

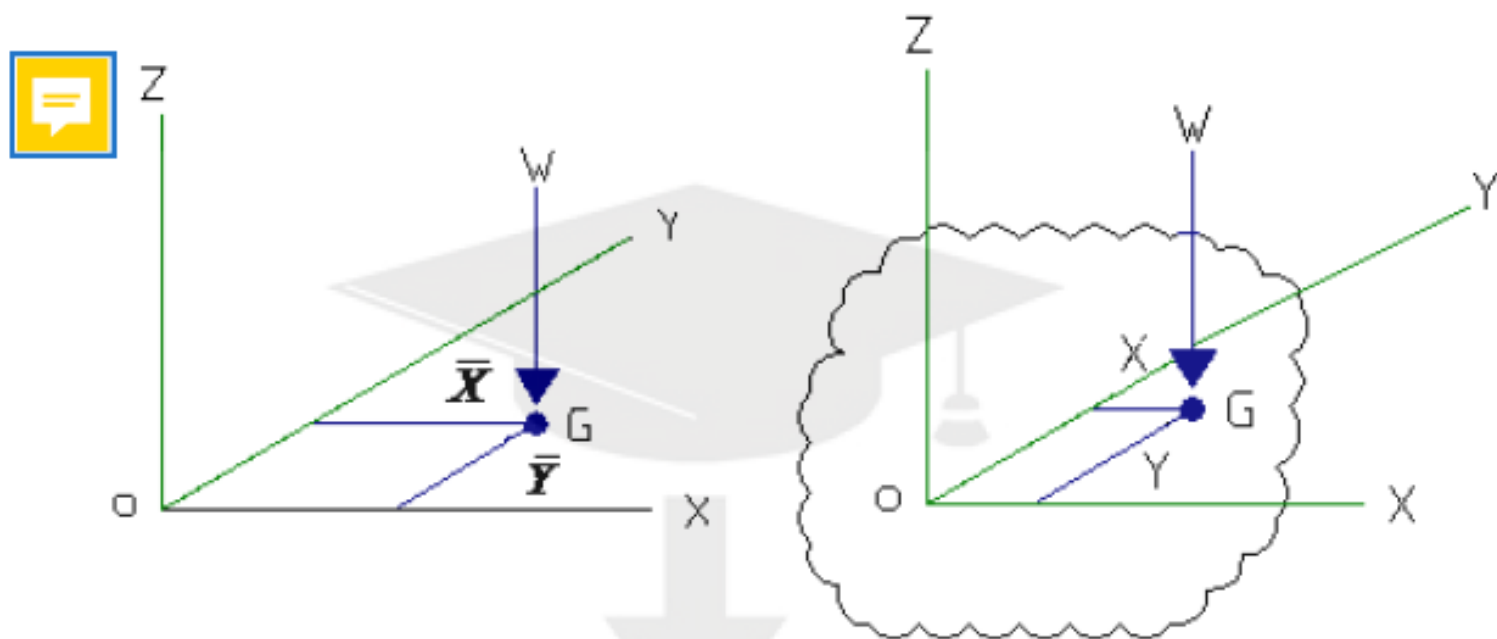


نیروهای گسترده و مرکزهای هندسی و گرانی



مرکز ثقل سطوح :

مثلا در فصل های قبلی گفتیم که وزن یک جسم را که نیرویی است که بر آن جسم وارد می شود می توانیم بصورت یک نیروی تنها در یک نقطه قرار دهیم. این نیرو کلاً بصورت بار گسترده ای است که بر آن جسم وارد می شود، ولی می توان به جای آنها از سیستم نیروی معادل استفاده کرد و تمام آن و یا برآیند آنها را در یک نقطه که به آن نقطه مرکز ثقل می نامیم قرار دهیم.



مختصات مرکز ثقل جسم دو بعدی نسبت به دستگاه X, Y, Z

مختصات مرکز ثقل جسم دو بعدی نسبت به دستگاه X,Y,Z

$$W = \sum \Delta w_i = \Delta w_1 + \Delta w_2 + \Delta w_3 + \cdots + \Delta w_n$$

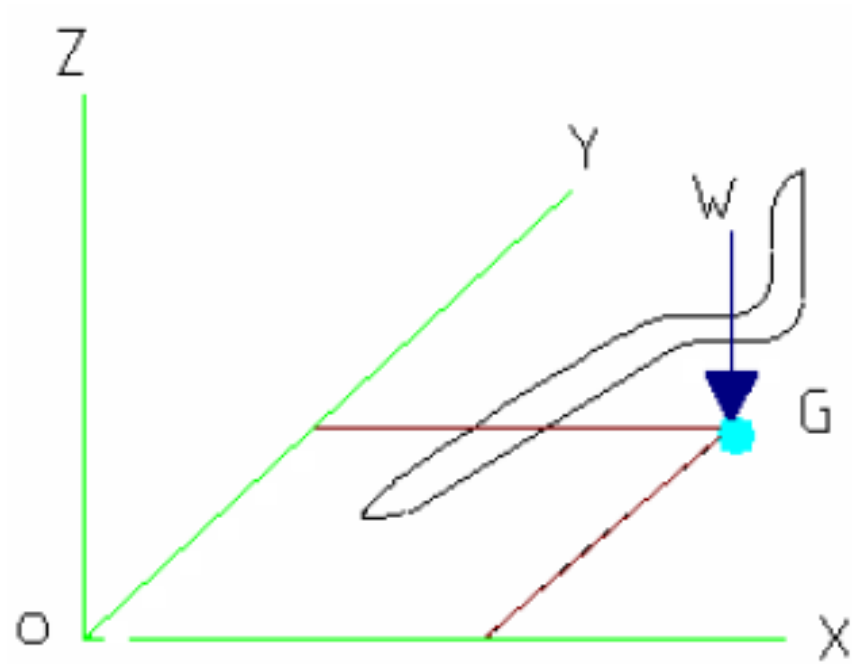
$$\bar{X}W = x_1\Delta w_1 + x_2\Delta w_2 + x_3\Delta w_3 + \cdots + x_n\Delta w_n = \sum x_i\Delta w_i$$

$$\bar{Y}W = y_1\Delta w_1 + y_2\Delta w_2 + y_3\Delta w_3 + \cdots + y_n\Delta w_n = \sum y_i\Delta w_i$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i\Delta w_i}{W}, \bar{Y} = \frac{\sum y_i\Delta w_i}{W}, W = \sum \Delta w_i$$

$$\bar{X} = \frac{\int xdw}{W}, \bar{Y} = \frac{\int ydw}{W}, W = \int dw$$





$$G(X, Y) = (\bar{X}, \bar{Y})$$

مراکز سطوح و خطوط :

