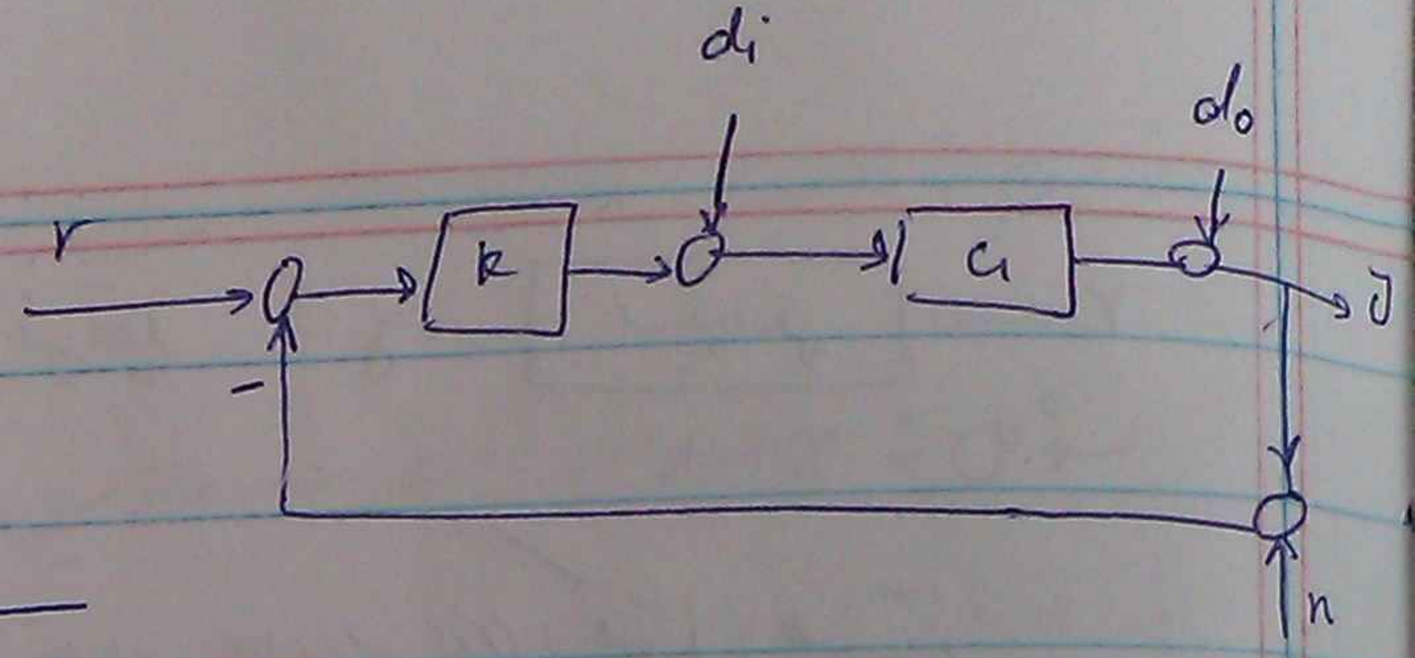
$$\frac{S-1}{S+2}$$

نخواهیم نهایتا نزدیک باشد ← ولی امکان پذیر نمیشود.

- حساسیت



$$M = \frac{G_1 K}{1 + G_1 K}$$



$$S_K^{\wedge} = \frac{\partial M}{\partial K} \cdot \frac{K}{M} = \frac{1}{1 + K G_1}$$

حساسیت تابع انتقال از خروجی $S(j\omega) = \frac{1}{1 + k G(j\omega)} = S_K^{\wedge}$

مکمل حساسیت: $T = 1 - S = \frac{G k(j\omega)}{1 + G k(j\omega)}$

علت اهمیت S و T : به راحتی می‌توان تمام مشخصات سیستم را بر حسب آن‌ها نوشت

$$y = y_r\Big|_{n, d_i, d_o = 0} + y_{d_i}\Big|_{r, n, d_o = 0} + y_n\Big|_{r, d_i, d_o = 0} + y_{d_o}\Big|_{r, n, d_i = 0}$$

$$= \underbrace{\frac{G K}{1 + G K}}_{T} r + \underbrace{\frac{G}{1 + G K}}_{G S} d_i + \underbrace{\frac{-G K}{1 + G K}}_{-T} n + \underbrace{\frac{1}{1 + K G_1}}_{S} d_o$$

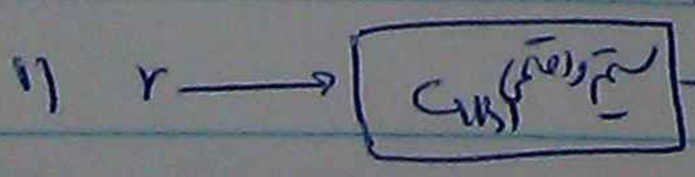
کنترل مقاوم

کنترل‌کننده‌هایی که: اگر این کنترل‌کننده پایدار باشد هر سیستمی پایدار می‌شود.

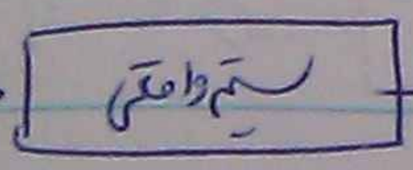
Note:

TI مستقل خطی: خطی

اثر اصطکاک حذف شده



اصطلاک سآل : وابسته خطی TV ؛ غیر خطی



وجود دارد.

اصطلاک استاتیکی - دینامیکی - کنترل قابل پیاده سازی در کنترل هستند

به علت تفاوت این ۲ مدل برای مدل سازی باید خطای مدل سازی هم لحاظ شود. البته چون مدل شود و با بررسی مشخصات سیستم و براساس آن به طراحی صورت می گیرد.

ارکنترل سرنخش را بدهم ؟

1) Design طراحی

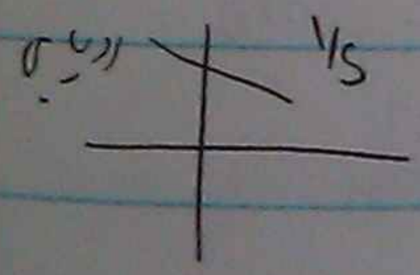
2) validation اعتبارسنجی می کنیم

3) Implementation سیستم کنترل آزمایشی، شبیه سازی و ... که به واقعیت نزدیک هستند

۹۱,۸,۲۷ یادآوری:

بهره ولتاژ و حذف اغتشاش تابع حساسیت باید کوچک باشد تا بتوان فرمان بالا و پایین عکس هم هستند.

فرمان کمی پایین مخصوص رادیاتور است. فرمان پایین حوزه اغتشاش است.



$t = \frac{1}{P}$

$t = \infty \longrightarrow$ P پایین

tracking , حذف اغتشاش $\longrightarrow$ S ↓ & T ↑

فرمان کمی پایین

جلسه سوم هفت الگاره 91,7,15

سؤال: چه سری کنید آنا ضرب ماتریس که خاصیت جابجایی دارند؟ $AB \neq BA$

MIMO

1. مدل سازی،
2. تئوری کنترل ازم.
3. طراحی کالمن فیلتر LQG LTR C.L INA
4. روشهای تقلیل درجه.

INA DNA –
C.L –

مراجع:

1) patel and munro
2) Barnett and camerron
3) Kailath → 1970 Fundamental تئوری سیستم Linear system
4) Rasenbroch
5) Majechoswki ✓
6) Skogeotad

دکتر علی خاکی صدیق

مدل سازی سیستم‌ها:

۴ حالت را بررسی می‌کنیم:

1) state - space فضای حالت

2) Transfer function Matrix ماتریس تابع انتقال (تبدیل)

3) system matrix ماتریس سیستم

4) Matrix Fraction Description (MFD)

1) مدل داخلی - توصیف فضای حالت یا توصیف داخلی از سیستم است.

Enternal Model

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

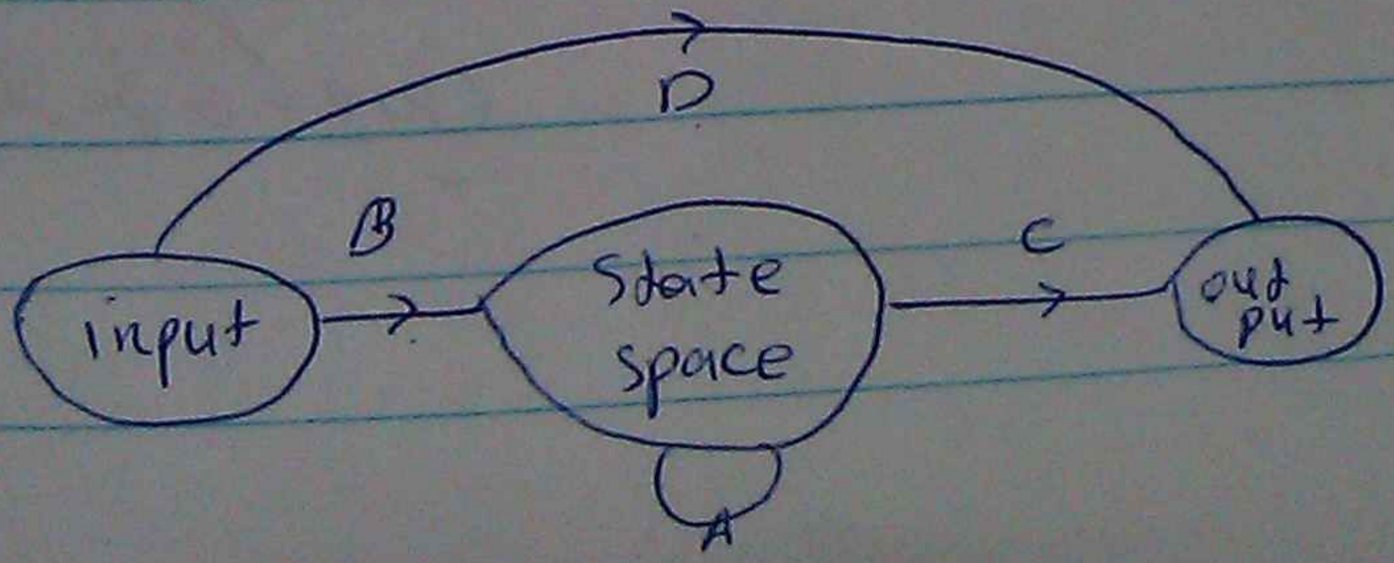
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$A_{n \times n}$ $y_{l \times 1}$ بردار خروجی l تا خروجی

$B_{n \times m}$ $u_{m \times 1}$ بردار ورودی m تا ورودی

$C_{l \times n}$ $x_{n \times 1}$ بردار حالت n تا متغیر حالت

$D_{l \times m}$



$D=0$ ⟶ سیستم اکیداً سره

$D=cte$ ⟶ سیستم سره

D دارای پرانتور مشتق باشد ⟶ سیستم نا سره

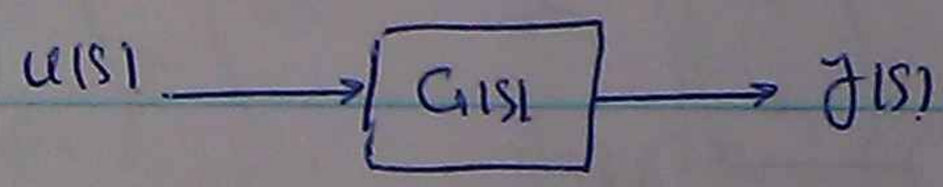
Real plant ⟶ دستگاه واقعی اکیداً سره هستند.

تحقق فضای حالت حداقل بانگر سیستم مینیمال است.

شرط تحقق پذیری توابع تبدیل این است که سیستم سره یا بانگر که اکیداً سره را نیز شامل می شود.)

اما سیستم که نا سره تحقق ناپذیر است.

12 هاتدین تابع تبدیل



$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$

lx m

G(s): هاتدین تابع تبدیل

هاتدین است که تمام عملوکشن تابعی از s هستند که تعریف می شود.

تبدیل لاپلاس بردار خروجی $y(t)$ به تبدیل لاپلاس بردار ورودی $u(s)$ با فرض شرایط اولیه صفر.

External Mode

مدل خارجی

سرواسط این روش توصیف خارجی از سیستم است رابطه ای با دنیای بیرون را نمایش می دهد.

ورودی ز

ارتباط بین ورودی ز ام با خروجی زام را $g_{ij}(s)$ خروجی + نویز

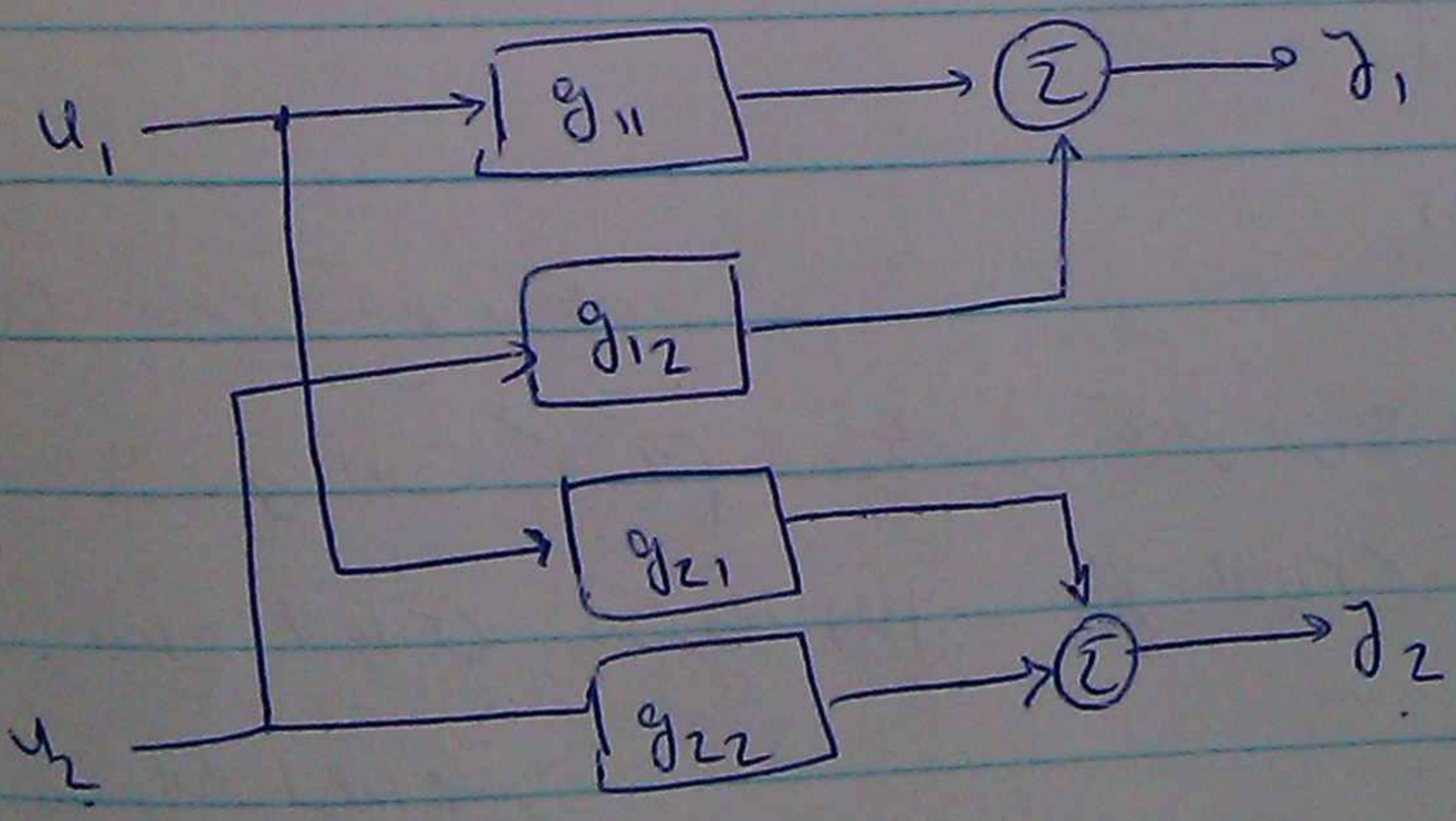
نشان می دهد:

Ex. دو ورودی و دو خروجی داشته باشیم:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix}$$

توضیح: $g_{11}(s)$ که مربوط به اندرکنش ورودی ۱ و خروجی ۱ است نباید این را از ترمینال بیرون آورد. فرض $G(s)$ مربعی داریم.



فرض کنید ارضا ت کلی $G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & & 0 \\ & g_{22}(s) & \\ & & \ddots \\ 0 & & g_{kk}(s) \end{bmatrix}$

که ماتریس بلوک آن قطری است

به این نوع سیستم‌ها non-interacting یا decoupled گوییم که معادل با سیستم SISO هستند. (به این دلیل که هر ورودی تنها با یک خروجی در ارتباط است و بین خروجی‌ها تزویج نیست)

Diagonal System سیستم‌های قطری.

2) سیستم مرتبی بالا مثلثی

در این نوع سیستم‌ها خروجی kام فقط به ورودی kام وابسته است.

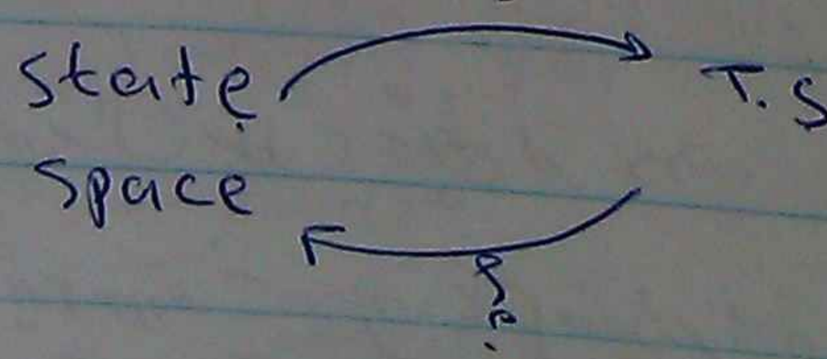
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

در واقع خروجی kام به ورودی kام

خروجی $(k-1)$ام به ورودی kام و $(k-1)$ ام وابسته است.

⋮

سؤال: در سیستم‌های MIMO ارتباط حفظ حالت با فضای تبدیل‌شون کی است یا نه؟



در SISO شرط داشتیم: حذف صفر و قطب در تابع تبدیل رخ ندهد تا هم متحرک. کنترل پذیر کامل باشد و هم متحرک رویت پذیر باشد. می‌توان از فضای تابع تبدیل به فضای حالت رسید و با لکس

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

A و B و C و D تحقق فضای حالت هستند.

این بحث که در فضای SISO هم برقرار است.

$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ حالت تحقق فضای حالت

$\lim G(s) = 0 \longrightarrow$ اکیداً سره.

$s \to \infty$

$G(\infty) = c + e \longrightarrow$ سره

در SISO وقتی حالت $M \neq 0$ عددی ثابت می‌باشد.

ماتریس ثابت می‌باشد.

$G(\infty) \to \infty \longrightarrow$ نا سره.

آیا سیستم اسره باشد (یعنی لزوماً صورت تابع تبدیل آن پس از خرج نباشد) نمی‌توان آن را به بخش اکیداً سره تقسیم کرد. بخش نا سره حتی توانی از s را دارا می‌شود.

توانی از s مربوط به ضربه و مشتقات آن (ضربه‌ی بالاتر عملاً تحلیل سیستم ضربه‌ی پایین‌تر را بالاتر می‌برد) سیستم‌ی در خروجاتش توانی بالاتر از s دارد چون نویز داریم (ایده‌آل که سیستم دارد به ضربه می‌رود چون سیستم نا سره است.) بنابراین سیستم نا سره را نمی‌توان پیاده‌سازی کرد.

SISO می‌توان بدون شرطی نیز SS به TS رفت اما برای تبدیل TS به SS باید سیستم شرط کنترل پذیری و رویت پذیری هم متحرای سیستم را داشته باشد.

Polynomial Matrid description

بخش توصیفی / توصیف ماتریس چندجمله‌ای

3) ماتریس سیستم یا ماتریس سیستم روزنبرگ

این نوع نمایش مخلوطی است از معادلات دیفرانسیل و معادلات جبری و پس از تبدیل لاپلاس به صورت زیر قابل معرفی است.

$$T(s)\,\eta(s) = U\,u(s)$$

$$y(s) = V\eta + Wu$$

T و U و V و W ماتریس‌های ثابت زیر هستند.

$$T_{r\times r} \quad U_{r\times m}$$

$$V_{L\times r} \quad W_{L\times m}$$

بردار η تبدیل لاپلاس متغیرهای سیستم است

η لزوماً یک متغیر حالت نیست.

دستگاه معادله فوق را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} T(s) & -U \\ V(s) & W(s) \end{bmatrix}_{P(s)} \begin{bmatrix} \eta \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

ماتریس سیستم یا روزنبرگ

نقش مقدار حالت و تابع تبدیل را با هم بازی می‌کند

نکته: اگر کنترل‌پذیری حالت صفر را بخواهیم کافی است:

$$\begin{bmatrix} B \\ AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

رتبه آن برابر

۷- مجموعه‌ی ویژگی‌های مقادیر تکین یک ماتریس را بیابید.

۸- سیستم کنترل خطی $\dot{x} = Ax + Bu$ را در نظر بگیرید. اگر $T = 0$ باشد کنترل‌پذیری سیستم را بررسی کنید.

حل: ابتدا باید مقادیر تکین T را بیابیم:

$$|T| \Rightarrow \sigma_i(T) = \sqrt{\lambda_i(T^*T)}$$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow T^*T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad |T| = 4 \quad \text{مثال}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = 2$$

پس مجموعه‌ی ویژگی‌های T برابر $\{2, 2\}$ است.

حل: $T = 0$ پس کنترل‌پذیری حالت صفر را بررسی می‌کنیم.

✓ - چنانچه ماتریس سیستم موجود باشد بدین صورت ماتریس تابع تبدیل عبارت از:

$$G(s) = V(s)\,\bar{T}(s)\,U(s) + W(s)$$

✓ - ابعاد ماتریس $P(s)$ عبارتست از $(r \times l)(r \times m)$ لذا $P(s)$ نیز وقتی مربعی است اگر تعداد ورودی‌ها و تعداد خروجی‌ها با هم برابر باشند $(l = m)$ $P(s)$ مربعی می‌شود.

۲ تعداد متغیرهای سیستم ایرت نه متغیر حالت.

14 MFD در پیش سیستم‌های MIMO، $G(s)$ به دو صورت زیر قابل پیش است:

$$G(s) = N_R D_R^{-1} \qquad : R: \text{Right denamerator}$$

$$G(s) = D_L^{-1} N_L(s) \qquad : L: \text{LeRt}$$

N و D کثیر الجمله‌هایی از s که به آنها ماتریس صورت و مخرج گویند.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

D_R و D_L معکوس پذیر و صریبی باشند.

سؤال: اگر $G(s)$ دارای ابعاد Lam باشد آنگاه N_R (N_L) ابعادش چی می‌شود؟
D_L, R_R
هم چنین $G(s)$ می‌شود Lal و mam باشد.

کسر Fraction

توجه کنید هرخاصیتی برای MFD رایانه وجود دارد برای MFD چپ هم وجوددارد.
به این روش توصیف کسری می‌گویند.

فرض کنید ماتریس تابع تبدیل اکید اُسره با بهره Lam در دسترس باشد:

$$G(s) = \frac{1}{D(s)} \cdot N(s)$$

D(s) : کوچکترین مخرج مشترک تمام درایه‌های G(s)

Ex.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & \frac{s+1}{s+2} \\ \frac{s+1}{s+3} & \frac{s}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s) = \underbrace{\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}}_{D(s)} \begin{bmatrix} s(s+2)(s+3) & (s+1)^2(s+3) \\ (s+1)^2(s+2) & s(s+1)(s+3) \end{bmatrix}$$

کنترل پذیری MFD آن به صورت

$$G(s)_{Lam} = N_R \left[D(s) \cdot I_m \right]_R^{-1}$$

یا

$$G(s)_{Lam} = \left[D(s) \cdot I_L \right]_L^{-1} \cdot N_L$$

درجه MFD که با δ نشان می‌دهیم طبق تعریف درجه ماتریس مخرج است.

$$\delta = \deg[\det(D(s))]$$

Ex. درجه MFD های زیر را حساب کنید:

ج: (در SISO نمی‌شود) (تقسیم مدرت بر خرج که نسبت به هم اول باشند)
در MIMO و MFD ممکن است درجه δ اش متفاوت باشد.

Eg.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)^2(s+2)^2} & \frac{s}{(s+2)^2} \\ \frac{-s}{(s+2)^2} & \frac{-s}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

1) $$G(s) = \begin{bmatrix} s & s(s+1)^2 \\ -s(s+1)^2 & -3(s+1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2)^2 & 0 \\ 0 & (s+1)^2(s+2)^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

N_1 , D_1

$\delta = \deg(\det D(s))$

$\Rightarrow \delta = 8$

2) $$G(s) = \begin{bmatrix} s & s \\ -s(s+1)^2 & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2)^2 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

N_2 , D_2

$\Rightarrow \delta = 6$

نتیجه: درجه MFD می‌تواند صفر باشد.

3) $N_3 = \begin{bmatrix} S & 0 \\ -S(S+1)^2 & S^2 \end{bmatrix}$ $D_3 = \begin{bmatrix} (S+1)^2(S+2)^2 & -(S+1)^2(S+2) \\ 0 & S+2 \end{bmatrix}^{-1}$

$\Longrightarrow \delta = 5$

فرض: بیشترین درجه برای MFD تعیین کنیم.

قدرین: آیا کمترین درجه ای که برای MFD می‌توان تعیین کرد کمتر از صفر است؟

آیا به ازای MFD با کمترین درجه برسیم کمتر است؟ توضیح دهید.

نه کمتر نیست چون MFD را می‌توان با ضرب کردن در یک ثابت غیر صفر آن صفر کرد.

$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \frac{1}{S} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \delta = 0$

✓ پس کمتر نیست.

$$\begin{cases} N_T = NT \\ D_T = DT \\ D_T^{-1} = T^{-1}D^{-1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} G_{SSI} &= N D^{-1} \\ &= N T T^{-1} D^{-1} \\ &= N_T D_T^{-1} \end{aligned}$$

جلسه چهارم 91,7,16

تذکر: اگر $G = N\bar{D}^{-1}$ یک MFD از درجه s باشد و $T(s)$ ماتریس چند جمله ای مرتبه مکعوس پذیر باشد در این صورت

$$N_T = N(s)T(s)$$

$$D_T = D(s)T(s)$$

یک MFD برای $G(s)$ می باشد.

در این حالت

$$\deg[\det(D_T)] = \deg(\det D(s)) + \deg(\det T(s)) = \delta_T$$

$$\delta_T \geq \delta$$

$T(s)$ عادین کبیر الجمله راهستند که مقسوم علیه مشترک سمت راست (از سمت راست تقسیم کنیم) common right divisor (c.r.d) برای N_T می باشد.

MFD کمتر نسبت یک تحقق مینیمال هم برایش پیدا کنیم ساده ترین راه این است که با درجه مفروض ضرب کنیم عملاً مقسوم علیه مشترک حاصل نمی شود.

۱) اگر صورت و مخرج عادین یک MFD دارای مقسوم علیه مشترک از درجه ۱ یا بیشتر باشد یک MFD با درجه پایین تر می توان با فاکتور گیری از مقسوم علیه مشترک بدست آورد.

از اصلی مطالب درس بسیار لذت بردم

Majick Suzuki

$$D = \begin{bmatrix} 1 & s \\ -s & s+1 \end{bmatrix} \curvearrowright s^2 \Longrightarrow \delta_D = 2$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & s \\ -s & s \end{bmatrix} \curvearrowright s^2 \Longrightarrow \delta_T = 2 \Longrightarrow \delta_{T^{-1}} = 4$$

12) اگر دو ماتریس کثیرالجمله دارای مقوم علیه مشترک با درجه بهتر (ماتریس که توضیح تابعی از s نیست) ماتریس unimodular باشد) در این صورت دو ماتریس right coprime و relatively right prime به صورت متناظر ترتیب

است.

✓ در این صورت یک MFD دارای کمترین درجه خواهیم داشت و به این MFD تقلیل ناپذیر (کاهش ناپذیر) می‌گوییم

irreducible

تمرین: فرض کنید $N_1 D_1^{-1}$ و $N_2 D_2^{-1}$ دو MFD تقلیل ناپذیر برای $G(s)$ باشد بنابراین یک ماتریس unimodular (ترتیبان آن یک عدد ثابت غیر صفر) مثل $\begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ وجود دارد به طوری که

$$D_1 = D_2 T \quad , \quad N_1 = N_2 T$$

مفهوم: عوامل موجود در آن که یک هستند یا نمی‌شوند که ثابت برای آن وجود ندارد elet حذف این دو تا MFD یک آن هستند و فقط در یک ضریب K با هم تفاوت دارند.

تعریف: دو ماتریس $n \times m$ با یکسان بودن تعداد ستون‌های صادر (m) right coprim است اگر و فقط اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

1. Rank ماتریس $[\tilde{D}(s) \quad \tilde{N}(s)]$، m باشد از این رو تمام مقادیر $S = S_i$ شود.
(S_i ریشه‌های دترمینان $D(s)$)

2. فرم اسمیت $[\tilde{N}(s) \quad \tilde{D}(s)]$ به صورت $[0 \quad I_m]$ باشد.

Ex. $G(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} (1-s) & 1-s \\ (s+3)(s-1) & s+3 \end{bmatrix}}_{N_1} \underbrace{\begin{bmatrix} s(s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & s(s+1) \end{bmatrix}^{-1}}_{D_1}$

$$[D_1^T \quad N_1^T] = \begin{bmatrix} s(s+1)(s+2) & 0 & 1-s & (s-1)(s+3) \\ 0 & s(s+1) & 1-s & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\det(D_1) = s^2(s+1)^2(s+2) = 0 \longrightarrow s = 0, -1, -2$$

if $s=0 \longrightarrow \rho \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 2$

if $s=-1 \longrightarrow \rho \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2$

if $s=-2 \quad \rho \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 2$

یادآوری: سطر صفر ماتریس اگر همه ستون صفر باشد تأثیری ندارد.
ارجحیت $\min$ ماتریس $\rho(A_{m \times n})$ از m یا n

تقلیل ناپذیر ← تعداد ستونهای ماتریس $= m$

سوال: Full rank نیز چون واپسگی سطر و ستون دارند غیر مربع بود نیز همینم بود.

$\Rightarrow$

نکته اهمیت: با اعمال کانونیش می‌رهند راه کار استفاده از عملیات مقدماتی (سطر-ستون)

$$\begin{bmatrix} D_1^T & N_1^T \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{عملیات مقدماتی}} \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix}$$

ex. $m=2 \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

عملاً ماتریس کی لولیه در ماتریس کسری صورت نمی‌شوند چون نمی‌خواهیم که صورت ابتدا تغییر کنند.

تعریف: دو ماتریس X_1 و X_2 را معادل ($X_1(s) \sim X_2(s)$) گوییم اگر با یک سری ماتریس کی مقدماتی رابطه دهیم

$$\{R_1(s), \dots, R_k(s)\} \quad , \quad [L_1(s), L_2(s), \dots, L_l(s)]$$

مضروب شده طوری که

$$X_1(s) = L_2(s) \cdots L_1(s) X_2(s) \cdot R_1(s) \cdots R_k(s)$$

decouple

ex. $X_{1(s)} = \begin{bmatrix} a_{(s)} & b_{(s)} \\ c_{(s)} & d_{(s)} \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{L_1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

جایگاه ردیف ۱: ضرب در ماتریس L_1 جای سطر دوم و ستون را عوض کردیم.

فرض کنید خواسته باشیم ردیف ۲ باشیم $\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

① اولین عملیات جایگاه ردیف ۲ بود

② عضو ۲ و ۳ ضرب ردیف اول و دوم به ترتیب در اعداد ثابت 2 و 3

③ اضافه کردن حاصل $(s+1)$ برابر سطر دوم به سطر اول

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_3}\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2c+(s+1)3a & 2d+(s+1)3b \\ 3a & 3b \end{pmatrix}}_{X_3}$$

X_3 معادل X_1 است. تمام ماتریس‌ها مربع هستند و R هم طرفش.

هر دو معادل بودن یعنی اینکه X_1 و X_3 یکی‌اند.

$$X_3 = L_1 L_2 L_3 X_{1(s)}$$

$$X_2 = L X_1 R$$

عملیات سطرها روی سطرها ← عملیات ستون‌ها روی ستون‌ها

$\xleftarrow{\quad}$ $\frac{\varepsilon_{n+1}(s)}{\varepsilon_n(s)}$

ساده می‌توان نشان داد که این تابع انتقال یک فیلتر تمام‌گذر (all-pass) است، یعنی تابعی که دامنه ثابت دارد ولی فاز را تغییر می‌دهد.

$$S(s) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 1 \\ \hline 0 & \varepsilon_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X(s) \longrightarrow \begin{matrix} n=2 \\ \text{بعد} \end{matrix} \qquad S(s) = \begin{matrix} \varepsilon_1 & 1 \\ \varepsilon_1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow 2 \\ \updownarrow \\ m-2 \end{matrix}$$

$$S(s) = \text{diag}\,[\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \dots, \varepsilon_{n-1}(s), 0, 0, \dots, 0]$$

ماتریس (monic) پس قطری $\varepsilon_i(s)$ چندجمله‌ای

$$i = 1, \dots, n-1 \quad \text{و}$$

$$\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s)$$

$\xleftarrow{\quad}$ $\frac{\varepsilon_{n+1}(s)}{\varepsilon_n(s)}$

ساده می‌توان نشان داد که این تابع انتقال یک فیلتر تمام‌گذر (all-pass) است، یعنی تابعی که دامنه ثابت دارد ولی فاز را تغییر می‌دهد.

$$S(s) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 1 \\ \hline 0 & \varepsilon_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X(s) \longrightarrow \begin{matrix} n=2 \\ \text{بعد} \end{matrix} \qquad S(s) = \begin{matrix} \varepsilon_1 & 1 \\ \varepsilon_1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow 2 \\ \updownarrow \\ m-2 \end{matrix}$$

$$S(s) = \text{diag}\,[\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \dots, \varepsilon_{n-1}(s), 0, 0, \dots, 0]$$

ماتریس (monic) پس قطری $\varepsilon_i(s)$ چندجمله‌ای

$$i = 1, \dots, n-1 \quad \text{و}$$

$$\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s)$$

می‌توان نشان داد که

$$\varepsilon_i = \frac{d_i(s)}{d_{i-1}(s)}$$

به عبارتی d_i بر d_{i-1} قبلی در چندجمله‌ای تقسیم پذیر

$d_0(s) = 1$

$d_i(s) = ?$ $\Longrightarrow$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک تمام درجه‌های

عناصر کمی (s) با بعد $i \times i$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

آن را هرمیت نرمال شده با عملیات سطری ستونی هرمیتی می‌کنیم.

به عبارتی که هریک از این بزرگترین مقسوم علیه مشترک را d_i که با نورمال کردن

به صورت هرمیتی درمی‌آوریم.

Invariant factor

در این صورت به عاملین ε_i که خارج قسمت d_i بر d_{i-1} هستند

invariance factor

می‌گوییم.

Ex. $$X = \begin{pmatrix} s+2 & s+1 \\ s^2+3s+3 & s^2-1 \\ s+1 & s^2+3s+2 \end{pmatrix}$$

$d_0 = 1$

$$d_1 = c.d\left[s+2 \;,\; s+1 \;,\; s^2+3s+3 \;,\; s^2-1 \;,\; s+1 \;,\; s^2+3s+2 \right]$$

$$= 1$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2}{} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$d_2 =$ c.d (ترمینان دو در دو اش)

$$d_2 = c.d\left\{ \begin{vmatrix} s+2 & s+1 \\ s^2+3s+3 & s^2-1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} s+2 & s+1 \\ s+1 & s^2+3s+2 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} s^2+3s+3 & s^2-1 \\ s+1 & s^2+3s+2 \end{vmatrix} \right\} =$$

(یک سؤال حتماً از این قسمت خواهد بود تمرین و کار خواهد شد.)

2. فرم الحاقی یک صیال

i. با داشتن $G(s)$ که ماتریس توابع تبدیل ۲ ورودی ۲ خروجی کوچک‌ترین مخرج مشترک تمام عناصرش

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} \; N(s)$$

مربوط به ماتریس G

2. فرم الحاقی $N(s)$ را باید پیدا کنیم.

$X(s) \longrightarrow S(s)$

$$M(s) = \frac{1}{d(s)}\, S(s)$$

3. تابعیت $M(s)$

Ex. $G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2+3s+2} & -\frac{1}{s^2+3s+2} \\ \frac{s^2+s-4}{s^2+3s+2} & \frac{2s^2-s-8}{s^2+3s+2} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{2s-4}{s+1} \end{pmatrix}$ $\alpha(s)$

$$= \underbrace{\frac{1}{s^2+3s+2}}_{d(s)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ s^2+s-4 & 2s^2-s-8 \\ (s-2)(s+2) & (2s-4)(s+2) \end{pmatrix}$$

$d_0(s) = 1$

$d_1(s) = \text{g.c.d}\{1, -1, \cdots\} = 1$:مرحله

$d_2(s) = \text{g.c.d}\left\{ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ s^2+s-4 & 2s^2-s-8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ s^2-4 & 2s^2-8 \end{vmatrix} \right.$

$$\left. , \begin{vmatrix} s^2+s-4 & 2s^2-s-8 \\ s^2-4 & 2s^2-8 \end{vmatrix} \right\}$$

$= (s+2)(s-2)$

$$\varepsilon_1(s) = \frac{d_1(s)}{d_0(s)} = 1$$

$$\varepsilon_2(s) = \frac{d_2(s)}{d_1(s)} = (s+2)(s-2)$$

$$S(s) = \begin{pmatrix} \textcircled{1}\,\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \underline{(s+2)(s-2)}\,\varepsilon_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2×2 چون صفر ل سطر و ستون rank ماتریس رتبه نرمال بهش می‌گیم.

حالا می‌رسیم:

$$M(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+2)(s-2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2+3s+2} & 0 \\ 0 & \underline{\frac{(s+2)(s-2)}{s^2+3s+2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{s-2}{s+1}$$

حالا اطلاعاتی که ما میخواهیم از MFD بدست بیاریم از ماتریس M بدست می‌آوریم.
علت این تغییرات این بود که ما میخواهیم تعریف کنیم مفهوم مخرج و قطب داریم یکی
چیز متفاوت؟ چه صورت است.

تمرين :

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s+1)^2(s+2)^2} & \frac{s}{(s+2)^2} \\ \frac{-s}{(s+2)^2} & \frac{-s}{(s+2)^2} \end{pmatrix}$$

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)^2(s+2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s^2}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2} \begin{bmatrix} s & s(s+1)^2 \\ -s(s+1)^2 & -s(s+1)^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{d(s)} N(s)$$

$X(s) \longrightarrow S(s)$

$d_0 = 1$

$d_1 = c.d\{ s, s(s+1)^2, -s(s+1)^2, -s(s+1)^2 \} = s$

$d_2 = c.d\left\{ \begin{vmatrix} s & s(s+1)^2 \\ -s(s+1)^2 & -s(s+1)^2 \end{vmatrix} \right\} = s^3(s+1)^2(s+2)$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{d_1}{d_0} = \frac{s}{1} = s \\ \varepsilon_2 &= \frac{d_2}{d_1} = \frac{s^3(s+1)^2(s+2)}{s} \\ &= s^2(s+1)^2(s+2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow S(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2(s+1)^2(s+2) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2(s+1)^2(s+2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)^2(s+2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s^2}{s+2} \end{bmatrix}$$

جلسه پنجم 91,7,22

صفر وقطب

چند نوع مختلف صفر و قطب داریم:

1) element Zero صفرهای عنصر

2) decompling zero (صفر کوپلیر)

input d.z
output d.z
input - output d.z

3) Transmision zero صفر انتقال ← آنرو مرتبط با شرط ... است مک میلان
AFO

4) Invariant zero صفر غیر قابل تغییر

e.z : هر مقداری که بتوانند صورت عضو g_{ij} را صفر کند یک صفر است.

این تعریف هیچ فایده عملی ندارد.

چند جمله ای صفر و قطب ← هدف تعیین صفر و قطب

Zero polynominals

Pole "

آن چند جمله ای که با تعیین متغیر به صفر می رسد که آن صفر است مک میلان صفر آن

ات در اینصورت چند جمله‌ای حقب و چند جمله‌ای صفر آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P(s) = \psi_1(s) \times \cdots \times \psi_r(s)$$

$$Z(s) = \varepsilon'_1(s) \times \cdots \times \varepsilon'_r(s)$$

Ex.

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(s) = (s+1)^2(s+2) \longrightarrow p = -1, -1, -2$$

$$Z(s) = (s-2) \longrightarrow z = 2$$

تذکر: اگر $G(s)$ مربعی و نابدیهی باشد آنگاه برابر است با:

$$\det(G(s)) = c \frac{Z(s)}{P(s)}$$

$c = cte$

توجه دارید که اگرچه چند جمله‌ای $\{P(s), Z(s)$ و $\psi_i(s), \varepsilon'_i(s)\}$ ثابت هستند ولی ممکن است فاکتور مشترک بین $P(s)$ و $Z(s)$ موجود باشد که منجر به تعیین جزء $G(s)$ حذف شود.

تعریف: درجه $p(G)$ برابر است با درجه حک میلان G

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i)$$

مثلا

رئوس مثلا درجه برابر می‌شود: (چون سه تا حلقه داریم e_1 و e_2 و e_3)

به صفر و حلقه‌ای که توسط روش حک میلان بدست می‌آید صفر و حلقه‌ای

انتقال می‌گوییم.

پیدا کردن صفر و حلقه‌ای: روش MFD

حلقه‌ای انتقال ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ رسم‌های زیر صفرهای خروج تقلیل ناپذیر

$G(s)$ $[D]$ ها می‌شود.

صفرهای انتقال ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ رسم‌های زیر صفرهای ماتریس صورت

تقلیل ناپذیر $G(s)$ می‌شود. غیر z یک صفر انتقال است اگر

فقط اگر $N(z)$ رتبه کاهش دهد.

کامل $\Leftarrow$ آر $\det \neq 0$

$$N(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ 1 & s+3 \\ 0 & s+4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{rank} = 2$$

رتبه $= \min(3, 2)$

غیر از این مثال صفر انتقال ندارد. چون رتبه را نمی‌تواند از این دو

از $z = -1$ تبدیل شود.

$\Leftarrow$ غیر از صفرهای رتبه همان 2 است $\Leftarrow$

D.Z:

آرمانترین سیستم را داشته باشیم:

$$G(s) = V(s)\bar{T}^{-1}(s)U(s) + W(s)$$

(برای سن نوشتن معادلات حالت. $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$)

اگر T و U دارای بزرگترین مقسوم علیه مشترک چپ $L(s)$ باشند داریم

$$T = L(s)\cdot\bar{T}(s)$$

$$U(s) = L(s)\,\bar{U}(s)$$

به شرط حکوس نیز $L(s)$

$$G(s) = V(s)\bar{T}^{-1}(s)\bar{L}^{-1}(s)L(s)\bar{U}(s) + W(s)$$
$$= V(s)\bar{T}^{-1}(s)\bar{U}(s) + W(s)$$

نتیجه:

- ترمینان $L(s)$ یک چند جمله‌ای غیرصفر از s است اگر T و U نسبت به هم اول coprime باشند.

