دانشگاه صنعتی شاهرود

جلسه سوم

زوج نیرو و گشتاور زوج نیرو

کوپل و زوج نیرو

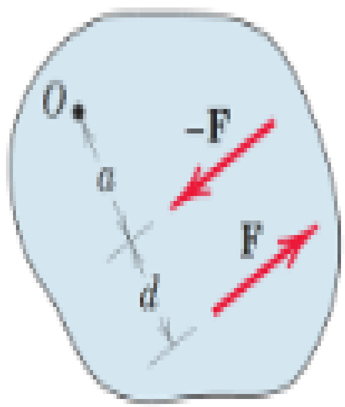
تعریف

گشتاوری است که دو نیروی مساوی، مختلف الجهت که روی یک خط نیستند، ایجاد می کنند.

$$M = F(a+d) - Fa \Longrightarrow M = Fd$$

بنابراین مقدار کوپل، به اندازه a یعنی فاصله نیروها تا مرکز گشتاور بستگی ندارد.

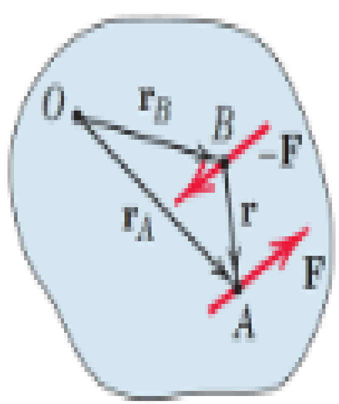
تنها تمایل کوپل این است که جسم را حول محوری عمود بر صفحه زوج نیرو به گردش در آورد.



(a)

بررسی برداری کوپل

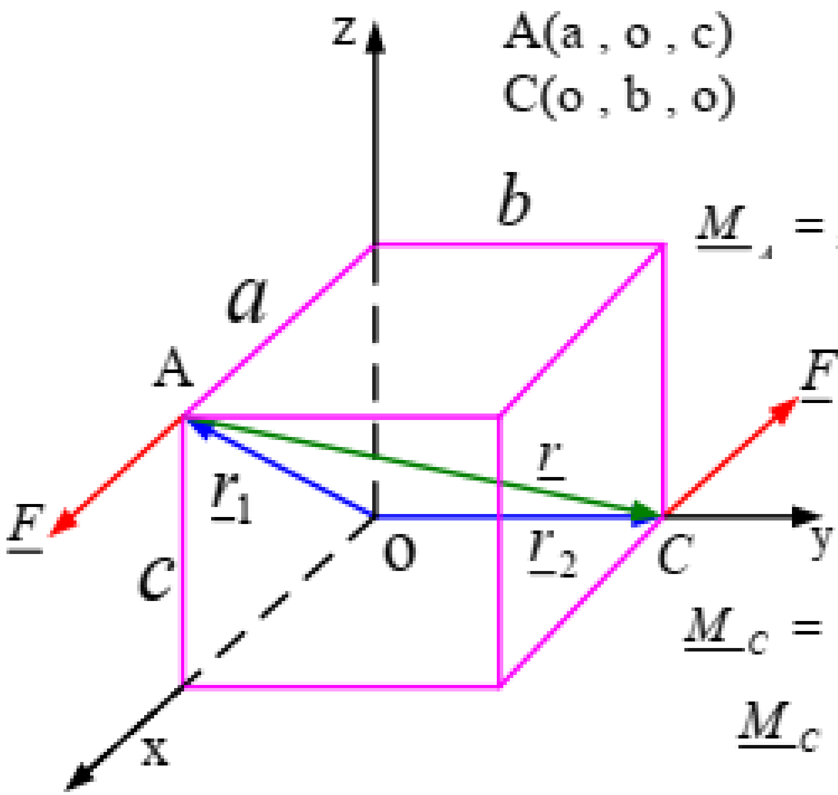
$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \xRightarrow{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}} \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



(b)

زوج نیرو (Force Couple) و گشتاور زوج نیرو

دو نیرو با اندازه های یکسان و راستاهای موازی را که مخالف جهت هم به دو نقطه از جسمی وارد شوند زوج نیرو میگویند.