هنگامیکه جسمی در یک صفحه دارای ضخامت یکنواخت و جنس هموژنیس و یا یکسان (همگن) باشد می توان نوشت :

$$\Delta W = \gamma . t . \Delta A \quad \Delta A = \text{مساحت} \quad t = \text{ضخامت} \quad \gamma = \text{وزن مخصوص}$$

$$W = \int dw = \int \gamma . t . \Delta A = \gamma . t \int dA$$

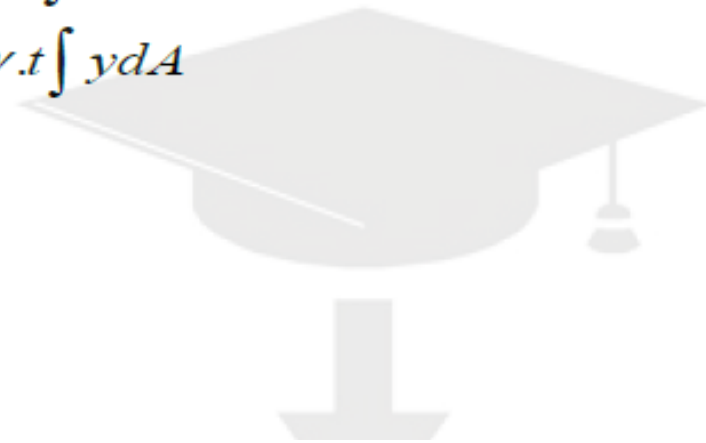
$$A = \int dA$$

$$\int x dw = \int x \gamma . t dA = \gamma . t \int x dA$$

$$\int y dw = \int y \gamma . t dA = \gamma . t \int y dA$$

$$\bar{X} = \frac{\int x dw}{W} = \frac{\int x dA}{A}$$

$$\bar{Y} = \frac{\int y dw}{W} = \frac{\int y dA}{A}$$



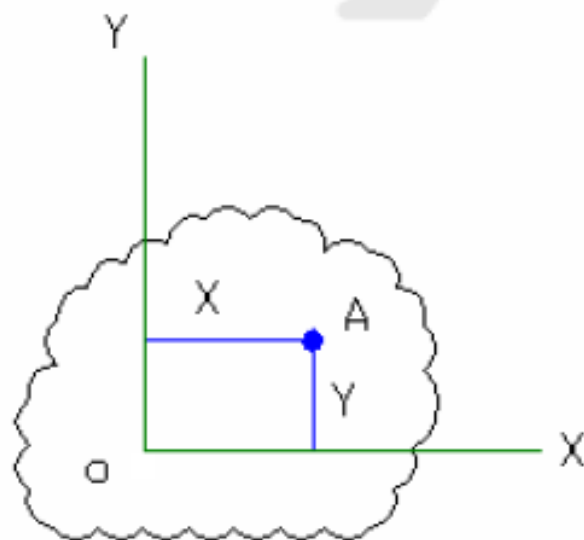
مرکز سطح یک جسم دو بعدی نسبت به دستگاه مختصات X, Y, Z

پس اگر یک جسمی دو بعدی دارای ضخامتی یکنواخت و جنس همگنی باشد، نقطه مرکز سطح با نقطه مرکز ثقل در یک نقطه قرار می گیرد.

$$\int x dA = \text{گشتاور مساحت } A \text{ نسبت به محور } y \text{ می نامند}$$

$$\int y dA = \text{گشتاور مساحت } A \text{ نسبت به محور } x \text{ می نامند}$$

$$C(X, Y) = (\bar{X}, \bar{Y})$$



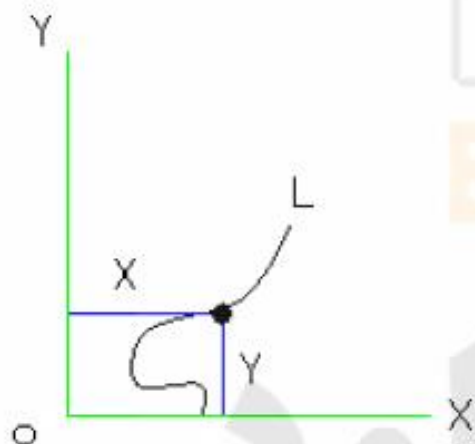
برای مفتول یا سیم

$$\Delta W = \gamma \cdot a \Delta L$$

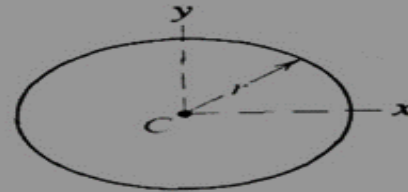
$$a = \text{مساحت سطح مقطع سیم} \quad \Delta L = \text{طول}$$

$$\gamma = \text{وزن مخصوص}$$

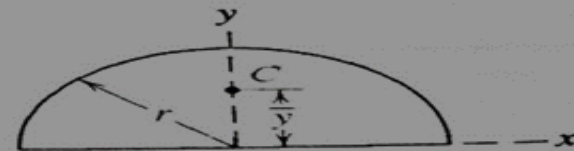
$$\bar{X} = \frac{\int x dL}{L}, \bar{Y} = \frac{\int y dL}{L}$$



سطح دایره



سطح نیمدایره



$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

سطح ربع دایره

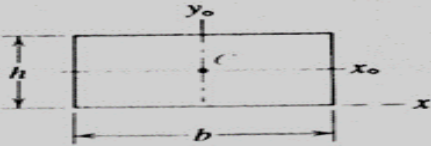
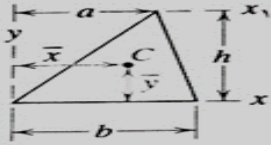
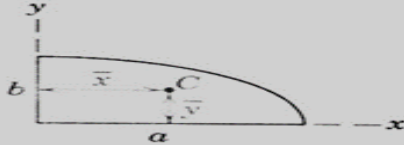
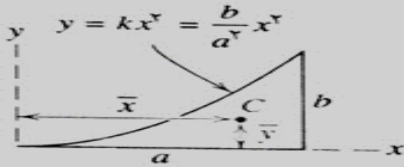
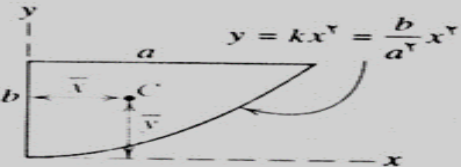