رسیدیم که ترمینان $L(s)$ ($\{\lambda_i\}$) از صفرهای مرموز دینامیم (Z-d-i) هستند.

کنترل پذیری و رویت پذیری ارتباط داشت.

توجه کنید که صفرهای $i-l$ به موضع تشکیل $G(s)$ حذف می شوند.

- به همین صورت اگر $V(s)$ و $T(s)$ دارای بزرگترین مقسوم علیه مشترک $\{\gamma_i\}$ باشد $R(s)$ برابر $R(s)$ خواهد شد و درین صورت ریشه های $R(s)$ همان $\{\gamma_i\}$ خواهند بود.

$$\begin{cases} T(s) = \bar{T}(s) \cdot R(s) \\ V(s) = \bar{V}(s) \cdot R(s) \end{cases}$$

صفرهای $z-l-o$ همگی

$$\uparrow \text{output}$$

به نظر می $z-l-i$ و $z-l-o$ کی اتفاق می افتد؟

هم ریشه های $\bar{V}(s)$ و هم ریشه های $R(s)$ باشد یعنی عضو مشترک در ریشه های γ_i و β_i باشد.

(آن سیستم کنترل پذیر کامل و رویت پذیر کامل باشد تحقق حداقل حالت مینیمال می باشد)

اگر مجموعه

- آن سیستم هیچ صفر دکوپله ای نداشته باشد آنگاه سیستم با حداقل درجه (یعنی مینیمال الگ ۰) می باشد. (تحقق مینیمال داریم ۰)

PFD

توصیف کسری تبدیل

Fraction Description کسری

partial کسری

برای سادگی فرض کنید D=0

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

ماتریس بردارویژه ماتریس بردارویژه

$$A = W \Lambda V$$ ← ماتریس بردارویژه ها ماتریس بردارویژه ها

$$V^{-1} = W$$

$$W = [\omega_1, \omega_2, \dots \omega_m] \qquad V = \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \\ \vdots \\ V_m^T \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = Diag[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$$

اگر x_1 را با x_2 بدهند نمی‌توان تشخیص داد که کدام x_1 و x_2 است.

$$X_1(s) = l_3 l_2 l_1 X$$

$$X_1 = L X_2 R$$

عملیات روی ستون ← → عملیات روی سطر

$$\begin{cases} A\omega_i = \lambda_i \omega_i \\ V_i^T A = \lambda_i V_i^T \end{cases}$$ ← 86

$$G(s) = C(sI - W \Lambda V)^{-1} B$$

$$= C(sWV - W\Lambda V)^{-1} B$$

$$= (CW)(sI - \Lambda)^{-1}(VB)$$

$$G = (cw_1 | cw_2 | \cdots | cw_n) \begin{pmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{s-\lambda_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T B \\ v_2^T B \\ \vdots \\ v_m^T B \end{pmatrix}$$

صفرکه دکوپله از روی تحقق صنیجال قابل شناسایی است.

$$\begin{cases} cw_i = \gamma_i \quad \text{صفر دکوپله خروجی} \quad [\ ]\uparrow m \\ v_i^T B = \beta_i^T \quad \text{صفر دکوپله ورودی} \quad [\ ] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \longleftrightarrow m \end{cases}$$

$$G = (\gamma_1 \ \gamma_2 \cdots \gamma_m) \begin{pmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{s-\lambda_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{1}{s-\lambda_1} \gamma_1 \beta_1^T + \frac{1}{s-\lambda_2} \gamma_2 \beta_2^T + \cdots + \frac{1}{s-\lambda_m} \gamma_m \beta_m^T$$

نتیجه:

$$\checkmark \quad G(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-\lambda_i} \gamma_i \beta_i^T \longrightarrow \text{P.F.D}$$

توسیف کسری

$$-(\gamma_i)(\beta_i^T) = (R_i) \quad \text{Residue matrix}$$

- درایه رتبه 1 است.

زمانی که در حیان یک ماتریس، ماتریس مستقل زدی، یعنی این چنین ماتریسی که را یک مدول unimodular خواهند

- اگر از روی $G(s)$ صفرهای P.F.D را بدست آوردیم Z.O بدست نمی آید چون در $G(s)$ ضرب صفر و قطب انجام شده است.

$\Leftarrow$ نیاز مندی ما سر R_i هستیم.

- روشی برای ساختن R_i:

$G(s) \longrightarrow M(s)$: از طریق مک میلان

1. قطب های $G(s)$ را بدست آورید. $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$

2.
$$G(s) = \frac{1}{s-\lambda_1} R_1 + \dots + \frac{1}{s-\lambda_m} R_m$$

$$R_i = \lim_{s \to \lambda_i} (s-\lambda_i) G(s)$$

$i = 1, \dots, m$

$s \longmapsto \lambda_i$

EX.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s+2} \\ \frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}$$

مثال. ex

T.P $= -1, -2, -3, -4$? چه مواردی باید آزمون شود

$$R_1 = \lim_{s \to -1} (s+1) G(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \quad 0)$$

بردارهای پایه

$R_i = h_i \cdot h_i^T$

چون $\text{rank} = 1$: $\frac{D}{}$

$$R_2 = \lim_{s \to -2} (s+2) G(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \lim_{s \to -3} (s+3) G(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_4 = \lim_{s \to -4} (s+4) G(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s) = R_1 \frac{1}{s+1} + \cdots + R_4 \frac{1}{s+4}$$

EX. مقادیر ماتریس A و B و C را برای سیستم زیر بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{matrix}$$

$b_2^T \rightarrow$ ۱ در dz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3$

γ_3 در dz

decopening zero

الف. آیا dz وجود دارد؟

ب. شرطی که باید بین صفرهای آن تحقق صفرهای آن رعایت گردد.

" SISO برحاتین R_i به ازای λ_i ی (مقدار A) حاوی صفر، شدگنتل ناپذیر و آن

" حاتین c حاوی صفر، شدرویت ناپذیر می شود.

$$R_1 = \gamma_1 \beta_1^T \qquad A = W \Lambda V$$

$$\gamma_1 = c w_1 \qquad W = I \longrightarrow V = I = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1^T = V_1^T B$$

$$V_1^T = [1 \ 0 \ 0] \quad V_2^T = [0 \ 1 \ 0] \quad V_3^T = [0 \ 0 \ 1]$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 = c w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \beta_1^T = V_1^T B = (1 \ 0)$$

$$\gamma_2 = c w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \beta_2^T = V_2^T B = (0 \ 0)$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \beta_3^T = (1 \ 1)$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

R_i کمین است حاصلضرب D ستونی غیر صفر و خطی

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (0 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\gamma_2 \quad \beta_2^T$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\gamma_3 \quad \beta_3^T$

$$G(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{\text{مقدار ماندگار انتقال}} + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{s+2}}_{\text{صفر دوبل}} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{s+3}$$

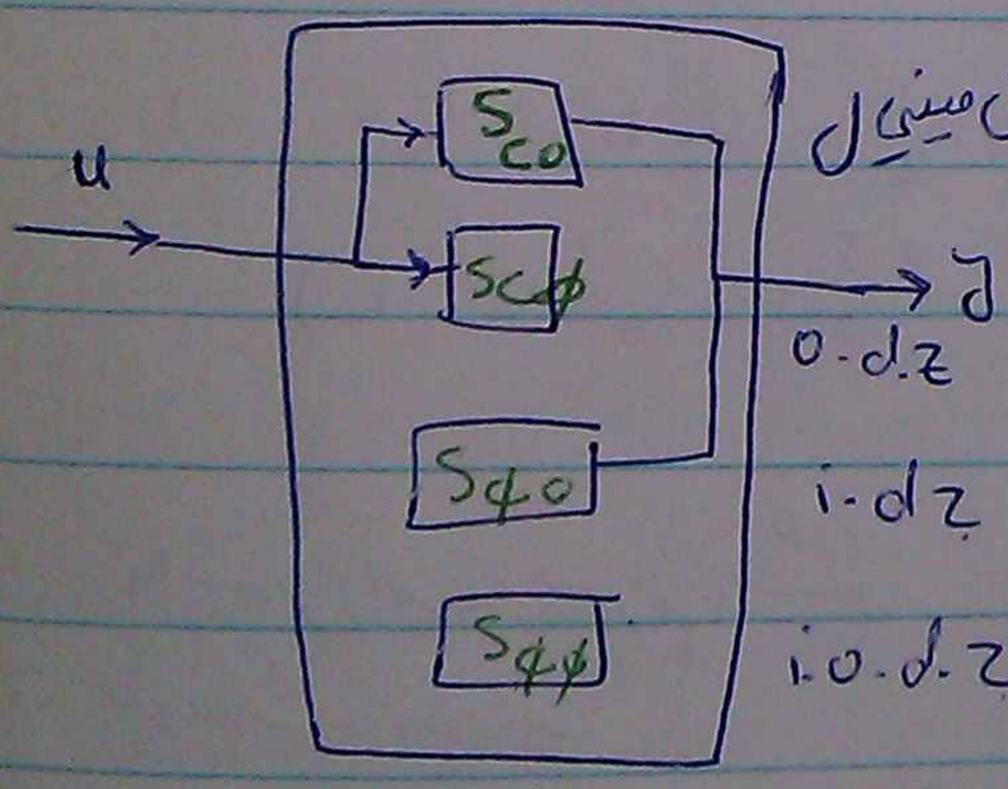
T.P است ← $\lambda_1 = 0$ چون ← صفر دوبل داریم ← $d.z = \{-2, -3\}$ ← صفر دوبل دوم

چون $\lambda_3 = 0$ شده

سوال: کدام کیست از input و o.d.z ؟ output کدام است

به طور عمومی برای هر سیستم $S = \{A, B, C\}$ ؛ ضمن زیر قسمت تقسیم می‌کردیم که هر یک از این زیر سیستم‌ها بیانگر حرکت کنترل ناپذیری یا رویت ناپذیری باشد.

S



$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o.d.z ← A_{11}

A_{33} ← i.o.d.z

A_{44} ← i.d.z

$$\tilde{C} = [\,0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4\,]$$

$$C_{11}s_1 = C_2(sI - A_{22})^{-1} B_2$$

نتیجه: اگر ماتریس A قطری باشد هر سطری از B که صفر باشد $z.i.o$ و هر ستونی از C که صفر باشد $z.o.o$ می‌باشد.

نتیجه:

$$\{\text{صفرهای سیستم}\} = \{T.z\} + \{D.z\}$$

$$\{\text{قطب‌های سیستم}\} = \{T.p\} + \{D.p\}$$

completely observable $\rightarrow C_0$

completely non observable $\rightarrow C_{\bar{o}}$

صفر ورودی کنترل‌پذیر $\quad \beta_i^T = 0$

صفر خروجی کنترل‌پذیر $\quad \gamma_i = 0$

صفر ورودی-خروجی کنترل‌پذیر $\quad \gamma_i = \beta_i^T = 0$

در این درس ضابطه ترمینال برای حالتی غیر صریح به کار رود منظور از رابطه زیر

هستیم است.

$|G_{91}91| = 0 \longrightarrow$ صفری انتقال

$|P_{151}| = 0 \longrightarrow$ صفری سیستم

$|G_{151}| = 0$ → مستقیماً
- $G_{151} = 0$
- MFD → $|N| = 0 \longrightarrow$ T.Z
- MFD → $|D| = 0 \longrightarrow$ T.P
- S.M.Form → T.P, [0] → T.Z

PFD $\longrightarrow$ صفر دکوپلیم / قطب دکوپلیم

$|T_{151}| = 0 \longrightarrow$ قطب سیستم

جلسه ششم 91,7,23

تحقق تجزیه طیفی:

یکی از کاربردهای مهم کوپله این است که می‌توانیم به تحقق طیفی آن برای A برسیم آوردیم.

1) بازنویسی $\{A, B, C, D\}$ و بدست آوردن $A = W \Lambda V$ و آنگاه $V^T B$ و سپس بازنویسی λ_i و B_i^T

2) اگر $B_i^T = 0$ و $\gamma_j = 0 \Leftarrow$ بدست آوردن λ_i و λ_j

3) خارج کردن گام متناظر کوپله از λ و سطرهای صفر $V^T B$ و ستونهای صفر W و بدست آوردن C'، D و Λ'

4) تحقق مینیمال به فرم C'، B' و Λ'

بدست آوردن

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \Lambda' & B' \\ C' & D \end{pmatrix}$$

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & -3 \end{bmatrix}$$

$A = W \Lambda V$

$W = V = I$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} CW = C \\ V^T B = B \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$V^T \cdot B$

$$\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ 0 & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

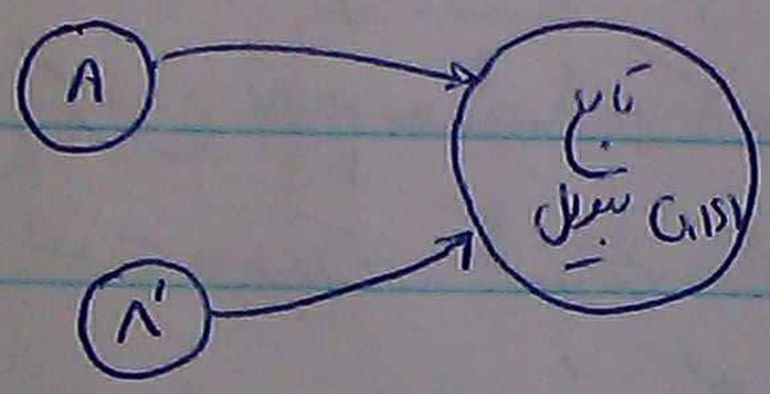
CW

$$\Rightarrow \quad A' = [-1] \qquad B' = (1 \;\; 0) \qquad C' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s) = C'(sI - A')^{-1} B'$$

تحقق مثال $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s+1} (1 \;\; 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{pmatrix}$ ✓

تابع تبدیل یکی از ویژگی‌هایی که چه با A و چه با A' محاسبه می‌شود



فرض کنید: $\forall \omega \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\det\left\{\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \det\begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$P_{(s)} = \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{pmatrix}$$

V و W برداری دلخواه و به اندازه ماتریس A هستند

$$\det \begin{pmatrix} sI - VAW & -VB \\ CW & D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s-\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & s-\lambda_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & s-\lambda_m \\ \hline CW & & & & D \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ -VB \end{matrix}$$

نتیجه: اگر $P(s)$ رتبه از دست رفته آنگاه $(sI - A \;\; -VB)$ رتبه از دست می‌دهد

می‌توان نشان داد که $(SI-A)^{-1}$ رشته از الف می‌دهد

اگر فقط گفتیم $(SI-A)^{-1}$ رشته از الف دهد.

پس روش دارهیت برای آوردن کنترل‌پذیری ساده‌تر است. $(SI-A)^{-1}$

حالا اگر گفتیم آیا رشته از الف می‌دهد یا خیر (یعنی Z.d.o آچون یا دوری سرکار داریم)

به طور مشابه می‌توان نشان داد که روش دارهیت برای آوردن رویت‌پذیری رشته از الف دارد. $\begin{pmatrix} SI-A \\ C \end{pmatrix}$ الف داریم یعنی Z.d.o

$(SI-A)^{-1}$ و $(SI-A)^{-1}$ هر دو رشته از الف دارد $\begin{pmatrix} SI-A \\ C \end{pmatrix}$ حال

کدام آرایه از الف دارد

$(SI-A \mid V=0 \rightsquigarrow SV=AV$

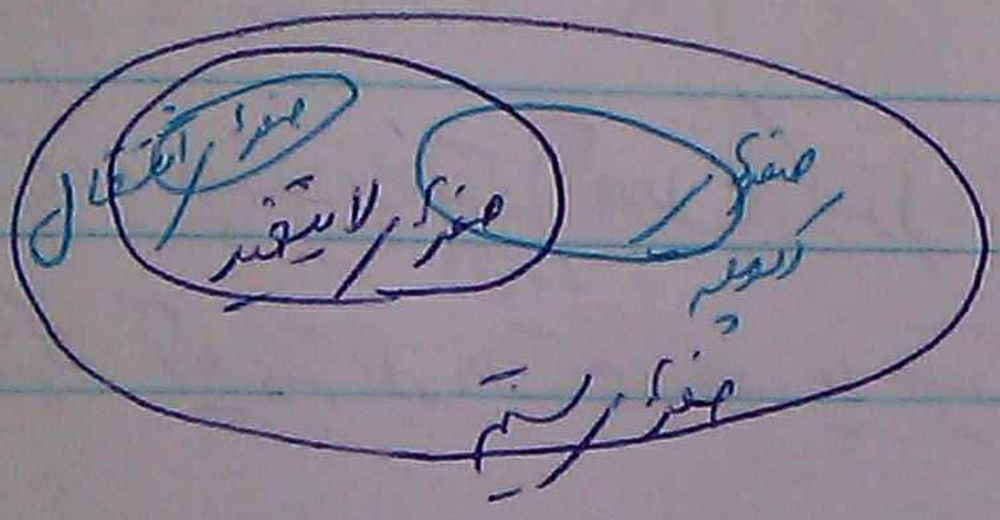
دارای ویژه مقدار یا مقدار ویژه

برای ویژه تعیین یافته:

$S.Z = T.Z + D.Z$

صفرهای لایتغیر:

- عبارتی است که با عمل ماتریس سیستم PIRI داده شده نابود. صفرهای لایتغیر ریشه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آخرین صورت ماتریسی ماتریس PIRI است.



- هیچ‌گاه صفرهای کوپله مقسوم‌علیه مشترک صفرهای لایتغیر هم نمی‌شود و نمی‌شود.
- آخرین صورتی که شد صفرهای انتقال همان صفرهای لایتغیر می‌شود.

مثال:

$$A = \text{diag}(-5, -2, -3)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad 0 \quad 1)$$

$$D = (2, -1)$$

$$\Rightarrow PIRI = \begin{bmatrix} S+5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S+2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & S+3 & -2 \quad +1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \quad -1 \end{bmatrix}$$

ex. $-5 : i.d.z$

$-2 : o.d.z$

- آخرین ماتریس ماتریس سطر دستوری صفرش $i.o.d.z$ بدست می‌آید.

$$i.d.z = \{-5\}$$

$$o.d.z = \{-2\}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \left[\frac{2(s+4)}{s+3} \quad -\frac{s+4}{s+3}\right]$$

$d_0 = 1$

$d_1 = \frac{s+4}{s+3}$

صفرانتقال

$$\longrightarrow M(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+4}{s+3} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} T.Z = \{-4\} \\ T.P = \{-3\} \end{cases}$$

$\varepsilon_1 = \frac{s+4}{s+3}$

$$S.Z = \{-4, -2, -5\} = \{T.Z\} + \{d.Z\}$$

صفرسیستم

$\{-4, -5\}$ = صفرهای لایتغیر $\{-2, -5\}$ = صفرهای کنترل‌پذیر

در کنترل خطی زمانی می‌توان از فیدبک حالت استفاده کرد که قطب‌های کنترل‌ناپذیر پایدار باشند.

قطب -1 را به هیچ عنوان نمی‌توان تغییر داد، یعنی فقط -2 را می‌توان کنترل کرد. شکل زمانی است که قطب‌های کنترل‌ناپذیر حتماً باشند یعنی به جای -1 و $+1$ داشتیم باعث ناپایداری داخلی می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}$$ این سیستم را می‌توان پایدار کرد چون قطب کنترل‌ناپذیر خود دارای قطب -1 است که نیاز قرار دارد و $+1$ را با فیدبک حالت می‌توان $(-)$ جابجا کرد.

تعیین‌پذیری حالت‌های نامتغیر:

فرض کنید سیستم مرتبه n باشد آنگاه حالت‌های نامتغیر را می‌توان با بدست آوردن

رتبه‌ی ماتریس زیر بدست آورد.

$$P(s) = \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

فرض کنید $|P(s)| = 0$ شد حال اگر فیدبک حالت سیستم را طوری بیابیم که چند جمله‌ای زیر

شامل n جمله‌ی ثابت k (فیدبک حالت) باشد حال کنیم سیستم جدید را با این

$u = r - Kx$

با:

$$P_1(s) = \begin{pmatrix} sI - A + BK & -B/K \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

می‌توان نشان داد که با یک خواص معادلات مقدماتی اگر $s = s_i$ یک صفر

نامتغیر از $P(s)$ باشد یعنی $|P(s_i)| = 0$ آنگاه $|P_1(s_i)| = 0$

$$|P(s)| = |P_1(s_i)| = 0 \quad \forall s_i$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر یک فیدبک خروجی سیستم با ماتریس ثابت F داشته باشیم. حالت جدید آمده در این حالت به شکل زیر است.

$$P_2(s) = \begin{pmatrix} sI - \overset{A}{\cancel{B}} + BFC & -B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

$$|P(S)| = |P_2(S_i)| = 0 \qquad \forall S_i$$

از تحقیق در مورد P_2 به دست آمد که صفرهای انتقال P_2 همان صفرهای تابع تبدیل می‌باشند.

Exercise: $\rightarrow I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ کلیه صفرهای سیستم را بدست آورید.

$$P(S) = \left[\begin{array}{ccc|c} I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S^2(S+1) & S(S+1) & -3 \\ 0 & 0 & (S+2) & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

توضیح این مقاله:

روش تبدیر می سه صفرهای لایتغیر

Kar Varr Kabi's ⟶ MacRalene

Geometric approach to analysis and synthesis of system zero

j. control, 1976 Vol. 23

در این روش بعد حل ماتریس صفرهای لایتغیر بدست می آید.

$$\dot{x} = \underset{n\,n}{A}x + \underset{n\,m}{B}u$$

سیستم خروجی

$$y = \underset{m\,n}{C}x$$

برای ماتریس خروجی C ماتریسی مانند M که ستونهایش مستقل خطی اند را می سپرجی کنیم.

annbiladar

ماتریس صفر

$$\underset{m\,n-m}{O}$$

حاصلضرب

$$CM = O_{m,n-m}$$

همچنین برای ماتریس B ورودی ماتریس N را می سپرجی کنیم که ستونهایش مستقل خطی اند.

$$NB = O_{n-m,\,m}$$

سپس ماتریس NM را می سپرجی و تعریف می کنیم:

$$\bar{N} = (NM)^{-1}N$$

(geometric هم هست مفهوم کار می کند)

هندسی

در اینجا $\tilde{n}$ مکعوس از جنس اعداد (اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ جزئی $\tilde{n} = \tilde{n}^{-1}$)
آنگاه مفرکه ی لاندا تخمین مقادیر ویژه ماتریس $\tilde{A}\tilde{M}$ هستند.

مانیور کی یک ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

مانیور کی از حذف سطر و ستون متناظر هر یک از درایه های

روی قطر اصلی بدست می آید که ترتیبان ماتریس باقی مانده مانیور کی هستند +

خود ماتریس A

جلسه هفتم: 91,7,30

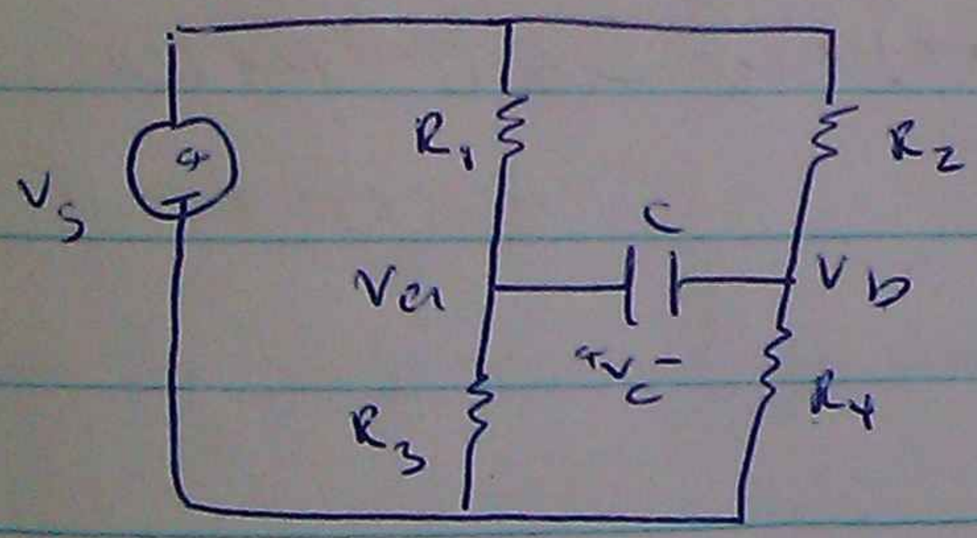
کنترل پذیری و رویت پذیری

این بحث تنها در حفظه حالت صورد بررسی قرار می گیرد.

کنترل پذیری تابعی ⟵ کنترل پذیری خروجی

Functional controllability

تعادل پل دستون



اگر $R_1 R_4 = R_2 R_3 \longrightarrow V_c = 0$

بدین صورت V_c کنترل ناپذیر است.

V_c را نمی توان از شرط $V_c = 0$ مقدار دلخواه برد چون تعادل دستون بهم

برقرار است $V_c = 0$ الان این سیستم کنترل ناپذیر و رویت ناپذیر است،

چنانچه بتوان برداری غیر صفر یافت که خروجی تولید نکند

$y(t_0)$ را بتوان به هر خروجی دیگر $y(t_1)$ در زمان $t_1 > t_0$

رساند این سیستم کنترل پذیر خروجی است.

تعریف: بتوان بردار خروجی را به هر مقدار دلخواه در یک زمان معین انتقال داد.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

کنترل ناپذیر

حالت ۱ و $\frac{1}{2}$ در تابع تبدیل دیده نمی شوند.

حالت ۱ در تابع تبدیل دیده می شود که کنترل پذیر و رویت پذیر می باشد.

e^{-t} و e^{-2t} در این سیستم لاک

لحن مسأله ۱:

آیا می توان حرفی که را به گونه ای تغییر داد که ضرورتی مرحلی از قبل تعیین شده را در بازه زمانی تبدیل کند؟

(یعنی کنترل پذیر تابعی)

از یک منعیدحالت کنترل ناپذیر با شد سیستم را کنترل ناپذیر می کند هرچند مکان لاک پذیر سیستم کنترل پذیری نیز داشته باشد.

یکی از اهداف کنترل tracking بوده و در کنترل پذیری خواهیم دار خروجی را به هر نقطه دلخواه تعیین دهیم بنابراین، این طرح اره مان کنترل پذیری تابع ها باشد.

کنترل پذیری تابعی: (کنترل پذیری F)

کنترل پذیری حالت: سیستم زمانی خطی را کنترل پذیر حالت گوییم اگر برای هر زمان t_0 بتوان بردار ورودی نامحدود $u(t)$ را به گونه ای یافت که هر حالت اولیه $x(t_0)$ را به حالت نهایی $x(t_1)$ در زمان محدود انتقال دهد.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \xrightarrow{n \times m}$$

$$y = Cx + Du \quad \xrightarrow{l \times n}$$

$$\checkmark \quad \Phi_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \longrightarrow \text{رتبه کامل}$$

شرط کنترل پذیری را با تعریف زیر قابل بازنویسی است.

$$B = [b_1 \quad \cdots \quad b_m]$$

$$Q_c = [b_1 \cdots b_m \mid Ab_1 \cdots Ab_m \mid \cdots \mid A^{n-1}b_1 \cdots A^{n-1}b_m]$$

بردارهای ستونی را به ترتیب از راست $A^{n-1}b_m$ تا b_1 بررسی می‌کنیم بردارهای مستقل خطی را جدا کرده تعداد این بردارهای مستقل همان رتبه است.

$$[\text{rank} = \text{رتبه} = n]$$

- همانطور که بیان شد حداکثر بردارهای مستقل n است که با b_1 شروع می‌شود. ممکن است برخی یا کلیه بردارهای $b_n \cdots b_1$ را شامل نشود.

همچنین تعدادی از بردارهای Ab_1 تا $A^{n-1}b_m$ را شامل نشود در مرحله بعد این بردارها را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم.

~~$b_1 \quad Ab_1 \cdots A^{M_1-1}b_1$~~ و $b_i, Ab_i, \cdots, A^{M_i-1}b_i$ و $\cdots$

$$i = 2, \cdots, n$$

این دسته بردارها حتماً مستقل خطی اند و M_i تا M_1 را اندیس کنترل پذیری می‌نامند.

نتیجه: سیستم کنترل پذیر است اگر

$$M_c = \sum_{i=1}^{n} M_i = n$$

اندیس کنترل پذیری $N_c = \max M_i$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{b_1} & \overbrace{1}^{b_2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u$$. Ex

$$\Phi = [B \quad AB]$$

$$= [b_1 \quad b_2 \quad Ab_1 \quad Ab_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow b_1, Ab_1 \text{ مستقل از هم هستند} \Rightarrow$$

$$\text{رتبه} = 2 \quad \mu = 2$$

$b_1 \quad Ab_1$

. Ex

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -21 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & 3 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & -21 & -14 \end{bmatrix}$$

$b_1 \quad b_2 \quad Ab_1 \quad Ab_2 \quad A^2b_1 \quad A^2b_2 \quad A^3b_1 \quad A^3b_2$

/ / / / /

$b_1 \quad Ab_1 \Rightarrow \mu_1 = 2$ مستقل

$b_2 \quad Ab_2 \Rightarrow \mu_2 = 2$

$\mu_c = \sum n_i = \mu_1 + \mu_2 = 2 + 2 = 4 = n$ مستقل

روش دوم: حاصل کنترل پذیری خروجی:

حاصل ـــــ بشرط $\alpha = n$

$$\Phi_C = \begin{bmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{\alpha-1}B \end{bmatrix}$$

در این حالت نیازی نیست که تمام عناصر Φ_C را بسط بدهیم بلکه آنقدر جلو می‌رویم تا n ستون مستقل بیابیم. (شرط توقف)
به این حاصل کنترل پذیری خروجی می‌گوییم.

Ex.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = (b_1 \; b_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_C = \begin{bmatrix} \overbrace{B}^{B} & \overbrace{AB}^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{رتبه} = 2$$

$\quad b_1 \quad b_2 \quad Ab_1 \quad Ab_2$

$b_1 \; Ab_1 \longrightarrow M_1 = 1 \qquad b_2 \; Ab_2 \longrightarrow M_2 = 1$

$M = \sum M_i = 2$

کل این سیستم کنترل پذیر است اما برای تک تک ورودی‌ها کنترل پذیر نیست.

کنترل پذیری: سیستم کنترل پذیر است اگر هر بردار خطا x تابع خروجی که بران $t > t_0$ تعریف شود، بردار u وجود دارد، طوری که برای $t > t_0$ از شرایط اولیه $x(t_0) = 0$ به آن برسد.
شرایط اولیه را صفر گرفتیم چون هر چیزی را می‌توان شیفت داد و صدا زد

منظور از تابع تبدیل خروجی چیست؟

یعنی اینکه دارای تبدیل لاپلاس باشد و برای بدست آوردن آن نیاز به Impulse نداشته باشیم یعنی کنترل پذیر باشد.

- چنانچه به صورت $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ و $Y(s) = G(s)U(s)$

باشد روشی برای کنترل پذیری P وجود دارد.

آرایه‌ی ردیف ها $= m$ (تعداد ورودی) $= h$ (تعداد خروجی) (بیرون مربعی)

کنترل پذیری P است اگر و تنها اگر تابع تبدیل $G(s)$ ناصفر باشد.

$|G(s)| \neq 0$ ✓ nonsingular

$L \times m$

اگر $m > h$ ⇐ سیستم قطعا کنترل پذیر P نیست.

اگر $m < h$ ⇐ سیستم کنترل پذیر P است اگر و فقط اگر ماتریس حاصل از m ستون و h سطر غیر صفر مربوط به $G(s)$ موجود باشد که دترمینان آن صفر نباشد.

یعنی اگر بیرون مربعی را چک کردیم

Ex.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \qquad |G(s)| = \frac{(1-s)}{(s+1)^2(s+3)}$$

کنترل پذیری حالت نگاه دارونی؟ سیستم ابرت و کنترل پذیری خروجی نگاه بیرونی؛ آن

کنترل پذیری حالت نرمها کنترل پذیری خروجی را نتیجه نمی دهد و بالعکس کنترل

پذیری خروجی نرمها کنترل پذیری حالت را نتیجه نمی دهد.

Ex: مثال: آیا سیستم کنترل پذیر حالت با F و ... هست؟ چرا؟

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

رویت پذیری:

سیستم Σ $\begin{cases} \dot{x} = Ax+Bu \\ y = Cx+Du \end{cases}$ را رویت پذیر گوییم اگر برای هر t_0 و هر شرایط اولیه $x_0=x(t_0)$ یک زمان محدود $t_1>t_0$ موجود باشد به طوری که با داشتن $u(t)$ و $y(t)$ در زمان $t_0 \le t \le t_1$ بتوان x_0 را بدست آورد.

شرط : رتبه ماتریس رویت پذیری کامل باشد.

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

قضیه دوگانی :

سیستم S_1 کاملاً کنترل پذیر است اگر و تنها اگر سیستم دوگان آن

$\dot{x} = A^T x + C^T u$ کاملاً رویت پذیر باشد. ✓

$y = B^T x$

نکته :

1. برای یک سیستم $\{A, B, C\}$ صفرهای زیر مجموعه صفرهای کنترل ناپذیری و رویت ناپذیری هستند که در ماتریس تابع تبدیل ظاهر نمی‌شوند.

(کنترل ناپذیری یا رویت ناپذیری یا هر دو می‌باشد)

2. اگر بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه‌های حالت A یک سیستم مستقل خطی باشند هر تقابلیم با تعریف $T = [v_1 \dots v_n]$

تحت تبدیل $q = Tz$ معادلات حالت

$$\dot{z} = \Lambda z + B' u$$

$$y = C' z + D' u$$

diagonal ← این

$\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_i \\ & i : 1 \dots n & \end{pmatrix}$ بردارهای ویژه

مقادیر ویژه تعریف می‌گردد.

سیستم فوق کنترل پذیر است اگر و فقط اگر هیچ ردیف C صفر نباشد و رویت پذیر است اگر و فقط اگر هیچ ستون C صفر نباشد.

o.d.z

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \qquad .Ed$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z$$

صور کنترل ناپذیر 3-

صور رویت ناپذیر 2-

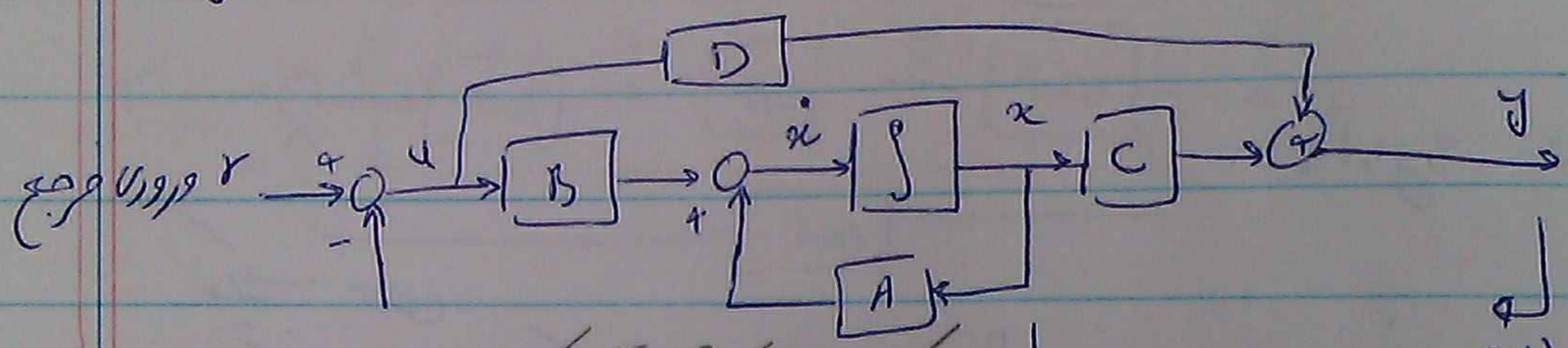
جلسه هشتم ۹۱/۶/۸

رابطه بین حلقه باز و حلقه بسته:

سیستم مفروض

$$\dot{x} = Ax + BU$$

$$y = Cx + DU$$



فیدبک حالت که شرط آن کنترل پذیری و رویت پذیری متغیرهای حالت است.

فیدبک حالت:

قانون فیدبک

را در نظر بگیرید:

$$U = r - F_x x$$ فیدبک حالت

$$\dot{x} = (A - BF_x)x + Br$$

$$y = (C - DF_x)x + Dr$$

فرض کنید $D = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BF_x)x + Br \\ y = Cx \end{cases}$$

از فیدبک حالت اگر هم متغیرهای حالت کنترل پذیر باشند ممکن است پایدار نشود.

ارهروحا چه $D=0$ باشد چه نباشد

داریم

$$A_{new} = A - BF_x$$

یعنی قطب های حلقه بسته را D تعیین نمی کند.

D واسطه نیست.

بنابراین قطب‌های سیستم حلقه بسته عبارتند از:

$$\Delta(s) = \det(sI - A + BF_x) = 0$$

⇐ با فیدبک حالت می‌توان قطب‌های سیستم حلقه بسته را جابجا کرد.

Rise system

فیدبک خروجی:

فرض کنید قانون فیدبک به صورت زیر باشد:

$$u = r - F_y \cdot y$$

بنابراین معادلات حالت عبارتند از:

$$\dot{x} = (A - BF_y(I_\ell + DF_y)^{-1}C)x - BF_y(I_\ell + DF_y)^{-1}Dr + B_r$$

$$y = (I_\ell + DF_y)^{-1}Cx + (I_\ell + DF_y)^{-1}Dr$$

فرض $D = 0$ داریم:

$$\dot{x} = (A - BF_yC)x + B_r$$

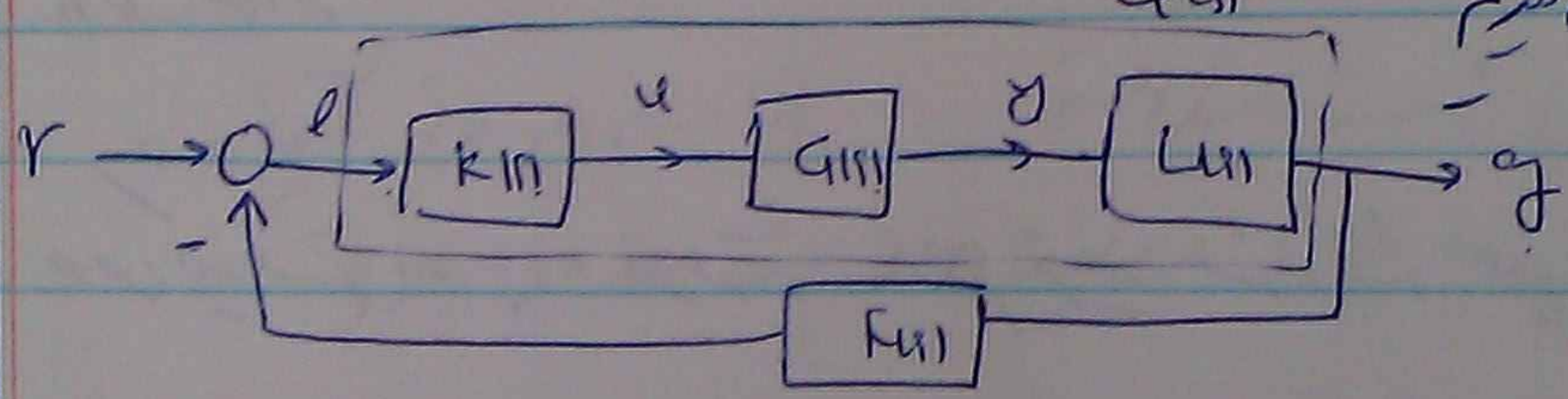
$$y = Cx$$

⇐ از هم می‌توان قطب‌های سیستم را با فیدبک جابجا کنیم به شرطی که تمام خودی‌های زوج کنترل‌پذیر باشند.

پس مقدار کی سیستم حلقه بسته:

$$\Delta(s) = \det(sI - A + BFgC)$$

فرض کنید سیستم حلقه باز با جابه‌ترین تابع تبدیل $G(s)$ تعریف شده باشد و سیستم زیر را در نظر می‌گیریم



$K(s)$ ماتریس جبران‌ساز پیش‌رو

$L(s)$ ماتریس جبران‌ساز خروجی

$F(s)$ ماتریس جبران‌ساز فیدبک

ماتریس تابع تبدیل سیستم حلقه‌بسته $H(s)$ برابر است با:

$$H(s) = \left(I + L(s)G(s)K(s)F(s)\right)^{-1} L(s)G(s)K(s)$$

$$H(s) = \left(I + Q(s)F(s)\right)^{-1} Q(s)$$

$$Q(s) = K(s)G(s)L(s)$$

ماتریس تابع تبدیل مسیر پیش‌رو Feed forward path transfer function matrix.

برای حالت منفرد سیستم حلقه بسته با برابر آوردن صفر کردن تفاوت برگشت
return defference matrix.

$$|I + G(s)H(s)| = 0$$

برابر می‌آید

فرض کنید سیستم حلقه باز به صورت $P(s)$ تعریف شده باشد یعنی $u = r - F_y y$
(فیدبک خروجی)

معادلات ۲ صورت زیر خواهد بود:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} SI-A & -B & 0 & 0 \\ C & D & I & 0 \\ 0 & I & -F & I \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ u \\ -y \\ -r \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -y \end{array}\right]$$

حالا می‌توان به راحتی سیستم حلقه بسته منتج از $P(s)$ یعنی $P_H(s)$ را یافت

$$T_H(s) = \begin{bmatrix} SI-A & -B & 0 \\ C & D & I \\ 0 & I & -F \end{bmatrix}$$

شرط پایداری سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$|T_H(s)| = 0$$

درجه سیستم حلقه بسته برابر درجه T است.

✓ $\delta(T_H(s)) = \det(sI - A + BF_yC)$
تابع درجه

نکات مهم:

• F حقیقی و ثابت باشد و سیستم $\{A, B, C, D\}$ اکیداً سره باشد ($D=0$) سیستم حلقه بسته و حلقه باز برابرالات.

•• اگر سیستم به صورت $\{T, U, V, W\}$ باشد ضابطه $W=0$ باشد نشان دهنده $D=0$ نیست. (اکیداً سره بودن نیست.)

رابطه بین $I-V$ توصیف عین هم باشند دو مدار معادل هم هستند.

$V = \alpha i + \beta$

$\alpha_1 i + \alpha_2 V + \alpha_2 V + \dots$

در تحلیل دو سیستم معادل تقریباً 90٪ مشخصه اعم از تحلیل پذیری و ... یکسان باشد.

سیستم معادل:

با داشتن یک سیستم در فضای حالت بعضی از ویژگی‌ها برای تحلیل و طراحی یک سیستم لازم است که آنرا به صورت دیگری نمایش دهیم

نامفرد
$x = Hx_1$

$\dot{x} = Ax + Bu \longrightarrow \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u$

$y = Cx \qquad y = C_1x_1$

$$A_1 = \bar{H}AH \;,\; B_1 = \bar{H}B \;,\; C_1 = CH$$

این نوع تبدیل را تبدیل همتشابهی گویند.