$$\underline{r} = -a\,\underline{i} + b\,\underline{j} - c\,\underline{k}$$

$$\underline{F})_c = -F\,\underline{i}$$

$$\underline{M}_A = \underline{r} \times \underline{F})_c = (-a\underline{i} + b\,\underline{j} - c\underline{k}) \times (-F\,\underline{i})$$

$$= F\left(c\,\underline{j} + b\,\underline{k}\right)$$

$$\underline{r}^* = -\underline{r} = a\underline{i} - b\underline{j} + c\underline{k}$$

$$\underline{F})_A = F\,\underline{i}$$

$$\underline{M}_C = \underline{r}^* \times \underline{F})_A = \left(a\,\underline{i} - b\,\underline{j} + c\,\underline{k}\right) \times F\,\underline{i}$$

$$\underline{M}_C = F\left(c\,\underline{j} + b\underline{k}\right)$$

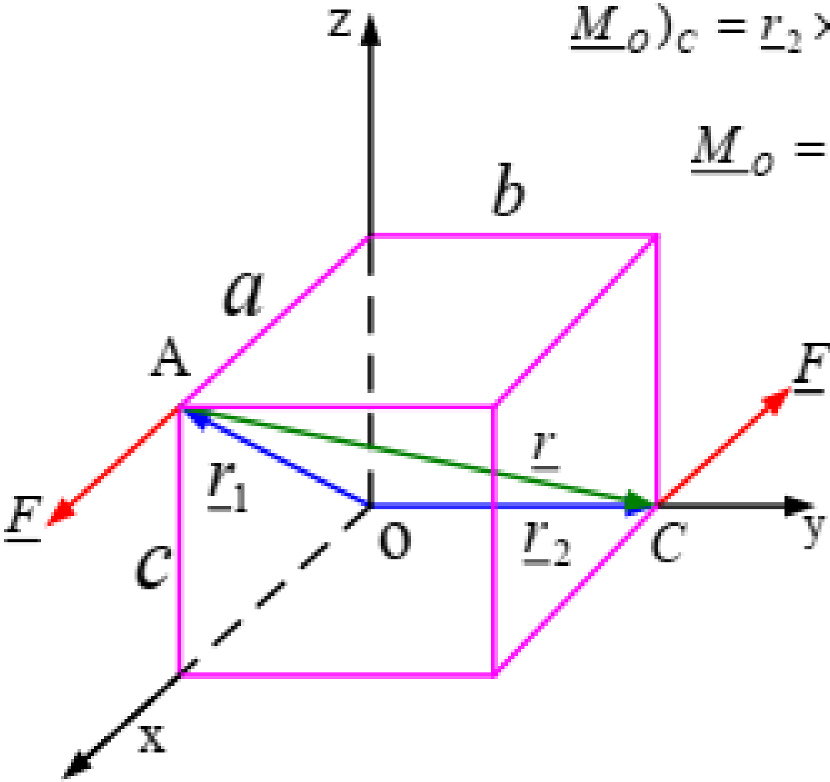
$$\underline{r}_1 = \left(a\underline{i} + c\underline{k}\right) \qquad \underline{F})_A = F\,\underline{i}$$

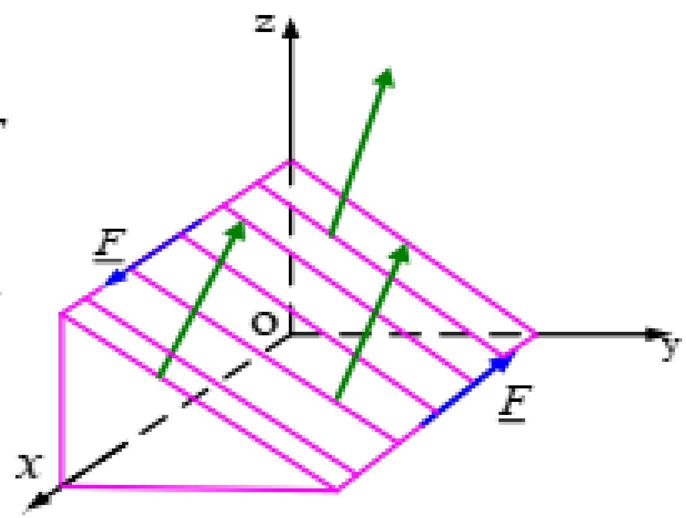
$$\underline{M}_O)_A = \underline{r}_1 \times \underline{F})_A = \left(a\underline{i} + c\underline{k}\right)\times\left(F\underline{i}\right) = cF\,\underline{j}$$

$$\underline{r}_2 = b\,\underline{j} \qquad \underline{F})_C = -F\,\underline{i}$$