$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

سطح قطاعی از دایره

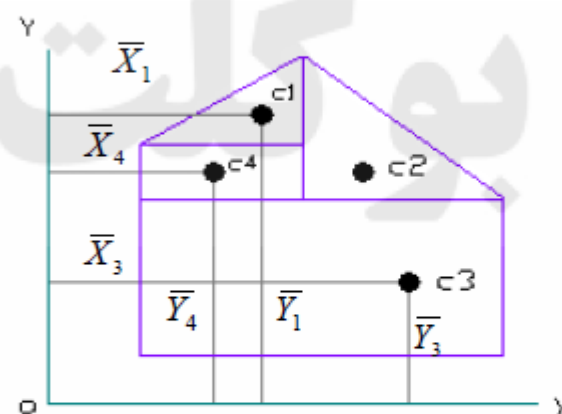
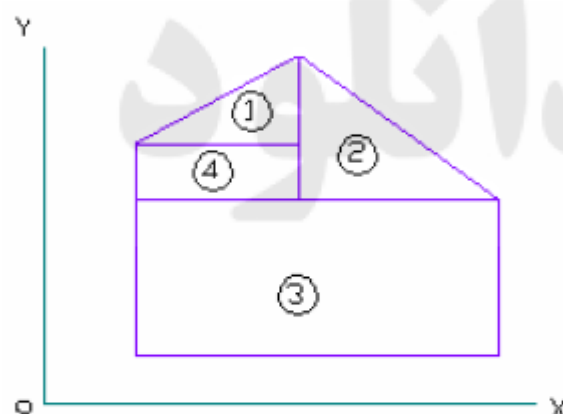


$$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$$

—	سطح مستطیل 
$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	سطح مثلث 
$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$	سطح ربع بیضی 
$\bar{x} = \frac{3a}{4}$ $\bar{y} = \frac{3b}{10}$	سطح زیر سهمی $A = \frac{ab}{3}$ 
$\bar{x} = \frac{3a}{8}$ $\bar{y} = \frac{3b}{5}$	سطح سهمی $A = \frac{3ab}{8}$ 

سطوح و خطوط مختلط :

در خیلی از موارد یک جسم دو بعدی و یا یک خط از چندین مقطع مختلط تشکیل می شود مانند دایره و مستطیل و یا مثلث . در اینگونه موارد می توان آن سطح را به اشکال منتظم هندسی تقسیم کرد و از روابط گذشته استفاده کرد و مرکز سطح را بدست آورد.



مرکز سطح قسمت یک $C_1 =$

مرکز سطح قسمت دو $C_2 =$

مرکز سطح قسمت سه $C_3 =$

مرکز سطح قسمت چهار $C_4 =$

$$A = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$\bar{X}_1 A_1 + \bar{X}_2 A_2 + \bar{X}_3 A_3 + \bar{X}_4 A_4 = \bar{X} A$$

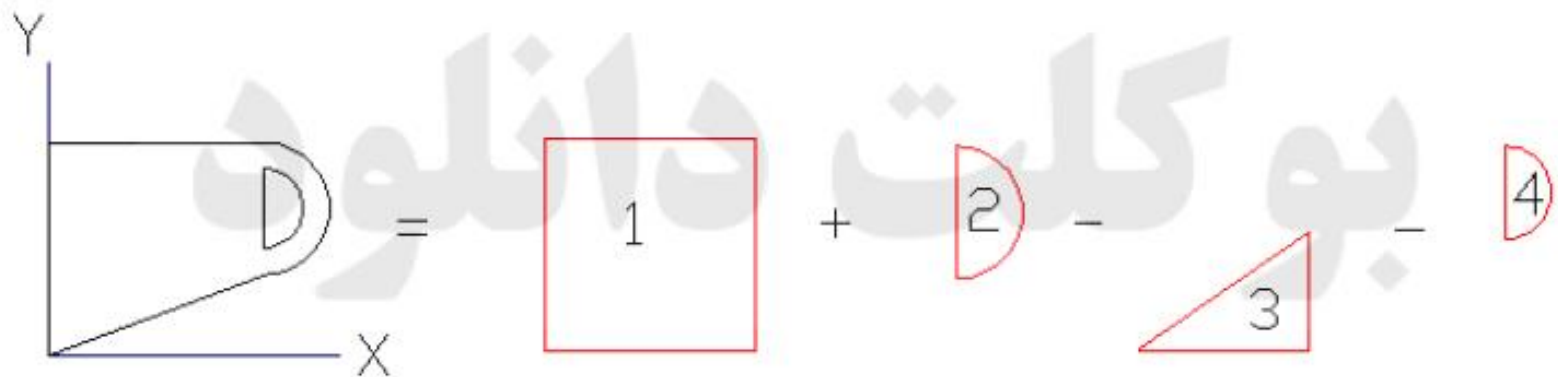
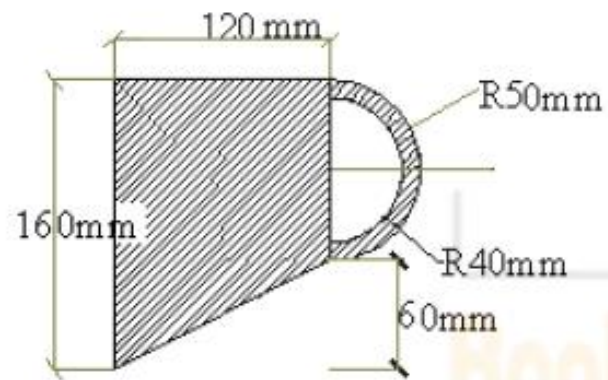
$$\bar{Y}_1 A_1 + \bar{Y}_2 A_2 + \bar{Y}_3 A_3 + \bar{Y}_4 A_4 = \bar{Y} A$$

$$A = \sum A_i$$

$$\bar{X} = \frac{\int \bar{x}_i dA_i}{A}$$

$$\bar{Y} = \frac{\int \bar{y}_i dA_i}{A}$$

مثال: مختصات مرکز سطح شکل زیر را بدست آورید.

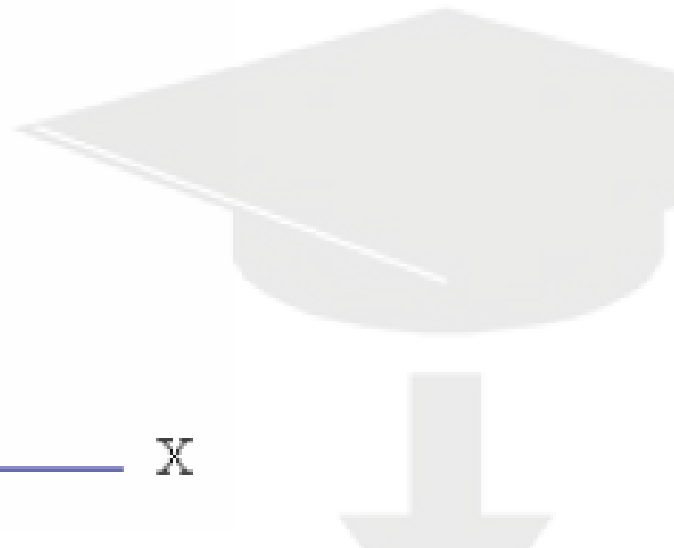
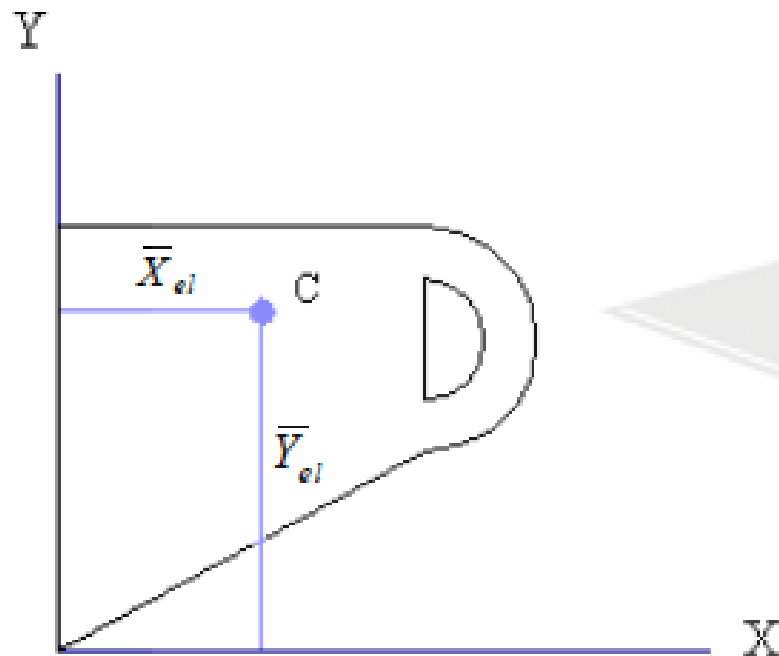