Similarity transformation

ثابت می‌کنیم H یک تابع تبدیل است.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{H}^{-1} & 0 \\ 0 & I_L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI-A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}}_{P(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} sI-A_1 & -B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}}_{P_1(s)}$$

سؤال آیا حداقل رتبه (عینیال) حفظ یا نه؟

کافی است

اگر $P(s)$ و $P_1(s)$ دارای یک رتبه باشند (یعنی تبدیل همتشابهی وجود دارد) که تحقق آنها مینیمال باشد. (یعنی P_1 و P دو تحقق با حداقل رتبه باشند و تو ضمن کشته شدن، بعد تبدیل) پس این شرط همتشابهی وجود دارد (: شرط تحقق مینیمال)

حال آیا مینیمال بودن حفظ می‌شود؟ چرا می‌شود.

در حالت کلی تر چنانچه A و B و C داشته باشیم؛ چگونه چنین چیزی برسیم. می‌توان به وسیله یک تبدیل به یک سیستم معادل تبدیل کرد.

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s)_{L\times n} & I_L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T(s) & -U(s) \\ V(s) & W(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N(s) & Y(s)_{n\times m} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_1(s) & -U_1(s) \\ V_1(s) & W_1(s) \end{bmatrix}$$

P

$M(s)$ و $M_1(s)$ هستند $\Rightarrow$ $n\times n$

1) P, P_1 حداقل مرتبه (مینیمال) هستند.

2) $r \geq r_1$

$r_1 \geq r$

توضیح

n, n_1 درجات P و P_1

r مرتبه T (بزرگترین T)

3) M و N و X و Y ماتریس‌هایی هستند که هیچ‌جمله‌ای ندارند.

strictly similar (S.S.E) equivalent تبدیل چه نوع تبدیلی است؟

بعد از ماتریس T درجه سیستم n تغییر نخواهد کرد.

$P_1(s) \Leftarrow$ تبدیل حالت‌دار سیستم هستند اگر تحقق مینیمال داشته باشند.

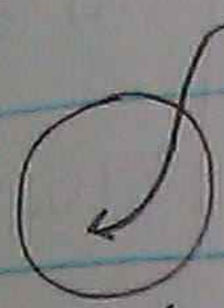
$P(s)$ و $P_1(s)$ هرگاه آن است که کلیه تبدیل‌ها بردار حالات سیستم را می‌توان به صورت عملیاتی بر روی $P(s)$ بیان کرد.

در حوزه لاپلاس: مقدار تابع تبدیل مثلاً چیزی باشد سیستم پایدار (یا ناپایدار) می‌باشد. همین اتفاق بیفتد (در حوزه لاپلاس): مقدار تابع تبدیل مثلاً چیزی باشد سیستم پایدار (یا ناپایدار) می‌شود و سیستم در حالت نوسانی می‌باشد.

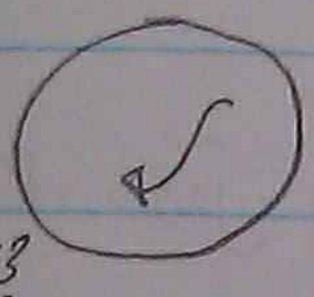
برخی روی محور موهومی باشد پایدار حاشیه‌ای می‌شود و سیستم در حالت نوسانی می‌باشد.

پایدار مجانبی: از هر جای از فضا (شرایط اولیه) با شروع به حرکت صدا حرکت می‌کند.

نقطه تعادل نمونه



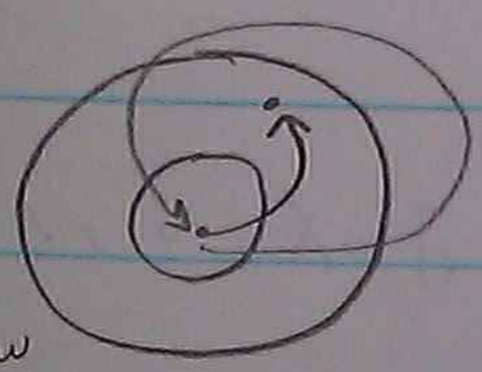
پایدار مجانبی: آر را دریک محدوده تغییر دهیم، صدا حرکت می‌کند.



مجانبی

پایداری سیاپانوف: آر را در محدوده‌ای تغییر دهیم صدا در حالت دینامیک محدوده باقی می‌ماند.

این یعنی ما صدا صادر می‌کنیم از محدوده‌ای به محدوده پایداری آید.

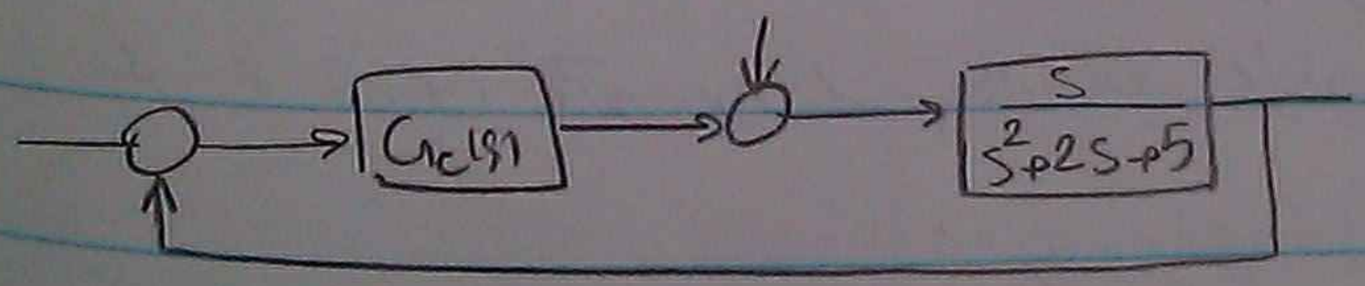


سیاپانوفی

پدیده اثر سیستم پایدار داخلی: با شروع حرکت صفر و حذف ورودی از حرکت باز می‌ایستد.

اما در سیستم ناپایدار با حذف ورودی از حرکت باز نمی‌ایستد.

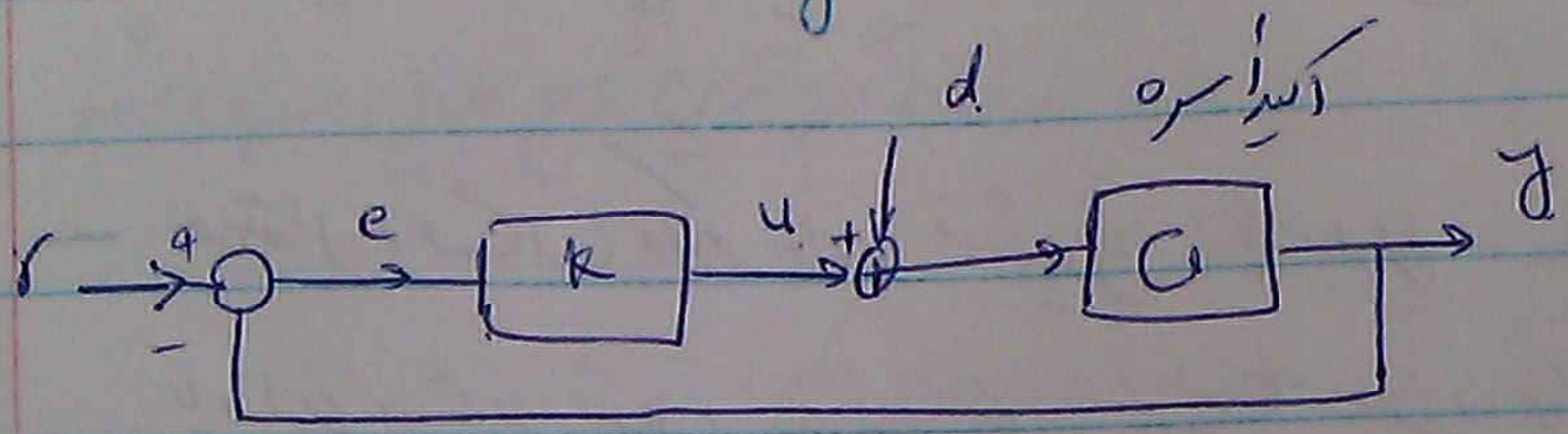
تمرین: برای این سیستم چه کنترل کننده‌ای می‌توان طراحی کرد که ورودی پله را دنبال کند؟



باید $G_c(s) = \frac{1}{s^2}$ باشد اما چون سیستم ناپایدار است با حذف ورودی نمی‌توان نتیجه گرفت، هیچ جبرانسازی نمی‌تواند این سیستم را کنترل کند.

پایداری داخلی

Internal Stability



این سیستم MIMO با دو ورودی و یک خروجی است.

سیستم مرکب فوق از نظر ورودی و خروجی پایدار است اگر سیستمی که از هر ورودی مستقل با فرض صفر بودن سایر ورودی‌ها) به هر خروجی قابل تعریف سیستم حلقه بسته از نظر ورودی - خروجی پایدار باشد.

اگر از نظر ورودی خروجی پایدار است اگر و تنها اگر قطب‌های G_{ry} یا G_{dy} قسمت حقیقی منفی داشته باشند.

$$Re(s_i) < 0$$

$$G_{ry} = \frac{KG}{1+KG} \qquad G_{dy} = \frac{G}{1+KG}$$

نایپایدار می‌شود با مثال زیر

$$G_{ru} = \frac{K}{1+KG} \qquad G_{re} = \frac{1}{1+KG}$$

مثال:

$$K = \frac{s-1}{s+1} \quad ; \quad G = \frac{1}{s-1}$$

چیزایی که ما طراحی کردیم.

G و G واقعی است می‌باشد ← طراحی شده است

چون مدنیت ما واقعی نیست حرف مفروضات رخ نداده است که سیستم پایدار شود.

— حرفتان نشان داد که برای تشخیص پایداری سیستم حرکت فوق کافیست که پایداری دو تابع تبدیل G_{dy} و G_{ru} مورد بررسی قرار گیرد.

— اگر کنترل کننده $K(s)$ از نظر ورودی خروجی پایدار باشد آنگاه پایداری تابع تبدیل G_{dy} معادل با پایداری داخلی است. ← صحیح؟

قضیه: اگر $K(s)$ پایدارکننده باشد سیستم فیدبک صفحه بند پایدار داخلی است اگر و فقط اگر H_{21} پایدارکننده باشد.

$$H_{21}(s) = [I - G(s)K(s)]^{-1} G(s)$$

اثبات:

$$I + K(s)H_{21}(s) = I + K(s)[I - G(s)K(s)]^{-1} G(s)$$

$$= I + K(s)G(s)[I - K(s)G(s)]^{-1}$$

$$= [I - K(s)G(s)]^{-1}$$

$$= H_{11}(s)$$

بنابراین اگر $K(s)$ و $H_{21}(s)$ پایدارکننده باشند $H_{11}(s)$ نیز پایدارکننده است.

آنگاه $H_{11}(s)$ نیز پایداری نیز خواهد بود همچنین داریم $H_{11}(s)K(s) = H_{12}(s)$ نیز پایدارکننده است.

$$\Rightarrow \text{سرانجام} \quad I + H_{21}(s)K(s) = I + [I - G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s)$$

$$= [I - G(s)K(s)]^{-1}$$

$$= H_{22}(s)$$

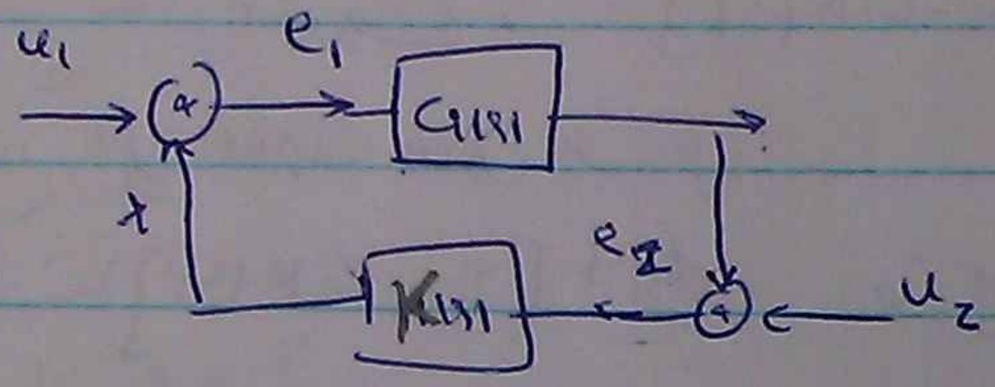
که نشان می‌دهد $H_{22}(s)$ نیز پایدارکننده است بنابراین دو سیستم فیدبک پایدارکننده است از اولین سیستم فیدبک پایدار نتیجه می‌شود $H_{21}(s)$ نیز حق پایدارکننده است.

جلسه نهم 91,8,7

تعریف:

ماتریس تابع تبدیل سیستم چند ورودی چند خروجی آن است که عناصر آن توابع تبدیل سره باشند و هیچ قطبی مرکب ناپایداری نداشته باشد.

سیستم فیدبک زیر را در نظر بگیرید.



$$\begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس پایداری این سیستم

طبق تعریف سیستم مذکور پایداری است اگر و فقط اگر H پایداری باشد.

قضیه:

اگر $G(s)K(s)$ پایداری باشد فیدبک سیستم نوق پایدار نهایی است اگر H_{21} پایداری باشد

$$H_{21} = \left[I - GK(s) \right]^{-1} G(s)$$

تمرین: علت اینکه چرا اگر H_{21} پایدار نهایی باشد بقیه درایه های ماتریس H نیز پایدار نهایی می شود اثبات کنید.

راهنمایی: ارتباط بین درایه ها را بیابید.

برای اینکه H_{21} پایدار باشد:

باید $G_1(s)$ و $[I-G_1K_1H_1]$ هیچ قطب ناپایداری نداشته باشند

مقدمه:

با فرض اینکه $K_1(s)$ پایدار باشد $H_{21}(s)$ پایدار است اگر و فقط اگر:

1. $G_1(s)$ هیچ قطب ناپایداری نداشته باشد
2. به طوری که $[I-G_1K_1(s)]^{-1}$ هیچ قطب ناپایداری نداشته باشد

این عبارت معادل است با:

1. $\det[I-G_1K_1(s)]$ صفر ناپایدار نداشته باشد.

2. $\det[I-G_1K_1(s)]^{-1}G_1(s)$ صفر ناپایدار نداشته باشد

Ex.

$$K_1(s)=\frac{s-1}{s+2} \qquad G_1(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$\det[I-G_1K_1(s)]=\frac{s+1}{s+2}$$

$$[I-G_1K_1(s)]^{-1}G_1(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)} \longrightarrow s=1 \quad Re>0 \Rightarrow$$

سیستم ناپایدار است.

آر خیر یک صفت باشد به جای منفی + می‌نویسیم ، مثلاً

$[I-GK] \longrightarrow [I+GK]$ $\quad$ $\det[I+GK(s)]$

جداول راوس با حلقه‌های کاهی تقویت پایداری مطلق را نشان می‌دهد اما ناکیوشت و بودو به نتایج تبدیل حلقه باز کاهی تقویت پایداری نسبی را نشان می‌دهد.

ناکیوشت :

الف. اصل آرگومان :

$\checkmark \quad N(A, F(s), c) = Z - P$ $\quad$ تعداد قطب‌های نایپایدار حلقه باز

تعداد دوران تفاضل فاصله‌ی F حول نقطه A

$\checkmark \quad N(A, F_1(s)F_2(s), c) = N(A, F_1(s), c) + N(A, F_2(s), c)$

شرط کافی اصل آرگومان : ـ مسیر c بسته باشد

ـ نباید هیچ قطبی از $F(s)$ روی محیط مسیر c باشد

معیار ناکیوشت :

پایداری سیستم حلقه بسته از روی سیستم حلقه باز

تعداد دوران حول $(-1, 0)$ محیط تفاضل $G(s)H(s)$

پایداری با تفاضل یکی نایپایدار $1+GH$

GH قطب‌های نایپایدار GH

تحلیل تکنیک برای سیستم‌های چندمتغیره :

فرض می‌شود تحقق مینیمال : $\Sigma(A, B, C)$ (مربوط به سیستم حلقه باز)

$$\text{حلقه باز} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \begin{matrix} n \times n \\ n \times m \end{matrix}$$

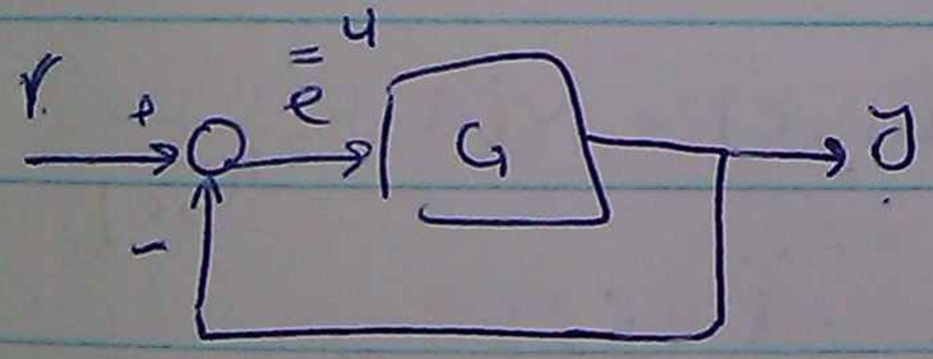
$$\Longleftrightarrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

عناصر تابع تبدیل فقط ضرورتاً کنترل‌پذیر و رویت‌پذیری را نشان می‌دهد.

$l = m$

(فرض جهت سادگی سیستم مربعی)

آیا هر سازه‌ای را برای سیستم حلقه‌بسته می‌توان پیدا کرد؟



✗ نه : برای اینکه اول تحقق باید مینیمال باشد.

معادله سیستم حلقه‌بسته

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BC)x + Br \\ u \triangleq r - y \\ y = Cx \end{cases}$$

این تحقق هم کنترل‌پذیر و هم رویت‌پذیر است پس مینیمال است.

معادله مشخصه سیستم حلقه باز به صورت

$$\det(sI - A) = 0$$

$$\Phi_{OL} = \det(sI - A) = 0$$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته

$$\det(sI - A + BC) = 0$$

$$\Phi_{CL} = \det(sI - A + BC) = 0$$

برای یافتن رابطه بین Φ_{OL} و Φ_{CL} داریم:

$$\Phi_{CL} = \det(sI - A + BC)$$

$$= \det\left((sI - A)\left(I + (sI - A)^{-1} BC\right)\right)$$

$$= \det(sI - A)\det\left(I + (sI - A)^{-1} BC\right)$$

($(sI - A)^{-1}$: M ، BC : N)

$$\det(I + MN) = \det(I + NM)$$ قضیه:

...

$$\Phi_{CL} = \Phi_{OL} \det\left(I + C(sI - A)^{-1} B\right)$$

$$\boxed{\Phi_{CL} = \Phi_{OL} \det(I + G_{(s)})}$$

Ex. SI SO $G_1 = \frac{N}{D}$

$P_{G_1} = d$ $P_{G_1} = n \cdot d$

تعداد مشتری

تعداد حلقه از هفت‌های گرفته تا تبدیل حلقه‌ستره برابر است.

$1 + G_1 H^-$

تابع تبدیل

$P_{C1} = 1 + G_1 = 1 + \frac{N}{D} = \frac{N+D}{D}$ $P_{C1} = D\left(\frac{N+D}{D}\right) = N+D$

- تعیین حساسیت سیستم MIMO

طبق اصل آرنولد

$N(0, P_{C1}, D_R) = Z_{P_{C1}} - P_{P_{C1}}$

D_R را همان منفی مثل نگهداشت می‌نویسیم.

حال چون P_{C1} هیچ صفری جلب ای ات دین

$P_{P_{C1}} = 0$

بدان پیداره $Z_{P_{C1}}$ (تعداد صفرکی P_{C1} نقش D_R) به عقب شده

$N(0, P_{C1}, D_R) = 0$

$$\Phi_{CL} = \Phi_{OL} \det(I + G(s)H(s))$$ از سوی

$$N(0, \Phi_{CL}, D_R) = N(0, \Phi_{OL}, D_R) + N(0, \det(I + G(s)H(s)), D_R)$$

(به شرطی که $\det(I + G(s)H(s))$ صفر روی D_R نداشته باشد.)

بنابراین حلقه بسته پایدار

$$0 = N(0, \Phi_{OL}, D_R) + N(0, \det(I + G(s)H(s)), D_R)$$

از سوی چون

$$\Phi_{OL} = \det(sI - A)$$

بنابراین

$$N(0, \Phi_{OL}, D_R) = Z_{\Phi_{OL}} - P_{\Phi_{OL}} \uparrow 0$$

چون حلقه باز است.

بنابراین

فرض کنید $P_{H,OL}$ تعداد قطب‌هایی از سیستم حلقه باز است که در D_R قرار دارند.

تبدیل زیر برقرار است

$$N(0, \Phi_{OL}, D_R) = Z_{\Phi_{CL}} = P_{H,OL}$$

بنابراین سیستم حلقه بسته پایدار است اگر و فقط اگر

$$N(0, \det(I + G(s)K(s)), D_R) = -P_{ugol}$$ ✓

$$\xrightarrow{SISO} \det(I + G(s)K(s)) = \det(1 + G(s)K(s))$$

$$N(0, \det(1 + G(s)K(s)), D_R) = N(-1, G(s)K(s), D_R)$$

توجه کنید:

1. در حالت کلی امکان رسم مکان ریشه‌های تابع تبدیل وجود ندارد. (معمولاً)

زیرا: دترمینان $I + G(s)K(s)$ تجزیه (معمولاً) نمی‌شود.

اگر $G(s)K(s)$ به صورت قطری باشد امکان رسم مکان ریشه‌ها فرصل تصمیم‌گیری وجود دارد.

$$G(s)K(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & & \\ & \ddots & \\ & & g_{nn}(s) \end{bmatrix}$$

$$\det(I + G(s)K(s)) = \prod_{i=1}^{n} (1 + g_i(s))$$

$$\sum_{i=1}^{n} N(0, 1 + g_i(s), D_R) = -P_{ugol}$$

غالب قطری DD

Diagonal Dominance

فرض کنید ماتریس ضرایب مختلط X موجود باشد که هر سطر آن (یعنی sp_i) شکل زیر تامین شود.

$$[x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ii}, \dots, x_{im}]$$

ماتریس X را ماتریس قطر غالب یا R_{DD} گوییم اگر و فقط اگر

Row

$$|x_{ii}| > P_i \quad \forall i \longrightarrow R_{DD} \text{ است}$$

P_i: جمع عناصر هر ردیف بجز عنصر قطر اصلی

$$P_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |x_{ij}|$$

جمع ۴ عنصر غیر از قطر اصلی کوچکتر شود.

Ex.

$5-4$	$\frac{5+3}{5+1}$
$\frac{5+1}{5+2}$	$2(5+1)$

$4 > 3$

$1 > 1/2$ $\longrightarrow R_{DD}$ است

$4 > 1/2$

$1 > 3$ ↘ $7 \not> 3$

$\Downarrow$

C_{DD} نیست.

$$\tau_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |x_{ji}|$$

جمع عناصر هر ستون بجز عنصر قطر اصلی

$$|x_{ii}| > \tau_i \longrightarrow C_{DD}$$

$\downarrow$

C kemn

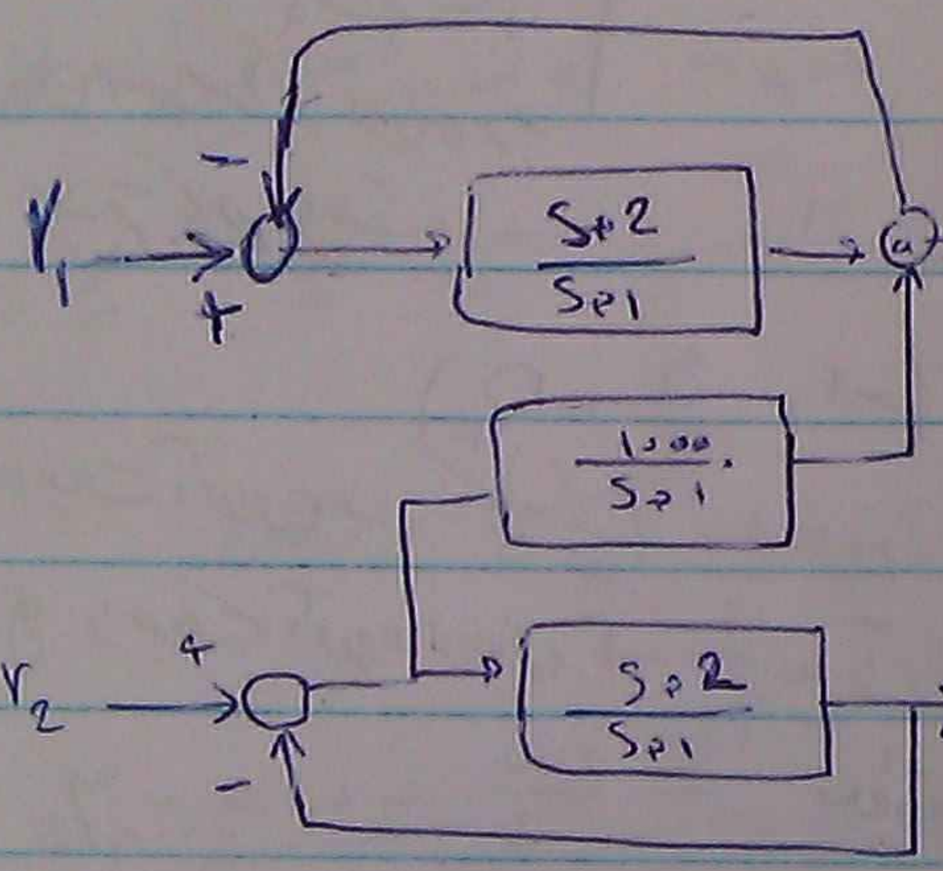
تعریف: حالتی ^1D است اگر $R_{DD} = C_{DD}$ باشد.

تعریف: حالتی ^1P است اگر R_{DD} ، $C(S_0)$ ، R_{DD} باشد برای هر S_0 روی کانتور مفروض

تعریف: حالتی ^1P ، C_{DD} است اگر حالتی $C(S_0)$ ، C_{DD} باشد برای هر S_0 روی کانتور مفروض

جلسه دهم 91,8,14

فرض کنید سیستمی با شکل بلوکی مقابل را:



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن حلقه‌های بسته مسیری
بسته وارد تقویت شده.

$$N(0, \det(I + G(s)\,D_R)) = -P_{u_{OL}}$$

ابتدا باید $G(s)$ را بدست آوریم:

$$\Longrightarrow G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{1000}{s+1} \\ 0 & \frac{s+2}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi_{OL} = (s+1)^2 \longrightarrow P_{u_{OL}} = 0$$

از نرم اسمیت مخرج (معادله مشخصه) را بدست می‌آوریم.

شرط پایداری سیستم حلقه بسته این است که تعداد صفرهای سمت راست صفر باشد:

تعداد صفرهای سمت راست $= ?$

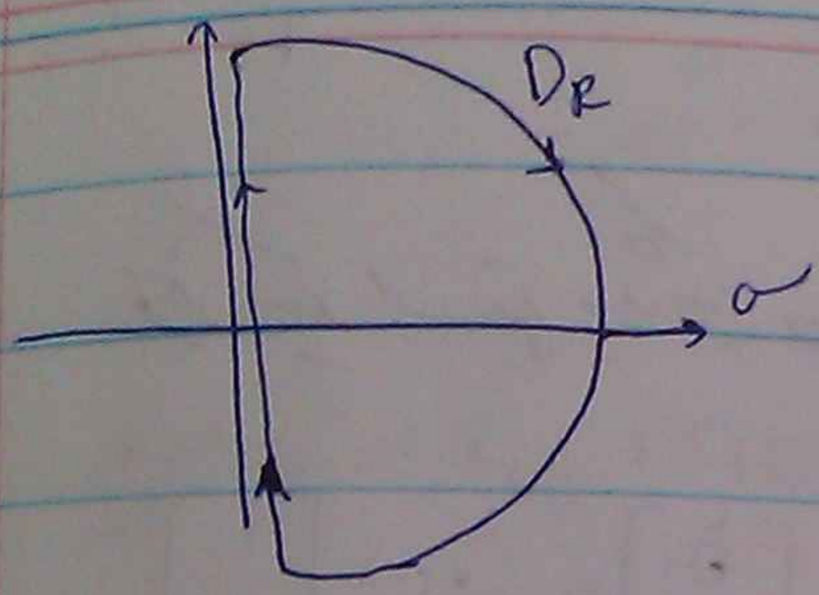
$$|I + G(s)| = \begin{bmatrix} \frac{2s+3}{s+1} & \frac{1000}{s+1} \\ 0 & \frac{2s+3}{s+1} \end{bmatrix}$$

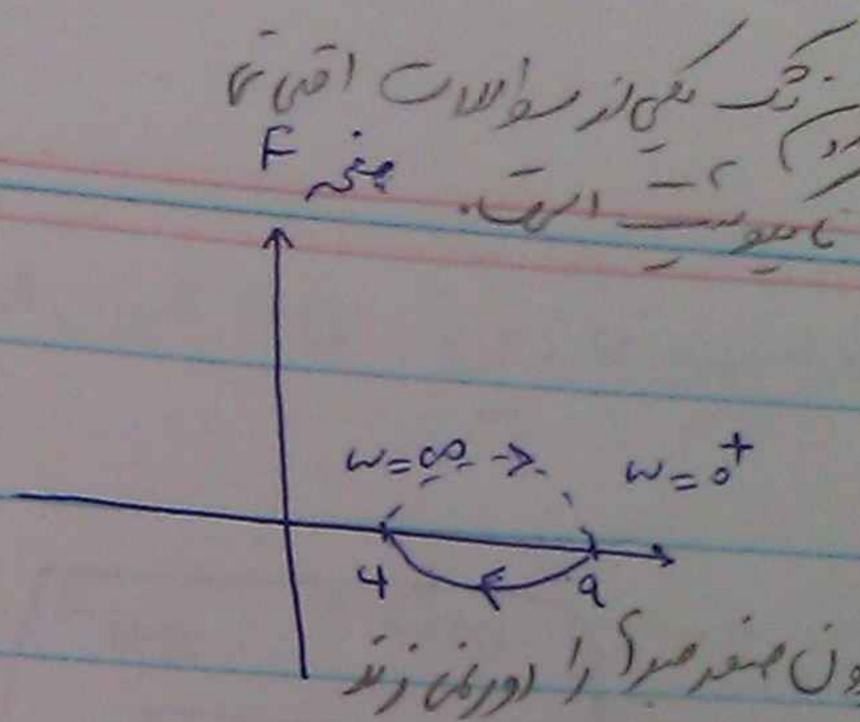
$$= \frac{(2s+3)^2}{(s+1)^2}$$

$$N(0) = \frac{(2s+3)^2}{(s+1)^2}, D_R(s) \stackrel{?}{=} 0$$

صفحه S

$$F = \left(\frac{2S+3}{S+1}\right)^2$$





چون صفر صورت را در بازه می زند

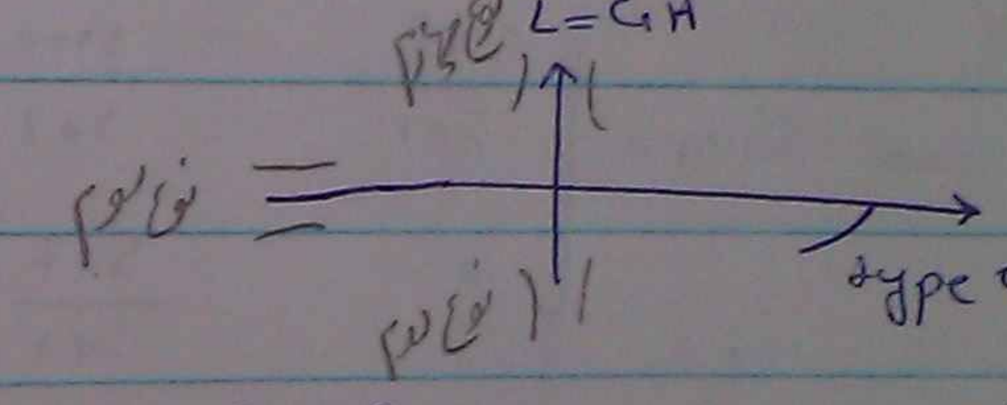
سیستم پایدار است.

$$\frac{gh}{1+gh} = \frac{1}{\frac{g^{-1}}{h}+1} \longrightarrow$$ علت اینکه g^{-1} را لازم دیدیم

$(-1, \frac{g^{-1}}{h}, D_R)$

بنابراین برای آوردن حاشیه ناپایداری باید g^{-1} را برحسب ω به دست آوریم و سپس آن را برابر ۱- قرار دهیم.

$$\phi : \frac{j2\omega+3}{j\omega+1} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{2\omega}{3} - \tan^{-1}\omega \simeq \frac{2\omega}{3} - \omega = -\omega/3 \quad \omega \to 0^+$$



$\frac{I+G}{K}$

$K+G$

اگر $GH(s)$ ما ناحاصل باشد تحلیل متفاوت خواهد شد.

دوست داریم DDR، شبه فاکتورسین کوچک باشد.

لذا در عمل اتفاق نمی افتد سعی می کنیم ϕ_{PD} و ϕ_{DD} کمترین مقدار باشد.

توجه داریم سیستم زمانی در صورت غیاب مقدار DD باشد تا تزویج بین خروجی و ورودی بود.

قضیه گرشگورین:

فرض کنید x یک ماتریس مختلط با اندازه $n \times n$ باشد مقادیر ویژه هر دایره با مرکز x_{ii} و شعاع $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |x_{ij}|$ قرار می‌گیرد همچنین این مقادیر ویژه در اتحاد دایره‌ها با مرکز x_{ii} و شعاع $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |x_{ji}|$ قرار دارد.

فرض کنید A یک ماتریس نامنفی $(n \times n)$ مرتبه باشد. سپس مکان هندسی $(n \times n)$ g_{ii} دارد که شعاع r_i رسم کنید. و دایره i مرکز آن هر نقطه از این مکان هندسی و شعاع $\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |g_{ij}(z)|$ رسم کرده و این کار را برای هر عنصر تا $G(z)$ تکرار کرده و نواحی که بدست می‌آید را نوار گرشگورین می‌گوییم و به این دوایر دوایر گرشگورین گوییم.

G^{-1}

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} S+4 & \frac{S+3}{S+1} \\ \frac{S+1}{S+2} & 2S+1 \end{pmatrix}$$

R_{DD} هست

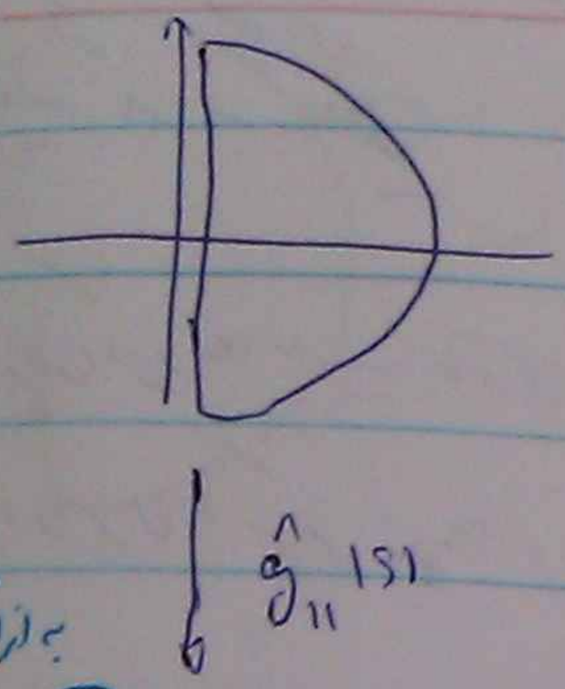
C_{DD} نیست

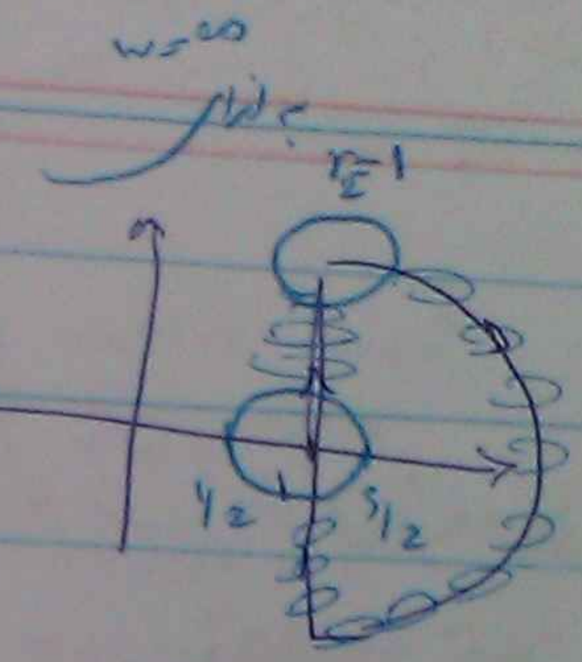
$$\hat{g}_{11} = S+4 \qquad \hat{g}_{12} = \frac{S+3}{S+1}$$

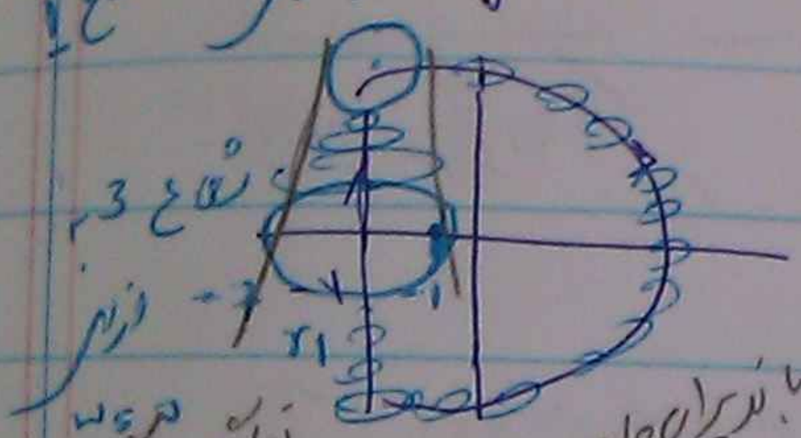
r_1

$$\hat{g}_{21} = \frac{S+1}{S+2} \qquad \hat{g}_{22} = 2S+1$$

r_2







با تعدد شعورین باندی است که تعیین می‌شود

مقادیر ویژه کجا می‌افتد

نکات:

1. آنتن‌وار تر شعورین نقطه ۱ - را حل نشود آنتن می‌تواند درصورت باندازی و سیم حلقه بسته با درنظر گرفتن تعداد دورها حول نقطه ۱ - به وسیله نوار تر شعورین تعیین کرد. آنتن حل نشود انرا نمی‌توان کرد

2. هرچه درجه حفره‌ای بودن بیشتر باشد نوار تر شعورین باریکتر است؛ عبارت دیگر سیم یک سیم nonintradcdive تندیک تر است (تندیع بین خودی کمتر است)

3. آنتن‌وار تر شعورین شامل جدا نشده آنتن $\hat{G}(S1)$ ، DD خواهد بود بنابراین می‌توان نشان داد $\hat{G}(S1)$ هم DD است.

۴ بنابراین تعیین کننده سیم باریک، یا بیشتر non intrachiف نزدیک باشد

$k_0 G(S1)$

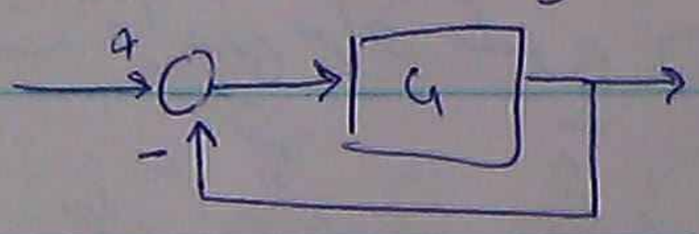
این مباحث برای $\hat{G}$ یا $I + \hat{G}$ بود حال اگر k به عنوان یک ضریب در آید تغییر خاصی خواهد نمود یا جابجا کند بنابراین با تنظیم k می‌توان کاری کرد که سیستم هم DD باشد هم پایدار

$I + \frac{\hat{G}}{4}$ $\Rightarrow$ حاصل ضرب $4 + \hat{G}(s)$

مثال: یک سیستم با ماتریس تابع تبدیل $\hat{G}(s)$ DD است در $\hat{G}(s)$ DD نباشد (روی فاکتور نگیرید)

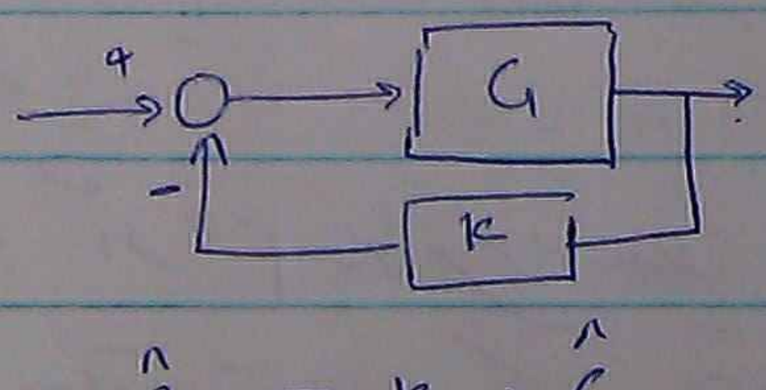
$\hat{G}$: آیا برای $\hat{G}(s)$ می‌توان گفت که سیستم حلقه بسته DD است؟

ج: بله



$\hat{R} = I + \hat{G}$

اگر $\hat{G}$ DD باشد حتماً $\hat{R}$ هم DD می‌باشد.



$\hat{R} = K + \hat{G}$

ماتریس $K = [k_1, k_2, \cdots k_n]$ قطری

diagonal

نکته: نمی‌گوییم $\hat{R}$ DD را از بین می‌برد چون اگر DD نباشد را اصلاً نمی‌توانیم کاری را انجام دهیم.

از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

سطر i ام $\hat{R}$ $\hat{r}_{ii} = \hat{g}_{ii} + k_i$

سطر i ام $\hat{R}$ $\hat{r}_{ij} = \hat{g}_{ij}$ $i \neq j$

۱. شعاع دوایر در شکوفین مدار $\hat{C}_1$ و $\hat{R}$ کلی است.

۲. حرکت دوایر در جهت افقی: اندازه k_i تغییر می‌کند.

(یعنی فقط شعاع در دیزه را جابجا می‌کند.) (شعاع که ثابت فقط مرکز دایره‌ی کلد افقی جابجا می‌شود.)

تست ترافیکی برای قضیه DD بودن سیستم حلقه بسته:

۱. نوار شکوفین $\hat{C}_1$ را رسم کنید.

۲. سیستم حلقه بسته DD است اگر نوار حاصل شامل نقطه $-1+0i$ (۱۱۵) نباشد.

* اگر تمام نوار کی شکوفین $\hat{C}_1$ شامل نقطه -1 نباشد می‌توان با بداری سیستم حلقه بسته را بررسی کرد. توجه کنید این روش برای پایداری یک شرط کافی است اما شرط لازم نیست، عبارتی دیگر اگر شامل -1 باشد نمی‌توان درمورد پایداری سیستم حلقه بسته بحث کرد. (جواب: نمی‌دانیم.)

