



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۴/۹/۶

وقت : ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس ریاضی ۱-فنی (۲۰ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

۱۰ نمره

سوال ۱- الف) عبارت $(-\sqrt{3} + i)^{20}$ را محاسبه کنید.

۱۰ نمره

ب) معادله $z^2 + (2i + 3)z + (3i + 2) = 0$ را در اعداد مختلط حل کنید.

۱۰ نمره

سوال ۲- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x - 4}{x + 2}}$ را بیابید.

۵ نمره

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

۱۰ نمره

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-4}}{x^2 - 9}$

۱۰ نمره

سوال ۴- الف) مشتق تابع $f(x) = \cos(x^2 - x) + \sqrt[3]{x^3 - 4x}$ را بیابید.

۱۰ نمره

ب) فرض کنید $x \sin y + 3x^2 = \tan(5y)$. در این صورت، $y' = \frac{dy}{dx}$ را محاسبه کنید.

۱۵ نمره

سوال ۵- مقدار a و b را طوری بیابید که تابع زیر در $x=2$ مشتقپذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 12 & x \leq 2 \\ ax^2 + bx & x > 2 \end{cases}$$

موفق باشید



پاسخ سوال ۱: الف) روش اول: $(-\sqrt{3}+i)^2 = (2-2\sqrt{3}i) \rightarrow (-\sqrt{3}+i)^3 = 8i \rightarrow (-\sqrt{3}+i)^6 = -2^6$

$$\rightarrow (-\sqrt{3}+i)^{20} = ((-\sqrt{3}+i)^6)^3 (-1+\sqrt{3}i)^2 = (-2^6)^3 (2-2\sqrt{3}i) = 2^{19}(-1+\sqrt{3}i)$$

روش دوم: ابتدا عدد مختلط $z = -\sqrt{3}+i$ را به صورت $z = re^{i\theta}$ می نویسیم و سپس آن را به توان ۲۰ می رسانیم.

$$r = \sqrt{3+1} = 2, \theta = \pi + \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \rightarrow z = 2e^{\frac{5\pi i}{6}} \rightarrow z^{20} = (2e^{\frac{5\pi i}{6}})^{20} = 2^{20}e^{\frac{50\pi i}{3}} = 2^{20}e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$(-\sqrt{3}+i)^{20} = 2^{19}(-1+\sqrt{3}i) \text{ و } (-\sqrt{3}+i)^{20} = 2^{20}\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z = \frac{-(2i+3) \pm \sqrt{(2i+3)^2 - 4(3i+2)}}{2} \rightarrow z = \frac{-(2i+3) \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-3}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = \frac{-3}{2} - \frac{2+\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \quad (\text{ب})$$

پاسخ سوال ۲: مخرج کسر باید مخالف ۰ و عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد. ابتدا نقاطی را پیدا می کنیم که صورت یا مخرج

$$x+2=0 \rightarrow x_1=-2, x^2-3x-4=0 \rightarrow x_2=-1, x_3=4 \text{ کسر برابر ۰ هستند.}$$

این ۳ نقطه محور x ها را به ۴ بازه تقسیم می کنند. با تعیین علامت عبارت زیر رادیکال در هر یک از بازه ها دامنه مشخص می شود. در بازه های $(-2, -1)$ و $(4, \infty)$ علامت عبارت، مثبت است و در بازه های $(-\infty, -2)$ و $(1, 4)$ علامت عبارت، منفی است.

$$D_f = (-2, -1] \cup [4, \infty) \text{ پس دامنه تابع برابر است با:}$$

پاسخ سوال ۳: الف) روش اول (استفاده از قضیه):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ چون } \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ یک تابع کراندار است و } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0 \text{ پس می توانیم بگوییم:}$$

$$\text{الف) روش دوم (قضیه ساندویچی): چون } -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \text{ پس داریم } -\sqrt[3]{x} \leq \sqrt[3]{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sqrt[3]{x}$$

$$\text{اکنون چون } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} (-\sqrt[3]{x}) = 0 \text{ پس می توانیم بگوییم:}$$

ب) صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-4}}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1) - (2x-4)}{(x^2-9)(\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-4})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x+3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x+3)(\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-4})} = \frac{-1}{6 \times 2\sqrt{2}} = \frac{-1}{12\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = -(2x-1)\sin(x^2-x) + \frac{1}{3}(3x^2-4) \times \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3-4x)^2}} \quad (\text{پاسخ سوال ۴: الف})$$

$$y' = -\frac{\sin y + 6x}{x \cos y - \frac{5}{1+25y^2}} = \frac{(\sin y + 6x)(1+25y^2)}{5 - x \cos y(1+25y^2)} \quad (\text{ب}) \text{ از فرمول مشتق ضمنی استفاده می کنیم.}$$



پاسخ سوال ۵: مشتق تابع در نقاط $x \neq 2$ موجود و برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x < 2 \\ 2ax + b & x > 2 \end{cases}$$

اگر تابع در $x = 2$ هم مشتقپذیر باشد، آنگاه مشتق چپ و مشتق راست در نقطه $x = 2$ برابر هستند. یعنی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) \rightarrow 12 = 4a + b$$

از طرف دیگر، اگر تابع در $x = 2$ مشتقپذیر باشد، پس در این نقطه پیوسته است و باید داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

یعنی باید داشته باشیم: $20 = 4a + 2b$

از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} 4a + b = 12 \\ 4a + 2b = 20 \end{cases}$ خواهیم داشت $b = 8$ و $a = 1$ و مساله حل شده است.