قسمت	علامت	$A \text{ (mm}^2\text{)}$	$\bar{X}_i$	$\bar{Y}_i$	AX_i	AY_i
1	+	$120 \times 160 = 19.200$	60	80	1,152,000	1,536,000
2	+	$\frac{\pi \cdot (50)^2}{2} = 3927$	$120 + \frac{40(50)}{3\pi} = 140$	110	553,707	431,970
3	-	$\frac{120 \times 160}{2} = 3600$	80	20	-288,000	-72,000
4	-	$\frac{\pi \cdot (40)^2}{2} = 2513$	$120 + \frac{4(40)}{3\pi} = 137$	110	-344,281	-276,430
کلی		17140			1,073,426	1,614,540



$$\bar{X} = \frac{\sum Ax_i}{\sum A_i} = \frac{1073426}{17140} = 62.6(mm)$$

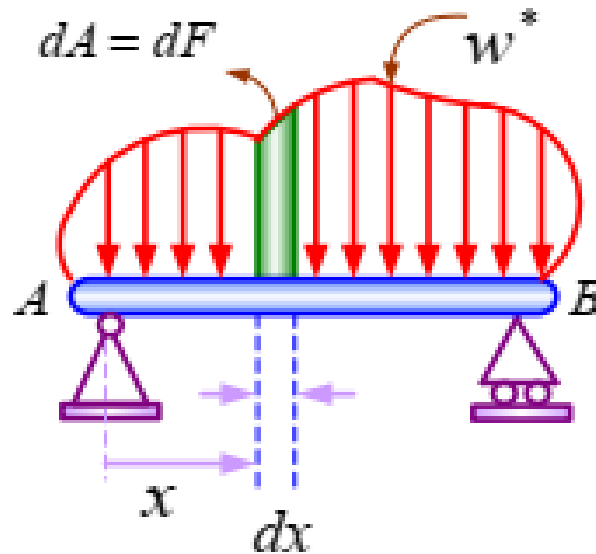
$$\bar{Y} = \frac{\sum Ay_i}{\sum A_i} = \frac{1619540}{17140} = 94.5(mm)$$



مرکز نیرو

w^* شدت نیرو در واحد طول ← نیروی توزیعی در واحد طول

واحد آن در دستگاه (M K S) N/m است. $dA = dF$ w^*

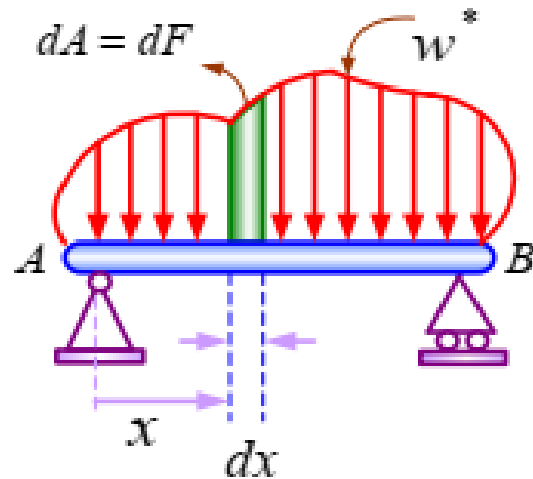


(شدت نیرو) $w^* = w^*(x)$

$$dF = dA = w^*(x)dx$$

$$F = A = \int w^*(x)dx$$

سطح زیر منحنی تغییرات شدت نیرو بر حسب طول تیر



$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dF}{\int dF}$$

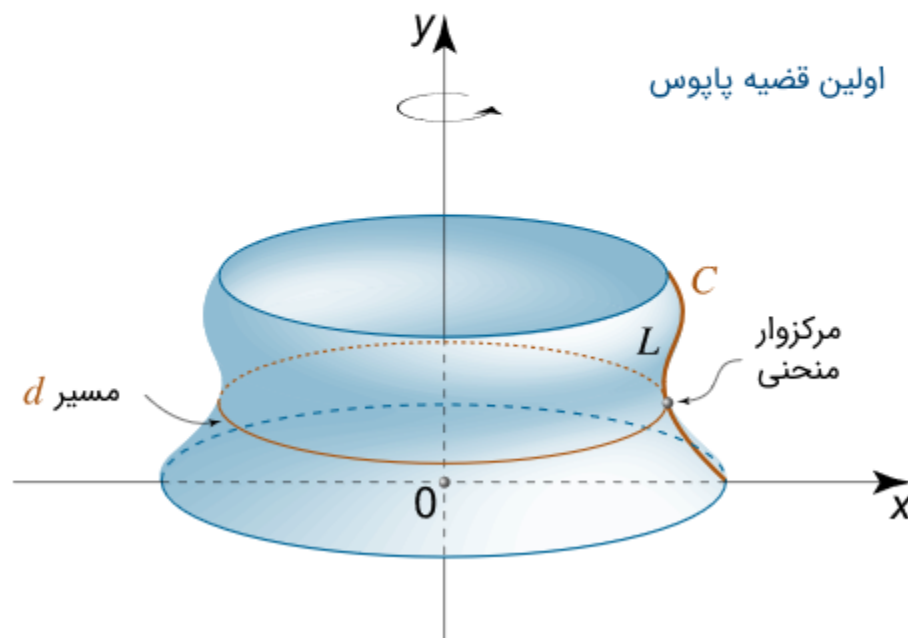
$$dF = dA = w^*(x) dx$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int x dF}{\int dF} = \frac{\int x w^*(x) dx}{\int w^*(x) dx}$$