** اگر هریک از نوارکی شکوفین $\hat{C}_1$ شامل نقطه -1 باشد به عبارات دیگر اگر $I + G(j\omega)\hat{C}_1(j\omega)$ DD باشد نمی‌توان بیان کرد که سیستم پایدار است یا نه، اما فرض کنید G را با $\tilde{C}$ جایگزین کنیم به طوری که

$$\tilde{C} = X C_1 X^{-1}$$

که X یک تبدیل هوشدی است.

از آنجاکه مقادیر ویژه λ_i همان مقادیر ویژه $\hat{\lambda}_i$ خاصی باشد بنابراین با اجرای سیستم $\hat{\lambda}_i$ با درنظرگرفتن مقادیر ویژه λ_i بررسی می‌شود.

به عبارت دیگر استفاده از این تبدیل به واسطه آن است که ممکن است بتوان λ_i ($\hat{\lambda}_i$) را در هر ضیدی که $\hat{\lambda}_i$ نباشد.

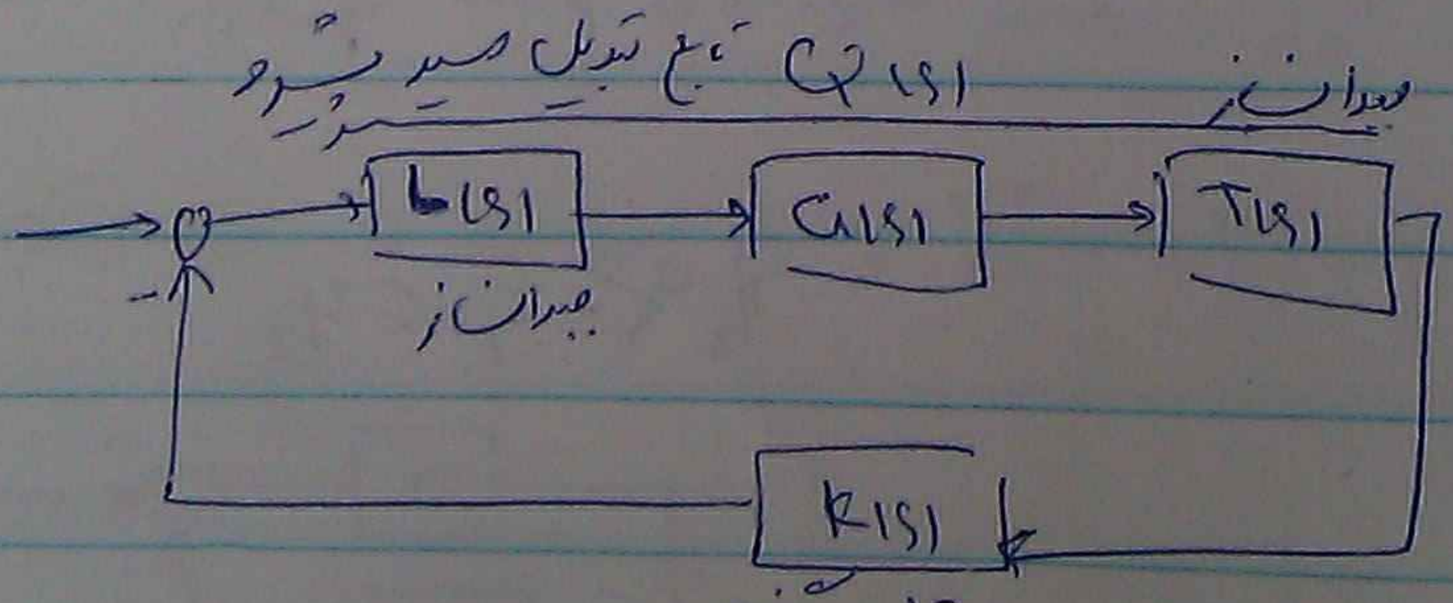
Q: برترین X چیست؟

برترین X ، X ای است که توانایی بیشتری بدهد. که برایم بیشتر مطلوب بودن بیشتر

مقاله: 1981 Achieving Diagonal Dominance System and Control letters

صفحه PP. 155 - 158

Ex.



جبران‌ز که عملاً خودش ن؛ یعنی بهت می‌دهد $\lambda_{1,1}$ را قطری کند.

گام بعدی که گفتیم برای حلش بالاهم برقرار است. هرچی $\lambda_{1,1}$ داشتیم می‌ذاریم Q

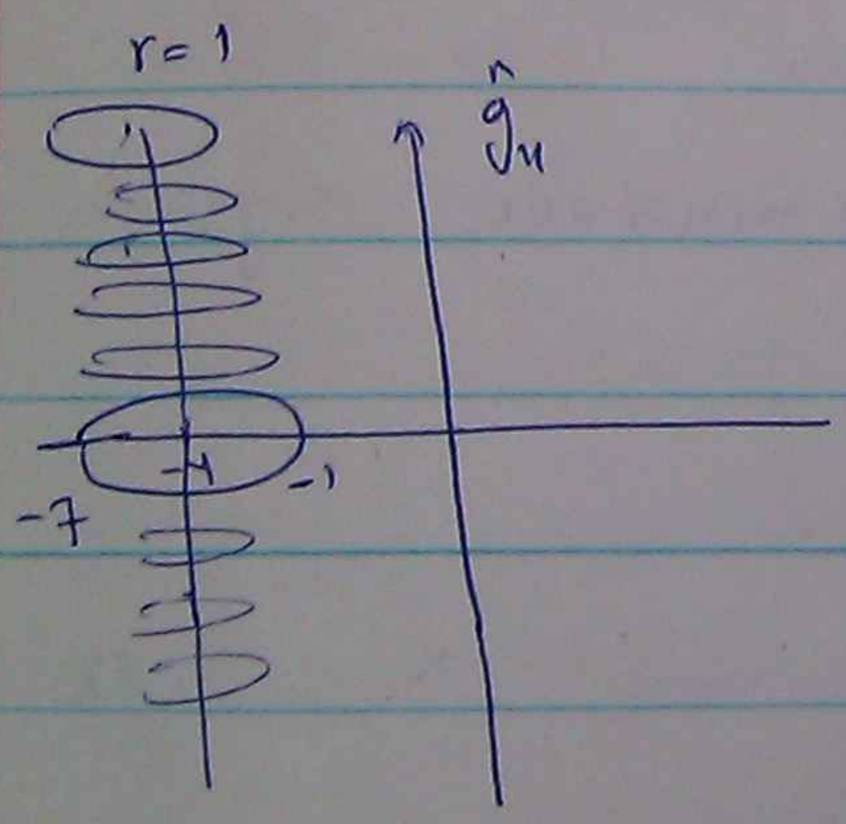
$$\hat{R} = K + \hat{Q}(s)$$

همچنین با برقراری شرایط پایداری می‌توان نتیجه گرفت $\hat{R}$ دارای قطب‌هایی است که در ناحیه‌ی مشخص شده قرار دارند. یعنی $-K_i + G(0) \neq 0$ شود.

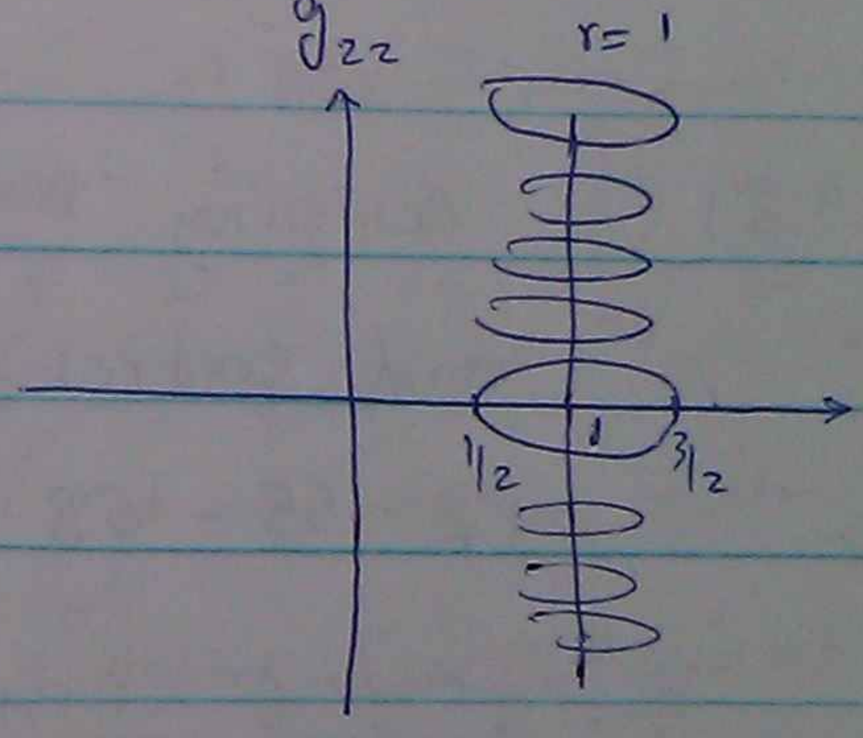
مثال.

فرض کنید:

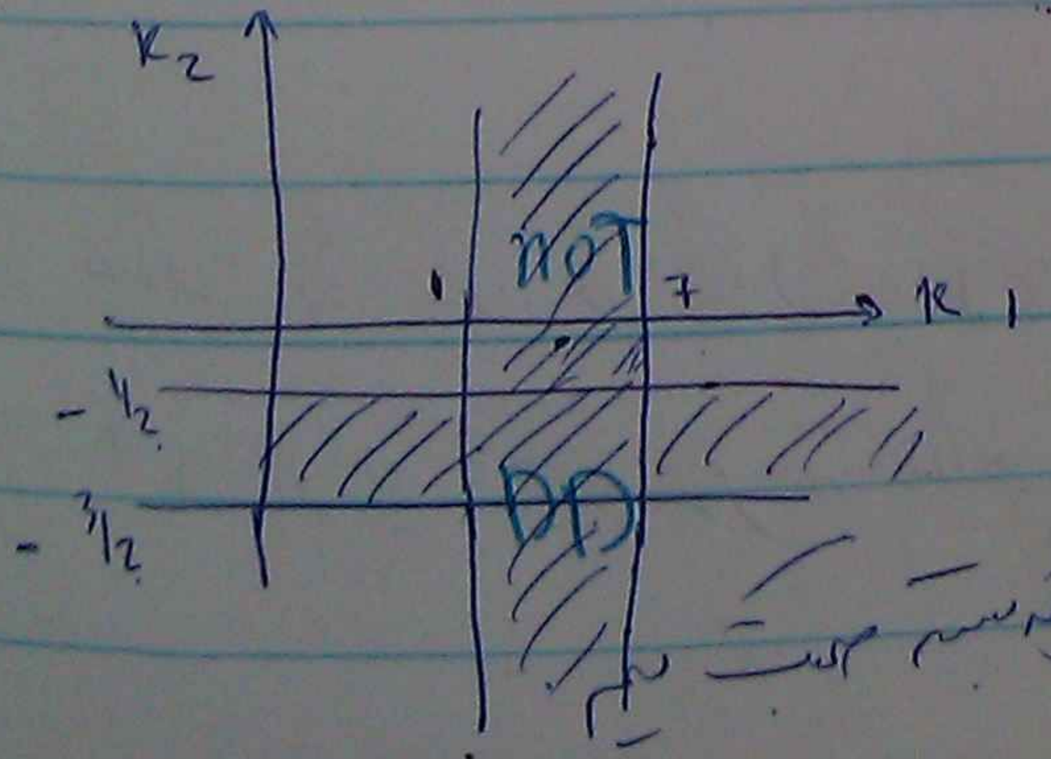
$$\hat{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s-4}{s+1} & \frac{s+3}{s+1} \\ \frac{s+1}{s+2} & \frac{2s+1}{s+1} \end{pmatrix}$$



$$-7 < -K_1 < -1$$

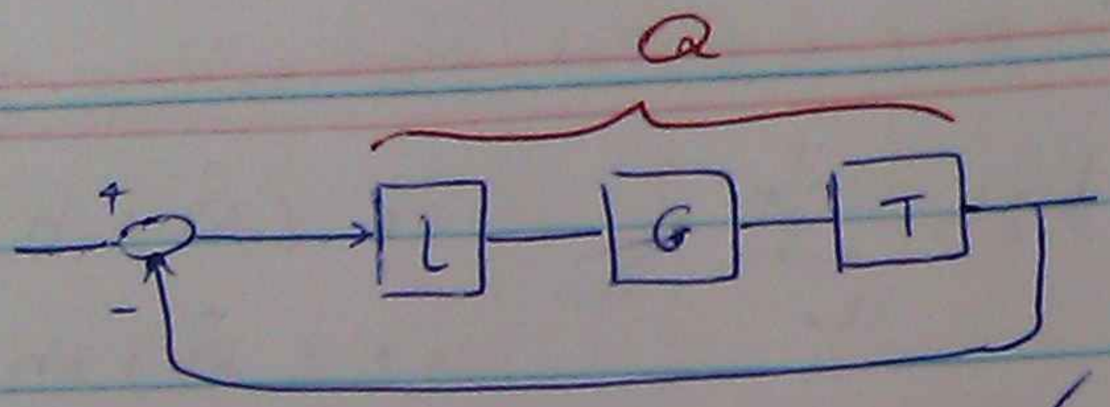


$$1/2 < -K_2 < 3/2$$



در این ناحیه D دارای قطب است

و نمی‌توان در مورد پایداری سیستم حلقه بسته صحبت کرد.

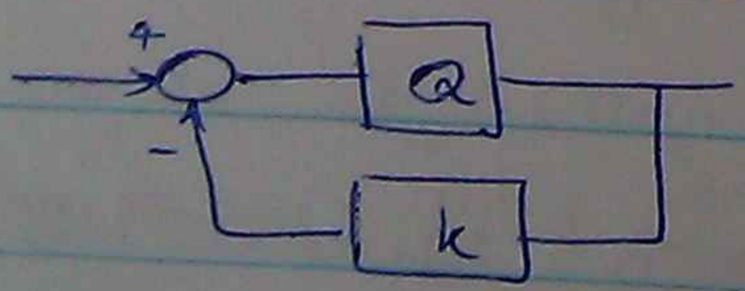


قضیه: فرض کنید $\hat{Q}$ روی حلقه‌ی اویلریت DD باشد چنانچه $\hat{q}_{ii}$ (عنصر i ام قطری مکمل $\hat{Q}$) دارای هیچ قطبی روی کانتور D برای $m \geq \cdots \geq 1$ نباشد.

در این صورت زمانی که فقط یک بار کانتور D را در جهت عقربه‌های ساعت بپیماید تصویر D کلیه نقاشت در میان $\hat{Q}$ با $N_0 \hat{Q}$ نشان می‌دهیم و تصاویر D کلیه نقاشت $\hat{q}_{ii}$، $i = 1, \ldots, m$

$\sum_{i=1}^{m} N_i(\hat{q}_{ii})$ بار نقطه مرکز را در جهت عقربه‌های ساعت دور می‌زند آنگاه

$N_0 \hat{Q} = \sum N_i(\hat{q}_{ii})$ تعداد دور زدن‌های در میان $\hat{Q}$



$\hat{R} = k + \hat{Q}$

یکی از موارد کاربرد قضیه نایکوئیست برای سیستم‌های حلقه بسته، قرار زیر است.

$$N_0(\hat{R}) = \sum_i N_i(\hat{R})$$

$$N_i(\hat{R}) = N_i(\hat{Q})$$

تعداد دوران تصویر کانتور نایکوئیست $\rightarrow$
در جهت عقربه های ساعت حول نقطه $-k_i + j0$ که تعداد آن q_{ii} است

$$\text{نتیجه} \Rightarrow \quad N_0(\hat{R}) = \sum N_i(\hat{Q})$$

نتیجه: اگر در شکل فوق جزء انتگرال های پس و پیش L و T موجود باشد، آنگاه

که ماتریس های تبدیل $\hat{Q}(s)$ و $\hat{R}(s)$ روی کانتور نایکوئیست D و DD باشد

آنگاه سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر

تعداد دوران سیستم حلقه باز

$$\sum N_i(\hat{Q}) - \sum N_i(\hat{Q}) = -P$$

P تعداد قطب های $Q(s)$ در سمت راست محور $j\omega$

تعداد دوران کل سیستم حلقه بسته حول مبدأ

که برابر است با: تعداد دوران کل سیستم حلقه باز حول نقطه $-k_i$ + تعداد قطب های سمت راست

EX:

$$\hat{Q}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-4}{s+1} & \frac{s+3}{s+1} \\ \frac{s+1}{s+2} & \frac{2s+1}{s+1} \end{bmatrix}$$

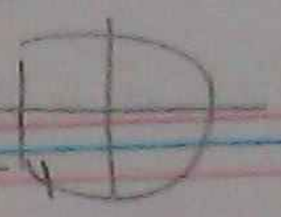
از روش مک میلان $P(s)$ را تشکیل می دهیم:

$$P(s) = 2s^4 - s^3 - 22s^2 - 30s - 11 \rightarrow$$

از روش راث $P=1$

$$|\hat{Q}(s)| = (s-4)(2s+1)(s+1)(s+2) - (s+1)(s+3) = 0$$

مسیر کانتور D شامل قطب $s=-4 \Rightarrow s=0 \Rightarrow -4$

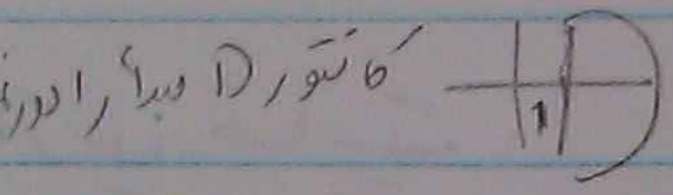


$$\begin{cases} N_1(\hat{Q}) = 1 \\ N_2(\hat{Q}) = 0 \end{cases} \rightarrow \sum_{i=1}^{2} N_i(\hat{Q}) = 1$$

$2S_{p1}=0 \quad S=0$

$$\sum N_i(\hat{Q}) = 1+0-1 = 1-1 = 0$$

مسیر کانتور D شامل قطب $s=1$



شرط فوق کافی است اگر

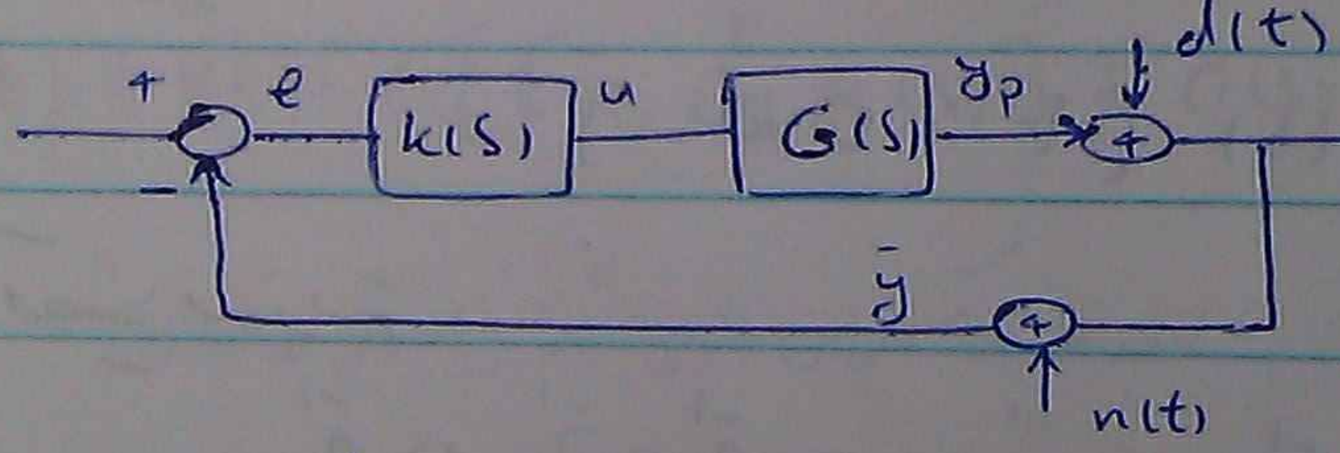
$-k_i + j0$ سمت چپ نوار پرشکوهین باشد.

حال باید ببینیم بین این نواحی کدام یک را انتخاب کنیم که این شرط برقرار باشد.

$$7 < k_1 \quad \text{یا} \quad k_1 < 1$$

$$-\tfrac{1}{2} < k_2 < \infty$$

عملکرد و مقاوم بودن سیستم های MIMO :



انتظار ما از سیستم حلقه بسته این است که خروجی مدل شود

هدف کنترل : tracking ، y از ورودی مرجع r ؛ حذف اثر $d(t)$

و $n(t)$ روی y کم شود.

good tracking error

noise rejection

disturbance Attenuation

کاهش

$$(*) \quad Y(s) = [I + Gk(s)]^{-1} G(s) k(s) R(s)$$

$$- [I + Gk(s)]^{-1} G(s) k(s) N(s) + [I + Gk(s)]^{-1} D(s)$$

فرض $G_1 = \frac{1}{s+a}$ که a یک پارامتر باشد که با دما تغییر می‌کند و محدوده تغییرات آن مشخص است.

$0.1 \le a \le a_2$ ← که این مربوط به حوزه کنترل مقاوم است.

اما اگر با تازه تغییرات را ندانستیم تنها وارد حوزه کنترل تطبیقی می‌شویم

ماتریس تابع تبدیل حلقه (لوپ حلقه) $G(s)\,k(s)$ و $Gk(s)$

ماتریس تابع تبدیل تفاوت برگشت $I + G(s)k(s)$

ماتریس حساسیت $S(s) = (I + Gk(s))^{-1}$ →

sensitivity mat

ماتریس مکمل حساسیت $GS(s) \triangleq I - S(s)$ →

complementary sensitivity mat

$$\Rightarrow GS(s) = G\,k(s)\,[I + Gk(s)]^{-1}$$

قضیه سیلوستر:

$$(A + BCD)^{-1} = \bar{A}^{-1} - \bar{A}^{-1}B\,[\bar{C}^{-1} + D\bar{A}^{-1}B]^{-1}\,D\bar{A}^{-1}$$

جهت بیان اثر خطای مدل‌سازی فرض کنید $G^*(s)$ ماتریس تابع تبدیل نامی و $y^*(s)$ خروجی نامی با ورودی مبنای $r(t)$ باشد.

$$y^* = [I + G^* k]^{-1}\,G^* k(s)\,R(s)$$

فرض کنید، در اینجا فرض می‌کنیم اثر خطا به صورت جمعی نشان داده شده است.

تفاوت مشخص شده بین کنترل مقاوم

$$G = G^* + \delta G$$

ماتریس تابع تبدیل واقعی — نامی — خطای مدل‌سازی

کران بالای δG را می‌یابیم (کران پایین صفر است).

$$y(s) = \bar{y}(s) + \delta y(s)$$

بیشترین خطای مدل‌سازی در فرکانس‌های بالاست

چون از تابع تبدیل استفاده می‌کنیم، خود مکمل فیلتر پایین‌گذر (گفته شده) است و بعضی دینامیک‌های فرکانس بالا در سیستم دیده نمی‌شود.

$$\delta y(s) = [1 + \bar{G}^* k(s)]^{-1} \delta G(s) [G(s)]^{-1} \bar{y}^*(s) \quad (**)$$

از رابطه $*$ برای رسیدن به اهداف کنترلی باید شرایط زیر برقرار باشد.

1) Good Command Following

$$y(s) \simeq r(s) \qquad s \in \mathcal{RH}_\infty$$

حداکثر فرکانس کاری

$$[1 + Gk]\, Gk \simeq 1 \qquad Gk \gg$$

$$Gk \gg \Rightarrow \text{حساسیت} \ll 0$$

تابع حساسیت باید؛ اندازه کافی کوچک باشد. اگر حساسیت؛ اندازه کافی کوچک شود از بهبود تضمین حساسیت استفاده می‌کنیم.

برای اینکه اثر خطای مدل‌سازی روی تغییرات خروجی $(S)\,\delta Y$ از مقدار نامی آن $Y^*(S)$ به مینیمم برسد، باید در جایی که $S(S)$ مقدار ماکزیمم دارد ماکزیمم تفاوت برگشت بزرگ باشد. (حالت کم می‌شود)

در فرکانس‌های بالا

$(I + GK) \uparrow\uparrow$

Dist. rej ← صورتگاه با Good following tracking از این می‌رود.

اگر بخواهیم Good following را تضمین کنیم مجبوریم Dist.rej را نیز از این برده‌ایم

چون هردو در حوزه فرکانس بالا هستند.

برای حذف اگر نویز کافی است $\downarrow GK$ بشه $\downarrow CS$

$S \uparrow$

با توجه به ساختار GK بالا نقض ایجاد می‌شود اما چون حوزه فرکانسی D و N مختلف است هیچ مشکلی ایجاد نمی‌شود یعنی نویز در حوزه فرکانس بالاست و برای از بین بردن آن در فرکانس‌های بالا باید GK پایین باشد.

* برای تعیین بزرگی یک عدد از مقدار مطلق استفاده می‌کردیم.

برای مقایسه بزرگی دو بردار با هم از طول بردار اقلیدوسی استفاده می‌کردیم

$$\delta_1 = \sqrt{\delta_{1,*}^2 \delta_2^2}$$

حال برای تعیین بزرگی یک ماتریس: از دو SISO و دستیم بردار ورودی در جهت مقادیر ویژه باشد و در MIMO علاوه بر این جهت بردار ورودی نیز مهم است.

EX:

$$A = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{bmatrix}$$

طول بردار اقلیدوسی از $\sqrt{u_i u_i^T}$

یعنی جهت u از بزرگی دو مقدار A تاثیر دارد.

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow y_1 = \begin{bmatrix} 10^3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \sqrt{y_1^T y_1} = 10^3$$ A بزرگ

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-3} \end{bmatrix} \rightarrow \sqrt{y_2^T y_2} = 10^{-3}$$ A کوچک

با ذکر این مثال، این نتیجه هم می‌رسیم که درباره بزرگ یا کوچک بودن یک ماتریس نمی‌توان صحبت کرد مگر آنکه تمام جهت‌های ممکن ورودی را در نظر بگیریم.

ابزار مناسبی برای تعیین، ابزاری به نام Principal Gains (Singular Valuse) یعنی مقادیر استثنایی

تعریف نرم:

تابعی مثل $\|\cdot\|$ که

1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

2) $|\alpha| \|x\| = \|\alpha x\|$

3) $\|x\| \geq 0$ شاید زمانی وجود دارد که $x=0$ باشد.

جلسه دوازدهم 91,8,21

نرم بردار یک،

نرم p بردار یک

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ بردار

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \right)^{1/p}$$

$$p = 1, 2, \cdots, \infty$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

تعریف هرمیتی:

$$\underline{X}^H = \left(x_1^* , x_2^* , \cdots , x_n^* \right) \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$X^H = \bar{X}^T$$

$$X^H X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \|x\|_2^2$$

تعریف: یک ماتریس هرمیتی نوشته اگر $A^H = A$

- یک ماتریس مختلط A را ماتریس یکانی نوشته اگر $A^H = A^{-1}$

- تمام مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیتی حقیقی است

- تمام مقادیر ویژه یک ماتریس یکانی واحد است.

اگر A یک ماتریس هرمیتی باشد آنگاه یک ماتریس یکانی U وجود دارد، بنحوی که

$$A = U \Lambda U^H$$

مناسب‌ترین نُرم‌ها نُرم‌هایی هستند که با عضای نُرم آن مقادیر ویژه‌ی A است.

نُرم فروبنیوس:

$$\|A\|_F \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(tr(A^H A)\right)^{1/2}$$

$$\min \frac{x^H A x}{x^H x} = \lambda_{min}(A)$$

$x \neq 0$

A هرمیتی

λ : مقادیر ویژه‌ی A

$$\max \frac{x^H A x}{x^H x} = \lambda_{max}(A)$$

$x \neq 0$

نُرم اسپکترال (spectral)

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^H A)}$$

توجه کنید $A^H A$ همواره هرمیتی است (از تمرین: مقادیر ویژه‌ی حقیقی و نیمه‌مثبت)

نیز همان است مفرهم نشد نیز ، psd

نقوه نرم ماتریس A :

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \longrightarrow$$ جمع سلول ترین ماتریس مونتون را حساب کن

در کدام ستون این جمع بزرگترین شد اون می شه نرم ۱.

$$\|A\|_2 = \max_i \lambda_i \cdot (A^H A)^{1/2}$$ ماکزیمم مقدار اشتباه

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

اگر کوچکترین مقدار اشتباه بزرگ باشد ماتریس A بزرگ است ؛ طوری به آن بزرگترین مقدار اشتباه کوچک باشد ماتریس A کوچک خواهد بود.

کوچکترین مقدار اشتباه $\lambda_{min}^{1/2}(A^H A)$ ← بزرگ $\Rightarrow$ A بزرگ

بزرگترین مقدار اشتباه $\lambda_{max}^{1/2}(A^H A)$ ← کوچک $\Rightarrow$ A کوچک

پس کوچکترین بزرگ بودن ماتریس با مقادیر اشتباه آن تعریف می شود.

$$A \; \text{ill} \; \min \; \text{mod}$$

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^H A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 100 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 100 & 10001 \end{pmatrix}$$

که کوچکترین مقدارش بزرگ نیست پس این ماتریس کوچک است.

$\lambda_{min} \cong 10^{-2}$ $\quad \lambda_{min}^{1/2}$ این Max, Min به A ربط است.

$\lambda_{med} = 100$ $\quad \lambda_{med}^{1/2}$

$\lambda(A^H A) \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 10002$

$\lambda_2 = 10^{-4}$

بیشترین بهره = $\frac{x}{\text{ورودی}} \times 100$

تفکیک یک ماتریس به مقادیر استثنایی:

اگر یک ماتریس مانند G دارای رتبه m ستون ($r(m)$) باشد آنگاه رتبه‌ی مقادیر $G^H G$ از مقادیر استثنایی G تبعیت می‌کند و اگر رتبه‌ی سطرهای G ($r(n)$) باشد رتبه‌ی مقادیر $G G^H$ از مقادیر استثنایی G تبعیت می‌کند.

(به بزرگتر) (باید که بزرگتر است تبدیل شود)

$$\begin{cases} L \geq m & G G^H \\ & L_{m' m} d_L = L d_L \\ L \leq m & G^H G \\ & m d_L V_{2m} = m d_m \end{cases}$$

$\sigma_1 = \sigma_{max}$ ← ماتریس G

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \cdots \geq \sigma_m \geq 0$

$\sigma_m = \sigma_{min}$ ← ماتریس G

از جای G داشتن: شیب (دلتا) فازی است $S = \Delta$ و $\omega = 0 \rightarrow \pi$ آنگاه $\sigma_{max} < \sigma < \sigma_{min}$

مقادیر استثنایی (دلتا) تابعی است از ω که به آن بهره اصلی principal gain گویند. پس مفهوم بهره اصلی وابسته به مقادیر استثنایی ماکزیمم است که باید بدانید.

راتین گفت یک متوازی الاضلاع و به Min, Max اش کار داریم

سوال: نمایی از سیستم حلقه بسته به کدام یک از Max و min مقادیر وابسته است؟ توضیح دهید رابطه را با دلتا چگونه تعیین کنید.

جواب: ماکزیمم نمودار 3db و ماکزیمم مقادیر حلقه بسته برای من مفید است

تشدل سیستم کی تعلیق : پروژہ

مثال ماشین : 50 km/h : Min کنٹرولر سسٹم ؟ حوزہ
60 km/h : Med

ماڈیل کیسے چوائس کی ارشش ہوگا۔
کم سے کم Med اور Min اس پر اصول حجم نہیں
پھر ڈیٹا کیسے آسان ہوگا

if $m \geq l \Longrightarrow G = U \Sigma V^H$

$m \times L \quad [L \times L] \quad L \times L = m \times L$

$\Sigma \in R^{l \times l}$

$V \in \mathbb{C}^{m \times l}$

$U^H \in \mathbb{C}^{l \times l}$

$V^H V = I_L$

$U U^H = I_l$

if $m \leq l \Longrightarrow G = V \Sigma U^H$

$m \times m \quad [m \times m] \quad m \times L = m \times L$

$\Sigma \in R^{m \times m}$

$V \in \mathbb{C}^{m \times m}$

$U^H \in \mathbb{C}^{m \times l}$

$V V^H = I_m$

$U^H U = I_m$

توجہ کیجئے :

ان تکنیک کو خصوصی خرد ٹیکٹ ۔ (تبدیلات تشابہی : ریل)

جمع‌بندی خواص تقلیل به مقادیر تکین:

① فرض کنید در $m \leq n$ آنگاه r امین مقدار تکین از بردار ویژه GG^H و $\{\sigma_i^2\}$ مقادیر ویژه GG^H و در $m \geq n$ آنگاه r امین مقدار تکین از بردار ویژه G^HG و $\{\sigma_i^2\}$ مقادیر ویژه G^HG

$$Rank(G) = Rank(\Sigma)$$

② اگر $G = U\Sigma V^H$ تجزیه مقدار تکین ماتریس G باشد آنگاه $\sigma_{max}(G)$ برابر با بزرگترین مقدار تکین G است.

فرض $A_{m \times n}$ مختلط باشد.

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^HA)}$$

$$\bar{\sigma}(A) = \sigma_{max}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2$$

$$\underline{\sigma}(A) = \sigma_{min}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$$ اگر A^{-1} موجود باشد

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\sigma}(A) = \dfrac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})} \\ \underline{\sigma}(A) = \dfrac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})} \end{cases}$$

در SISO دیدیم که بیشینه مقدار ویژه کی تکید می‌کند برای کهره نسبت کمان هندسی
رسیم می‌کردیم و پایداری یا ناپایداری سیستم را تشخیص می‌دادیم در MIMO مقدار ویژه اشتباری را تر

Principle Direction

بین اصلی - جهت اصلی

جهت اصلی حال از نسبت دامنه بازار ویژه در راستا اون ورودی بیشتر اثر می‌گذارد.

اون Singular value است که مقدار بیشتر بهره اصلی حاصل حال اون بزرگترین

به هر بهره اصلی می‌توان یک جهت اصلی نسبت داد فرض کنید $\|u\|=1$ و

سطری y به ترتیب $\sigma_1 y_1$ و $\sigma_2 y_2$ و ... و $\sigma_L y_L$ و ستونی u را

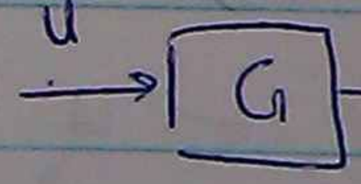
به ترتیب u_1 و ... و u_L

آنگاه:

$$G = \sum \sigma_k y_k u_k^H$$

جهت اصلی خروجی

جهت اصلی ورودی



$$y = \underbrace{\left(\sum \sigma_k y_k u_k^H\right)}_{G} u$$

$$\|u_k\| = 1$$

توضیح:

بردار راستین نرمالیزه.

یعنی $\max = 1$ است.

سوال: کی این تساوی برقرار است؟

$$\|u_k^H u\| \leq \|u_k\| \|u\| \leq \|u\|$$

وقتی: $u = \alpha u_k$

برقرار است.

توضیح

$|\alpha=1|$ $\quad u = \alpha u_k$

$V = \alpha V_i \xrightarrow{\alpha=1} V_i$

$\|u\| = 1$

ورودی راست بردار استثنایی ام

$\Longrightarrow u_k^H y = 0 \qquad k \neq i$

$u = \alpha u_i \Longrightarrow y = \alpha_i y_i \alpha \Longrightarrow \|y\| = \alpha_i$

نتیجه:

اگر ورودی راست بردار استثنایی u_i باشد آنگاه بهره خروجی برابر است با α_i (به مقدار استثنایی ام)

به عبارت دیگر بهره سیستم برابر است با نرم خروجی سیستم وقتی ورودی برابر است با بردار استثنایی راست اصلی u_i باشد.

به مجموعه $\{u_1, \dots, u_2\}$ جهت های راست ورودی می گویند

input principle direction

(اگر ورودی در جهت u_i باشد α_i رخ می دهد. بهره با این ورودی)

نتیجه:

بزرگترین بهره ممکنه α_1 است زمانی اتفاق می افتد که ورودی

ورودی در جهت u_1 باشد و کوچکترین بهره ممکن $\sigma_m = \frac{y}{u}$ زمانی اتفاق می‌افتد که سیگنال ورودی در جهت u_m باشد

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت اگر بردار ورودی در جهت u_1 باشد آنگاه بردار خروجی در جهت $y_1 = (\sigma_1 u_1) \alpha$ خواهد گرایید.

✓ اگر بردار ورودی در جهت u_1 باشد $\Rightarrow y = (\sigma_1 y_1) \alpha$

این رابطه نشان می‌دهد که بردار خروجی $\{y_1, \dots, y_k\}$ است.

output principle direction

مجموعه $\{u_1, \dots, u_m\}$ و مجموعه $\{y_1, \dots, y_k\}$ هر دو مجموعه orthonormal متعامد هستند

$$u_i^H u_j = 0 \qquad i \neq j$$

$$y_i^H y_j = 0$$

جلسه سیزدهم 91,8,27

یکی از خواص مهم SVD بدست آوردن شبه معکوس ماتریس مثل A است.

$$A = U \Sigma V^H$$

$$B = V \Sigma^{-1} U^H$$

$$BAB = B$$

$$ABA = A$$

به این B که یک شبه معکوس برای A است A^{ψ}

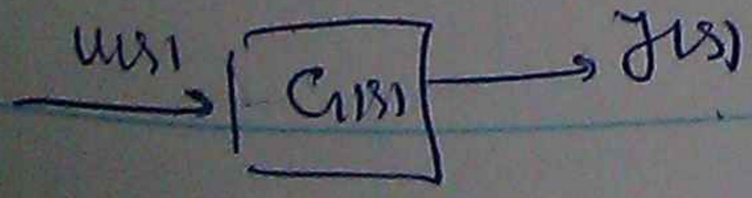
$$B = A^{\psi} = V \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H$$

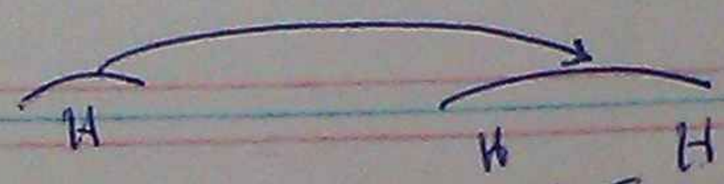
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Sigma_r = \text{diag}\{\sigma_1, \cdots \sigma_r\}$$

A حقیقی است و $\rho(A) = r$ رتبه

کوچکترین و بزرگترین مقادیر استثنایی ماتریس تابع تبدیل:

$$y(s) = G(s)\, u(s)$$





$$Y(s) \quad y(s) = u(s)\,G(s)\,G(s)\,u(s)$$

$$\|y(s)\|_2^2 = \|G(s)\,u(s)\|_2^2$$

$$\|y(s)\| = \|G(s)\,u(s)\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|y(s)\|}{\|u(s)\|} = \frac{\|G(s)\,u(s)\|}{\|u(s)\|} \quad (*)$$

$$\text{Max}\ \frac{\|G(s)\,u(s)\|}{\|u(s)\|} = \bar{\sigma}(G(s)) \qquad \left.\begin{array}{l} \bar{\sigma} = \sigma_{max} \\ \underline{\sigma} = \sigma_{min} \end{array}\right\}$$

$u \neq 0$

$$= \sqrt{\lambda_{max}\left[G^H(s)\,G(s)\right]}$$

حاصل عرف نرم دوم ماتریس

$$\text{Min}\ \frac{\|G(s)\,u(s)\|}{\|u(s)\|} = \underline{\sigma}(G(s))$$

$u \neq 0$

$$= \sqrt{\lambda_{min}\left[G^H(s)\,G(s)\right]}$$

نتیجه: بهره سیستم بین $\bar{\sigma}$ و $\underline{\sigma}$ آن محدود می‌شود.

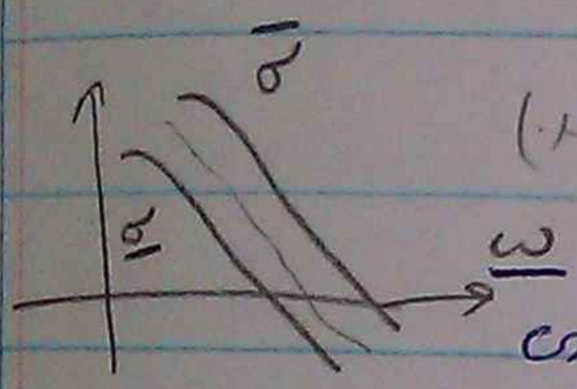
$(*) \Rightarrow$ بهره سیستم

$$\underline{\sigma} \leq \frac{\|G(s)\,u(s)\|}{\|u(s)\|} \leq \bar{\sigma}$$

بنابراین واضح است ضایعه نخواهیم در تمام جهات ورودی $G(s)H(s)$ بزرگ باشد بایستی

بزرگ باشد.

همچنین ضایعه در تمام جهات ورودی $G(s)H(s)$ کوچک باشد بایستی کوچک باشد.



هدف تعدیلی بزرگ و هم اثر. (اگر هدف کوچکی بزرگتر باشد)

یک شاخص بسیار مفید برای یک سیستم: condition number

$$\text{condition}(G) = \text{cond}(G) = \frac{\text{بزرگ}(G(s)H(s))}{\text{کوچک}(G(s)H(s))}$$

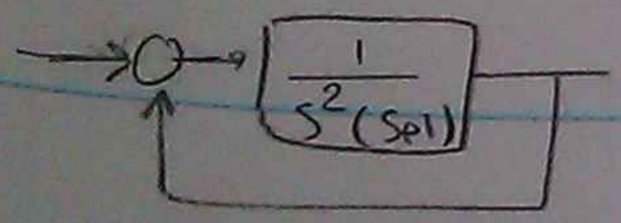
= هر دو از خروجی هستند و نیست.

- ردیابی:

کوچک بودن: tracking : تضعیف شود $db < 1$

شیب نمودار حداقل آنرژ باشد یعنی حداقل یک قطب در صفر داشته باشد و ناپایدار نباشد حداکثر شیبی که در

صفر db دارد 20- باید باشد.

