



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۴/۶/۳

وقت : ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس ریاضی ۱ فنی (۸ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۴ - ۱۴۰۳

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

(۱۰ نمره)

سوال ۱- مقدار حد زیر را بدست آورید :

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\ln(2x + 1)}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\cot x}$$

(۱۵ نمره)

سوال ۲- خط مماس بر نمودار منحنی $xy^3 + \cos(x - y) = 0$ را در نقطه $(0, \frac{\pi}{4})$ بنویسید.

(۱۵ نمره)

سوال ۳- نمودار تابع زیر را با بیان تمام جزئیات رسم کنید. (تمام مجانب‌ها، اکسترمم‌ها و ...)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

(۲۰ نمره)

سوال ۴- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$A = \int \arccos(2x) dx$$

$$B = \int \frac{\cos(2x)}{\sqrt{3 + \sin(2x)}} dx$$

$$C = \int \sqrt{2x - x^2} dx$$

سوال ۵- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x}}$ در بازه $[1, 2]$ را حول محور x ها

(۲۰ نمره)

بدست آورید.

(۱۵ نمره)

سوال ۶- همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ را بررسی کنید.

(۲۰ نمره)

سوال ۷- طول قوس منحنی $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos(2t)} dt$ را فاصله $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ بدست آورید.

موفق باشید

پاسخ سوال ۱: مقدار A به کمک قاعده هوییتال محاسبه می شود:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\ln(2x + 1)} \stackrel{Hop.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x e^{\sin x} \div \frac{2}{2x + 1}) = 1 \times 1 \div 1 = 1$$

مقدار B را به دو روش می توان محاسبه کرد:

روش اول: می دانیم که $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ و همچنین $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$ و در نتیجه داریم:

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\frac{1}{x} \times \frac{x}{\tan x}} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\frac{1}{x}} \right)^{\frac{x}{\tan x}} = e^1 = e$$

روش دوم: قرار می دهیم $y = (x + 1)^{\cot x}$ آنگاه داریم $\ln y = \cot x \ln(x + 1) = \frac{\ln(x + 1)}{\tan x}$ و در نتیجه

$$\ln y = \cot x \ln(x + 1) = \frac{\ln(x + 1)}{\tan x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{\tan x} \stackrel{Hop.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + 1} \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1$$

$$\ln(\lim_{x \rightarrow 0} y) = 1 \rightarrow B = \lim_{x \rightarrow 0} y = e \rightarrow B = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\cot x} = e \quad \text{اکنون داریم:}$$

پاسخ سوال ۲: برای پیدا کردن شیب خط مماس، مشتق تابع در نقطه $(0, \frac{\pi}{4})$ را به کمک مشتق ضمنی محاسبه می کنیم.

$$y' = - \frac{\text{مشتق عبارت نسبت به } x}{\text{مشتق عبارت نسبت به } y} = - \frac{y^3 - \sin(x - y)}{3xy^2 + \sin(x - y)} \rightarrow m = -(\frac{\pi^3}{8} + 1)$$

$$y = m(x - a) + b \rightarrow y = -(\frac{\pi^3}{8} + 1)x + \frac{\pi}{4} \quad \text{معادله خط مماس بر منحنی در نقطه } (0, \frac{\pi}{4}) \text{ عبارت است از:}$$

پاسخ سوال ۳: دامنه تابع عبارت است از $D_f = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$ و داریم:

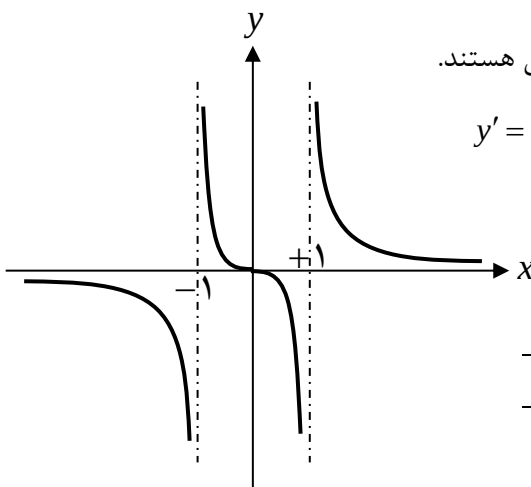
$$\left| \begin{array}{l} x \rightarrow -1^- \\ y \rightarrow -\infty \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} x \rightarrow -1^+ \\ y \rightarrow +\infty \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 1^- \\ y \rightarrow -\infty \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 1^+ \\ y \rightarrow +\infty \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} x \rightarrow -1^- \\ y \rightarrow -\infty \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} x \rightarrow \pm\infty \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right|$$