قضایای پاپوس

اولین قضیه پاپوس بیان می‌کند که مساحت رویه A که از دوران منحنی C حول محور غیرمتقاطع واقع در صفحه آن به دست آمده است، برابر با حاصل ضرب طول L منحنی در فاصله d است که توسط مرکزوار C پیموده شده است:

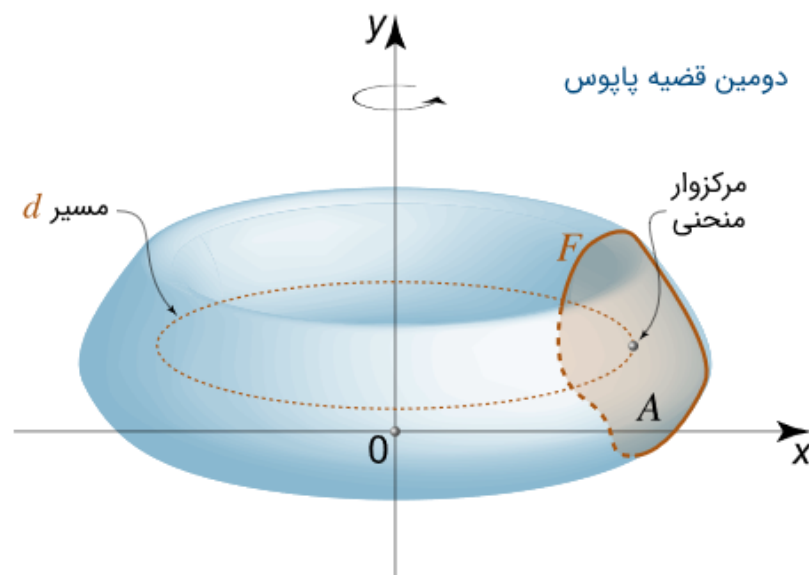
$$A = Ld.$$



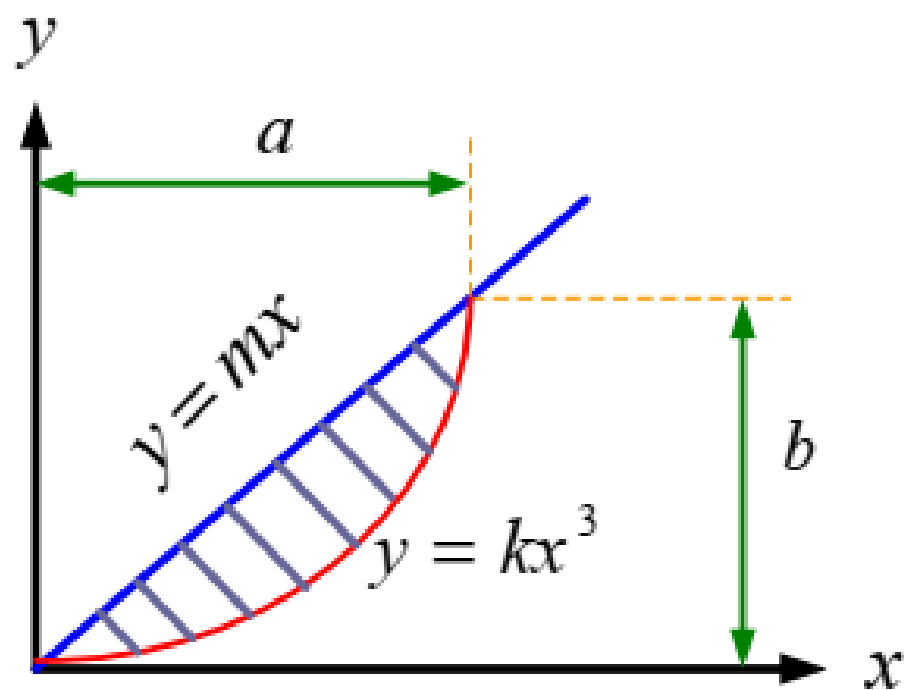
قضیه پاپوس برای محاسبه حجم حاصل از دوران

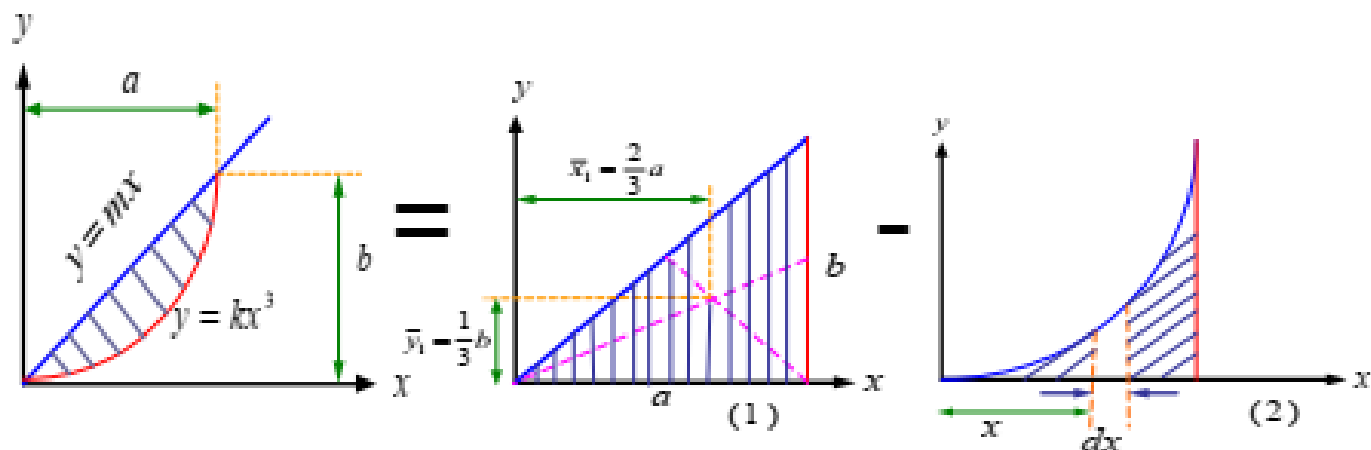
دومین قضیه پاپوس بیان می‌کند که حجم فضای حاصل از دوران لایه F حول یک محور غیرمتقاطع با آن در همان صفحه، برابر است با حاصل ضرب مساحت A لایه F در مسافت d پیموده شده توسط مرکزوار F :

$$V = Ad.$$



مثال: برای سطح هاشور خورده مطابق شکل مختصات مرکز سطح را مشخص کنید.