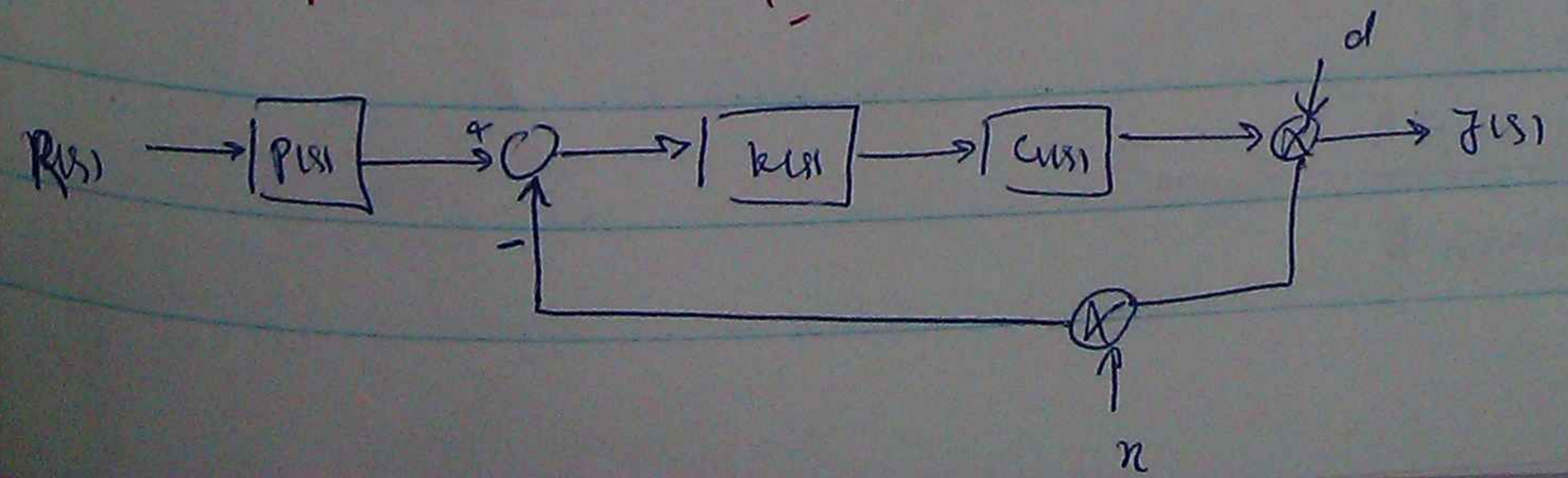


برای ردیابی و حذف اغتشاش هدف این بود که تابع حساسیت کوچک باشد

چون حداقل در صفر یک قطب داشته باشد

بررسی عملکرد سیستم بدان که بهره اصلی آن سیستم

Principal Gain



آر بخواهیم خطای حالت ماندگار این سیستم باید type آن چند باشد؟ (یعنی $\frac{1}{s^n}$) $\frac{1}{s^1}$ خطای $\frac{1}{s^2}$ ... $\frac{1}{s^n}$ خطای صفر

$\frac{dh}{dec} = 20\lambda$

رفتار می کند. این یعنی باید در مخرج s^n بزرگ باشد پس s باید کم شود

وقتی ما خواهیم در حوزه فرکانس کنترل کنیم + ورودی ما در فرکانس پایین + پس فرکانس کم پایین مخصوص

رد پایین است آنگاه هم در فرکانس پایین است

$$S(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1}$$

$\frac{1}{F}$ تا ω_{co}

وقتی از دید ورودی حساسیت را در فرکانس پایین حوزه tracking (تا ω_{co} رادیان)

$T(s)$ $S(s)$

$$y(s) = S(s)D(s) + [I - S(s)]P(s)R(s) - [I - S(s)]N(s)$$

برای اینکه خطا خوب تر کند باید این S(s) که بزرگ باشد

✓ جهت ردپایی ضعیف:

حساسیت برای tracking باید کوچک باشد.

$$I - S(j\omega) \simeq I$$

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \ll 1$$

$\omega \in \omega_r$ فرکانس هایی که ورودی مرجع در آن قرار دارد.

حذف اغتشاش را هم انجام می دهد

حوزه فرکانس بالا که نباید نویز

✓ $\bar{\sigma}(S(j\omega)) = \frac{1}{\underline{\sigma}(S^{-1}(j\omega))}$

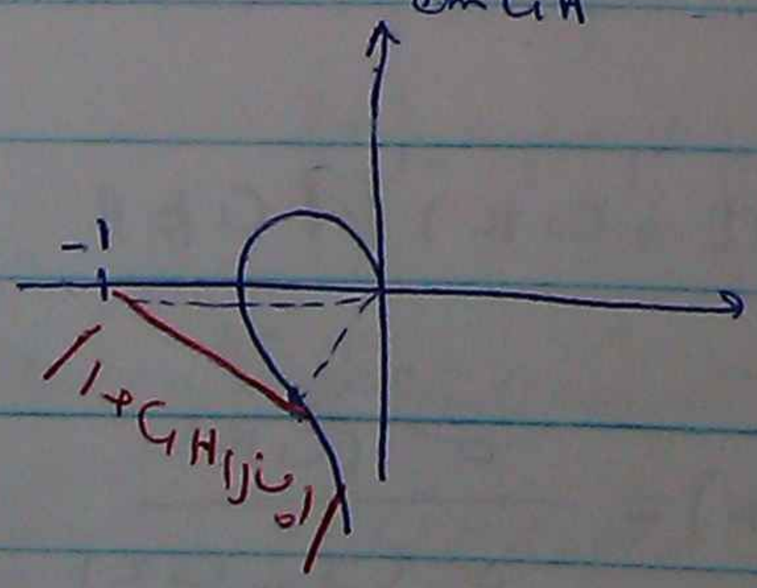
condition number باید کوچک باشد.

ایده‌آل حالتی است که T=1 شود و در حوزه فرکانس

تداخل شود

$$= \frac{1}{\underline{\sigma}(I + G(j\omega))} \ll 1$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma}(I + G(j\omega)) \gg 1 \quad \checkmark$$



آر بخواهیم $\underline{\sigma}(I + G(j\omega)) \gg 1$ باشد باید

$\underline{\sigma}(I + G(j\omega)) \gg 1$

شود

هر چه بزرگتر سیستم پایدارتر

$|(1 + G(j\omega_{co}))|$: هر چه بزرگتر حساسیت مقاوم

: هر چه کمتر حساسیت مقاوم

آخرین چیز حائز اهمیت این است که می‌توان چنین نتیجه گرفت جهت ... ارزیابی good command ... Follow ... مناسب برطرف سیستم‌های MIMO لازم است Min مقدار ... تابع تبدیل حلقه باز GK(s) در فرکانس‌هایی که R(s) بیشترین انرژی را دارا است بزرگ باشد.

آخرین که ... صورت ... می‌توان نتیجه گرفت آن است که جهت ... از بین بردن یا کاهش اثرات اغتشاش در خروجی باید ... برقرار باشد.

— جهت حذف اثرات نویز در خروجی نیز باید مطابق با رابطه ... برآورده شود:

(a) ✓ $\bar{\sigma}(GS(s)) \ll 1 \qquad \omega \in \omega_n$

$\bar{\sigma}(I+GK(s))^{-1} GK(s) \ll 1$

$\| (I+GK(s))^{-1} GK(s) \|_2 \ll 1$

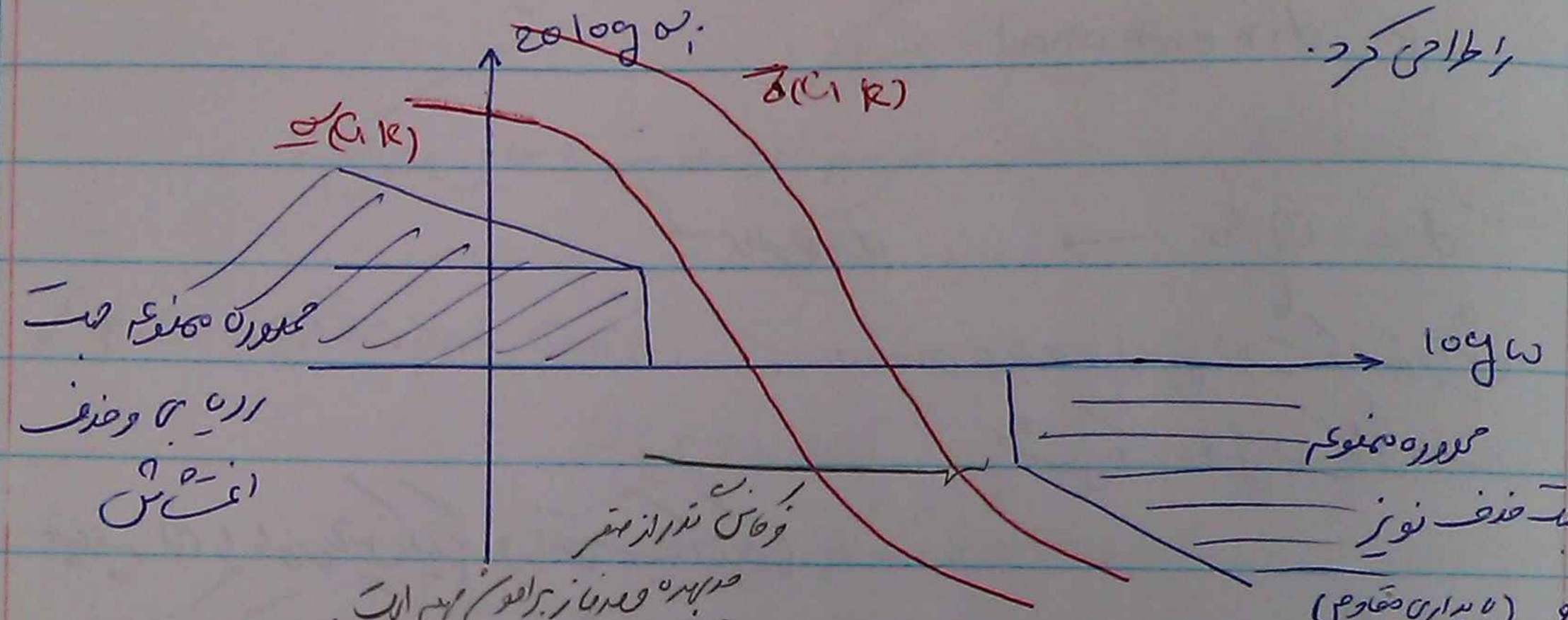
$\| (I+GK(s))^{-1} GK \| \leq \| (I+GK)^{-1} \| \| GK \|$

$\Rightarrow \bar{\sigma}(I+GK)^{-1} \bar{\sigma}(GK) = \dfrac{\bar{\sigma}(GK)}{\underline{\sigma}(I+GK)} \ll 1$

برای اینکه ⑤ برقرار باشد باید ⟸

$$\bar{\sigma}(G_1 R) \ll 1 \Longrightarrow$$

در طراحی کنترل با شرایط مختلف برای $\bar{\sigma}(G_1 R)$ و $\underline{\sigma}(G_1 R)$ یک کنترل کننده را طراحی کرد.



و (پایداری مقاوم)
robus stability
پایداری با وجود تغییرات

پارامتری که خطی حد فیلتر در فرکانس های بالا زیاد داشت.

$PM = 100\zeta$

$\omega_c \leq BW \leq 2\omega_c$

توجه شود که در تحلیل سیستم های MIMO ما دیگر دامنه فاز وجود ندارد. (اندازه داریم برحسب Principal Gain)
(برعکس SISO که هم حد فاز لازم داشتیم هم حد بهره را)

- با در نظر گرفتن بزرگترین و کوچکترین تقدیر استثنایی، منظور تأمین عملکرد سیستم در واقع بدترین حالت ممکن را در نظر گرفتیم به عبارتی بدترین جهت ورودی را در نظر گرفتیم در سیستم MIMO بجز از جهات خیلی خاص

۵۳

سه رضلیف الت دراین حالت که بررسی با پیچیده‌ترین حالت که غیر ضروری است. از جنس مشابطی با بستی مجموعه بجوه‌ی اس را محدود کنیم به عنوان مثال فرض کنید که نقاط آن بصورتی است که فقط در زیر فضای p بعدی آنقدر حرکت.

p- dimentional

$d = Q\delta$ ⟶ یک بردار p بعدی

ما می‌خواهیم

در فضای p بعدی حالتی است که توزیع آن

مشخص کننده اثر انتشار است.

ضایعه Q را طوری تعیین کنیم که (انتخاب کنیم که)

$$Q^H Q = I \implies \|d\| = \|\delta\|$$

چون سیستم خطی است. ما فقط اثر انتشار را در نظر میگیریم:

با فرض $m=0$ داریم $r=0$

$$y = S\underbrace{Q\delta}_{d}$$

↑ حالت

بنابراین می‌توان بجای داشتن انتشار واقعی و با در نظر گرفتن $(SQ)\delta$

خود برداشت خواهیم.

(Q طوری که ماتریس کوواریانس S^2 می‌دهد)

حال به جای اینکه بگوییم Q چگونه باشد ما می‌گوییم S^2 چگونه باشد.

همه انتشارها توی هر فضایی نیستند.

جلسه 8:

رابطه بین P.G حلقه باز و حلقه بسته؟

می خواهیم عملکرد دینامیکی سیستم حلقه بسته (فیدبک دار) را با داشتن P.G حلقه باز بررسی کنیم

ابتدا شرایطی عنوان درخواست برای سیستمی حلقه بسته را بیان می کنیم:

✓ P.G : Principal Gain

1. حساسیت $\bar{\sigma}((I+G_1R)^{-1})$

یعنی: مقدار بالاترین کوچکترین مقدار ممکنه

2. بدون اثر نویز $\bar{\sigma}(I-(I+G_1R)^{-1})$ هر چقدر کوچکتر

3. بهره دهی $\underline{\sigma}(I-(I+G_1R)^{-1}) \simeq 1$

با داشتن: $\bar{\sigma}(G_1R) \leq \bar{\sigma}(G_1)\bar{\sigma}(G_R)$

4. هزینه کنترل Min کردن انرژی ورودی کنترل control effort

(k) تا حد امکان کوچک باشد

غالبا سعی می کنیم: intractive ⟶ non intractive

شفاف تر سیستم برای همه مسائل تحقیق اینکه از کدام ورودی برای کدام خروجی استفاده کنیم. مثلا u_1 را برای ورودی y_2 می خواهیم.

MIT OCW

$-Q = Q + I - I$

قضیه ۱:

$$Mad(0, \bar{\sigma}(Q) - 1) < \bar{\sigma}(Q + I) < \bar{\sigma}(Q) + 1$$

قضیه ۲:

$$Mad(0, \underline{\sigma}(Q) - 1) < \underline{\sigma}(Q + I) < \underline{\sigma}(Q) + 1$$

اثبات ۱)

$$\bar{\sigma}\left((I + GK)^{-1}\right) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + GK)}$$

$\underline{\sigma}(GK) > 1$ اگر

اگر ω_0

$$\geq \frac{1}{\underline{\sigma}(GK) + 1} \geq \frac{1}{\bar{\sigma}(GK)}$$

• برطرفی

SISO: $|S(j\omega)| < \varepsilon \longrightarrow |k\, G(j\omega)| > \frac{1}{\varepsilon}$

MIMO: $|S(j\omega)| \leq \varepsilon \longrightarrow \underline{\sigma}(GK) > \frac{1}{\varepsilon}$

$0 < \omega < \omega_0$

به طور مثال برای توابع تبدیل زیر از روش‌های مشابه می‌توان نتایج را تحلیل کنیم.

جمع‌بندی: حاشیه‌ی اطمینان:

بزرگ (G_1R) یعنی ⟵ تقلیل حساسیت

کوچک (G_1R) یعنی ⟵ تقلیل اثر نویز

بزرگ (G_1R) یعنی ⟵ تبعیت از ورودی

کوچک $u(k)$ ⟵ انرژی بهینه

- control effort

جلسه چهاردهم 91,8,28

مشخصه کانی (Characteristic Loci) P.G., C.L

نمودار $\lambda_i(s)$ که به ازای s حول حسینا کیوسیت ۱ کان حسینا کیوسیت نامیده می‌شوند.

برای پیدا کردن رابطه بین P.G و C.L ابتدا بررسی می‌کنیم:

تعریف: ماتریس Q مربعی نرمال است اگر

$$Q^H Q = Q Q^H$$

قضیه: فرض کنید ماتریس Q نرمال باشد آنگاه $Q(s)$ برابر است با:

$$Q(s) = W(s) \Lambda(s) W^{-1}(s)$$

$$\Lambda(s) = \text{diag}\{\lambda_i(s)\}$$

در این صورت:

$$W^H(s) = W^{-1}(s)$$

قضیه: فرض کنید $Q(s)$ نرمال باشد با مقادیر ویژه $\{\lambda_i(s)\}$ و P.G $\{\sigma_i(s)\}$ آنگاه می‌توان $\lambda_i(s)$ را طوری مرتب کرد که به ازای همه s و $\forall i$ $\sigma_i(s) = \lambda_i(s)$

اثبات:

$$\bar{\Sigma}(s) = \text{diag}\{\sigma_i(s)\}$$

$$\Lambda(s) = \text{diag}\{\lambda_i(s)\}$$

چون $Q(s)$ نرمال است:

$$Q(s) = W(s) \Lambda W^H(s)$$

$$= W(s) \Lambda W^{-1}(s)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(s)\, \omega_i(s)\, \omega_i^H(s)$$

$$\lambda_i(s) = \rho_i(s)\, e^{j\theta_i(s)} \quad , \rho_i \geq 0$$ نرطحی

$$y_i(s) = \omega_i(s)\, e^{j\theta_i(s)}$$

$$Q_i(s) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i(s)\, y_i(s)\, \omega_i^H(s)$$

$$= y(s)\, \mathrm{diag}\{\rho_i(s)\}\, \omega^H(s)$$

$$y(s) = \omega(s)\, \mathrm{diag}\{e^{j\theta_i(s)}\}$$ آنگاه

$$y^H(s)\, y(s) = \mathrm{diag}\{e^{-j\theta_i(s)}\}\, \underbrace{\omega^H(s)\, \omega(s)}_{I}\, \mathrm{diag}\{e^{j\theta_i(s)}\} = I$$

$$y^H(s) y(s) = I \Longrightarrow$$ خروجی سیستم همواره نرمال می‌شود.

اثبات شود $\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{G}}^{H}(\omega) \cdot \underline{\underline{G}}(\omega)$ داریم:

$$\underline{\underline{G}}(\omega) = \underline{\underline{U}}(\omega)\, \mathrm{diag}\{\rho_i(\omega)\}\, \underline{\underline{W}}^{H}(\omega)$$

که $\underline{\underline{U}}(\omega)$ و $\underline{\underline{W}}(\omega)$ از SVD ماتریس $\underline{\underline{G}}(\omega)$ است.

لذا با توجه به اینکه مقادیر یکه‌ای SVD یکه است داریم:

$$\underline{\underline{\Sigma}}(\omega) = \mathrm{diag}\{\rho_i(\omega)\}$$

$$\Longrightarrow \rho_i(\omega) = 1 \quad \forall \omega$$

نکات: به شکل ۴ توجه کنید، شما زاویه قدر مطلق حضور افراد را می‌توانید از این سیستم حلقه بسته تخمین بزنید.

۱) حضور خوب شان می دهد که ممکن است سیستم حلقه بسته را می‌توان از روی قدر مطلق حضور مکانی بدست آورد. ؟ سوک زیاد ام از حلقه بسته است

مکان هندسی حضور را سیستم حلقه بسته را تخمین می‌زنیم.

۲) خیانتکار طراح نخواهد به کمک P.C.A حضور بر سیستم پنهان آن است که ۱۲ را طوری بسازد که GIR نرمال شود سپس ۱۲ را حضور کند.

می‌خواهیم سیستم حلقه بسته را دقیقاً حضور بدهیم ۱۲ را خیانتکار می‌کنیم که GIR نرمال شود و Singular value سیستم حلقه بسته Singular Value

۳. یکی از دلایل مهم تأثیر حضور این است که GIR نرمال باشد و آن است که خاصیت مقادیر ویژه ماتریس به تقسیم و ایده‌ی آن ماتریس می‌نیم خواهد بود اگر آن ماتریس نرمال باشد.

refrences:

The algebric eigen value problem

1965

Oxford

Wilkinson

توجه کنید هر چند ممکن است ماتریس تفاوت پرسشت رقیق نرمال نباشد اما بتوان از P.C.A به جای استفاده کرد. تا زمانیکه پراکندگی ویژه تقریباً orthogonal باشند.

خیانچه این شرایط برقرار نباشد ماتریس تفاوت پرسشت را Skew نامند.

$$A^H = -A \Rightarrow \text{Skew}(A)$$

یعنی: میدان کنیم بفهمیم ماتریس چقدر به نرمال بودن نزدیک است = Skew

اگر رقیق نرمال باشد PCA می‌شود و اگر نباشد به شباهتی از آن بدست می‌آید که چقدر با رقیق نرمال فاصله دارد.

روش زیر برای اندازه‌گیری Skewness ماتریس مربعی G توسط مک فارلن Mak Farlen بیان شده است.

ابتدا تفکیک Schur را بر ماتریس می‌نویسیم.

$$G = S(D+T)S^H$$

D ماتریس قطری

S ماتریس یکه

T ماتریس اکیداً مثلثی

ماتریسی که عناصر قطر آن صفر باشد.

مثلثی

یکی از فرمهای Fundamental که از این تجزیه بدست می‌آید

آنگاه میزان skewness : $mS(G) = \frac{\|T\|_F}{\|G\|_F}$

$\|x\|_F \triangleq \sqrt{tr(x^* x)}$

Fribenius

$0 \leq mS(G) \leq 1$ ⟶ if $mS(G)=1$ ⟹ Skew شدید

↑ skewness کل اندازه میزان (mesurale) if $mS(G)=0$ ⟹ Skew نرمال

حد بالا و پایین تنگ کلاک اندازه $mS(G)$ را توان به حجم C.L مرتبط کرد همچنین تنگ کلاک مقدار اختلاف بین P.G و C.L اندازه $mS(G)$ است

$$mS(G) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 \left(1 - \frac{\rho_i^2}{\sigma_i^2}\right)}{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} (\sigma_i^2 - \rho_i^2)}{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2}}$$

ρ_i مقادیر حدی:

از همین Skew شد

$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i(ss)|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2}$

$i = 1, \dots, m$

پس چیزی با نام گوان هندی دیگر نداریم C.L حتی گوان دیگر اونم برای سن نورمال بودن آنرمال هم نشد Skew تعریف شد.

Skew میکم نشد تا اختلافشون (PG و CL کم شد) آنرمال شد حتی چقدر هم تقسیم تقریب نرمال و Skewness

Robustnes :

خطای مدل سازی و پیدایش در برابر تغییرات پارامتری :

مدل سازی خطا به دو روش انجام می‌پذیرد: ← 1. مطلق

← 2. نسبی

1. خطای مطلق : اگر تابع تبدیل ناحی را $G(s)$ و تابع تبدیل واقعی را $\bar{G}(s)$ بنامیم تعریف می‌کنیم.

$$E(s) = \bar{G}(s) - G(s)$$

عموماً $E(s)$ شخص نیست اما کرانی از تغییرات آن معلوم است.

(این معنی که طیفی است مثل تغییر مقدار R نت؛ دمای اتاق)

$$\bar{\sigma}(E(j\omega)) \leq l(\omega)$$

$$\bar{G}(s) = E(s) + G(s)$$

مدل شده + خطا — مدل واقعی

$\bar{G}(s)$ مدل واقعی

نامعینی جمعی : به این نوع خطا گفته می‌شود.

شرط: حتماً باید حرفی با شد و $\bar{G}$ و G هکوس هم داشته باشند

$$\begin{cases} E(s) = \bar{G}^{-1}(s) - G^{-1}(s) \\ \bar{\sigma}(E(j\omega)) \leq \hat{l}(\omega) \end{cases}$$

(#)

کرانهٔ $l(\omega)$ و $\hat{l}(\omega)$ هم برابر نیستند.

(*) $\bar{G}(s) = [G^{-1}(s) + E(s)]^{-1}$

طبق لم دارون حالتی ← $\bar{G}(s) = [I + G(s)E(s)]^{-1} G(s)$ ✓

این نوع صرلیتی برای خطا مناسب نیست چون

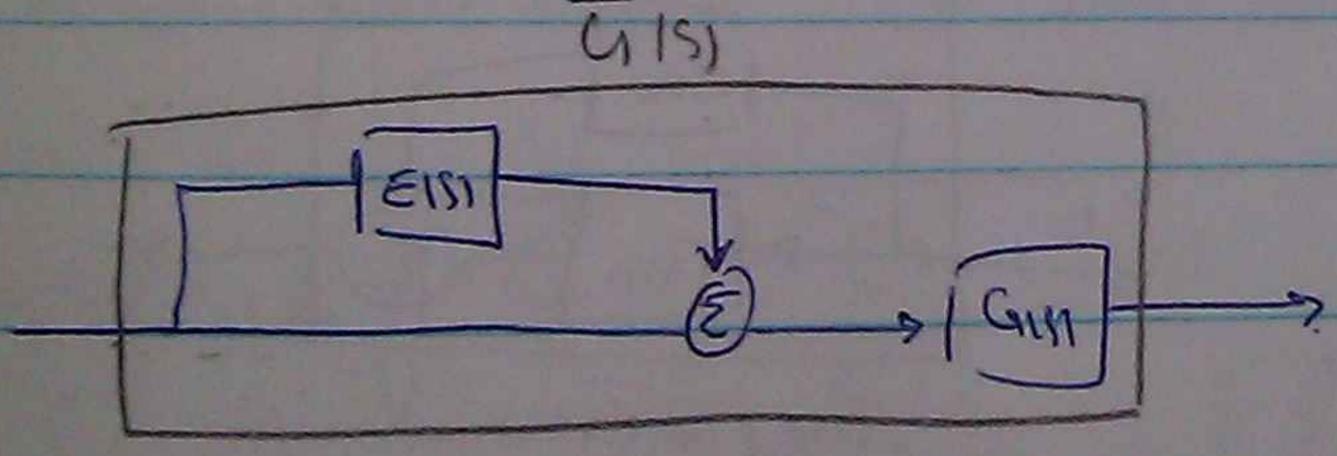
دقت تراشه: $(\frac{1}{100})$ $e:1 \longrightarrow 99 \longrightarrow 100$ برابر تراشه

خطای جهش برای خطای مدل زن خوب نیست. $(\frac{1}{10})$ $e:1 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10$

برحسب کنترل ناحیه به طور جهش حالت صحیح از تنشات نیز نداریم، پس مناسب نیست.

2. خطای نسبی:

که به صورت ضربی تعریف می‌شود:



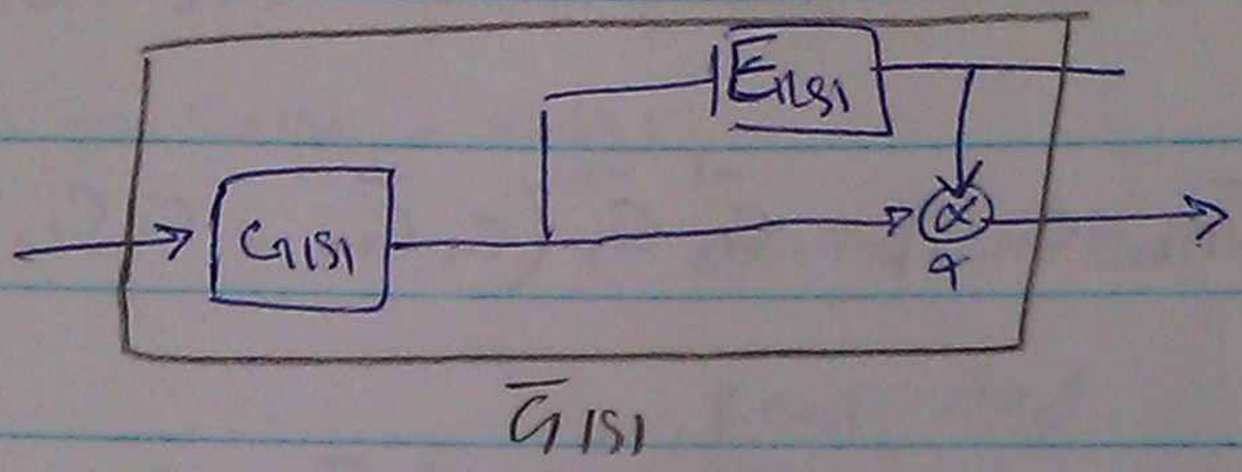
✓ $\bar{G}(s) = G(s)[I + E(s)]$

خطای نسبی $E(s) = G^{-1}[\bar{G}(s) - G(s)]$ ✓

$\bar{\sigma}(E(j\omega)) \leq l_w$

→ post Multiplicative modeling error

pre Multip. mod. error



$$E(s) = G(s)\left[\tilde{G}^{-1}(s) - G^{-1}(s)\right]$$

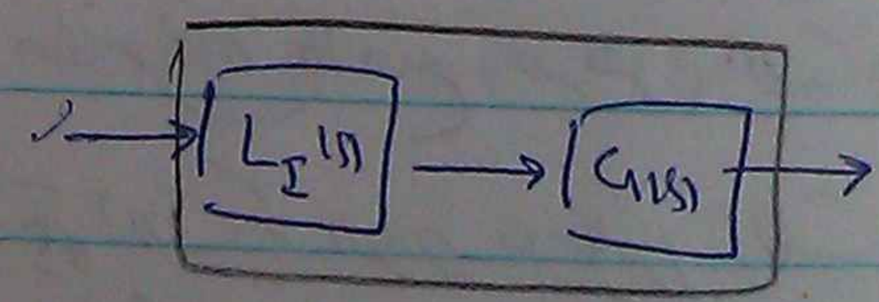
$$E(s) = \left[\tilde{G}^{-1}(s) - G^{-1}(s)\right] G(s)$$

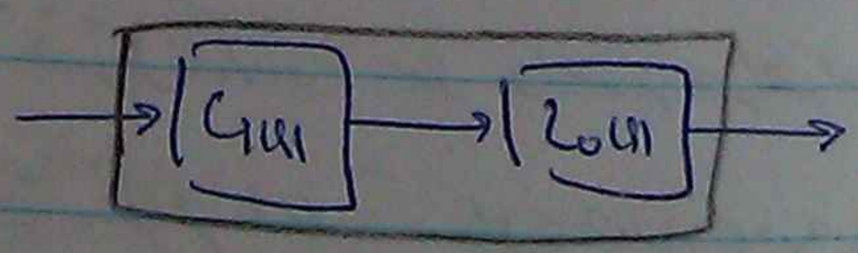
نحوه رسم:
شرط صحیح بودن و وارون پذیری

در برخی مواقع نیز لازم است خطا را به شکل زیر بیان می‌کنیم:

$$\tilde{G}(s) = G(s)\, L_I(s)$$ → خطا ورودی

$$\tilde{G}(s) = L_O(s)\, G(s)$$ ← خطا خروجی



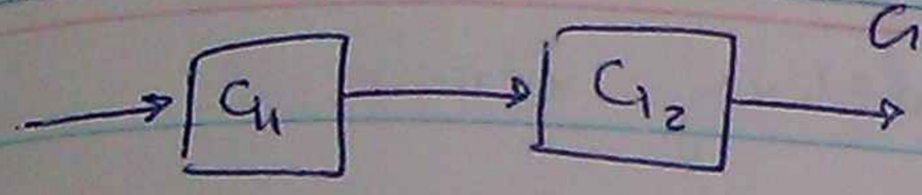


انتخاب هر کدام از روش‌های مدل‌سازی خطا بستگی به کاربرد آن خواهد داشت.
(کدام یک؟ مجموعه کمتری را به ما می‌دهد؟)
مجموعه عدم‌اطمینان کوچک‌تر (در این حالت می‌توان خطا را فشرده کرد.)
کنترل راحت‌تر خواهد بود.

کد در اضافه طراح الات.

G_1

تنظیم بهره خط



$$G = G_1 G_2$$

خطا مطلق : $\bar{G}(s) - G(s) = G_1 \bar{G}_2 - G_1 G_2 = G_1 (\bar{G}_2 - G_2)$

خطا نسبی : $\bar{G}^{-1}(s)\left(\bar{G}(s) - G(s)\right) = \bar{G}_2^{-1} \bar{G}_1^{-1} (G_1 \bar{G}_2 - G_1 G_2)$

$$= \bar{G}_2^{-1} \underbrace{\bar{G}_1^{-1} G_1}_{I} (\bar{G}_2 - \bar{G}_2)$$

$$= \bar{G}_2^{-1} (\bar{G}_2 - G_2)$$

علت خرابی خطای نسبی : وابسته به G_2 (خطای متناظر شبیه به Feedback که داریم خطا الات)

✓ با توجه به توضیحات فوق : خرابی صفر شدن خطای نسبی واضح و مبرهن الات چرا که صفر شدن خطا به این روش دقیقاً وابسته به سیستم الات که طراح الات در کنترل کننده خود صفر شدن به صورت مطلق به کنترل کننده نیز وابسته خواهد بود و کنترل کننده نیز که مشخص نمودن دلات طراح الات پس خیلی بی فایده و بی معنا الات.

جلسه 15 : 91/9/12

قضیه پایداری مقاوم:

فرض کنید سیستم واقعی ($\overline{G}(s)$) به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$\overline{G}(s) = G(s) + E(s)$$

$G(s)$: مدل نامی — nominal Mod.

$\overline{G}(s)$: مدل واقعی — Real Mod. (True)

$E(s)$: خطای مدل‌سازی — Modelling error

تابع مبدل زیر را تعریف می‌کنیم:

$$G(s,\varepsilon) \triangleq G(s) + \varepsilon E(s)$$

$$\varepsilon \in [0,1]$$

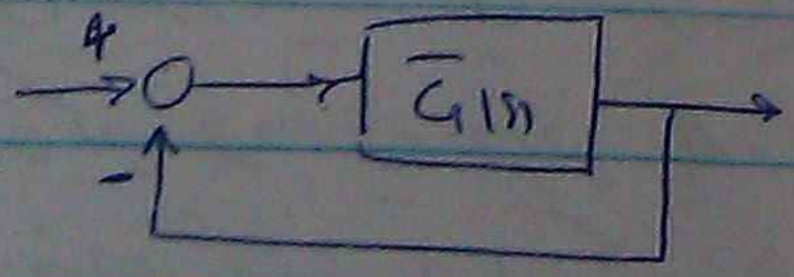
(بدترین حالت وقتی است که اتفاق بیفتد)
وقتی $\varepsilon = 0$ که خطایی وجود ندارد.

$$\Rightarrow \begin{cases} G(s,0) = G(s) \\ G(s,1) = \overline{G}(s) \end{cases}$$

$\overline{G}(s)$ → خطای مطلق = خطای واقعی

قضیه پایداری مقاوم:

حال سیستم زیر را در نظر بگیرید:



در این صورت حلقه بسته واقعی $\overline{G}_{cl}(s)$ پایدار خواهد بود اگر و تنها اگر حلقه بسته اسمی $G_{cl}(s)$ پایدار باشد و

هیچ صفری روی نیم صفحه ی واحد نخواهد داشت (سیستم حلقه بسته داخلی پایدار است.)

اگر

(1) تعداد صفرهای $\Phi_{OL}(s)$ و $\overline{\Phi}_{OL}(s)$ در نیم صفحه ی راست ρ تند کیدیر باشد

(2.1) تعداد صفرهای $\Phi_{OL}(s)$ و $\overline{\Phi}_{OL}(s)$ روی محور موهومی مانند هم باشند.

(3.1) چند جمله ای $\Phi_{CL}(s)$ صفرهای در نیم صفحه ی راست نداشته باشند

(1)

(2) اگر

$$\det\left(I + G(s,\varepsilon)\right) \neq 0$$

$$(s,\varepsilon) \in D_R \subset [0,1]$$

یا اگر دامنه حقیقی Domain

$\Leftarrow$ برقراری شرط های (1) و (2) معادل پایداری سیستم حلقه بسته موردنظر است.

برای ادامه نیاز کنیم برقراری شرط (2) را بدست خواهیم آورد:

بدین منظور کافی است نشان دهیم مجموعه ماتریس های (چندخطی) را ارضا می کنند.

فرض کنید ماتریس های مربعی A و E موجود باشند، طوری که ماتریس A نکین ناپذیر می خواهیم شرط را برای نکین نشدن $A+E$ بدست آوریم.

$$A = I$$

$$E = G(s,\varepsilon)$$

(سؤال دیگر)

اگر $A+E$ تکین باشد آنگاه بردار غیرصفر x وجود دارد که $(A+E)x=0$

بنابراین اگر تا حد بزرگی x که در رابطه $*$ صدق می‌کند؛ مجموعه N تعیین

دهیم آنگاه داریم

$$Ax=-Ex \quad , x\in N$$

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}=\frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2} \quad , x\in N$$

$$\min \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$$\frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2} \leq Max \frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2}$$

$$\min \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq Max \frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2}$$

$$\underline{\sigma}(A) \leq \bar{\sigma}(E) \qquad (**)$$

شرط $**$ ، شرط کافی است (شرط لازم نیست)

مسئله:

کوچکترین ماتریس E که ماتریس A را تکین کند پیدا کنید؟

یعنی برای A تکین

$$A=U\Sigma V^H \quad , \Sigma=\begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix}$$

تجزیه مقدار منفرد

σ_n

$|A+E|=0$ شود.

$\varepsilon = u\vec{z}', v^{\mu}, \vec{z}' = ?$

$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow |A + \varepsilon I| = 0$

ابتدا مقادیر ویژه را بدست می‌آوریم.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(10-\lambda)(5-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 5$$

بردار ویژه متناظر با λ_1 را بدست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 10-10 & 0 \\ 0 & 5-10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-5y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه متناظر با λ_2 را بدست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 10-5 & 0 \\ 0 & 5-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$5x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه بدست آمده بر هم عمودند.

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس بردارهای ویژه یکه را تشکیل می‌دهیم.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} (I + \varepsilon A) P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+10\varepsilon & 0 \\ 0 & 1+5\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+10\varepsilon & 0 \\ 0 & 1+5\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} (I + \varepsilon A) P = (I + \varepsilon \Lambda)$$

ماتریس قطری

$$\det(I + \varepsilon A) \neq 0 \quad \varepsilon \in [0,1], \; S \in \mathbb{R}$$

$$\det(I + \varepsilon A + \varepsilon^2 \dots) \neq 0 \quad \varepsilon \in [0,1], \; S \in \mathbb{R}$$

$$\det(I + \varepsilon A) \neq 0$$

$$\det(I + \varepsilon \Lambda) \neq 0$$

$$\det(I + \varepsilon \lambda_i) \neq 0$$

$$\det(I + \varepsilon \lambda_i) > 0$$

$$\det(I + \varepsilon \lambda_i) > 0 \quad \varepsilon > 0$$

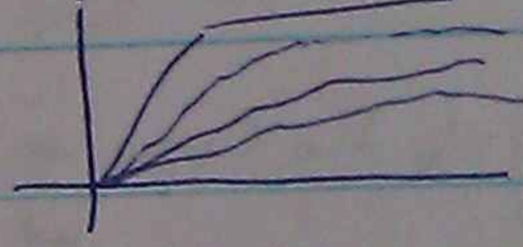
$$\det(I + \varepsilon \lambda_i) > 0 \quad \varepsilon < \frac{1}{|\lambda_i|}$$

می‌خواهیم ببینیم حداکثر خطا مان چقدر است.

فرض

Ex.

$\bar{G}(s) = \frac{e^{-Ts}}{s^2}$ سیستم داده شده $T = [0, 0.1]$ ناحیه‌ی تغییرات



سیستم تقریب زده شده $\bar{G}(s) = \frac{1}{s^2}$: سیستم ناحیه‌ی کنترل

سوال: چه خطاهای مدل سازی توابع تبدیلی که حاوی تاخیر هستند از چه نوع فیلتری دارند؟ استفاده می‌شود.

فیلتر پایین گذر چون خطا مدل سازی ما در فرکانس‌های بالا موجود است پس فیلتر پایین گذر چون فرکانس‌های بالا را حذف می‌کند.

$\frac{1}{(s+1)(s+0.1)} \simeq \frac{1}{s^2}$: تقریب زده شده از تقریب سازی ایده‌ی حذف خطا

$\sin\theta = \theta$ کوچک $\theta \simeq 0$

می‌خواهیم کران بالا بدست آوریم که ZERO تضمین دهیم (حداکثر خطا را) (به SVD نیاز داریم)

بالاترین بهترین حالت

پس از مدل سازی آغاز

سیستم کنترل → Simulation → valid

سیستم خطی

حدود

را به عنوان واقعی بپذیریم

ادامه بحث:

عالاقمند به داشتن کران بالای $E(j\omega)$ خواهیم بود. از قضیه پایداری

برای سیستم‌هایی که خطا به صورت ضربی در نظر گرفته شده باشد:

$\|W_2(j\omega)T(j\omega)\| < 1 \quad \forall \omega$

درنتیجه خطا به صورت زیر تعریف شده باشد:

آر خطا به صورت ضربی تعریف شود، $\bar{G}(s) = G(s)(I + E(s))$

در تعریف خطای ضربی باید $G(s)$ معکوس پذیر باشد تا $|I + G(s)| \neq 0$ خروجی تعریف نباشد.

$$E(s) = G^{-1}(s)(\bar{G}(s) - G(s))$$

$$(I + \bar{G}(s)) = (I + G(s) + G(s)E(s))$$
$$= G(s)(G^{-1}(s) + I + E(s))$$

چون $G(s)$ ماتریس مربعی است (فرض لوسیون بود) لذا $\det(G(s)) \neq 0$ پس

$$\det(G(s)(\bar{G}^{-1}(s) + I + E(s)))$$

$$= \underbrace{\det[G(s)]}_{\neq 0} \cdot \det[I + \bar{G}^{-1}(s) + E(s)] \neq 0$$

$$\Rightarrow \det[I + G^{-1}(s) + E(s)] \neq 0$$

$$\forall \omega \quad \bar{\sigma}(E(j\omega)) < \underline{\sigma}(I + G^{-1}(j\omega)) \quad \checkmark$$

پس حفظ پایداری مقاوم سیستم با این خطا رو به چه صورت مدل سازی کرده باشیم این شرایط را ارضا می باید بررسی کنیم.

حقه شرایط او 2 بر قرارنیت حمیدریم از جبران زک استفاده کنیم.

$$G_{cl}(j\omega) = G_1(j\omega)\, K(j\omega)$$

فرض کنید: $I + G_1(j\omega) K(j\omega) = 0$ (فقط در جبران ز داریم خطا)

↓ سیم ↓ جبران ز (کنترل کننده) فقط در سیم ا.ت.)

چون امکان خطا در G_1 وجود دارد پس:

$$E_0(j\omega) = \bar{G}_1(j\omega)\left(\bar{G}_1(j\omega) - G_1(j\omega)\right) = \bar{K}^{-1}(j\omega)\,\bar{G}_1^{-1}(j\omega)\left[\bar{G}_1(j\omega)K(j\omega) - G_1 K\right]$$

$$= \bar{K}^{-1}\bar{G}_1^{-1}\left[\bar{G}_1 - G_1\right]K$$

$$= \bar{G}_1^{-1}(j\omega)\left[\bar{G}_1(j\omega) - G_1(j\omega)\right] \triangleq E_I(j\omega)$$

↳ Input

لذا شرط پایداری مقاوم به صورت زیر خواهد بود.

$$\bar{\sigma}(E_I(j\omega)) < \underline{\sigma}\left[I + (K(j\omega)G_1(j\omega))^{-1}\right]$$

از طرفی می دانیم:

$$\underline{\sigma}\left(KG_1(I + KG_1)^{-1}\right) = \frac{1}{\bar{\sigma}\left(I + (KG_1)^{-1}\right)}$$

$$= \bar{\sigma}\left(I + (KG_1)^{-1}\right)^{-1}$$

H∞

$$\bar{\sigma}\left(L(\omega)KG_1(I + KG_1)^{-1}\right) < 1$$

لذا داریم:

$$\sup_{\omega} \bar{\sigma}\left(L(\omega)H_{cl}(j\omega)\right) < 1$$

نیز شرط فوق پس

تابع تبدیل $G(j\omega)$ را، اوتوکت $G_1(j\omega)$ و $H(j\omega)$ حساب شود.