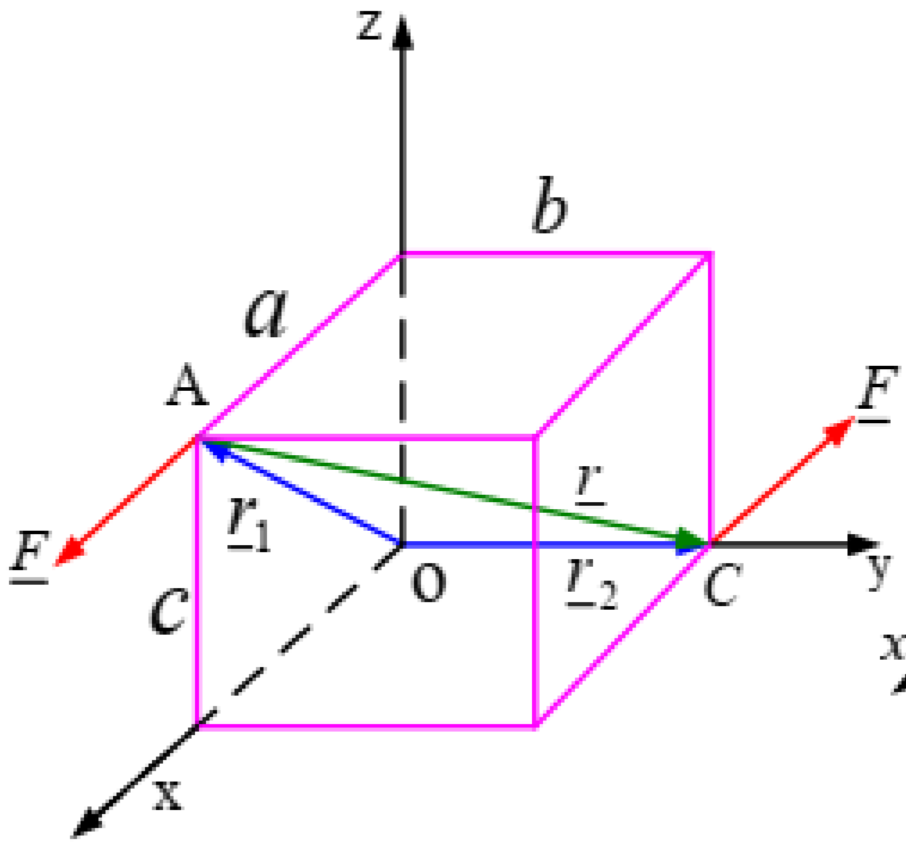
$$\underline{M}_O)_C = \underline{r}_2 \times \underline{F})_C = \left(b\,\underline{j}\right)\times\left(-F\underline{i}\right) = bF\,\underline{k}$$

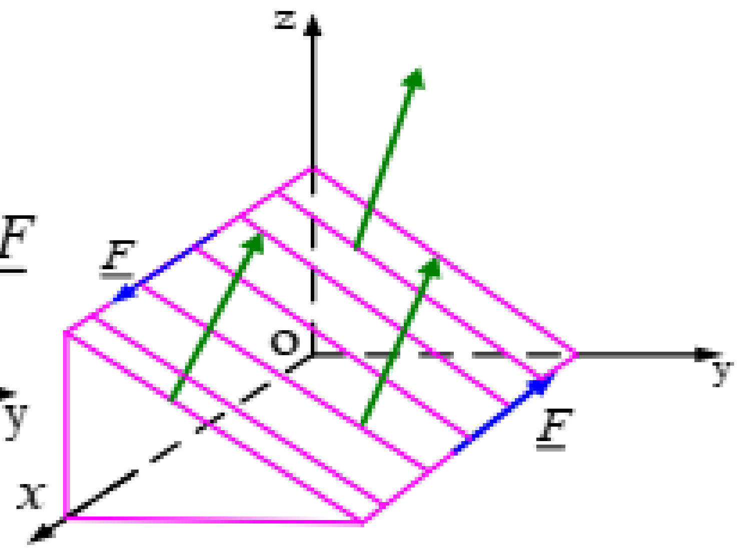
$$\underline{M}_O = \underline{M}_O)_A + \underline{M}_O)_C = F\left(c\,\underline{j} + b\,\underline{k}\right)$$