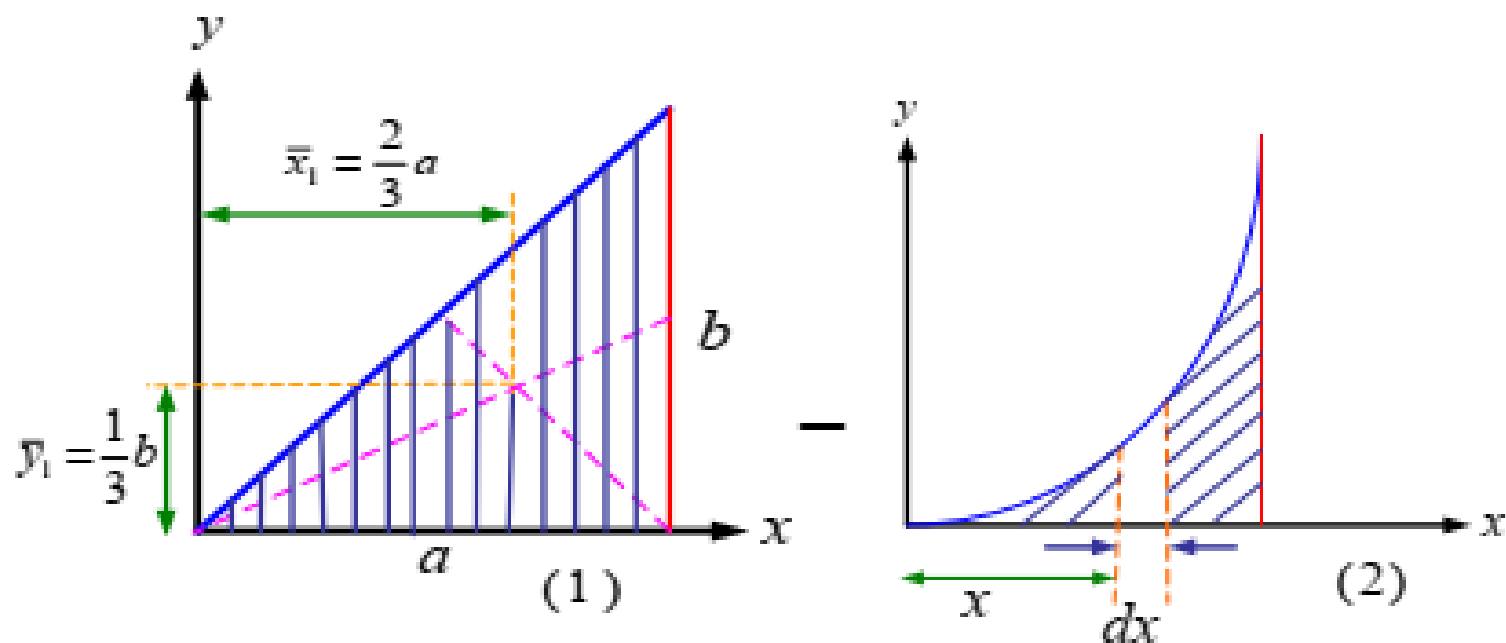




$$(1) \quad A_1 = \frac{ba}{2}$$

$$(2) \quad : b = ka^3 \Rightarrow k = \frac{b}{a^3} \Rightarrow y = \frac{b}{a^3} x^3 \quad dA = ydx$$

$$\int dA = \int ydx = \int_0^a \frac{b}{a^3} x^3 dx = \frac{b}{a^3} \times \frac{1}{4} \times a^4 = \frac{1}{4} ab \quad A_2 = \frac{ba}{4}$$



$$\int x dA = \int x_{el} dA = \int xy dx = \frac{b}{a^3} \int_0^a x^4 dx = \frac{b}{a^3} \left(\frac{1}{5} \right) a^5 = \frac{1}{5} a^2 b$$

$$\int y dA = \int y_{el} dA = \int \frac{1}{2} y dA = \frac{1}{2} \int y^2 dx = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^6} \int_0^a x^6 dx = \frac{1}{14} ab^2$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int x_{el} dA}{\int dA}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{\int y_{el} dA}{\int dA}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\frac{1}{5}a^2b}{\frac{1}{4}ab} = \frac{4}{5}a$$

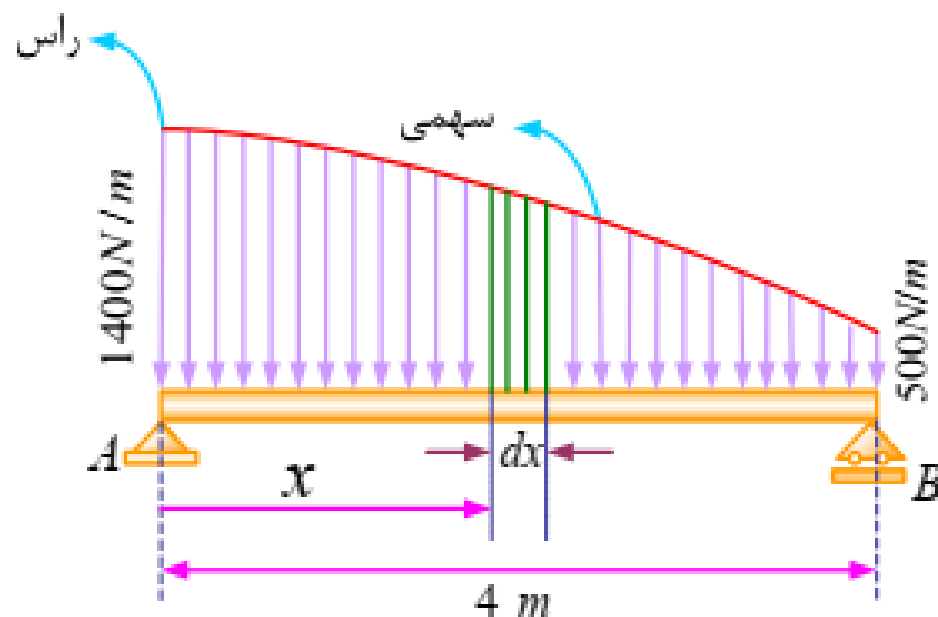
$$\bar{y}_2 = \frac{\frac{1}{14}b^2a}{\frac{1}{4}ab} = \frac{2}{7}b$$

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \bar{x}_1 - A_2 \bar{x}_2}{A_1 - A_2} = \frac{\frac{a^2b}{3} - \frac{2a^2b}{15}}{\frac{ab}{2} - \frac{ab}{4}} = \frac{8}{12}a$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \bar{y}_1 - A_2 \bar{y}_2}{A_1 - A_2} = \frac{\frac{ab^2}{6} - \frac{ab^2}{28}}{\frac{ab}{2} - \frac{ab}{4}} = \frac{8}{21}b$$



مثال: مطلوبست تعیین بزرگی و نقطه اثر نیروی توزیعی وارد بر تیر نشان داده شده در شکل و هم چنین تعیین نیروهای عکس العمل در نقاط A و B.



