نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۴/۶/۴**

وقت : **۱۳۵** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس **معادلات دیفرانسیل** (۱۶ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / دوم) ۱۴۰۴- ۱۴۰۳

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید. به هیچ سوالی در جلسه امتحان پاسخ داده نمی‌شود. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

سوال ۱- معادله دیفرانسیل $xy''-(1+2x)y'+(x+1)y=e^x$ را حل کنید. **(۲۰ نمره)**

(توجه کنید که $y_1=e^x$ یک جواب معادله همگن متناظر آن است.)

سوال ۲- با استفاده از روش عملگر D جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید. **(۱۵ نمره)**

$$y''+9y=\sin(3x)$$

سوال ۳- دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید. **(۲۰ نمره)**

$$\begin{cases}(D-4)x-3y=2e^{3t}\\ -x+(D-2)y=-e^{-3t}\end{cases}$$

سوال ۴- جواب معادله دیفرانسیل $y''+(2x-3)y'-3y=0$ را به صورت سری توانی حول نقطه $x_0=0$ به دست آورید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۵- تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید. **(۲۰ نمره)**

$$g(t)=\begin{cases}\sin(2t) & 0\le t\le 2\pi\\ 3t & 2\pi<t\end{cases}\qquad\qquad f(t)=te^{3t}\sin(2t)+\int_0^t\cos(3x)dx$$

سوال ۶- معادله دیفرانسیل با مقدار اولیه زیر را **با استفاده از تبدیلات لاپلاس** حل کنید. **(۱۵ نمره)**

$$x''+4x'+4x=2e^{-2t}\ ;\quad x(0)=2\ ,\ x'(0)=-3$$

سوال ۷- مطلوب است حل معادله انتگرالی زیر : **(۱۵ نمره)**

$$y(t)+5\int_0^t e^{2(t-u)}y(u)du=9t$$

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : $y_1=e^x$ یک جواب معادله همگن نظیر این معادله یعنی $xy''-(1+2x)y'+(x+1)y=0$ است.

روش اول (تغییر متغیر) : فرض می‌کنیم $y=e^xu$ و آن را در معادله قرار می‌دهیم :

$$x(u''+2u'+u)e^x-(1+2x)(u'+u)e^x+(x+1)ue^x=e^x \;\to\; xu''-u'=1$$

اکنون اگر قرار دهیم $v=u'$ به یک معادله خطی مرتبه اول می‌رسیم.

$$xv'-v=1 \;\to\; v=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(c+\int\frac{1}{x}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx\right)=x\left(c+\int\frac{1}{x^2}dx\right)=cx-1$$

اکنون داریم : $u'=cx-1 \to u=\frac{1}{2}cx^2-x \quad \to y_2=(\frac{1}{2}cx^2-x)e^x \;\to\; y_g=(a-x+bx^2)e^x$

روش دوم (فرمول آبل) : ، یک جواب مستقل خطی دیگر برای آن پیدا می‌کنیم.

$$y_2=e^x\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{\int\frac{1+2x}{x}dx}dx=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{\ln x+2x}dx=e^x\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2e^x$$

پس جواب معادله همگن برابر است با : $y_h=(a+bx^2)e^x$

جواب خصوصی معادله را به کمک روش تغییر پارامتر محاسبه می‌کنیم.

$$y_1=e^x\;,\; y_2=x^2e^x\;,\; r(x)=\frac{e^x}{x} \;\to w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^x & x^2e^x \\ e^x & (x^2+2x)e^x\end{vmatrix}=2xe^{2x}$$

$$y_p=e^x\int\frac{-x^2e^x}{2xe^{2x}}\times\frac{e^x}{x}dx+x^2e^x\int\frac{e^x}{2xe^{2x}}\times\frac{e^x}{x}dx=e^x\int\frac{-1}{2}dx+x^2e^x\int\frac{1}{2x^2}dx=\frac{-1}{2}xe^x-\frac{1}{2}xe^x=-xe^x$$

