

Problem set3:

فصل اعداد مختلط

تاریخ تحویل: ۱۳۸۹//

۱- تساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\sin^{-1} z = -i \ln(iz \pm \sqrt{1-z^2}), \quad \sinh^{-1} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2+1}), \quad \tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad \cosh^{-1} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2-1})$$

۲- کوچکترین عدد صحیح مثبت n را چنان بیابید که:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$$

۳- ثابت کنید:

$$(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n + (1 + \cos \theta - i \sin \theta)^n = 2^{n+1} \cos^n \frac{\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}$$

۴- مطلوبست حل معادلات زیر:

$$x^9 - x^5 + x^4 - 1 = 0 \quad (\text{ب}) \quad x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0 \quad (\text{الف})$$

۵- نشان دهید که ریشه های معادله $(x-1)^5 = 32(x+1)^5$ به صورت زیر است:

$$x = \frac{-3 + 4i \sin \frac{2n\pi}{5}}{5 - 4 \cos \frac{2n\pi}{5}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

۶- قسمت حقیقی و موهومی عددهای زیر را بنویسید:

$$\ln(ie) \quad (\text{ج}) \quad i^i \quad (\text{ب}) \quad (i+1)^{(i+1)} \quad (\text{الف})$$