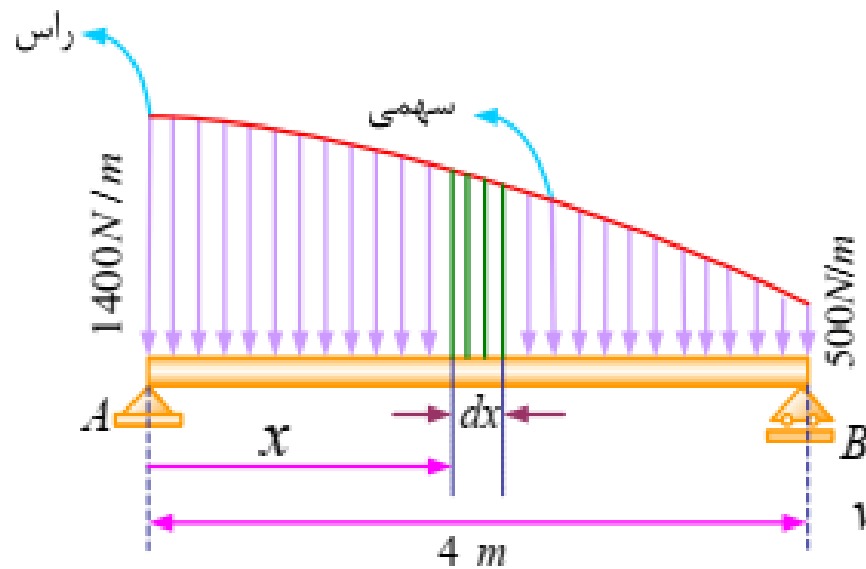
$$y = ax^2 + bx + c$$

نسبت به محور y متقارن است

$$y = ax^2 + c$$

$$\begin{cases} 1400 = a \times (0) + c \\ 500 = a \times 16 + c \end{cases}$$

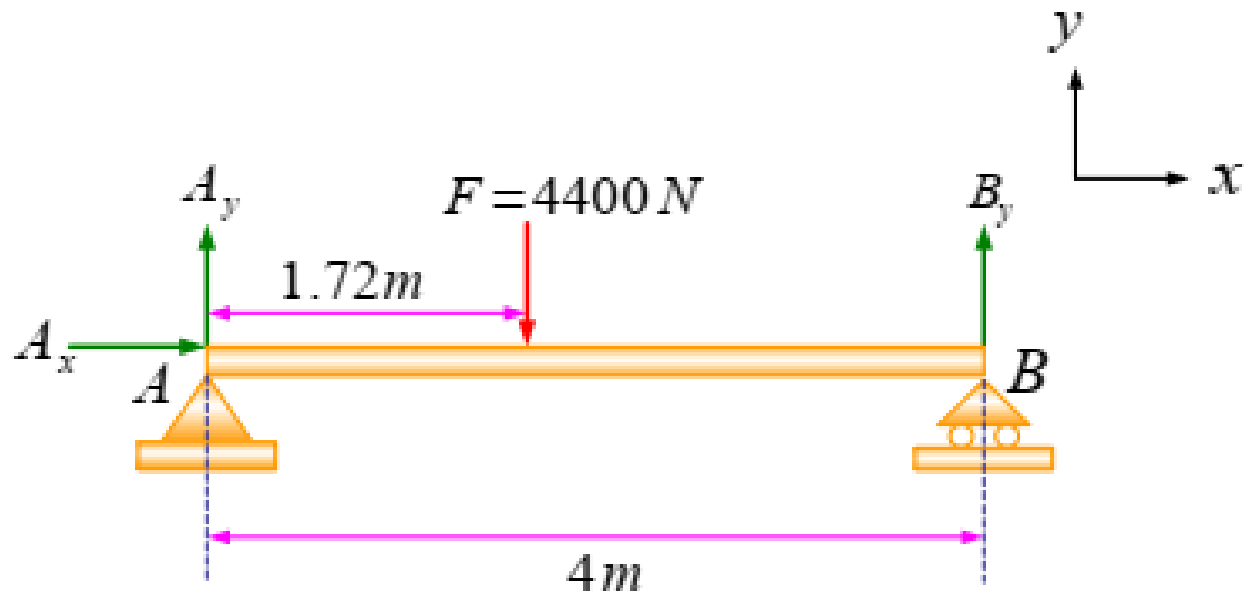
$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1400 \\ 16a = -900 \rightarrow a = -\frac{225}{4} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{225}{4}x^2 + 1400$$



$$w^* = y = -\frac{225}{4}x^2 + 1400$$

$$F = A = \int y dx = \int w^*(x) dx = \int_0^4 \left(-\frac{225}{4}x^2 + 1400 \right) dx = 4400 \text{ N}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x w^*(x) dx}{\int w^*(x) dx} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int x dA}{A} = \frac{\int_0^4 x \left(-\frac{225}{4}x^2 + 1400 \right) dx}{4400} = 1.72 \text{ m}$$