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)\, H(j\omega)$$

جلسه 16. 91,9,14

Characteristic Loci (C.L)

$r(s) \rightarrow [G(s)] \rightarrow y(s)$

اگر $r(s)$ یک ورودی پله‌ی n تایی ورودی باشد.

$r(s) = \frac{1}{s} P_i \qquad P_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow$ n تایی

با اعمال این ورودی تمام خروجی‌ها واسط interaction تفسیر نشده فرض شده

خروجی لازم حاکم باشد.

هدف این است پاسخ پله باشد.

$G(s)$ تقریبا کوپل باشد.

$$y(s) = G(s) r(s)$$

$$y(s) = \frac{P_i(s)}{s} e_i$$

$$\frac{P_i(s)}{s} e_i = \frac{G(s)}{s} P_i$$

$$(SI - A)V = 0$$

$$SV = AV$$

$$\Rightarrow P_i(s) e_i = G(s) e_i$$

این رابطه نشان می‌دهد که رعایت ایده‌ی قبل وقتی کامل می‌شود.

e_i یک بردار ویژه و $P_i(s)$ یک مقدار ویژه برای $G(s)$ است.

(بالاصلی - پایین صفحه) تقسیم

بدین مقدار

در این حالت اگر ورودی در جهت n تایی و $G(s)$ تشدید شود Decoupled باشد.

خروجی در جهت n تایی و مقدار بهره آن مقدار ویژه مرتبط با آن است.

نکات مفید:

① فرض کنید w_i دارای بردار ویژه v_i و مقدار ویژه g_i باشد و بردار ویژه چپ v_i^+ باشد.

$$Gw_i = g_i w_i$$

$$v_i^* G = g_i v_i^*$$

$$w = [w_1 \; \cdots \; w_n] \qquad v^+ = [v_1^+ \; \cdots \; v_n^+]$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_n \end{bmatrix}$$

توجه کنید g_i ها ویژه مقادیر ماتریس متقارن هستند.

$$G = W \Lambda V$$

$$WV = I$$

هر ضرب W_{ij} ها ماتریس متقارن است و G_{ij} حقیقی است.

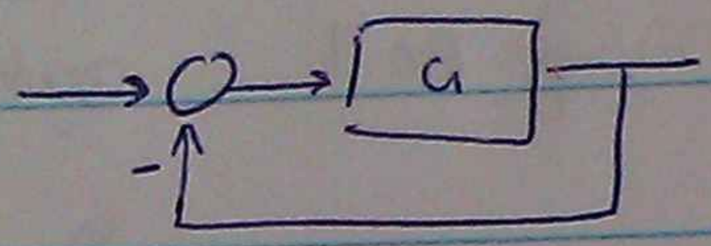
* ماتریس تقارن برگشت

$$F_{(s)} = \underline{I} + G_{(s)}$$

$$\Rightarrow F_{(s)} = WV + W\Lambda V$$

$$= W(I + \Lambda)V$$

F هم دارای همان بردارهای ویژه G است و $f_i = 1 + g_i$



$$M(s) = (I + G)^{-1} G$$

$$= (WV + WNV)^{-1} WNV$$

$$:= (W(I+N)V)^{-1} WNV$$

$$= V^{-1}(I+N)^{-1} \underbrace{W^{-1} W}_{I} NV \qquad V^{-1} = W$$

$$= W(I+N)^{-1} NV$$

M هم دارای همان بردارهای ویژه است اما دارای مقادیر ویژه

$$P_i(s) = \frac{g_i(s)}{1 + g_i(s)}$$

Commute آنگاه $AB = BA$ و اگر $AB \neq BA$ به خاصیت کلی

باشند و این زمانی رخ می‌دهد که A و B دارای بردارهای ویژه یکسان

و برابر باشند.

$$A = WNV \qquad \Rightarrow \qquad AB = WN^2V$$

$$B = WN^2V \qquad BA = WN^2V$$

$$\Longrightarrow N^2 = N^2$$

principal of Argument ⇐ POA

N_F : تعداد دوران حول مرتبط تفاضل ترمینال F

$$N_F = N_C - N_O \quad \begin{matrix} \swarrow \text{zero} \\ \nwarrow \text{pole} \end{matrix}$$

$$F = 1 + g$$

$$N_F = N'_g$$

سیستم SISO برابر:

تعداد دوران نیت : g حول نقطه ۱-

سیستم MIMO :

$$N_F = N'_G$$

$$F_i = 1 + g_i$$

$$|F| = 1 + |G|$$

$$|F| = \prod_{i=1}^{n} F_i = \prod_{i=1}^{n} (1 + g_i)$$

$$N(0, F_1 F_2, D) = N(0, F_1, D) + N(0, F_2, D)$$

$$N_F = \sum_{i=1}^{n} N_{F_i} = \sum_{i=1}^{n} N'_{g_i}$$

تعداد دوران تصویر منفی D شکل مرتبط ترمینال F برابر است با مجموع

تعداد دوران نقوی منفی D شکل تحت مجموع مقادیر ویژه

$$\sum_{i=1}^{N} N'_{g_i} = n_c - n_o$$

تعداد حفره‌ای حلقه باز تحت رانت

تعداد حفره‌ای حلقه بسته تحت رانت

لذا این سیستم حلقه بسته MIMO که دارای فیدبک حلقه‌ها پایدار است آنگاه اگر و فقط اگر مجموع تعداد دوران حول نقطه بحرانی -1 تحت نگاشت دترمینان نایکوئیست مقادیر ویژه (G(s)) برابر با تعداد حفره‌ای ناپایدار حلقه باز باشد.

نکات:

1) مجموع تعداد را با در نظر گرفتن جهت باید می‌شمارد

2) تست پایداری برای $G(s)$ و یا $R(s) = K$ باید در نظر گرفت

3) با انتخاب K_i و پایداری جواب حاصل می‌شود.

$R_i = 1 \in g_i$

$F = I - g$

$K = diag[K_1 \longrightarrow K_n]$ ← یعنی K را قطری فرض کردیم.

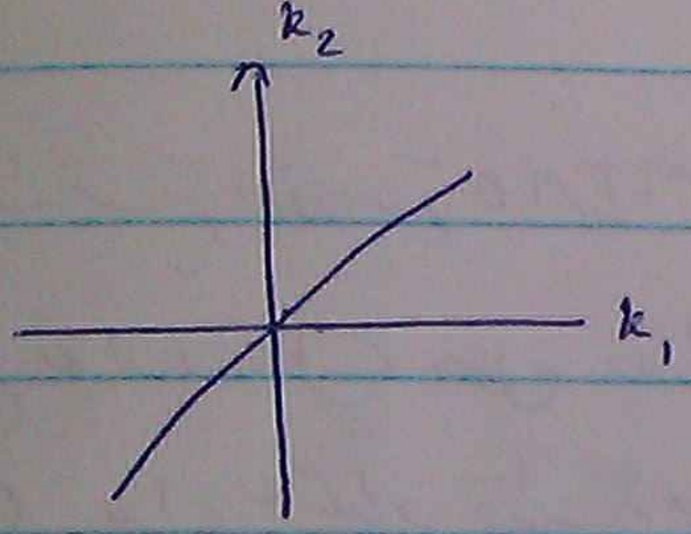
$k_1 = \cdots = k_n$ در حالت کلی مقادیر ویژه $C_1 K$ نامعلوم است آنگاه

$F = I + k C_1$ حول می خواهیم $\sim$ $\dot{x} = kC_1 = GK$

به ازای چه k ای کار خوش می شود.

به دلیل پایه متقارن تنها نسبی لازم می شود. Propardional

$k_2 = k_1$ نقطه بحرانی رخ می دهد.



مثال

$$Q = \frac{1}{1.25(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s-1 & 5 \\ -6 & s-2 \end{pmatrix}$$

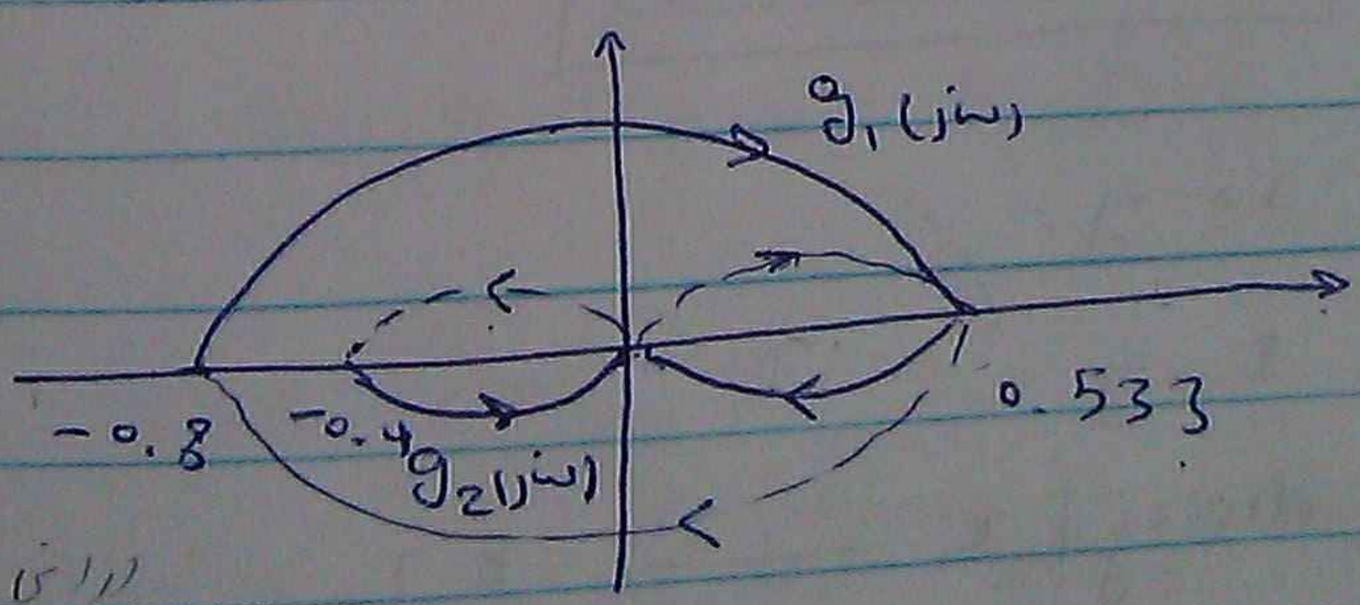
معادله مشخصه حلقه باز

خطاک ناپایدار

$$P(s) = (s+1)(s+2) \longrightarrow n_0 = 0$$

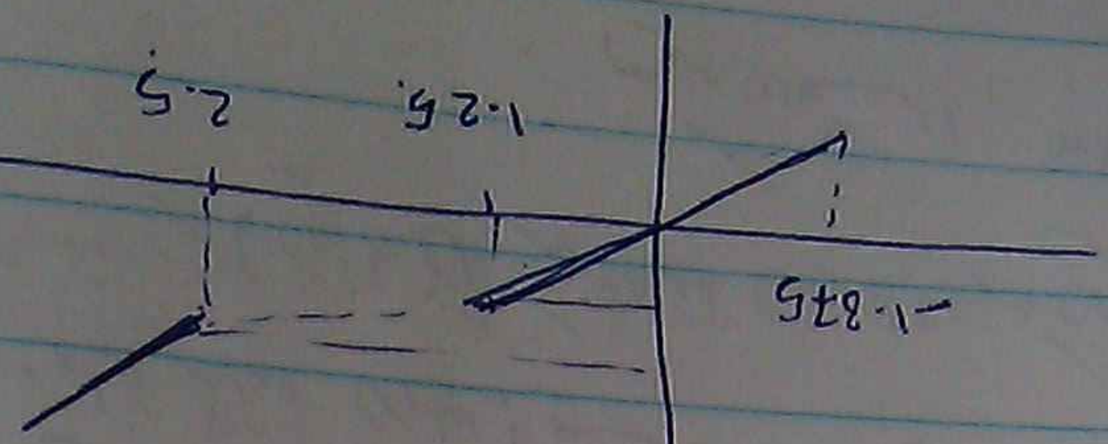
$$0 = |sI - Q| \Rightarrow g_1, g_2$$

روش گرافیکی در $s = j\omega$ $\Rightarrow |j\omega I - Q| = 0$



را دور کرد

را دور کرد



$$0 < -\frac{1}{k} < 0.533 \rightarrow -\infty < k < -1.875 \rightarrow \begin{cases} N'_1 = 2 \\ N'_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \sum N'_j = 2$$

$$\rightarrow N_c = 2$$

$$0.533 < -\frac{1}{k} < \infty \rightarrow -1.875 < k < 0 \rightarrow \begin{cases} N'_1 = 0 \\ N'_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \sum N'_j = 0 \rightarrow N_c = 0$$

$$\begin{cases} 2.5 < k < \infty \\ -1.875 < k < 1.25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N'_1 = 1 \\ N'_2 = -1 \end{cases} \rightarrow \sum N'_j = 0 \rightarrow N_c = 0$$

$$-0.4 < -\frac{1}{k} < 0 \rightarrow +2.5 < k < +\infty \rightarrow \begin{cases} N'_1 = 1 \\ N'_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \sum N'_j = 1 \rightarrow N_c = 1$$

$$-0.8 < -\frac{1}{k} < -0.4 \rightarrow +1.25 < k < 2.5 \rightarrow \begin{cases} N'_1 = 1 \\ N'_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \sum N'_j = 1 \rightarrow N_c = 1$$

$$-\infty < -\frac{1}{k} < -0.8 \rightarrow 0 < k < 1.25 \rightarrow \begin{cases} N'_1 = 0 \\ N'_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \sum N'_j = 0$$

$$\rightarrow N_c = 0$$

$$\begin{cases} 2.5 < k < \infty \\ -1.875 < k < 1.25 \end{cases} \rightarrow \text{دو ریشه حقیقی}$$

$$-0.4 < -\frac{1}{k} < 0 \rightarrow +2.5 < k < +\infty \rightarrow \begin{cases} N'_1 = 1 \\ N'_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \sum N'_j = 1 \rightarrow N_c = 1$$

$$-0.8 < -\frac{1}{k} < -0.4 \rightarrow +1.25 < k < 2.5 \rightarrow \begin{cases} N'_1 = 1 \\ N'_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \sum N'_j = 1 \rightarrow N_c = 1$$

$$-\infty < -\frac{1}{k} < -0.8 \rightarrow 0 < k < 1.25 \rightarrow \begin{cases} N'_1 = 0 \\ N'_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \sum N'_j = 0$$

پایداری سیستم حلقه بسته را از روی مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه حلقه بسته رسم کنید. سپس با استفاده از معیار پایداری نایکوئیست پایداری سیستم را بررسی کنید.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s-1)}$$

طراحی :

خطای حالت ماندگار : Steady state error

تابع تبدیل حلقه بسته :

$$M = \frac{G}{1 + GH}$$

$$P_i = \frac{g_i}{1 - g_i}$$

این مقادیر در دیژیتال بین ۰ و ۱ است

فرض کنید $|1 - g_i| \gg 1$ برای تمام i ها و برای برخی فرکانس ها

آنگاه $P_i \simeq 1$ برای اینکه tracking خوب صورت گیرد شرط این است که

$$|1 - g_i| \gg 1$$

در این صورت

$$(I + HG)^{-1} H \simeq I$$

$$\rightarrow M = G^{-1} H = I$$

به عبارتی باید بهره را در فرکانس پایین خیلی زیاد باشد.

(integral action) tracking در فرکانس پایین رخ دهد.

نقطه مقابل حاشیه پایداری مدنظر قرار گیرد.

عموماً برای این کار (بالا بردن بهره فرکانس پایین) از

integral action استفاده می‌کنیم.

SISO : آن سیستم‌هایی که دارای یک ورودی و یک خروجی هستند و با مقادیر ورودی) در

مدار آن فرمان حرکت می‌شود. (یا خروجی صفر اش)

اگر شرایط اولیه را به گونه‌ای تعیین کنیم که روابط بدون ورودی ثابت باشد همان وکنش طبیعی با سنگی و دوری عملگرها شرکت می‌کنند. اگر قرار نباشد interaction داشته باشیم رابطه کلی حاکم کامل است یعنی آنچه ما داریم وجود ذرات را بدون در نظر گرفتن تأثیر متقابل بین آنها می‌دانیم پس باید وجود ذرات بدون ورودی ثابت باشد. وجود e_i که دیگر از بین نرود یعنی باید $\omega_i(s_0)$ با هم موازی باشند با اندازه مختلف که در $\frac{g_i}{1+g_i}$ ضرب شده

بررسی Interaction

فرض کنید $\omega_i(s_0) \simeq e_i$ → بردار یکه الصق

حرارت دهیم ذرات فقط خودش ذرات در حقیقت یک بردار یکه ای الصق بردار ورودی $S=S_0$ در

بعبارتی: $\omega_i(s_0) \parallel e_i$ یا تقریباً موازی است آنگاه: $K=\frac{g}{1+g}$

خروجی بردار یکه این دو یکی میشود

$$R(s_0)\,\omega_i(s_0) = P_i(s_0)\,\omega_i(s_0) \qquad y_1 = K_1 e_1 = \frac{g_1}{1+g_1} e_1$$

$$y_2 = K_2 e_2 = \frac{g_2}{1+g_2} e_2$$

یعنی در حقیقت ذرات تقریباً هیچ interaction وجود ندارند لذا برای:

آن خروجی درست برداری که ذرات فقط حاضر باشند بدون ورودی حرکت بدهند.

$$P_i(s)\, e_i \simeq R(s_0)\, e_i$$

هر چی اختلاف موازی بودن کم شود یعنی حالت موازی بودن بیش بر interaction غلبه می‌شود.

لذا برای بدست آوردن interaction باید اندازه گیری کنیم که $\omega_i(s_0)$ چقدر با e_i موازی نیست. این اندازه گیری یا بدست آوردن زاویه بین

ω_i و e_i بدست می‌آید که به آن

Mis alignment angle

گفته می‌شود.

(M.A)

(این سؤال امتحانی بدست آوردن همین است.)

مقدار تقلب ۴ و ۵.۱

تعریف:

$$\cos\theta_i = \frac{|w_i^+ e_i|}{\|w_i\| \|e_i\|}$$

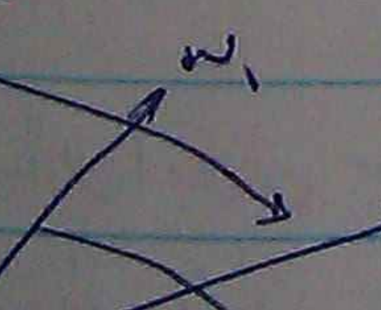
$$w_i^+ e_i = (w_i)_i$$ مولفه ام w_i

$$\Rightarrow \cos\theta_i = \frac{|(w_i)_i|}{\sqrt{w_i^+ w_i}}$$ ✓

$\|e_i\| = 1$

نکات M.A

۱. توجه کنید که M.A را می‌توان به صورت زاویه بین دو بردار حقیقی بیان کرد.



$$\cos\theta = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|}$$

۲. θ_i متعلق به طبقه ام است

۳. می‌توان M.A را مرتب کرد (به شکل زیر توجه کنید)

(مفهومش اینه که θ_1 از θ_2 کوچکتر است و w_1 جلوتر از w_2 قرار گرفته)

$$EX:\quad G_{(S)} = \begin{bmatrix} \frac{10se9}{95(Se11)} & \frac{-10}{9}\left(\frac{1}{Se1}\right) \\ \frac{1}{9(Se1)} & \frac{9-5}{95(Se1)} \end{bmatrix}$$

مطلوبیت محاسبه interaction: (از روی M.A قابل بررسی میشود.)

$$|gI - G| = 0 \longrightarrow g_1 = 1/s$$

$$g^2 s^2 (Se11) - gs(Se2) + 1 = 0 \qquad g_2 = \frac{1}{S(Se1)}$$

$$Gw_i = g_i w_i$$

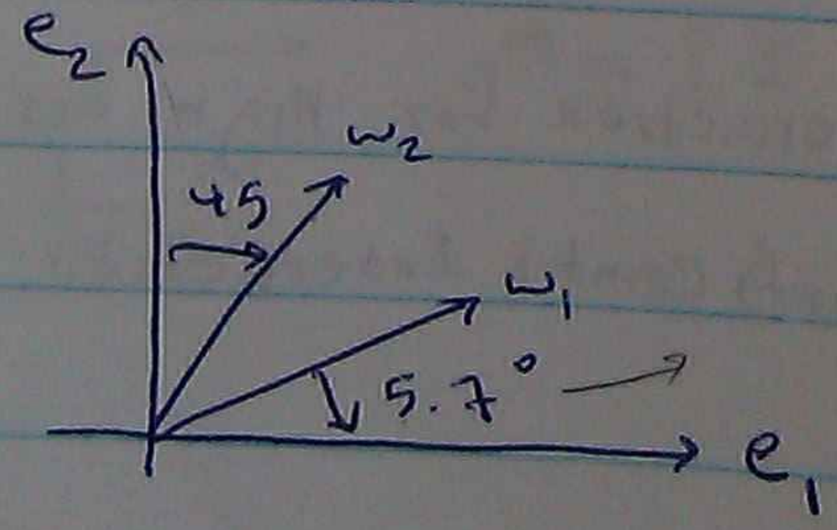
$$\longrightarrow w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ازاین صورت θ_i تابعی از ζ (فرکانس) است لذا برای فرکانس‌های مختلف قابل ترسیم است.

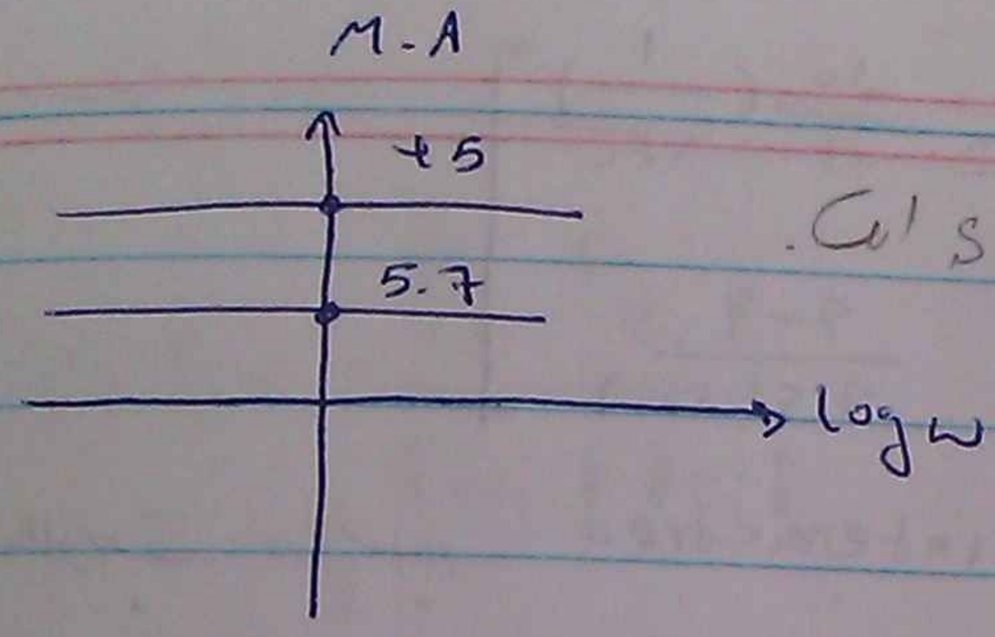
$$\cos\theta_1 = \frac{\|(w_1)_1\|}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0.1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1.01}}$$

$$\Longrightarrow \theta_1 = 5.7^\circ$$

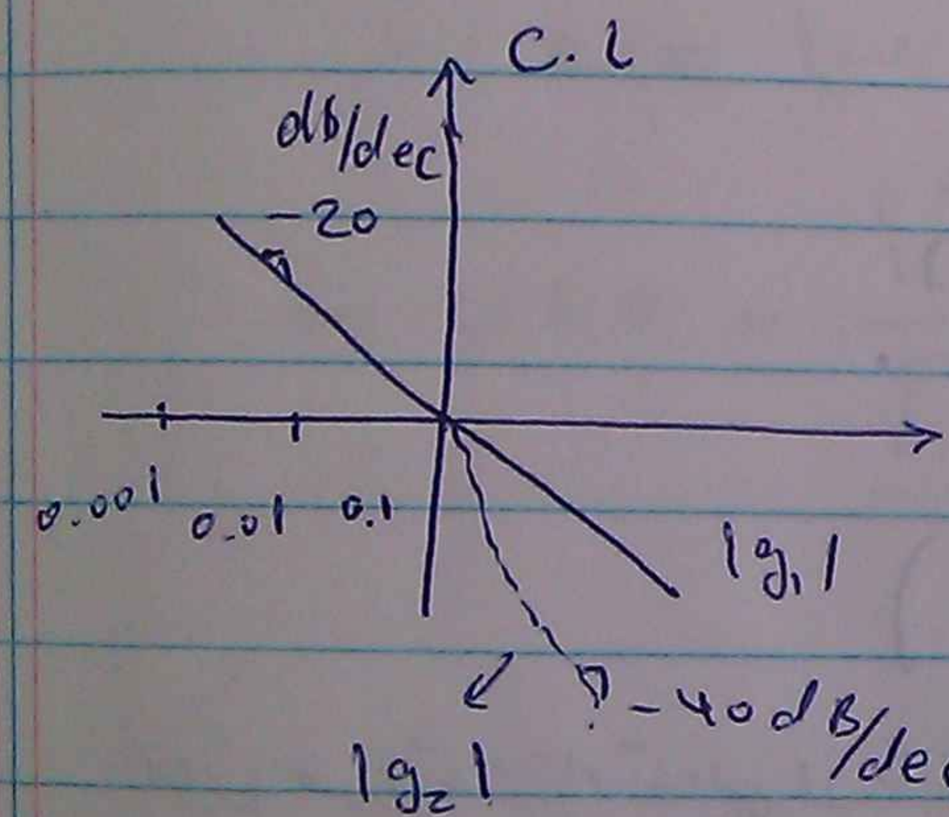
$$\cos\theta_2 = \frac{\|(w_2)_2\|}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \theta_2 = 45^\circ$$



(روش interaction)



C.L همان مقادیر ویژه ای که گفتیم تابعی از s است.



No : S.S.e

خطا حالت ماندگار داریم: نه چون انتگرال گیر داریم

داشتن بزرگ interaction 5.7^2

که داریم.

انتگرال گیر integral action داریم.

رفتار گذرا: (حالت گذرا)

گذرا بالاست dynamic یک

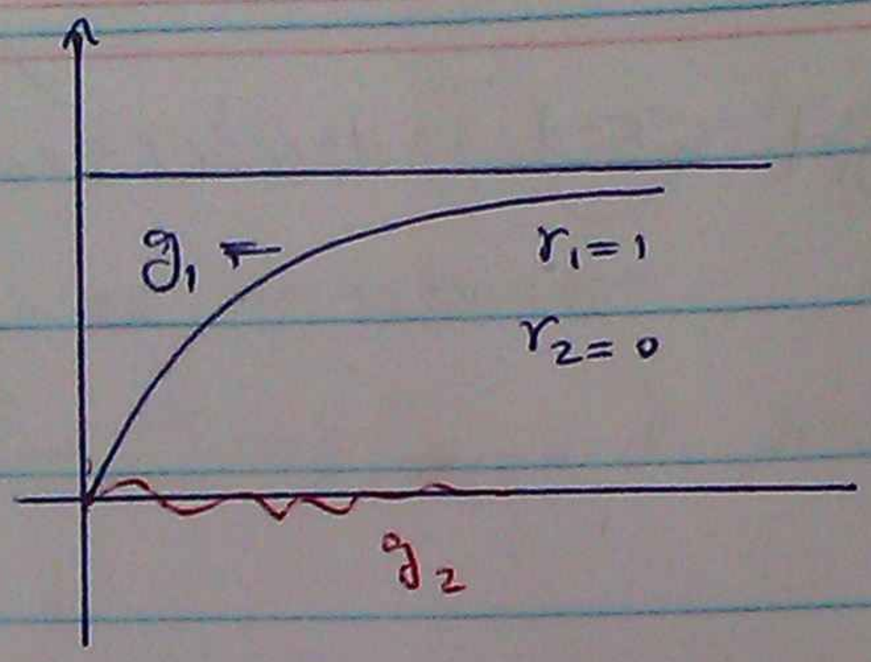
$$\lim_{t \to 0} g(t) = \lim_{s \to \infty} sg(s)$$

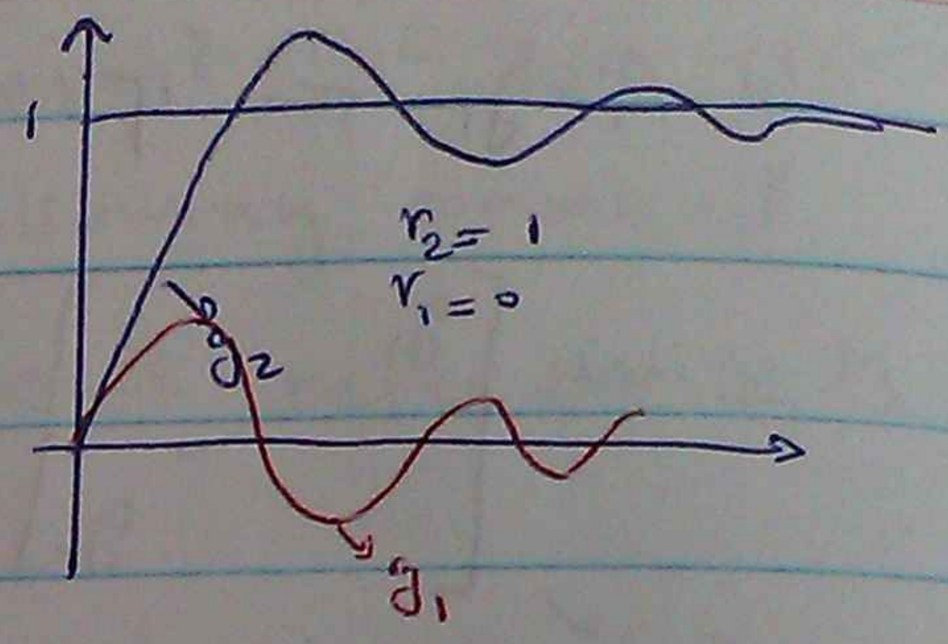
1) می دانیم $|g_1|$ و $|g_2|$ در گذرا بالا کوچک هستند پس

$|g_1|, |g_2| \ll 1$ هستند پس این صورت باید M.A را بررسی کرد.

فرکانس بالا $\rightarrow \theta_1 \simeq 6 \longrightarrow$ small Interaction for High Rerequency

فرکانس پایین $\theta_2 = 45 \longrightarrow$ large (significant) Interaction for H.F

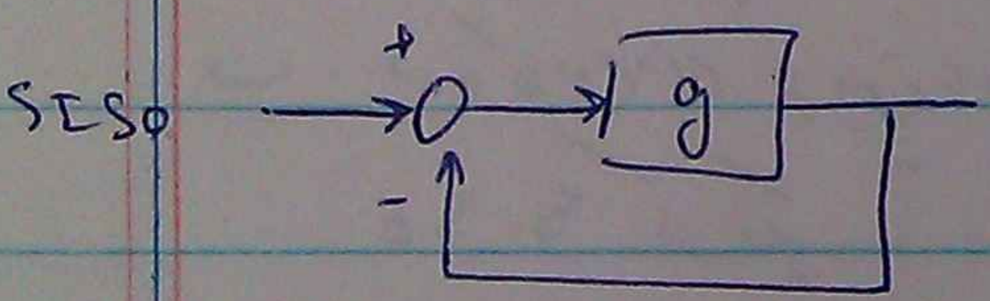




خروجی به ازای ورودی پله: g_1 خروجی به ازای ورودی پله: g_2

مراحل طراحی به روش L.C :

1)



$$M(s) = \frac{g(s)}{1 + g(s)}$$

$$\xrightarrow[|g|<1]{\text{وقتی } |g| \ll 1} M \simeq g(s)$$

$$\text{MIMO} \xrightarrow{\text{در حالت کلی}} M = [I + G]^{-1} G$$

$$\xrightarrow{\text{در حالت کلی } G \text{ ها} \ll 1} M \simeq G$$

در حالت کلی ما G ها فیدبک را از بین می‌بریم.

12 در فرکانس گذر بالا $|g_i| << 1$ برای تمام i ها $\Leftarrow P_i = g_i$ پس

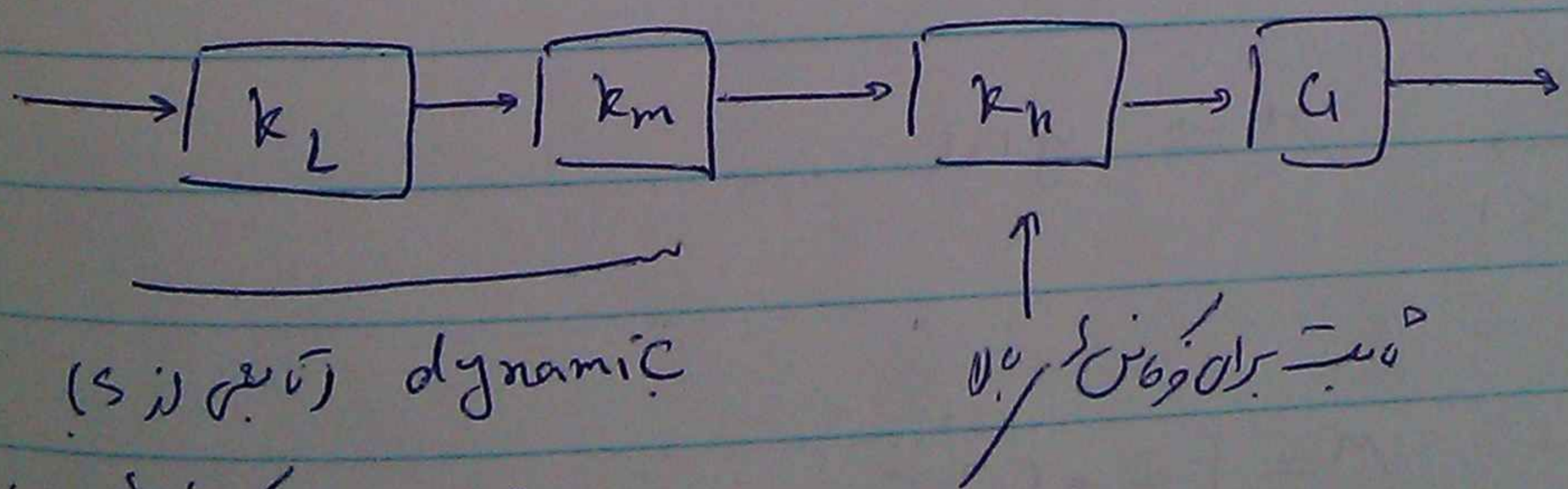
$$M \cong W \begin{bmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_n \end{bmatrix} V$$

پس در فرکانس گذر بالا باید برای طراحی حداکثر تابع تبدیل حلقه باز را در نظر گرفت.

الف- باید سعی کنیم در فرکانس گذر بالا M.A کوچک باشد زیرا $|g_i| << 1$

ب- در فرکانس گذر پایین باید سعی کنیم $|g_i| >> 1$ ($M \cong I$) صفت S.S.E کوچک

طراحی در 2 یا 3 مرحله است:



جبران زیر برای فرکانس گذر میانه پایین

نکته لعل:

C.L نباید شرایط نامیرایی را داشته باشد.

نکته دوم: اندازه C.L به خصوص سخت‌افزار پایین بزرگ تا good no interaction، following commend good disturbence rejection باشد.

نکته سوم: سخت‌افزار بالا به طراحی مناسب M.A را کوچک کرده interaction مرحلات بعدی را تقلیل دهد.

مرحله اول:

طراحی K_h:

به طور ایده آل $G K_h$ بهترین ماتریس بلاتکلیف می شود لذا سعی می کنیم K_h طوری انتخاب شود که $G K_h = I$

می دانیم که $G(j\omega_h)$ ماتریس مختلط و می دانیم که K_h ماتریس حقیقی است (چرا؟ بیان شده)

لذا سعی می شود که $G K_h \simeq I$ بنابراین بهترین ماتریس حقیقی را باید بدست آوریم که تقریبی از $G(j\omega_h)$ باشد.

← Align Algorithm (برای یافتن K_h چون حقیقی است.)

$$Z x = I$$

Z ← Compled x ← unknow $x = [x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n]$

$$\Rightarrow Z x_i \simeq e_i \leftarrow \text{برداریکه}$$

درحقیقت داریم:

$$Z x_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \varepsilon_i \simeq 1 \\ |\varepsilon_j| \ll 1 \\ j \neq i \end{cases}$$

$$\Phi_i = \frac{\sum_{j \neq i} |\varepsilon_j|^2}{|\varepsilon_i|^2}$$

تابع هزینه یا معیار Performance Index

$\varepsilon_j = z_j^T x_i$

$|\varepsilon_j|^2 = (x_i^T z_j)(z_j^T x_i)$ ؟

می‌خواهیم x_i را طوری بیابیم که Φ_i ، Min گردد. پس

$$\Phi_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} (x_i^T z_j)(z_i^T x_i)}{(x_i^T z_i \; z_i^T x_i)} \quad j \; ?$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} = 0$$

ω_h : چون فرکانس بالای هر سیستم با فرکانس بالای سیستم دیگر فرق می‌کند. بنابراین برای آن performance خوبی باید برای آن ω_h را انجام دهیم

بنابراین با داشتن $G(j\omega_h)$ می‌توانیم با استفاده از الگوریتم Align

میزان بهره حقیقی k_h را بدست آورد به طوری که

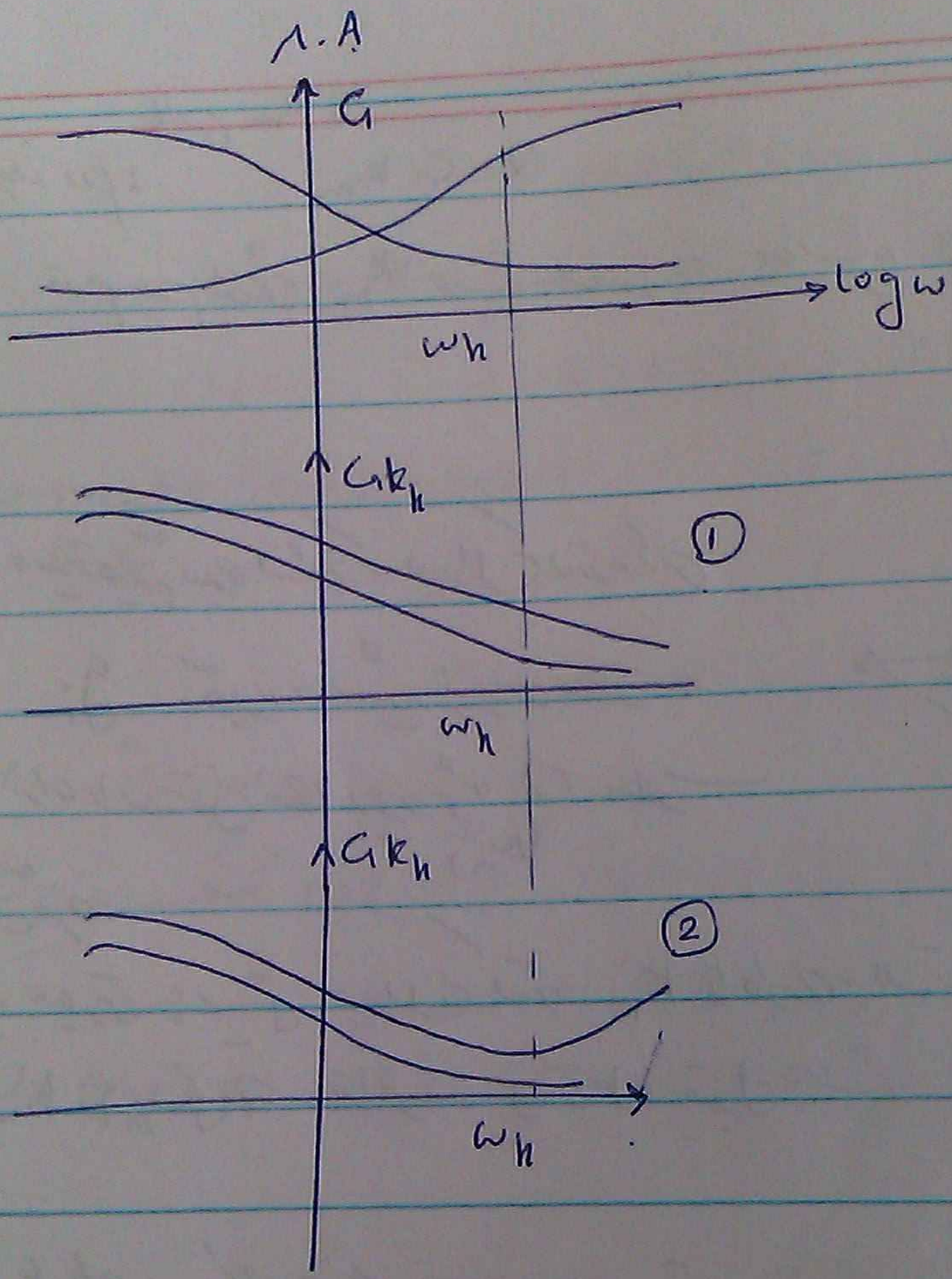
$G(j\omega_h) k_h \simeq I$

پس باید اثر k_h را تست کنیم. تست زمانی قابل قبول است. (طراحی k_h

قابل قبول) که M.A در فرکانس‌های بالا نه فقط ω_h کوچک باشد

بلکه در همه فرکانس‌های بالا نه فقط در ω_h ای که ما انتخاب کردیم

برای اینکار باید C.L و M.A ماتریس $G(s) k_h$ را ترسیم کنیم.



- توضیحات مربوط به شکل:

۱. در حالتی که بالا A.A کاهش یافته که این موضوع باعث ایجاد ناپایداری می‌شود.

۲. فقط در ω_h بالا A.A کاهش می‌یابد و در فرکانس‌های بالا بزرگ‌تر از ω_h ایجاد ناپایداری می‌کند.)