پس خط $y = 0$ مجانب افقی و دو خط $x = -1$ و $x = +1$ دو مجانب قائم منحنی هستند.

$$y' = - \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{برای پیدا کردن نقطه های اکسترمم تابع، از آن مشتق می گیریم:}$$

می بینیم که در تمام دامنه $y' < 0$ یعنی تابع f همیشه نزولی است.

اکنون جدول تغییرات تابع f را کامل می کنیم.



x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
y'	-	-	-	-
y	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	

پاسخ سوال ۴: برای حل انتگرال $A = \int \arccos(2x) dx$

روش اول (جزء به جزء): قرار می دهیم $dv = dx$, $u = \arccos(2x)$ و خواهیم داشت $du = \frac{-2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ بنابر این،

$$A = \int \arccos(2x) dx = x \arccos(2x) + \int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = x \arccos(2x) - \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + c$$

روش دوم (ابتدا تغییر متغیر و سپس جزء به جزء): تغییر متغیر $t = \arccos(2x)$ را در نظر می‌گیریم.

$$A = \int \arccos(2x) dx = \frac{-1}{2} \int t \sin t dt = \frac{-1}{2} (-t \cos t + \sin t) + c = x \arccos(2x) - \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + c$$

$$B = \int \frac{\cos(2x)}{\sqrt{3+\sin(2x)}} dx = \sqrt{3+\sin(2x)} + c$$

برای حل انتگرال $C = \int \sqrt{2x-x^2} dx$ باید ابتدا عبارت زیر رادیکال را به صورت مربع کامل $1-(x-1)^2$ در می‌آوریم.

روش اول (تغییر متغیر): از تغییر متغیر $x-1 = \sin t, dx = \cos t dt$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} C &= \int \sqrt{2x-x^2} dx = \int \sqrt{1-(x-1)^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} (\cos t) dt \\ &= \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c = \frac{1}{2} (\arcsin(x-1) + (x-1)\sqrt{2x-x^2}) + c \end{aligned}$$

روش دوم (جزء به جزء): قرار می‌دهیم: $u = \sqrt{1-(x-1)^2}, dv = dx \rightarrow du = \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx, v = x-1$

$$u = \sqrt{1-(x-1)^2}, dv = dx \rightarrow du = \frac{-(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx, v = x-1$$

$$\begin{aligned} C &= (x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} + \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx \\ &= (x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx - \int \sqrt{1-(x-1)^2} dx \end{aligned}$$

$$C = (x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} + \arcsin(x-1) - C \rightarrow C = \frac{1}{2} ((x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} + \arcsin(x-1))$$

پاسخ سوال ۵: حجم خواسته شده برابر است با $V = \pi \int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x)}$ که باید کسر $\frac{1}{x^2(1+x)}$ را به صورت مجموع سه کسر ساده

تجزیه کنیم. یعنی $\frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x} + \frac{C}{1+x}$ که به سادگی می‌بینیم که $A = C = 1, B = -1$

$$V = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \pi \left[\frac{-1}{x} - \ln x + \ln(1+x) \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} - \ln 2 + \ln 3 + 1 - \ln 2 \right) \pi = \left(\frac{1}{2} + \ln 3 - 2 \ln 2 \right) \pi$$

پاسخ سوال ۶: داریم $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}} < \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} < \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \left[\frac{-2}{\sqrt{x}} \right]_1^\infty = 2$ و چون $0 < \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} < 2$

انتگرال $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ همگرا است و آزمون مقایسه نتیجه می‌دهد که انتگرال $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ هم همگرا است.

پاسخ سوال ۷: داریم $f'(x) = \sqrt{\cos(2x)}$ و طول قوس خواسته شده برابر است با:

$$\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(2t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cos(t) dt = \left[\sqrt{2} \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}$$