جواب عمومی معادله عبارت است از : $y_g=(a-x+bx^2)e^x$

پاسخ سوال۲ :

$$D^2y+9y=\sin(3x) \;\to y_p=\frac{1}{D^2+9}\sin(3x) \to y_p=\frac{1}{D^2+9}\operatorname{Im}(e^{3xi})$$

$$\to\quad y_p=\operatorname{Im}(\frac{1}{D^2+9}e^{3xi}) \;\to\; y_p=\operatorname{Im}(e^{3xi}\frac{1}{(D+3i)^2+9}(1)) \to\quad y_p=\operatorname{Im}(e^{3xi}\frac{1}{D^2+6iD}(1))$$

$$\to\quad y_p=\operatorname{Im}(e^{3xi}\frac{1}{D}\times\frac{1}{D+6i}(1)) \quad\to\quad y_p=\operatorname{Im}(e^{3xi}(\frac{x}{6i})) \to\quad y_p=\operatorname{Im}((\cos(3x)+i\sin(3x))(\frac{x}{6i}))$$

$$\to\; y_p=\frac{-1}{6}x\cos(3x)$$

پاسخ سوال۳ : داریم : ابتدا مجهول y را حذف می‌کنیم.

$$\begin{matrix} D-2 \\ 3\end{matrix}\begin{cases}(D-4)x-3y=2e^{3t} \\ -x+(D-2)y=-e^{-3t}\end{cases} \;\to\; \begin{cases}(D^2-6D+8)x-3(D-2)y=2e^{3t} \\ -3x+3(D-2)y=-3e^{-3t}\end{cases}$$

$$\to\; (D^2-6D+5)x=2e^{3t}-3e^{-3t}$$

اکنون به یک معادله یک مجهولی رسیده‌ایم و می‌توانیم جواب عمومی آن را پیدا کنیم. برای پیدا کردن جواب همگن قرار می‌دهیم $D^2-6D+5=0$ که دو ریشه حقیقی ۱ و ۵ دارد و در نتیجه : $x_h=ae^t+be^{5t}$

اکنون می‌دانیم که $y_h=ce^t+de^{5t}$ و برای پیدا کردن روابط بین چهار پارامتر a,b,c,d این جوابها را در معادله دوم قرار می‌دهیم : $-(ae^t+be^{5t})+(D-2)(ce^t+de^{5t})=0 \;\to\; -ae^t-be^{5t}-ce^t+3de^{-4t}=0$

$$\rightarrow\ -(a+c)e^{t}+(b-3d)e^{5t}=0\ \rightarrow\ a+c=0\ ,\ b-3d=0\ \rightarrow\ a=-c\ ,\ b=3d$$

بنابر این، جواب دستگاه همگن عبارت است از : $x_h=-ce^{t}+3de^{5t}\ ,\ \ y_h=ce^{t}+de^{5t}$

جواب خصوصی معادله برابر است با

$$x_p=\frac{1}{D^2-6D+5}(2e^{3t}-3e^{-3t})=\frac{2}{D^2-6D+5}(e^{3t})-\frac{3}{D^2-6D+5}(e^{-3t})=\frac{-1}{2}e^{3t}-\frac{3}{32}e^{-3t}$$

برای پیدا کردن y_p از معادله اول استفاده می‌کنیم. داریم :

$$y_p=\frac{1}{3}(D-4)x-\frac{2}{3}e^{3t}\ \rightarrow\ y_p=\frac{1}{3}(D-4)(\frac{-1}{2}e^{3t}-\frac{3}{32}e^{-3t})-\frac{2}{3}e^{3t}\ \rightarrow\ \ y_p=\frac{-1}{2}e^{3t}+\frac{7}{32}e^{-3t}$$

جواب نهایی دستگاه معادله برابر است با :

$$\begin{cases} x_g=-ce^{t}+3de^{5t}-\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{3}{32}e^{-3t}\\ y_g=ce^{t}+de^{5t}-\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{7}{32}e^{-3t}\end{cases}$$

پاسخ سوال۴ : نقطه $x_0=0$ یک نقطه عادی معادله است بنابراین، معادله دارای یک جواب به صورت سری توانی $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

است و داریم : $y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

این جواب را در معادله قرار می دهیم : $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+(2x-3)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

ضرایب پشت زیگماها را به داخل زیگما منتقل می‌کنیم. $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}3na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^n=0$

توان‌های x در تمام زیگماها را به توان n تبدیل می‌کنیم :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}3(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^n=0$$

می‌توانیم بنویسیم $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}2na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}3(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^n=0$

اکنون داریم $\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-3(n+1)a_{n+1}+(2n-3)a_n]x^n=0$

که نتیجه می‌دهد $(n+2)(n+1)a_{n+2}-3(n+1)a_{n+1}+(2n-3)a_n=0\quad ,\quad n=0,1,2,\cdots$