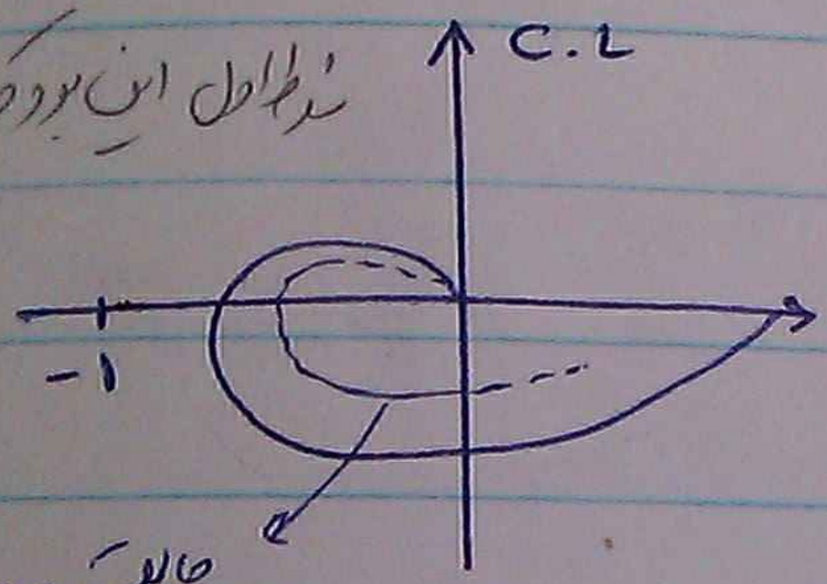
طراحی k_m ؟

$Q = G\, k_m$

مرحله دوم:

قدم دوم طراحی k_m جهت حصول حاشیه پایداری با استفاده از

$Q = G\, k_m$



شرط اول این بود که C.L پایداری

باید تضمین شود که حیدان کشیده نمی

g_i چونه حاشیه پایداری مطلوب

را با برآشتن مقادیر ویژه Q مطلوب $(j\omega_m)$

کرده.

به عبارتی پایستی حیدان کشیده k_m را طوری بدست آوریم که مقادیر ویژه $k_m\, Q(j\omega_m)$ برابر مقادیر قابل قبول باشد.

قبل از ادامه صحبت با طرح سؤال صحبت زیر را پیگیری می‌کنیم:

با داشتن ماتریس A و ماتریس B که دلخواه بدست آورده‌ایم $eig(AB)$ مقادیر دلخواه باشند.

مطلوب

مقدار مورد دلخواه — معلوم — نامعلوم

$eig(AB) = eig(A) \cdot eig(B)$ ؟ commute باشد A, B چه

می‌دانیم اگر A و B ماتریس commute (جابجا) باشند آنگاه

یعنی AB با BA یکی باشند

commute برخی از ماتریس‌ها چیست را بیاد

حل مثال مقدم بدم ، شرح ذیل خواهد بود :

1. یافتن ماتریس B که commute با A باشد.

2. طبق رابطه $eig(B) = \frac{eig(A \backslash B)}{eig(A)}$

(commute controller) = C.C

$Q = C\,k_k$

مشکل اینجاست که مقادیر ویژه Q مختلط است.

سیستم medium است چون حول دو محور قرار گرفته

بنابراین به دنبال C.C هستیم لذا ابتدا $Q(j\omega_m)$ که ماتریس مختلط است را بدست می آوریم سپس جدا کردن

$$Q(j\omega_m) = W(j\omega_m)\,\Lambda(j\omega_m)\,V(j\omega_m)$$

k_m را به گونه ای بدست می آوریم که

$$k_m = W(j\omega_m)\,\Lambda_k(s)\,V(j\omega_m)$$

ماتریس قطری از نوع Lead/PD

$$Q\,k_m = W(\Lambda\,\Lambda_k)\,V$$

همواره $\Lambda_k(s)$ از نوع Lead/Lag و $W(j\omega_m)$ انتخاب شده اند لذا $V(j\omega_m)$ ماتریس مختلط هستند تا حاصل k_m همواره real شود.

برای این کار باید یک تقریب خطی برای جبران ز.ف.ب بیابیم.

این موضوع با عنوان

The approximation commutation controller
(ACC)

$$K_m = \hat{W}\,\Lambda_k(s)\,\hat{V}$$

در جایی که $\hat{V}$ یک تقریب حقیقی خوب از V است.

این کار به روش الگوریتم Align حاصل می‌شود. یعنی

$$V\hat{W} = I$$

به طوری که برای $\hat{V}$

$$W\hat{V} = I$$

لذا برای حصول K_m:

① ماتریس مربوطه $Q(s)$ را تقسیم کنید.

② ماتریس $Q(j\omega_m)$ را در فرکانس میانی در نظر بگیرید.

③ حاصل $Q(j\omega_m)$ و بدست آوردن V و W

$$V(j\omega_m) \quad W(j\omega_m)$$

و سپس حاصل $\hat{W}$ و $\hat{V}$ جایگذاری در الگوریتم Align

④ سپس بهره k را بر اساس C.L مربوطه $G(s)$ این قسمت را در واقع تصمیم

با انتخاب بهره Lead یا Lag یا Lead-Lag

⑤ بدست آوردن $k_m = \hat{w} \wedge_{k}^{(s)} 0$

⑥ تشکیل C.L مربوط به $k_m(s)$ $Q(s)$ و اطمینان از حصول به شرایط پایداری.

⑦ اگر شرط 6 برقرار نباشد قدم سوم لذا اهم می‌گردد و در غیر این صورت مرحله ② تکرار می‌شود. (آنقدر ω_m جدید)

قدم سوم: نداشتن خیلی از $P + I + (D)$ که لازم باشد.

چون در فرکانس گیری پایین نیاز به تأمین زیاد در حالت دائمی حقیقت طراحی ما

$$k_L = \left(\frac{a}{s} k_L + I\right)$$

1. رسم C.L مربوط به $Q' = Q k_m$

$$\hat{Q}(j\omega_L) = w(j\omega_L) \wedge (j\omega_L) \; V(j\omega_L)$$

ω_L فرکانس گیری پایین است.

2. A_{cc} بدست $k_L = \hat{w} \wedge_L \hat{v}$

کمترین مقدار

3. Lead - Lag تشکیل دهنده

Lag - Lead

حاشیه اطمینان پاسخ بسیار اهمیت

حفاظت شده را تأمین می‌کند

دارد.

جبران طراحی با روش C.L :

1. محاسبه $k_h = G(j\omega_h)^{-1}$

2. طراحی Acc برای $k_m(s)$ در فرکانس $\omega_m < \omega_h$

نکته: جبران‌ساز GK_h به طوری که $k_m(j\omega_m) \longrightarrow I$ حل کند

تأثیر GK_h تحت‌الشعاع $\omega_m \longrightarrow \omega_h$ حتی بهره‌ی بالا K_h در حالت مقدار اولیه.

3. اگر رفتار سیستم در فرکانس‌های پایین مورد قبول نباشد (عموماً e_{ss} قابل قبول نیست) خطا/حالت ماندگار

لذا طراحی $k(s)$ توسط روش Acc برای فرکانس‌های $\omega_L < \omega_m$ در حالت

$GK_m K_h$ و بهره‌ی

$k_L(j\omega) \longrightarrow I$

$\omega \longrightarrow \omega_m$

4. در نهایت آوردن جبران‌ساز کلی به صورت حاصل

$$k(s) = k_h\, k_m(s)\, k_L(s)$$

نکته کلیدی:

روش طراحی C.L برای سیستم‌های Uniform (سیستم‌هایی که دارای خواص زمانی تقریباً یکسان باشند) مناسب است چون می‌توان از نتایج یک سیستم برای سیستم‌های مشابه استفاده کرد.

مثال: چاه‌های نفت در یک منطقه وسیع که در عمق km ۲ به نفت می‌رسند و فاصله‌ی آن‌ها از هم ۱.۵ km است.

→ ؟ توضیح

نهایتاً بتوانند فیدبک‌های مناسب برای هر حلقه را با داشتن کنترل‌کننده‌های مختلف قابل قبول بدست آورند.

به عنوان مثال برای اینکه مثلاً پاسخی که می‌تواند جواب خیلی سریع و خودخودی که جواب خیلی کند دارند. بر این صورت می‌توان از کدام یک برای دو حلقه یا بیشتر استفاده کرد. این بدین معنا است که ابتدا طراحی برای حلقه‌ای سریع و سپس برای حلقه‌ای کندتر صورت می‌گیرد.

طراحی: روش INA و DNA:

۱. در این روش سیستمی در نظر گرفته که حریص باشد (برای حکومن پذیری)

قضیه: فرض کنید $K(s)$ یک ماتریس حریص حکومن پذیر که تمامی قطب‌های صفرکسش پایدار باشند آنگاه

$K(s) = k_a\ k_b(s)\ k_c(s)$ این سیستم حداقل فیدبک خواهد داشت.

پس کلیه خاصیت‌ها را دارد چون ماتریس هستند.

$K'(s) = k'_c(s)\ k'_b(s)\ k'_a$

به جایی که k_a و k'_a ماتریس‌هایی که بیشترین بهره هستند (در حقیقت بخش reorder مربوط به سوکو و ستونی را انجام می‌دهند)

ماتریس $k_b(s)$ و $k'_b(s)$ حاصلضرب ماتریس‌های مقدماتی هست که به صورت زیر

(هر کدوم از ماتریس‌های مقدماتی) می‌باشند

$$k_b^k = I + \alpha_{ij}^k(s)\, e_i e_j^T \qquad j \neq i$$

$\alpha_{ij}^k(s)$ پایدار و rational هست (کسری fractional)

e_i و e_j بردارهای یکه از j ام می‌باشند.

$k_c(s)$ و $k'_c(s)$ ماتریس‌های قطری هستند.

تمام عملیات انجام شده برای DD شدن این است که سیستم (decoupled) شبه تک‌حلقه‌ای که میانشان SISO شود. نتیجه k_c یا k'_c است.

$k_c(s) = \text{diag}\{k_i(s)\}$ قطری و غیر متمرکز فقط عضو قطر پایدار و اکیداً

این قضیه نشان می‌دهد که از ماتریس اولیه k_a (k'_a) استفاده از $k_b(s)$ و $k'_b(s)$ ماتریس‌های مقدماتی حقیقی DD شود. آنگاه سیستم به نحوه decoupled شده و تقریباً انتظار SISO است. ضرورتی DD شدن لازم نیست (نباشد)

هدف طراحی برای سیستم MIMO هر حلقه (یعنی بردن آوردن) را به یک حلقه تک‌حلقه‌ای (یا k_c) می‌شد. در این حالت هیچ دخالتی (تأثیر متقابلی) از ورودی‌ها نداریم. interaction

diagonal ← قطری

سوال: به نظر شما خروجی یک ماتریس DD در یک ماتریس متقارن، باند دیگری را متوقف می‌کند؟ خیر - شعاع عوض نمی‌شود فقط همین مرکز شو عوض کند.

سوال: سیستم پایدار داریم با باند تریشوری اصلی کوشل $1+j0$ - است در یک ماتریس DD ضرب کنیم در همه باند آرگیم چقدر شعاع همگرایی تغییر می‌کند؟

پایداری سیستم حلقه بسته را می‌توان با توجه به باند تریشوری یا با استفاده از تئوری SISO بدست آورد. به طوری که محدوده نقطه $1+j0$ - را شامل نشود در ضمن تعداد دوران مطابق معیار نایکوئیست باشد. چون $1+j0$ - را به عنوان نقطه مبدأ در نظر می‌گیریم باید $1+Q_0(s)$، DD شود

یعنی $G(s)K_a K_b(s) = Q_0(s)$

در عمل، عموماً هدف DD کردن Q_0 است؛ دلایل زیر:

1. آوردن بالاتر از DD برای Q_0 به دلت آوردن (برای یک محدوده قابل قبول فرکانس) آنقدر به احتمال بیشتر زیاد $1+Q_0(s)$ نیز DD است.

2. جبران‌ساز طراحی $K_c(s)$ روی DD بودن $Q_0(s)$ تغییری ایجاد نمی‌کند. (در حالی که DD بودن $1+Q_0(s)$ را در جای تغییر می‌دهد)

3. اگر $Q_0(s)$ خیلی DD شود، $1+Q_0(s)$ زیاد DD نباشد آنگاه هر توان جبران‌ساز بعدی تابع تبدیل طراحی $K_c(s)$ را به گونه‌ای باید کم نوار تریشوری را از نقطه $-1+j0$ دور کرده و اثر آن کم عرض محدوده کم شود.

direct

طراحی در این صورت هم می‌تواند به صورت DNA یعنی از K_a و K_b و $K_c(s)$ و یا به روش INA روی $\bar{K}_a$، $\bar{K}_b$، $\bar{K}_c(s)$ انجام گیرد.

Inverse

به هر دو صورت فوق می‌توان پایداری را با حفظ تعداد دوران نایکوئیست برای

آورد. بدین صورت که با بند دستگیرین شکل نقطه $(-1+j0)$ نباشد.

نکته: حاصل $Q(s) = G(s) k_a k_b$ چون ماتریس است k_{DD} یک ماتریس $k_a k_b$ است لذا هر عنصر از ماتریس حاصل آن ضرب کردن post multi plier ماتریس $G(s)$ در یک تابع تبدیل است چون ماتریس $k_a - k_b$ است. لذا CDD مربوطه $G(s) k_a k_b$ تغییر نحوه تقسیم جریان را تغییر می دهد.

k_{DD}

چرا از CDD استفاده کنیم؟ هنگام استفاده از روش DAN بهتر است از روش INA استفاده کنیم به همین دلیل از R_{DD} استفاده می کنیم. زیرا

$$\bar{Q}(s) = \bar{k}_c^{-1}(s)\, \bar{k}_b^{-1}(s)\, \bar{k}_a^{-1}\, \bar{G}^{-1}(s)$$

R_{DD}

در این $\bar{k}_c^{-1}(s)$ یک pre multi plier است. لذا در مرحله $\bar{k}_b^{-1}(s)\, \bar{k}_a^{-1}\, \bar{G}^{-1}(s)$ ضرب شده و لذا R_{DD} را عوض می کند

جلسه 18 — 91,9,26

روش INA

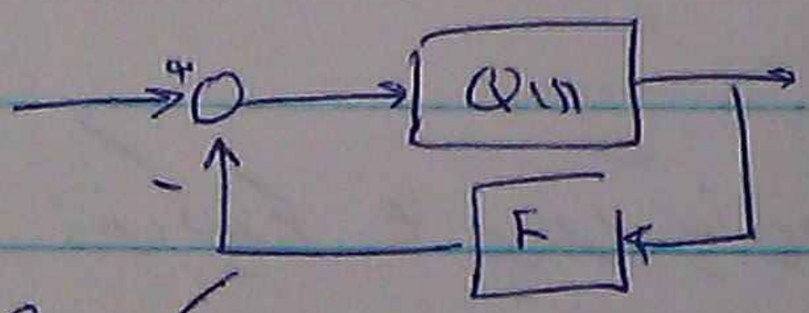
- علت استفاده از روش پی بردن به رفتار سیستم حلقه بسته از روی اطلاعات سیستم حلقه باز

$$G(s) = G_1(s) K_a \cdot K_b(s) K_c(s)$$

$$K_c(s) = K_d(s) F$$

K_c : جبران ساز تقویتی مشکل از یک سو جبران ساز $K_D(s)$ و جبران ساز دیگر تقویتی ثابت را در نظر می‌گیریم.

F : فیدبک



این عمل سبب می‌شود که بتوانیم بهره هر حلقه فیدبک را تغییر دهیم. برای کنترل حساسیت بنابراین سیستم ثابت بماند.

$$H(s) = [I + G(s)F]^{-1} G(s)$$

$$\hat{H}(s) = \hat{G} + F \qquad \hat{H} = \bar{H}^{-1}, \quad \hat{G} = G^{-1}$$

علت استفاده از فیدبک

این رابطه مهم است

$$G_0(s) = G(s) F$$

open loop ← ی

فرض کنید $F = \text{diag}\{f_1, \dots, f_n\}$ در آن $f_i \neq 0$ یا شد (حلقه ام باز شد

باز است.) یعنی حالتی

$$\hat{A}(s)\Big|_{R_i=0} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} + f_1 & \hat{g}_{12} & \cdots & \hat{g}_{1n} \\ \hat{g}_{21} & \hat{g}_{22} + f_2 & \cdots & \hat{g}_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{g}_{nn} + f_n \end{bmatrix}$$

فرض کنید که z برداری سیگنال ورودی به $H(s)$ باشد.

رابطه تبدیل بین z_i و y_i وقتی که حلقه ام باز است برابر است با:

$$\frac{y_i}{u} = l_i(s) = \left([\hat{H}(s)]^{-1} \Big|_{R_i=0} \right)_{ii} = \frac{\det\{\hat{H}(s)|_{R_i=0}\}_{ii}}{\det\{\hat{A}(s)|_{R_i=0}\}} \longrightarrow$$

حاصل ترمیم $\hat{H}(s)$ با حذف سطر و ستون ام

اثر $R_j \longrightarrow \infty$ بر $\hat{g}_{ii}$:

$$\det\{\hat{H}(s)\}\Big|_{R_i=0} \longrightarrow \hat{g}_{ii}(s) = \det\{\hat{A}(s)|_{R_i}^{ii}\}$$

$j \neq i$

یعنی اثر تمام بلوک حلقه‌ای غیر از آن حلقه‌ای که شامل $\hat{g}_{ii}$ است حذف شده

$a_{ik} \longrightarrow a_{ik}' \quad , \quad a_{jk} \longrightarrow a_{jk}'$

تقسیم کنید بر a_{ik} تا سطر اصلی بدست آید.

$$|a_{ij} - \frac{1}{d_{ii}}| \leq \sum_{i \neq k} |a_{ik}| \max_{j \neq i} \left[\frac{|a_{kj}|}{|a_{jj}| - |a_{ji}|} \right]$$

قضیه: اگر A یک ماتریس قطری اکیداً سطری غالب باشد آنگاه A وارون پذیر است.

اثبات: فرض کنید A وارون پذیر نباشد آنگاه $\det A = 0$ و دستگاه $AX = 0$ جواب غیر صفر دارد.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

فرض کنید x_k بزرگترین مولفه از نظر قدر مطلق باشد. یعنی $|x_k| \geq |x_j|$ برای $j = 1, 2, \ldots, n$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = 0$$

$$a_{kk}x_k = -a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \cdots - a_{k,k-1}x_{k-1} - a_{k,k+1}x_{k+1} - \cdots - a_{kn}x_n$$

$$|a_{kk}||x_k| \leq |a_{k1}||x_1| + |a_{k2}||x_2| + \cdots + |a_{k,k-1}||x_{k-1}| + |a_{k,k+1}||x_{k+1}| + \cdots + |a_{kn}||x_n|$$

$$|a_{kk}||x_k| \leq |a_{k1}||x_k| + |a_{k2}||x_k| + \cdots + |a_{k,k-1}||x_k| + |a_{k,k+1}||x_k| + \cdots + |a_{kn}||x_k|$$

$$|a_{kk}| \leq |a_{k1}| + |a_{k2}| + \cdots + |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + \cdots + |a_{kn}|$$

$$|a_{kk}| - |a_{k1}| - |a_{k2}| - \cdots - |a_{k,k-1}| - |a_{k,k+1}| - \cdots - |a_{kn}| \leq 0$$

$$|a_{kk}| - \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \leq 0$$

که این با فرض قضیه که A اکیداً سطری غالب است تناقض دارد. پس A وارون پذیر است.

حال از $\hat{M}(j\omega)$ ، R_{DD} ، شده مرتبان تفسیر استوکستی را استفاده کرد.

$$\hat{\hat{\varphi}}_i(\omega) = \overline{\sum_{k \neq i}} \left| \hat{h}_{ik}(j\omega) \right|$$

$$\hat{\hat{\phi}}_i(j\omega) = \max_{j \neq i} \left(\frac{\overline{\sum_{k \neq i}} \left| \hat{h}_{jk}(j\omega) \right|}{\left| h_{jj}(j\omega) \right|} \right)$$

$$\left| \hat{h}_{ii}(j\omega) - \frac{1}{h_{ii}(j\omega)} \right| < \hat{\hat{\rho}}_i(\omega) \; \hat{\hat{Q}}_i(j\omega)$$

لم ۱:

$$\hat{h}_{ii}(j\omega) = \hat{q}_{ii}(j\omega) + h_i$$

$$\frac{1}{h_{ii}(j\omega)} = \frac{1}{h_i(\omega)} + h_i$$

عبارت سمت چپ قطعا از شعاع دایره شکورین کمتر است.

$$\Rightarrow \left| \hat{q}_{ii}(j\omega) - \frac{1}{h_i(j\omega)} \right| \leq \hat{\hat{\rho}}_i(\omega) \underbrace{\hat{\phi}_i(j\omega)}_{<1}$$

شعاع دایره شکورین

لم ۱: $\frac{1}{h_i(j\omega)}$ داخل دایره ای است که مرکز آن دایره شکورین مربوط به $\hat{Q}_i(j\omega)$ و شعاع آن کوچکتر از شعاع دایره شکورین است.

نکته: در سیگنال اصلی طراحی استوکاستیکی بود.

پس نکته حائز اهمیت آن است که آرایه باند استروفکی به عنوان تخمین فیلتر (z) $\hat{G}_i$ به کار رود آنگاه می‌توان تمام روشهای SISO را استفاده کرد. (برای طراحی k_i)

جهت بررسی پایداری سیستم حلقه‌بسته با توجه به $\hat{S}_{k_i}$ امکانپذیر است. لذا باید توجه داشت که در طراحی k_i و $\hat{G}_i$ نسبت به k_j های

انورس تابع تبدیل پیروی است.

$$\hat{\hat{G}}_{Ri} = \max_{j \neq i} \left[\frac{\text{اندازه } \hat{P}_{ij}}{|\hat{h}_{jj}|} \right] = \max_{j \neq i} \left[\frac{\text{اندازه } \hat{P}_{ij}}{|k_j + \hat{a}_{jj}|} \right]$$

آرایه باند استروفکی

آرایه باند استروفکی نیز گفته می‌شود.

لذا برای ترسیم آلفین باند استروفکی باستی بهره k_j آنقدر زیاد شود که S_{k_j} بزرگ باشد آنگاه باند استروفکی کوچک (یا آلفین) الت ویتی تخمین دقیق از حاشیه پایداری برای حلقه آلم حاصل می‌شود.

Inverse Nyquist Array

جهتبندی طراحی: روش INA

۱. سعی برای ایجاد R_{DD} با توجه به جبران زمانی $\hat{k}_a$ و $\hat{k}_b$ به نحوی که

$$\hat{k}_b^{(s)} = \hat{k}_a \cdot \hat{C}_{(s)}$$

ثم نقوم بحساب المسافة بين كل نقطة والنقاط الأخرى في المجموعة التدريبية، ثم نقوم بترتيب هذه المسافات تصاعدياً.

ثم نختار أول k نقطة (أقرب k جيران) ونقوم بتحديد الأغلبية بينها.

ثم نعطي النقطة الجديدة التصنيف الذي يمثل الأغلبية.

ملاحظة: DNA

* تستخدم خوارزمية الجيران الأقربون في تصنيف DNA إلى فئات معينة (Interfaces) بحيث تكون المسافة بين كل نقطة والنقاط الأخرى في المجموعة التدريبية أقل ما يمكن.

3. $\hat{R}(x) = \text{class of } \{ \frac{\hat{R}_i(x)}{\hat{R}_i} , i=1, \dots, n \}$

4. $\hat{R}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \hat{R}_i(x)}{\hat{R}_i}$ أقرب k جيران

$\hat{R}_i(x)$ هو التصنيف المتوقع للنقطة x بناءً على النقطة i.

مقایسه DNA و INA :

1. در DNA : طراح آزمون سعی در انتخاب جیران زکی می‌رهم
2. DNA نرم‌افزار سیستم حریص نیست (چون نیازی به کلون ندارم.)
3. خروجی INA آن است که باید استدلال‌هایی داشته و لذا interaction قابل مشاهده است درحالی‌که DNA چنین چیزی ممکن نیست.

* روش INA و DNA زمانی قابل اجراست که به یک رجحان از DD بودن برسیم. و در بسیاری از موارد کار ساده‌ای نیست.

ابتدا رسیدن به DD روش نام cost and try وجود دارد.

Ex.

$$G_{MS1}=\begin{bmatrix} \frac{-5}{3Se2} & \frac{Se2}{3Se2} \\ \frac{Se1}{3Se2} & \frac{-5}{3Se2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}_{MS1}=\begin{bmatrix} 3 & Se1 \\ Se2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{نسبت DD} \begin{pmatrix} c_{DD} \text{ نه} \\ R_{DD} \text{ نه} \end{pmatrix}$$

premultiplier ↩

$$\hat{K}a=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ با آنتی جیران از $\hat{K}a$

نه R_{DD} که c_{DD} نیز حذف شود. نیز جایی توسط سازمان $\hat{G}_{MS1}$ مشخص می‌آید.

K_a ریاضیک ندارد وظیفه‌اش جایگزین کردن سطرها و ستون‌هاست که دقیقاً بوان ایزان جایگزین است. آن شد سطر عامل است

$$G_1(s)H_{cl} = \begin{bmatrix} \frac{3s+1}{3s+2} & \frac{-5}{3s+2} \\ \frac{-5}{3s+2} & \frac{5s+2}{3s+2} \end{bmatrix}$$

با این آنالیز داریم:

نکته: در این حالت هم سیستم اصلی و هم حلقوش از DD اند (حداقل از یکی هر دو کی اند.) البته این نکته همیشه درست نخواهد بود به عبارتی ممکن است یک سیستم را بتوان DD کرد و حلقوش را نه و بالعکس

توجه بسیار مهم آن است که اشاره‌ای از k_b وسیله‌ی تبدیل داره می‌تواند توسط طراح طوری صورت گیرد که بتوان در صورت اصل DD کردن به حد DD بودن را بالا برد عمل کند پس k_b یا سیستم را DD می‌کند که k_a نتوانست یا در حد DD بودن را بالا می‌برد.

نکته: روش دیگر DD کردن این است که سعی کنیم سیستم را کاملاً دکوپله کنیم بدین منظور سعی می‌شود که سیستم در سیگنال خاص decoupled شود و اصیدار شویم که یک یا چند خانه‌ی غیر قطب DD شود.

✓ $\hat{G}_1(j\omega)|_{\omega=0} = K_a$ (روش Align)

حاوی اطلاعات حقیقی و ثابت

بعد قطبی در صفر نداشته باشیم.

Ex.

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^3 + 5s^2}{5s+1} & 10s+3 \\ 5s+1 & \frac{s^3+5s+1}{s+2} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{نیست DD}$$

$$\hat{G}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{CDD ni} \\ \text{RDD ni} \end{matrix}$$

$$\hat{K}_a = \hat{G}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} -0.25 & 1.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{K}_a \hat{G}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

decoupled شد.

در ادامه ست DD بودن را روی سیم اعمال می‌کنیم.

$\hat{K}_a \hat{G}(s)$

مشخص می‌شود که با این جبران ساز سیم CDD شده (نه RDD) (روی کنترل)

برای DD کردن روی سیم فرمان باید K_b استفاده کرد (روش فرو بینوس)

$$\hat{K}_a \hat{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{29}{4} & -1 \\ -\frac{18}{4} & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{نیست DD}$$

سوال: جبران ساز را چنان تنظیم کنید که سیم

برای ورودی فرمان DD باشد؟

EX.

$$\hat{\varphi}_i = \max_{j \neq i} \left| \frac{\hat{P}_j}{k_j - \hat{q}_{jj}} \right|$$

راه حل مختلف طراحی:

φ_i بستگی به $\hat{q}_{jj}$ و k_j دارد

Misalign

را به عنوان ورودی در نظر می‌گیرد.

برای یک سیستم دو ورودی و دو خروجی نیاز به دانستن k_2 و k_1 داریم.

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_1 \longrightarrow k_2 & \text{نیاز به دانستن} \\ \hat{\varphi}_2 \longrightarrow k_1 & \text{" "} \end{cases}$$

بنابراین حالت بر گشتی وجود دارد. لذا

k_1 و k_2 طوری انتخاب می‌شود که حداقل فوق ارضا شوند. با حداقل مقدار مطلوب

(k_1 و k_2 خارج باند ترشیوری می‌شوند) بعد به صورت برگشتی k را

کم کم زیاد می‌کنیم.

مثال:

$$\hat{Q}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-4}{s+1} & \frac{s+3}{s+1} \\ \frac{s+1}{s+2} & \frac{}{2s+1} \end{bmatrix}$$

فرض: $k_1 = 10 \qquad k_2 = 5$

$$\hat{q}(0) = \hat{Q}(0) = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \hat{P}_1 = 3 \\ \hat{P}_2 = 1/2 \end{cases}$$

شاخ ترشیوری

$$\hat{\varphi}_i = \max_{j \neq i} \left| \frac{\hat{\rho}_j}{|k_j + \hat{q}_{jj}|} \right|$$

$$\Rightarrow \hat{\varphi}_1 = \frac{\hat{\rho}_2}{|k_2 + \hat{q}_{22}|} = \frac{1/2}{|5+1|} = \frac{1}{12}$$

$$\hat{\varphi}_1 \hat{\rho}_1 = \frac{1}{12} \times 3 = \frac{1}{4}$$ شدت استوفکی باند استوفکی

$$\hat{\varphi}_2 = \frac{\hat{\rho}_1}{|k_1 + \hat{q}_{11}|} = \frac{3}{|10-4|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{\varphi}_2 \hat{\rho}_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$ شدت دومین باند استوفکی $< 1/2$

* روش استوفکی با پیدا کردن سیم حلقه بسته را پیدا کنید (سؤال امتحانی) کدام هم تصویر است.
k_1 و k_2 مشخص نیست. (نمودار را کدام کشیم؟ شرطی که داده شده مشخص شود)
کدام نباشد k_1 و k_2 مشخص می شود بعد می رویم؛ روش ناکوبیتر تعداد حلقه ها و ...

تمرین: به روش باند استوفکی کدام را انجام دهید؟

تئوری: Ferrom- Ferbenius

نظر کنید که قبلاً گفته شد اگر G، DD نباشد ممکن است تبدیل

$\bar{G} = X G X^{-1}$ (**)

به ماتریس جدید DD تبدیل نشود

لذا چون مقادیر ویژه $\bar{G}$ همان مقادیر ویژه G است پس پایداری آن‌ها یکی خواهد بود. در عمل رابطه (**) به این معناست که در یک سیستم با ماتریس تابع تبدیل X داریم و آنرا در ورودی بتوان چنین اثری را انجام داد.

پس اثبات قضیه X:

برای هر ماتریس M با درایه‌های m_{ij} تعریف می‌کنیم

$$abs\, M \triangleq [|m_{ij}|] \quad \forall i, \forall j$$

حال ماتریسی را مثبت گوییم اگر M مربعی باشد مقادیر ویژه $abs\, M$ برابر باشند با:

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

ماتریس M را primitive گوییم اگر $(abs\, M)^r$ مثبت باشد برای برخی اعداد طبیعی r.

$\mathbb{Q}$ is a primitive root modulo p for infinitely many primes p.

(Meos 1981) ...

Let $\mathbb{Q}$ be a primitive root modulo p. Then $\mathbb{Q}$ is a primitive root modulo p^2 if and only if $\mathbb{Q}^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

Let $\mathbb{Q}$ be a primitive root modulo p. Then $\mathbb{Q}$ is a primitive root modulo p^n for all $n \geq 1$ if and only if $\mathbb{Q}^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

Let $\mathbb{Q}$ be a primitive root modulo p. Then $\mathbb{Q}$ is a primitive root modulo p^n for all $n \geq 1$ if and only if $\mathbb{Q}^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

Let $\mathbb{Q}$ be a primitive root modulo p. Then $\mathbb{Q}$ is a primitive root modulo p^n for all $n \geq 1$ if and only if $\mathbb{Q}^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

$$\alpha = diag\{x_1, \dots, x_n\}$$

توجه کنید که توسط قضیه فوق حاصل می‌شود عملاً به عنوان مقیاس دهی (scaling) خودی و $\tilde{x}$ در ورودی در نظر گرفت.

- در تئوری فوق G ها به primitive باشد (عنصر متعدی نداشته باشد) اما در عمل این محدودیت است که برقرار نیست. زیرا در اکثر مواقع G متعدی نباشد G حتماً primitive است مسئله قشنگی نیست که بتوان از برابر کردن G متعدی باشد. در این حالات همواره G Block diagonal یا Block triangular یک مقدار به صورت بلوک مثلثی.

است آنگاه G مربوط به C.L مربوط به Block است که آن‌ها primitive هستند لذا می‌توان قضیه فوق را برای هر یک از Block‌ها جداگانه حل کرد. K حاصل از هر یک درونش فوق بینه است.

خلاصه: روش به دست آوردن حلقه (حلقه جدید)

جلسه 19 91/10/2

بازیافت تابع حلقه LTR Loop transfer recovery

این روش مبتنی بر مدل است.

- فیدبک حالت: تحقق فضای حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad y \in R^{l} \quad x \in R^{n} \quad u \in R^{m}$$

فیدبک خروجی به صورت $u = -Kx$ است.

فرض کنیم که یک تحقق فضای حالت کنترل پذیر و رویت پذیر (کمینه) از تابع تبدیل $G(s)$ داریم.

$$u(s) = -K x(s) + u_c(s)$$

حلقه بسته سیستم به صورت $\dot{x} = (A - BK)x(s) + B u_c(s)$

قطب‌های سیستم حلقه بسته همان مقادیر ویژه $(A-BK)$ هستند.

برای آن دسته از سیستم‌های حلقه بسته که فیدبک حالت تحقق می‌پذیر نباشد، نمی‌توان قطب‌های دلخواه را انتخاب کرد.

فرض کنید $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ یک تحقق کنترل پذیر و رویت پذیر از تابع تبدیل $G(s)$ باشد. می‌توان K را به گونه‌ای یافت که $(A-BK)$ دارای قطب‌های دلخواه باشد.

برای هر چند جمله‌ای دلخواه با ضرایب حقیقی $P(s)$ با درجه n یک بردار K وجود دارد که $P(s) = \det(sI - A + BK)$

به آن دسته از سیستم حلقه بسته فیدبک گوییم که تحقق می‌نیمال نباشد. نرخ تقلب صفر نیست. آزمودگی به عنوان نرخ تقلب کسری تعریف می‌کنیم.

فرض کنید قطب $(A-BK)$ کنترل پذیر باشد می‌توان K را به گونه‌ای یافت که خروجی سیستم حلقه بسته برای هر ورودی دلخواه با ضرایب حقیقی $P(s)$ با درجه n باشد. B جزئی و کلوس پذیر باشد می‌توان K را به گونه‌ای یافت که $(A-BK)$ برای هر چند جمله‌ای دلخواه باشد.

$A_d = (A - BK)$

$K = \bar{B}^{-1}(A - A_d)$

این متن طولانی است Assignment را Eigen structure به روش ماتریس متغیر.

برخی از خواص فیدبک حالت عبارتند از:

1. کنترل پذیری تحت فیدبک حالت حفظ نمی‌شود.
2. رویت پذیری تحت فیدبک حالت حفظ نمی‌شود.
3. هیچ‌کدام تغییر ناپذیر تحت فیدبک حالت حفظ نمی‌شود.
4. هیچ‌کدام انتقال تحت فیدبک حالت حفظ نمی‌شود.

حالا با فیدبک حالت مقادیر ویژه را تغییر می‌کنیم.

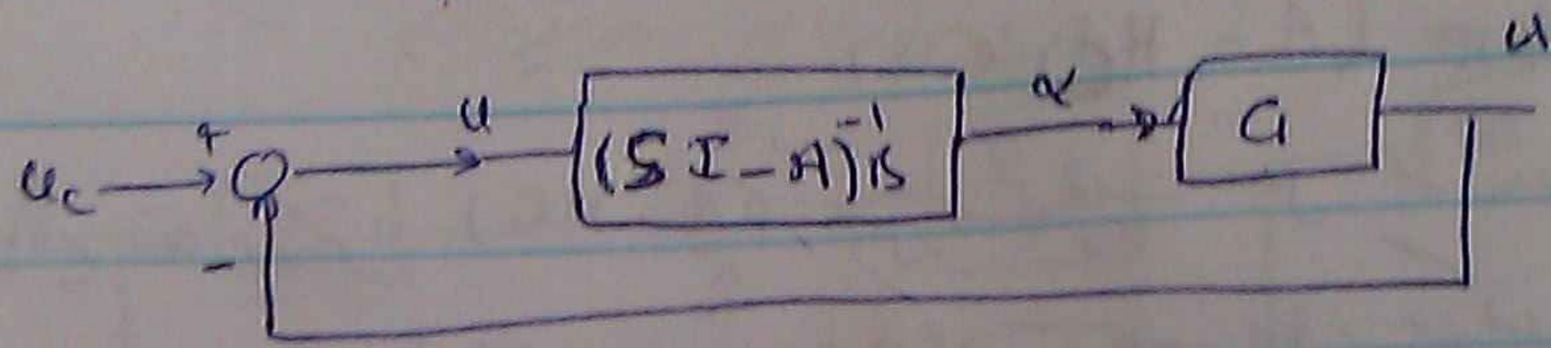
تعریف: جفت (A, B) پایدارشدنی Stabilizable نامیده می‌شود اگر بتوان ماتریس K را چنان یافت که $(A - BK)$ همه مقادیر ویژه‌اش دارای قسمت حقیقی منفی باشد.

به عبارت دیگر جفت (A, B) پایدارشدنی است اگر و فقط اگر مقادیر ویژه A که در نیم صفحه سمت راست صفحه s قرار دارند، کنترل پذیر باشند.

از این به بعد به جای K از G قرار می‌دهیم.

سیستم زمان پیوسته کنترل خطی می‌گوییم که پایدارشدنی باشد هنگامی که کنترل فیدبک حالت همه مقادیر ویژه‌اش قسمت حقیقی منفی داشته باشند. چنین سیستمی را نیز کنترل کرد.

$u = -Gx + u_c$



ضریب بهره حلقه در این سیستم $G(SI-A)^{-1}B$

توجه کنید با تغییر G نمی‌توان قطب‌های بهره حلقه را تغییر داد و صفرهای آن تغییر می‌یابد.

$$\rightarrow U_1(S) = G(SI - A + GB)^{-1} B U_c(S)$$

- رویت‌کننده حالت (Stade observer)

در این هدف این است که چگونه می‌توان متغیرهای حالت را از خروجی بازسازی کرد. سیستم تحقق زیر را در نظر بگیرید. (تحقق کنترل‌پذیر)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$ (با y و u معلوم)

حتی‌الامکان خطای بین y و $\hat{y}$ را کمینه کند. و سیستم ضعیف به صورت زیر عمل کند.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H[y(t) - \hat{y}(t)]$$

آرایش بالا نیز بدین معنی است که Sstate را می‌توان دوباره بازسازی کرد.

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

خطای تخمین:

$$\dot{\hat{e}}(t) = \dot{x} - \dot{\hat{x}}(t) = (A - HC)\, e(t)$$

ضابطه متغیرهای حالت $(A - HC)$ چگونه باشد تا $e(t) \to 0$ برای $t \to \infty$ میل کند؟

به عبارتی شرایط لازم و کافی برای همگرایی (یا افراز) چیست؟

- قضیه: حالت (A, C) تشخیص پذیر (detectable) است اگر و تنها اگر H ای پیدا شود که $A - HC$ حالت مجانبا پایدار باشد.

توجه کنید: ضابطه حالت (A, C) دارای چند بردار است. برای هر بردار حالت می‌توان H ای پیدا کرد که $A - HC$ قطب حقیقی $P_{ob}(s)$ داشته باشد.

$$\det(sI - A + HC) = P_{ob}(s)$$ ← دلخواه

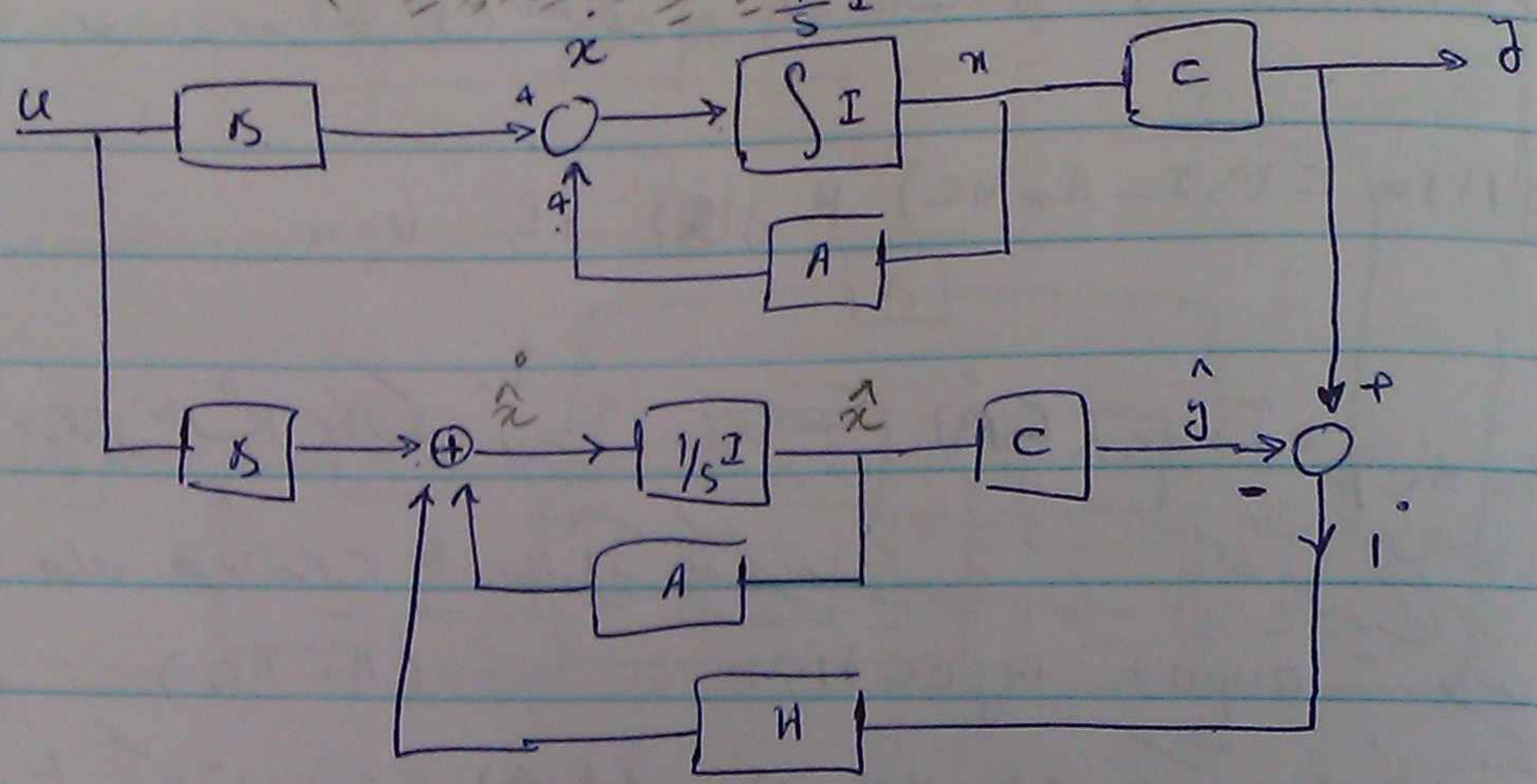
توجه کنید در حالت detectable هر $P_{ob}(s)$ دلخواه را نمی‌توان یافت زیرا بعضی از ریشه‌ها حتما جزو بردارهای حالت هستند. (تمام ریشه‌ها حالت نیستند.) حالت‌هایی detectable هستند چیزهایی هستند که پایدار باشند.

در حالت کلی متغیرهای حالت پذیر هم متغیرهایی هستند که هم رابط خروجی هستند و هم رابط ورودی. با داشتن ورودی می‌توانیم سوی آن را بدست آوریم اما با داشتن سوی نمی‌توانیم ورودی را پیدا کنیم.