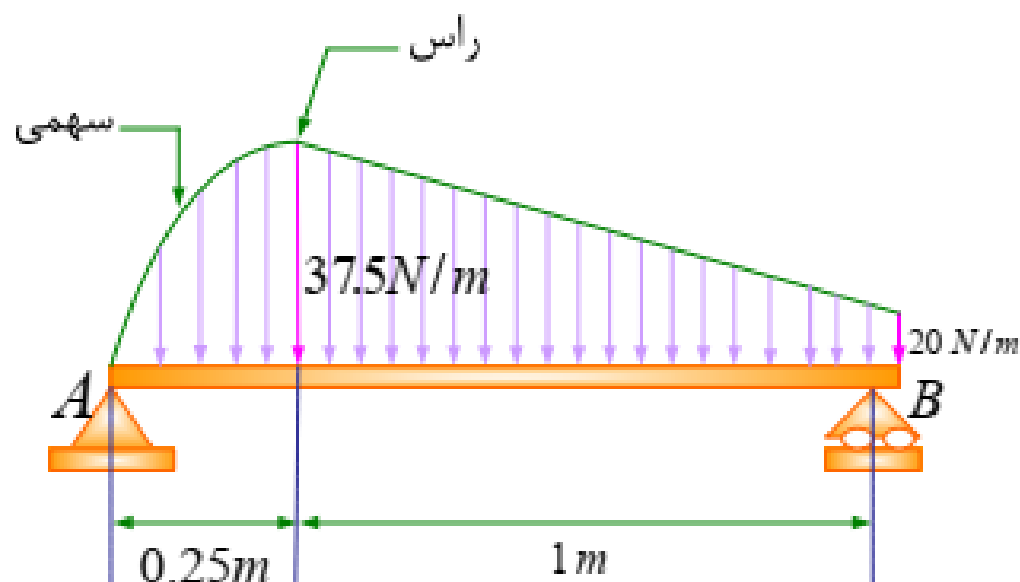


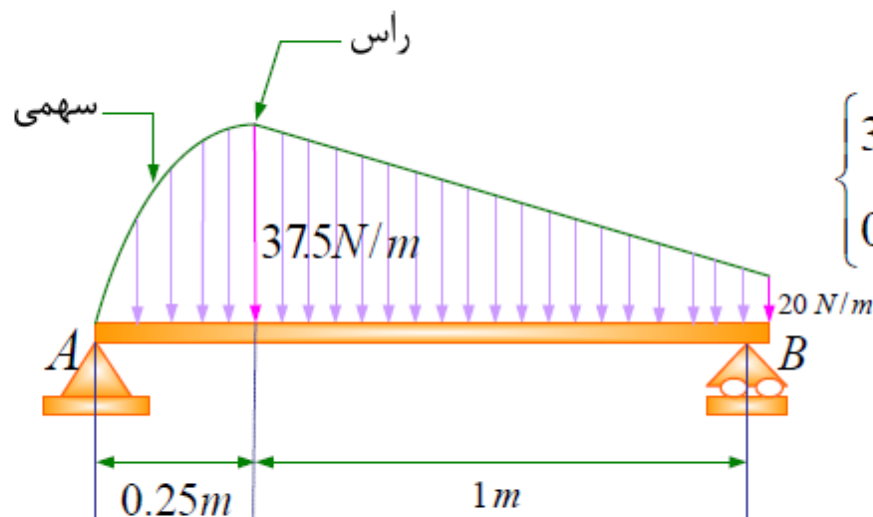
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \Rightarrow -4400 + B_y + A_y = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4400 \times 1.72 - 4B_y = 0 \qquad B_y = 1892\text{ N}$$

$$A_y = 2508\text{ N}$$

مثال: برای تیر مطابق شکل که تحت تأثیر نیروی توزیعی قرار دارد، مؤلفه های عکس العمل را در تکیه گاههای A و B تعیین کنید.





$$y = ax^2 + bx$$

$$\begin{cases} 37.5 = a(0.25)^2 + b(0.25) \\ 0 = a(0.5)^2 + b(0.5) \end{cases}$$

$$a = -600, \quad b = 300$$

$$w(x) = -600x^2 + 300x$$

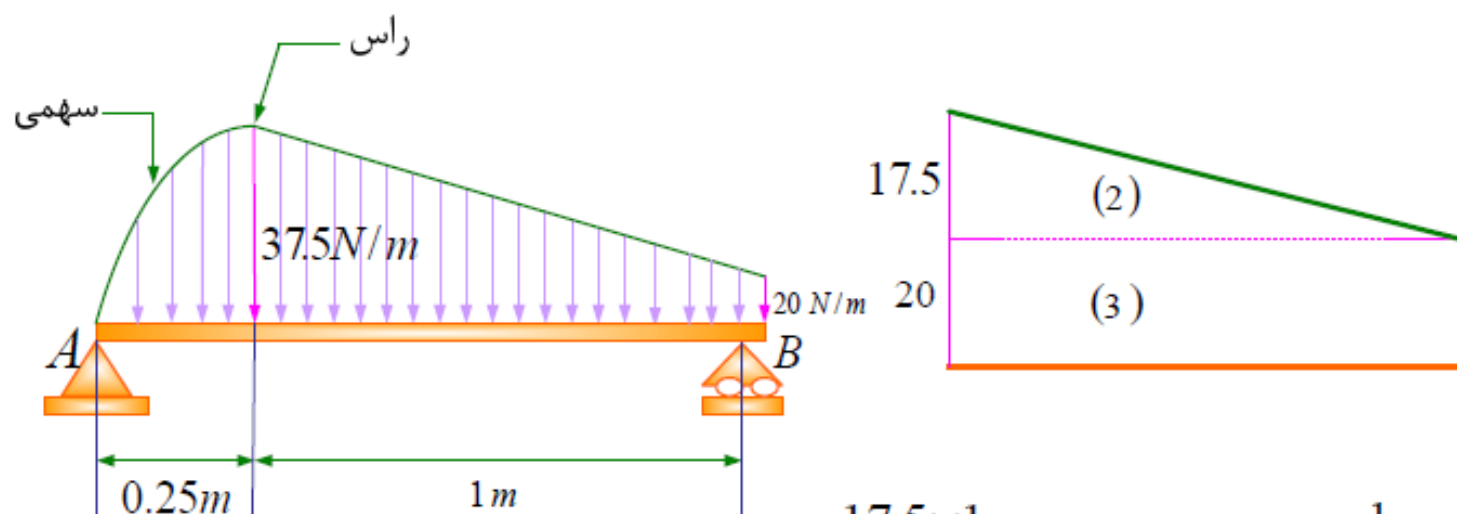
$$A_1 = \int w(x) dx = 300 \int_0^{0.25} (-2x^2 + x) dx = 6.255 N = F_1$$

$$\int x dA = \int xw(x) dx = 300 \int_0^{0.25} (-2x^3 + x^2) dx = 0.977$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\int xw(x) dx}{\int w(x) dx} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{0.977}{6.225} = 0.156 m$$

حسینی هاشمی

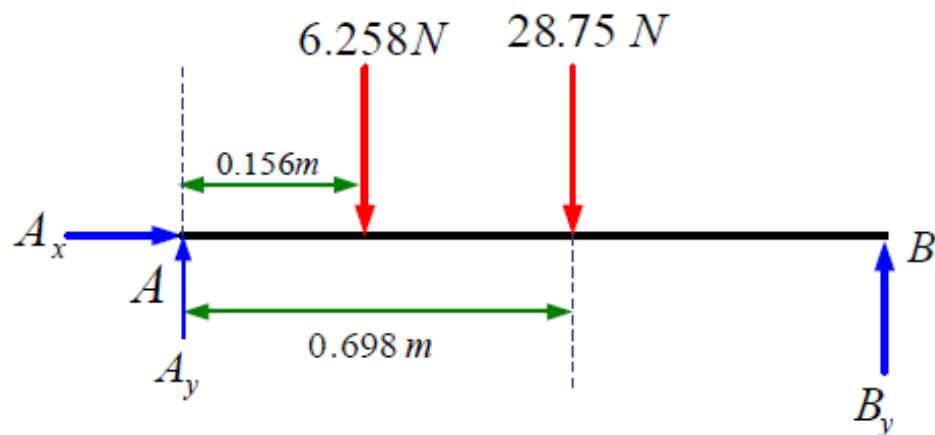




$$A_2 = \frac{17.5 \times 1}{2} = 8.75 N \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{3} m$$

$$A_3 = 1 \times 20 = 20 \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{2} m \quad x_2^* = \frac{A_2 \bar{x}_2 + A_3 \bar{x}_3}{A_2 + A_3} = 0.448 m$$

$$A_2^* = A_2 + A_3 = 28.75 N$$



$$A_1 = 6.25 \text{ N} = F_1$$

$$\bar{x}_1 = 0.156 \text{ m}$$

$$A_2^* = A_2 + A_3 = 28.75$$

$$x_2^* = 0.448 \text{ m}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$1.25 \times B_y - 28.75 \times 0.698 - 6.25 \times 0.15 = 0 \Rightarrow B_y = 16.83 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 28.75 + 6.258 - A_y - B_y = 0 \Rightarrow A_y = 18.17 \text{ N}$$