و یا $a_{n+2}=\frac{3(n+1)a_{n+1}-(2n-3)a_n}{(n+2)(n+1)}=\frac{3}{n+2}a_{n+1}-\frac{2n-3}{(n+2)(n+1)}a_n\quad ,\quad n=0,1,2,\cdots$

با قرار دادن مقادیر مختلف n تعدادی از ضرایب را محاسبه می‌کنیم.

$$a_2=\frac{3}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\ ,\ \ a_3=a_2+\frac{1}{6}a_1=\frac{5}{3}a_1+\frac{3}{2}a_0,\ \ a_4=\frac{3}{4}a_3-\frac{1}{12}a_2=\frac{9}{8}a_1+a_0$$

با جایگذاری ضرایب بدست آمده در سری جواب داریم :

$$y=a_0(1+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3+x^4+\cdots)+a_1(x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{3}x^3+\frac{9}{8}x^4+\cdots)$$

پاسخ سوال۵ : از فرمول‌های تبدیل لاپلاس با ترتیب مناسب استفاده می‌کنیم :

$$L\{f\}=L\{e^{۳t}\sin ۲t+\int_{۰}^{t}\cos ۳x dx\}=L\{\sin ۲t\}_{s\to s-۳}+\frac{L\{\cos ۳x\}}{s}=\frac{۲}{(s-۳)^{۲}+۴}+\frac{۱}{s^{۲}+۹}$$

ابتدا تابع g را با استفاده از تابع پله‌ای واحد به یک ضابطه تبدیل می‌کنیم و سپس تبدیل لاپلاس آن را محاسبه می‌کنیم. می‌توانیم بنویسیم :

$$g(t)=\sin ۲t+(۳t-\sin ۲t)u_{۲\pi}(t)$$

$$L\{g\}=L\{\sin ۲t+(۳t-\sin ۲t)u_{۲\pi}(t)\}=L\{\sin ۲t\}+L\{(۳t-\sin ۲t)u_{۲\pi}(t)\}$$

$$=\frac{۲}{s^{۲}+۴}+e^{-۲\pi s}L\{۳(t+۲\pi)-\sin ۲(t+۲\pi)\}=\frac{۲}{s^{۲}+۴}+e^{-۲\pi s}L\{۳t+۶\pi-\sin ۲t\}$$

$$=\frac{۲}{s^{۲}+۴}+e^{-۲\pi s}(\frac{۳}{s^{۲}}+\frac{۶\pi}{s}-\frac{۲}{s^{۲}+۴})$$

پاسخ سوال۶ : تبدیل لاپلاس دو طرف معادله را محاسبه می‌کنیم.

$$L\{x''+۴x'+۴x\}=L\{۲e^{-۲t}\}\quad\to\quad s^{۲}L\{x\}-۲s+۳+۴sL\{x\}-۸+۴L\{x\}=\frac{۲}{s+۲}$$

$$\to\ (s^{۲}+۴s+۴)L\{x\}=۲s+۵+\frac{۲}{s+۲}\ \to\ L\{x\}=\frac{۲s+۵}{(s+۲)^{۲}}+\frac{۲}{(s+۲)^{۳}}$$

$$\to\ L\{x\}=\frac{۲}{s+۲}+\frac{۱}{(s+۲)^{۲}}+\frac{۲}{(s+۲)^{۳}}\to L\{x\}=L\{۲e^{-۲t}+te^{-۲t}+t^{۲}e^{-۲t}\}$$

$$\to\ x(t)=(۲+t+t^{۲})e^{-۲t}$$

پاسخ سوال۷ : ساده‌ترین روش برای حل این معادله، استفاده از تبدیل لاپلاس است.

$$L\{y(t)+۵\int_{۰}^{t}e^{۲(t-u)}y(u)du\}=L\{۹t\}\quad\to\quad L\{y\}+۵L\{e^{۲t}\}L\{y\}=\frac{۹}{s^{۲}}$$

$$\to\quad(۱+\frac{۵}{s-۲})L\{y\}=\frac{۹}{s^{۲}}\ \to\ L\{y\}=\frac{۹(s-۲)}{s^{۲}(s+۳)}=\frac{-۶}{s^{۲}}+\frac{۵}{s}-\frac{۵}{(s+۳)}$$

$$\to\ L\{y\}=L\{-۶t+۵-۵e^{-۳t}\}\qquad\to\ y(t)=-۶t+۵-۵e^{-۳t}$$