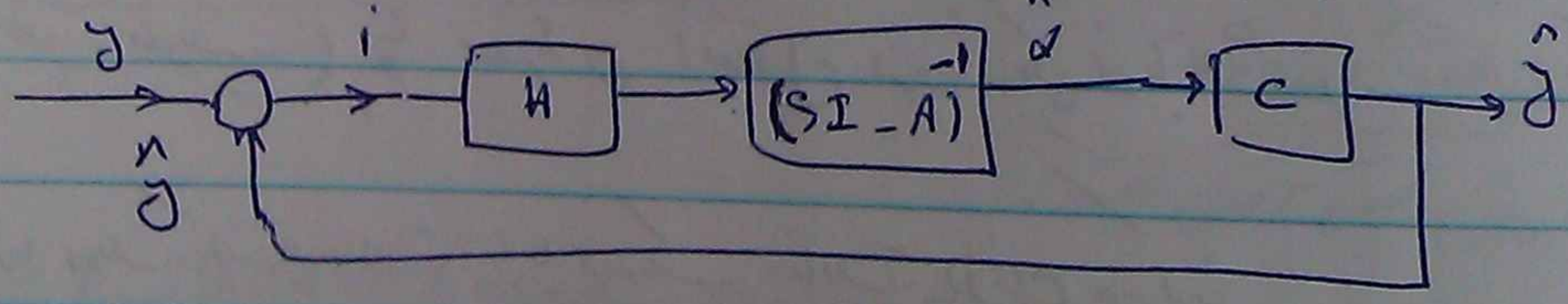
کنترل پذیری و رویت پذیری دوگان

دوگان حسابگر رویت کننده حالت و ضدبند حالت است و برعکس

(بلوک متغیرها چندتایی را (چند متغیره) می‌گیرند)



اگر بازخورد صفر قرار دهیم سیستم را در نظر بگیرید که ورودی آن $\hat{y}$ و خروجی آن $\hat{u}$ باشد.



$(SI-A)^{-1}B$

کنترل پذیری

$(SI-A)^{-1}H$

رویت پذیری

با فرض $u=0$ ضریب بهره حلقه برابر است با:

$C(SI-A)^{-1}H$

$C(SI - \bar{A})^{-1} H$

توجه شود که بهره حلقه همواره برابر صفر است اما قطب‌ها که آن عوض نمی‌شود

بوده و صفرهای آن تغییر می‌کنند

$\hat{y}(s) = C(SI - A + HC)^{-1} H \, y(s)$ if $u = 0$

حالا ما آن دلیل که رویت پذیری صفت (C, A) صفت $(C, A - HC)$ می‌باشد.

بدان معنا که ماتریس H طوری پیدا می‌شود که قطب‌های رویت پذیری سیستم تحت تخمین عوض نمی‌شود.

به روش output injection رویت پذیری سیستم را تضمین می‌کند.

و کنترل پذیری (A, B) و $(A - HC, B)$ با یکدیگر معادل نیستند.

صفرهای (C, A, B) و $(C, A - HC, B)$ تغییر نمی‌کنند (طبق تعریف) و صفرهای انتقال نیز هیچ ربطی با آن ندارند.

حال رویت کننده حالت را با فیدبک حالت ادغام می‌کنیم

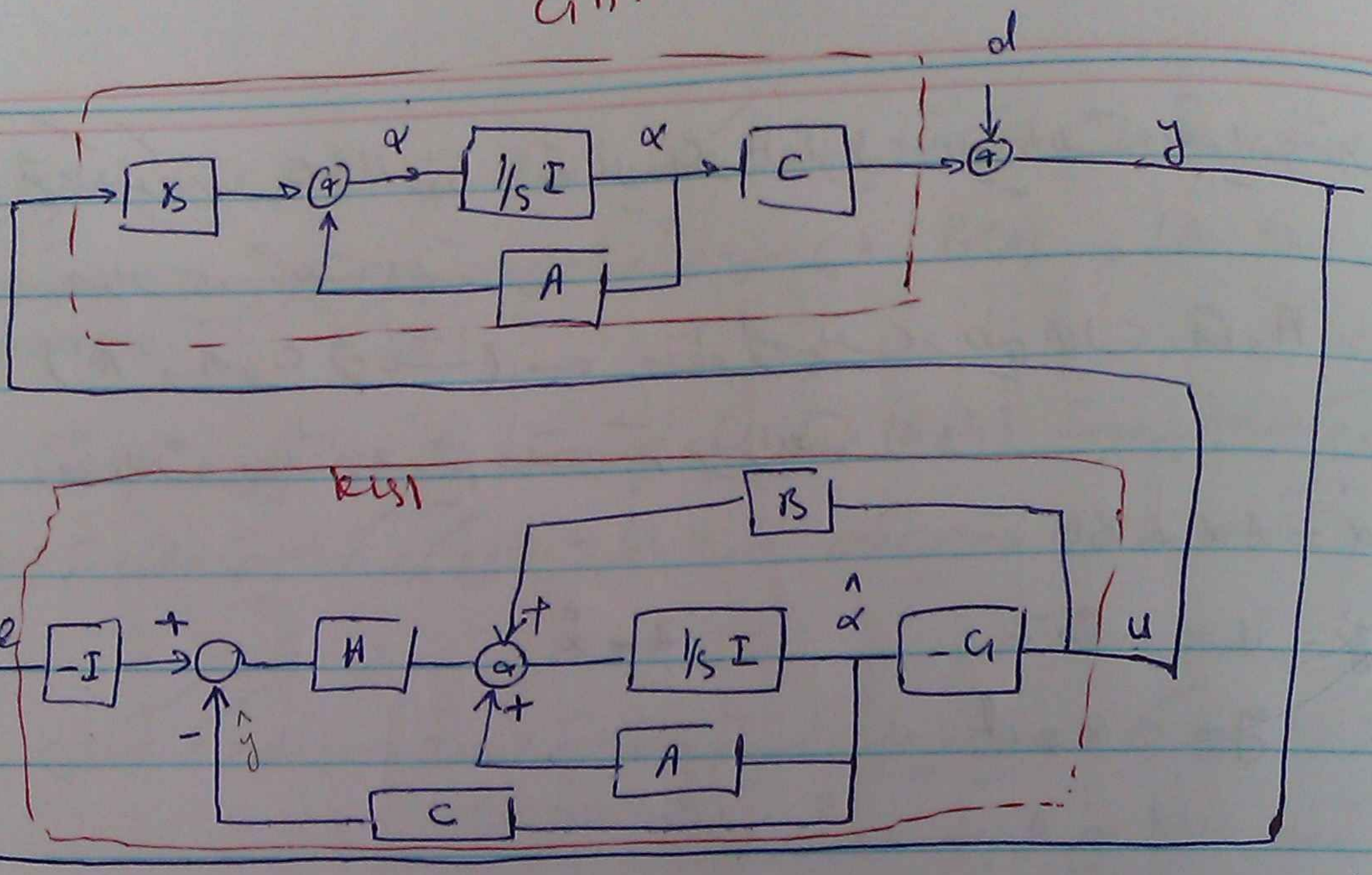
$\dot{\alpha} = A\alpha + BU$

$U = -C\hat{x}$: α تخمین داده شده

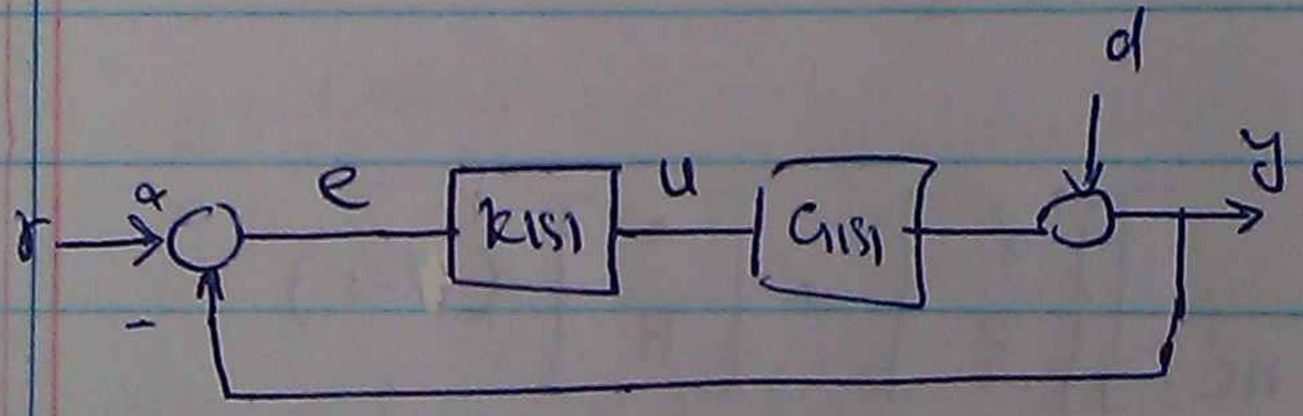
$\dot{\hat{\alpha}} = A\hat{\alpha} + BU + H(y - \hat{y})$

$y = C\alpha \longrightarrow \hat{y} = C\hat{\alpha}$

G(s)



کنترلر K(s)



G(s) تابع تبدیل

G بهره حلقه مستقیم

H بهره حلقه فیدبک.

این روش جزء روش‌های کنترلر جبرانساز برحسب مدل است.

MBC: Model-Based-Compensator

توجه کنید در صورت سؤال فرض کردن r, d, y به صورت سیگنال‌های پله رسم شده

حالا فرض:

$$u = a(s) = e\,e(s)\,K(s)$$

$$K(s) = G_1[sI - A + HC + BG_1]^{-1}H \quad (*)$$

توجه کنید که MBC فقط مقادیر A و G قابل تغییر است و بقیه ثابت هستند.

جبران زمان ثابت است.

(A و G و C ثابت) ← منظور از جبران زمانی همان A و G که در بدترین حالت داریم

حالات حالت سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = A\alpha + BU \\ U = -G\hat{x} \\ y = C\alpha + d \end{cases}$$

از روی طوار معلوم است

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BU - H[y - C\alpha - d] - HC\hat{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BG \\ HC & A - BG - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} (d - r)$$

$\begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix}$

برای تبدیل می‌توان استفاده می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}}_{T \text{ تبدیل}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \hat{x} \end{pmatrix} \qquad T = \bar{T} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}$$

$\omega = x - \hat{x} = x - \hat{x}$

Transformation state

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BG & BG \\ 0 & A - HC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix} (r - d)$$

برای چی اینکار رو می‌کنیم؟ چون خواهیم طراحی کنیم از هم جدا شوند وقتی جدا شوند رویشون راحت‌تر کار می‌کنیم و بعد یک زاویه‌ای داشتیم با این (روشن) ربطی نداشت باشه.

یعنی جبران زمان که طراحی شد برای دینامیک ربطی به خطا یک حالت نداشت.

با توجه به مقالات فوق بدیهی است که سودهای حاصل حلقه بسته اجتماع مقاوم‌کردن
(separation Teory) (اصل جداسازی) (A-BG) و (A-Hc)
principle

* توجه کنید ضایعه خفت (A_1, B_1) پایدار شود خفت (A_2, B_2) تخمین دارد باشد آنگاه می‌توان ثابت کرد A_2 و A_1 را طوری طراحی کرد که سیستم حلقه بسته پایدار باشد.

توجه شود که در عین پایداری سیستم حلقه بسته ضرورتی وجود ندارد که کنترل کننده K(s) نیز A پایدار باشد.

خروجی سیستم $y = cx + du$

$$y = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + du$$

$$y(s) = \begin{pmatrix} c & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A + BG)^{-1} & (sI - A + BG)^{-1} BG (sI - A + Hc)^{-1} \\ 0 & sI - A + Hc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} r$$

$$y_r(s) = \underbrace{c (sI - A + BG)^{-1} BG (sI - A + Hc)^{-1} H}\, r(s)$$

$$G_{ce}(s) = c S(s)$$

تابع حساسیت

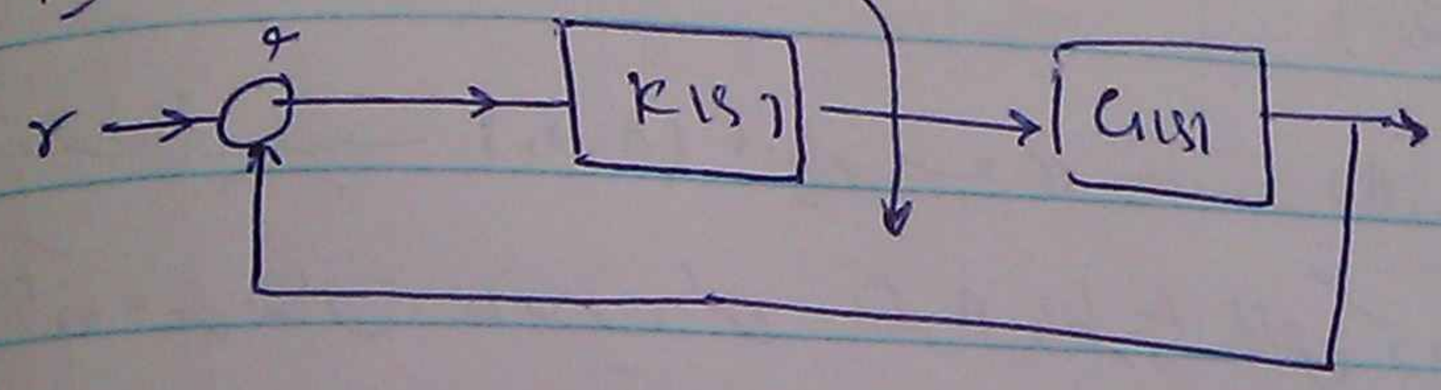
اگر $r = 0$ آنگاه

$$y_d(s) = \underbrace{(I - c S(s))}\, d(s)$$

حساسیت $S(s)$

توجه کنید زمانی که در MBC استفاده می‌کنیم اگر حلقه صنعتی را در ورودی باز

فرض کنیم آن‌گاه بهره حلقه برابر است با: بازکردن حلقه صنعتی در ورودی سیستم



$$K(s)G(s) = G(sI - A + HC + BG)^{-1}HC(sI - A)^{-1}B$$

آن‌گاه حلقه را زمانی که خروجی را باز کنیم برابر است با

$$G(s)K(s) = C(sI - A)^{-1}BG(sI - A + HC + BG)^{-1}H$$

توجه کنید تمرکز ما در این رساله بهره حلقه برابر نیست.

جهت راحتی $G(s)K(s)$ و $K(s)G(s)$ را مقدار متمایز در نظر گرفته و سعی می‌کنیم از دو روش زیر عمل می‌کنیم.

روش 1) ماتریس H را به گونه‌ای پیدا کنید که $C(sI - A)^{-1}H$ دقیقاً برابر با $G(s)K(s)$ شود سپس G را به گونه‌ای تعیین کنید که $G(s)K(s)$ به دست آید (در این روش ۲ تابع تبدیل به دست می‌آید)

LQR سیستم‌های

Linear Quadratic Regulator

سیستم‌های زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

که در آن x بردار حالت، u بردار ورودی و y بردار خروجی است.

$$\lim_{t \to \infty} k(t) \longrightarrow k$$

$$t \longrightarrow \infty$$

ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے جیسے وقت لامحدود ہوتا جاتا ہے ویسے ویسے
ہمارا تخمینہ حقیقی قدر کے قریب تر ہوتا جاتا ہے۔ اس مثال میں ہم
نے دیکھا کہ ہمارا تخمینہ وقت کے ساتھ ساتھ بہتر ہوتا جاتا ہے۔

$$\dot{k}(t) = -k(t) A - A^T k(t) - Q + k(t) B \tilde{R}^{-1} B^T k(t)$$

ہم ریکارڈ کے لیے اس کو دوبارہ لکھتے ہیں

$$\dot{k} = -k(t) A - A^T k(t) - Q + k(t) B \tilde{R}^{-1} B^T k(t)$$

$$k(t_f) = 0$$

ہم ریکارڈ کے لیے اس کو دوبارہ لکھتے ہیں

$$\dot{k} = -k(t) A - A^T k(t) - Q + k(t) B \tilde{R}^{-1} B^T k(t)$$

$$k(t_f) = 0$$

Control effort

$$J = \int_0^{t_f} (x^T Q x + u^T R u)\, dt$$

$$(Q = C^T C)$$

یہ ہمارا کنٹرول ایفرٹ ہے۔ اس کو کم سے کم کرنا ہے۔

$$u = -Cl(t) x(t)$$

اس کو ہم کنٹرول لا کہتے ہیں۔ سسٹم کو کنٹرول کرنے کے لیے ہم

توضیح: اگر مسأله رگولاتور بهینه را در نظر بگیریم. فرض کنید (A,B) جفت کنترل پذیر و (C,A) جفت رویت پذیر باشند. آنگاه

$\lim_{t\to\infty} K(t)$ وجود داشته و ثابت است. ⟶

12) ماتریس K حل یکتای مثبت معین جبری ریکاتی است

$$-KA - A^T K - Q + KBR^{-1}B^T K = 0$$

13) ماتریس K ($\lim_{t\to\infty} K(t) = K$) متقارن و مثبت معین است.

$(K = K^T > 0)$

14) ورودی بهینه که از رابطه $u = (-R^{-1}B^T K)x(t)$ بدست می‌آید تضمین می‌کند که سیستم حلقه‌بسته $\dot{x} = (A - BG)x$ پایدار مجانبی است.

15) مقدار بهینه تابع هزینه در هر زمان دلخواه t تا بی‌نهایت

$$J = \min \int_t^{\infty} (d^T(\tau) Q d(t) + u^T(\tau) R u(\tau))\, d\tau$$

$$= x^T(t) K x(t)$$

و سیستم حلقه‌بسته کنترل شده صورت تقریباً پایدار است.

$$\dot{\alpha} = (A - BG)\alpha$$

جلسه 20 — 91/10/3

مفهوم: مسأله رگولاتور بهینه زیر را در نظر بگیرید:

فرض کنید جفت (A,B) پایدارشدنی تثبیت پذیر باشد

$(Q = C^T C)$

1. وجود داشته و یکتا بوده و برای تمام مقادیر $x(0)$ این $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ حد را به x نزدیک می‌دهیم.

2. ماتریس K متقارن و اکیداً مثبت نیمه معین است. $(K = K^T \geq 0)$

3. ماتریس K که حل یکتای مثبت نیمه معین معادله جبری ریکاتی زیر معادله زیر یکتا می‌آید.

$$-KA - A^T K - Q + KBR^{-1}B^T K = 0$$

4. ورودی بهینه یکتا $u(t) = \underbrace{-R^{-1}B^T K}_{G(t)} x(t)$ سبب پایداری سیستم حلقه بسته می‌شود.

$$Re\{\lambda_i(A - BG)\} < 0$$

مقدار مینیمم تابع هزینه

$$J = \min \int_t^{\infty} [x^T(\tau) Q x(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau)] d\tau$$

$$= x^T K x$$

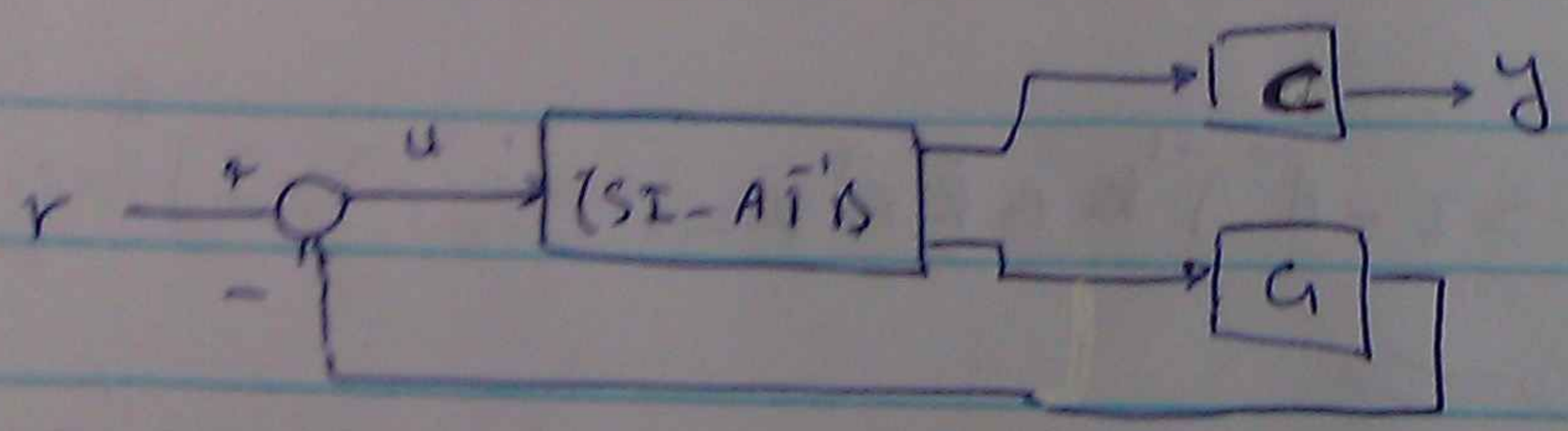
روش ماتریس مدل معادله ریکاتی Potter

اکنون رابطه‌ای به دست می‌آوریم که بتوان Q و R را چنان طراحی کرد که رفتار سیستم مطلوب باشد قبلاً ثابت شده که بهره حقیقی با استفاده از LQR به دست می‌آید.

$$G_{LQ}(s) \triangleq G(sI - A)^{-1}B$$

$$G_{OL}(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$G = R^{-1}B^{T}K$$



می‌توان نشان داد که همواره

$$[I + G_{LQ}(-s)]^{T} K [I + G_{LQ}(s)] = R + G_{OL}^{T}(-s) G_{QL}(s)$$

به این رابطه Kalman Frequency Domain equality (KF.D.E) گویند که از روی معادله جبری خطی به دست آمده است.

$$-KA - A^T K - Q + KBR^{-1}B^T K = 0$$

$$SK - KA - SK - A^T K - Q + KBR^{-1}B^T K = 0$$

$$K(SI - A) + (-SI - A^T)K - Q + KBR^{-1}BK = 0$$

ضرب $B^T(-SI - A^T)^{-1}$ از سمت چپ

$$B^T(-SI - A^T)^{-1}K(SI - A) + B^T K - B^T(-SI - A^T)^{-1}Q +$$

$$B^T(-SI - A^T)^{-1}KBR^{-1}B^T K = 0$$

ضرب $(SI - A)^{-1}B$ از سمت راست

$$B^T(-SI - A^T)^{-1}K + B^T K(SI - A)^{-1}B - \boxed{B^T(-SI - A^T)^{-1}Q(SI - A)^{-1}B} +$$

$$\boxed{B^T(-SI - A^T)^{-1}KBR^{-1}B^T K(SI - A)^{-1}B} = 0$$

$C_{0L}^T(S)$ — $C^T C$ — $C_{0L}(S)$

C_1

$C_{LQ}(S)$

... $\leftarrow S = j\omega$ قرار می‌دهیم

→ H.O.T ?

$$R + G_{OL}(j\omega)\, G_{OL}^{H}(j\omega) = [I + G_{LQ}(j\omega)]\, R\, [I + G_{LQ}^{H}(j\omega)]$$

با ضرب طرفین رابطه فوق از سمت چپ و راست به x^H و x داریم:

$$0 \leq x^H G_{OL}(j\omega)\, G_{OL}^{H}(j\omega)\, x = x^H (I + G_{LQ}(j\omega))\, R\, (I + G_{LQ}^{H}(j\omega))\, x - x^H R x$$

اکنون فرض کنید $R = 2I$ (به تمام ورودی‌ها از نظر انرژی وزن یکسان برابر دهیم) داریم:

$$2x^H (I + G_{LQ}(j\omega))(I + G_{LQ}^{H}(j\omega))\, x \geq 2\, x^H x$$

$$\frac{\| I + G_{LQ}(j\omega) \|_2^2}{\| x_2 \|^2} \geq 1$$

$$\longrightarrow \quad \underline{\sigma}(I + G_{LQ}(j\omega)) \geq 1 \qquad \forall \omega \qquad \checkmark$$

می‌توان نتیجه گرفت که رابطه زیر برای بهره حلقه $G_{LQ}(j\omega)$ برقرار است.

$$\underline{\sigma}(I + G_{LQ}(j\omega)) \geq \tfrac{1}{2}$$

$$\underline{\sigma}(I + G_1 L_2) = \frac{1}{\overline{\sigma}(I + G_1 L_2)^{-1}} \geq 1/2$$ می‌دانیم

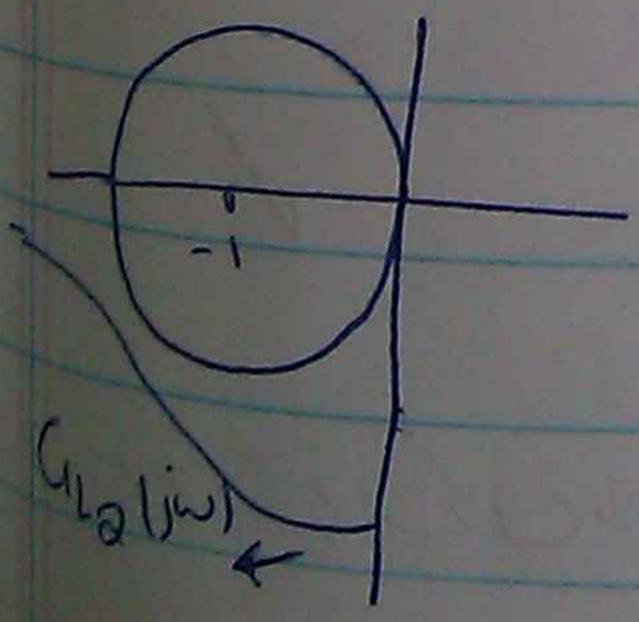
$$\Rightarrow -\overline{\sigma}[I + G_1 L_2]^{-1} \geq -2$$

به ازای همه ω $\quad \overline{\sigma}(\underbrace{G_2 L_2}_{\text{تابع تبدیل حلقه بسته}}(I + G_2 L_2)^{-1}) \leq 2$

$$|\underbrace{I + G_1 L_2(j\omega)}_{\text{حلقه بسته}}| \geq 1 \qquad \text{(مودی اکبر)}$$

یعنی حاشیه نایکوئیست هیچوقت نقطه -1 را قطع نکند

رابطه فیدبکی حقیقت را نشان می‌دهد که فاصله نایکوئیست L_2 دایره به شعاع واحد و مرکز -1 را قطع نکند.



توجه شده به عبارت با توجه به مطالب فیدبکی

دارای حاشیه بهره بی‌نهایت و حاشیه فاز 60° حداقل ۶ می‌باشد

$$\downarrow$$

$$[1/2, \infty)$$

* چنانچه طراحی مناسبی صورت گیرد آنگاه در فرکانس‌های پایین

$\underline{\sigma}(G_{L_2}(j\omega)) \gg 1$ ✓

$$I + G_{L_2}(j\omega) \simeq G_{L_0}(j\omega)$$

$$\rightarrow \sigma_i(I + G_{L_2}(j\omega)) \simeq \sigma_i(G_{L_2}(j\omega)) \gg 1$$

و در فرکانس‌های بالا

$$\bar{\sigma}(G_{L_2}(j\omega)) \ll 1$$

$$\rightarrow I + G_{L_0}(j\omega) = I$$

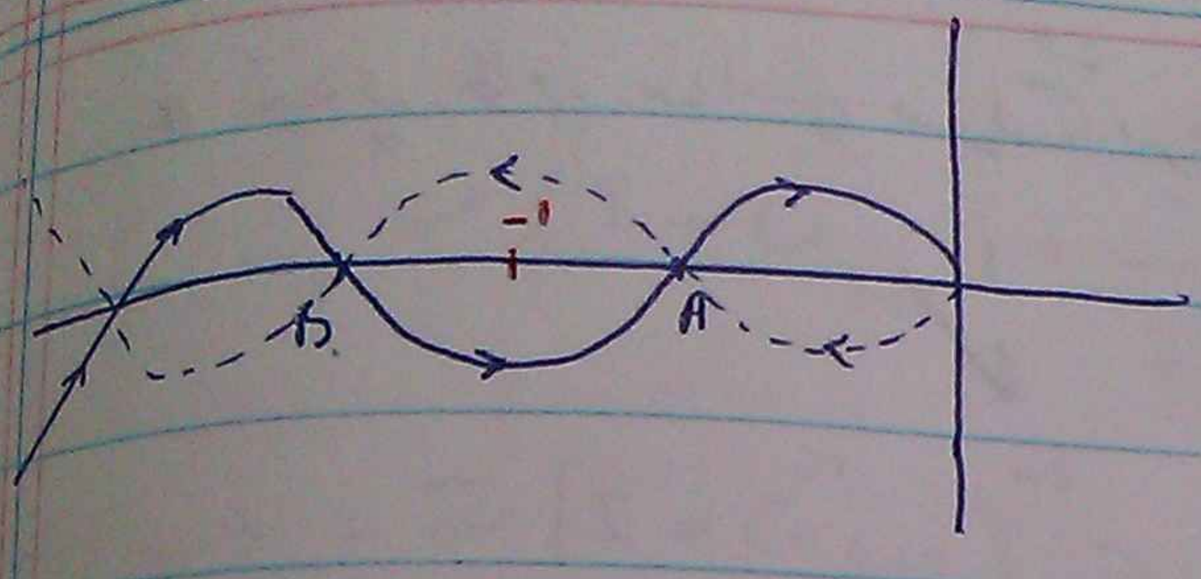
$$\rightarrow \sigma_i(I + G_{L_0}(j\omega)) \simeq \sigma_i(I) \simeq 1$$

بنابراین $\underline{\sigma}(I + G_{L_0}(j\omega)) > 1$ ✓ ضامن حاشیه بهره

$$\sigma_i(G_{L_0}(j\omega)) \simeq 1$$

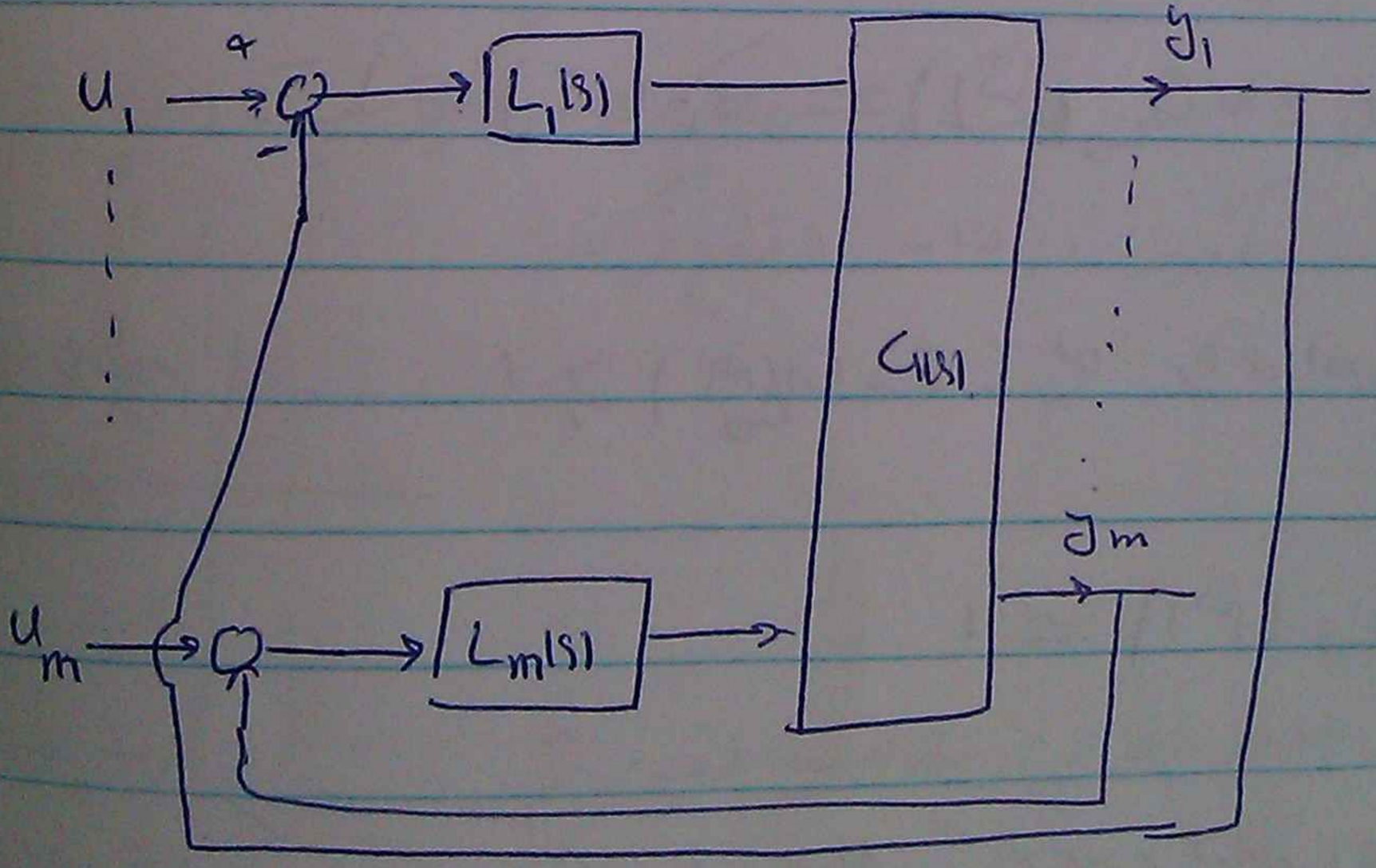
رابطه فوق بیان می‌کند بهره LQR در حوالی فرکانس قطع از حدود 1 (0dB) تجاوز نکرده و حاشیه فاز (حداقل 60°) را دارد.

↑ حاشیه فاز



توجه شود که اتصالات علاوه بر کنترل بالا در بهره ممکن است کنترل پایین نیز داشته باشیم مطابق شکل بالا. با فرض اینکه با افزایش K نقطهٔ B به سمت ۱- حرکت کرده و با کاهش K نقطهٔ A به سمت ۱- حرکت می‌کند که سبب ناپایداری خواهد شد.

حذف واحد بهره برای سیستم MIMO:



سیم حلقه بسته فوق را در نظر بگیرید فرض کنید برای $L_i(s)$ سیم حلقه بسته پایدار باشد. تولیم حداکثر سیم چند متغیره از طرف بالا c_2 و از طرف پایین c_1 اینطور که

$$L_i(s) = L_i \qquad c_1 < L_i < c_2 \quad \left(\begin{array}{c}\text{به شرط آنکه مقادیر}\\ L_i \text{ حقیقی باشد}\end{array}\right)$$

$$i = 1, \dots, m$$

سیم حلقه بسته پایدار باشد.

$$\frac{1}{2} < l_1 < 3$$

$$\frac{1}{4} < l_2 < 2$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{2} < L_i < 2$$

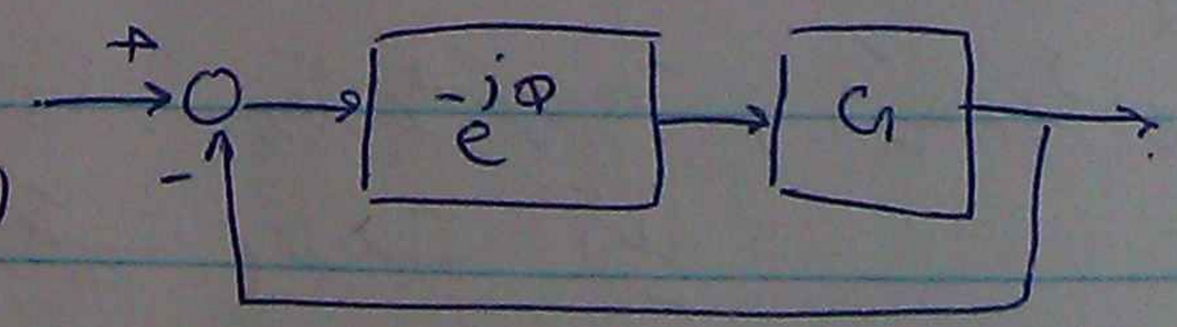
چون در این حداکثر، یک سیستم تک (حالت SISO) حاصل شده پایدار باشد.

حذف سیم چند متغیره به شرط آنکه فرض اینکه

$$L_i(s) = e^{-j\Phi}$$

$$i = 1, \dots, m$$

(SISO)



آنگاه $c_1 < \Phi_i < c_2$ سیم حلقه بسته پایدار باشد.

نتیجه: فرض کنید سیم حلقه بسته فوق با فرض $L_i(s) = 1$ پایدار باشد و

$$\sigma\left(I + G(j\omega)\right) \geq \alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

آنگاه رابطه زیر برقرار است

$$\left(\frac{1}{1+\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}\right) \subset G.M$$

$$\left(-2\sin^{-1}\frac{\alpha}{2}, 2\sin^{-1}\frac{\alpha}{2}\right) \subset P.M$$

$$if\ \alpha = 1 \longrightarrow (1/2, \infty) \subset GM$$

$$(-60, 60) \subset P.M$$

نکته: روابط فوق در صورتی برقرار است که تمام حالت ها مربوط به سیستم حداقل فاز درستر باشد. عبارتی در صورت تخمین حالت نرم‌افزار هیچ یک از اعداد برقرار نیست.

میدان مغناطیسی حاصل

نشان خواهیم داد که میکروفون با انتخاب C و R می‌توان G_1 و G_2 را به گونه‌ای یافت که رفتار مورد نظر برای بهره حلقه (در فرکانس‌های پایین بزرگ و در فرکانس‌های بالا کوچک) بدست آید.

فرکانس‌های میانی تغییر نکند.

عموماً R را به فرم ماتریس زیر در نظر می‌گیریم.

$$R = \rho I$$

$$J = \int_0^\infty (y^T y + \rho u^T u)\, dt$$

(C و ρ متغیر هستند)

$$y(s) = C_{OL}(s)$$

$$\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{n} C_{OL}^{H}(j\omega) C_{OL}(j\omega) = \left[I + C_{LQ}(j\omega)\right]^{H}\left[I + C_{LQ}(j\omega)\right]$$

$$C_{OL}(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B, \quad C_{LQ}(j\omega) = C\left(j\omega - \underbrace{\frac{I}{A}}\right)B$$

$$G = R^{-1}B^{T}R = \frac{1}{\rho}B^{T}R$$

در فرکانس‌های پایین ρ و c به نوعی انتخاب می‌شوند که

$$\sigma\left(C_{LQ}(j\omega)\right) \gg 1$$

لذا در این صورت

$$I + C_{LQ}(j\omega) \approx C_{LQ}(j\omega)$$

$$\frac{1}{\rho}\sum_{OL}^{H} C_{OL}(j\omega) C_{OL}(j\omega) \simeq C_{LQ}^{H}(j\omega)\, C_{LQ}(j\omega)$$

(در فرکانس‌های پایین) $\sigma\left(C_{OL}(j\omega)\right) \approx \sigma\left(C_{LQ}(j\omega)\right) \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}}$

توجه شود $C_{OL}(s)$ برای (A) چنانچه A نامینیمم فاز نباشد آنگاه

$$C_{OL}(0) = -CA^{-1}B$$

↑ نامینیمم فاز نیست

↘ منفی

unitary

تحلیل بعدی C را به گونه‌ای حساب کنید که $C_{CL}(0)$ ماتریس متعامد شود.

برای C جواب‌های مختلفی می‌توان یافت.

که عبارتند از:

① $C = (B^T B)^{-1} B^T A$

② $C = (B^T A^{-1} B)^{-1} B^T$

روش دیگر: فرض C ؛ تکرار زیر را داشته باشید.

$A^{-1}B = U \Sigma V^T \longrightarrow C = \Sigma^T V^T$

در کدام یک از این C ها $\sigma_1(C_{CL}(j\omega)) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ است؟

بنابراین در کدام یک از C های زیر می‌توانید با اطمینان صحیح را انتخاب کنید؟ چرا؟

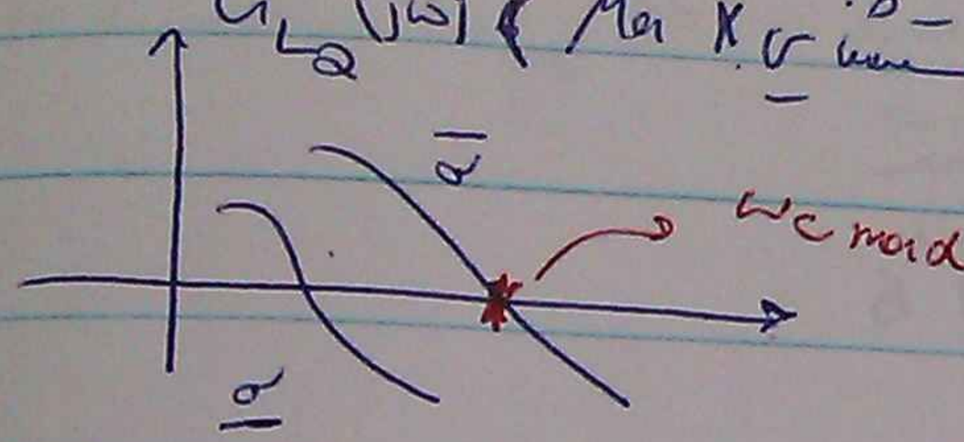
$\sigma_1(C(j\omega I - A)^{-1}B) \leq 1$

علاوه بر این، فرض ضرب نشده حلقه‌ی در کدام یک از C های زیر داریم.

$\sigma_1(C(j\omega I - A)^{-1}B) \leq \frac{1}{\sqrt{\rho}}$

همانطور که در آن (اندازه‌ها) ω_{cmax} برابر مقدار ثابت شود. (اندازه‌ها) G_{OL} در فرکانس

اندازه‌ای برای مقدار استثنایی M_{max} کمتر از صفر dB



همانطور که در فرکانس مقادیر استثنایی (اندازه) G_{OL} در فرکانس‌های بالاتر از

با شیب $-20\ dB/dec$ قرار دارد فرکانس‌های بالاتر با شیب $-20\ dB/dec$ را به گونه‌ای

انتخاب کنیم تا خط $0\ dB$ را قطع کند محل تلاقی را فرکانس تقدیر ω_{cmax} در

نظر می‌گیریم. پس

$$1 = 0\ dB = \frac{1}{\sqrt{\rho}\ \omega_{cmax}}\ \bar{\sigma}(G_{OL})$$

$$\Rightarrow \omega_{cmax} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\ \bar{\sigma}(G_{OL})$$

بنابراین باند سیستم حلقه‌بسته بین ω_{cmax} و $2\omega_{cmax}$ قرار دارد.

پس در ادامه با این فرض که $\bar{\sigma}(G_{OL}) \simeq 1$ کار می‌کنیم:

$$\Rightarrow \omega_{cmax} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

ω_{cmax} فرکانس میانی است.

با آنچه گفته شد می‌توانید فرکانس قدر از $0\ dB$ و در نتیجه پهنای باند سیستم حلقه‌بسته

را به خوبی که خواهید تخمین دهید.

توجه کنید در این روش نیاز به دانستن حالت x نداریم. در ادامه به بیان روش‌هایی

که حالت x خواهیم پرداخت.

نکات: چونکی تغییرات حقیقی حلقه بسته