گشتاور زوج نیرو یک بردار ازاد (Free vector) است





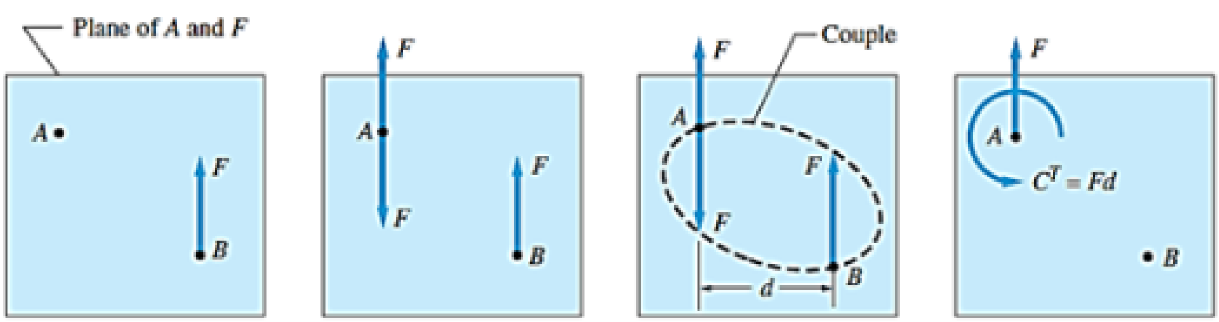
انواع بردارها

- کمیت‌هایی که با بردار مشخص می‌شوند به سه دسته کلی تقسیم می‌شوند **بردارهای آزاد، لغزان وثابت.**
- **الف) بردار آزاد:** برداری است که عمل آن مربوط به خط منحصر به فردی نباشد مثلاً اگر جسمی حرکت انتقالی داشته باشد برداری که برای جابجایی آن در نظر می‌گیریم برداری آزاد است. یعنی می‌توانیم با حفظ اندازه و جهت آن ،تغییر نقطه ابتدای بردار حرکت داشته باشیم.
- ب) **بردار لغزان:** بردار لغزان برداری است که خط و امتداد منحصر به فردی در فضا دارد. مثلاً در وارد کردن یک نیروی خارجی به جسم نیرو را می‌توانیم در امتداد خط اثرش بر جسم جابجا کنیم.
- ج) **بردار ثابت:** برداری است که عملاً فقط در یک نقطه در فضای می‌تواند وارد شود، مثلاً نیروی داخلی اجسام.

سیستم کوپل- نیرو

نیروی وارد شده به جسم آن را کشیده یا هل می‌دهد، و یا حول هر محوری غیر از خط اثر خود نیرو، جسم را می‌چرخاند. این اثر دوگانه نیرو بر جسم را می‌توان با جایگزین کردن آن با یک نیروی موازی و یک کوپل بهتر نشان داد.

در فصل اول گفته شد که اگر نیروی وارد شده بر جسم صلب در راستای خط اثر خود جابجا شود، تاثیری که بر جسم می‌گذارد تغییر نمی‌کند. حال می‌خواهیم بررسی کنیم اگر نیرو در راستایی غیر از راستای خط اثر خود جابجا شود چه اتفاقی می‌افتد. به شکل   دقت کنید. همانطور که مشاهده می‌شود، با انتقال نیروی F به نقطهA، کوپلی برابرFd تولید می‌شود کهd فاصله عمودی بین دو راستا است. در مثال زیر، کوپل تولید شده پادساعتگرد است.



(a) Original force

(b) Introduce equal and opposite forces at A

(c) Identify the couple

(d) Equivalent force-couple system

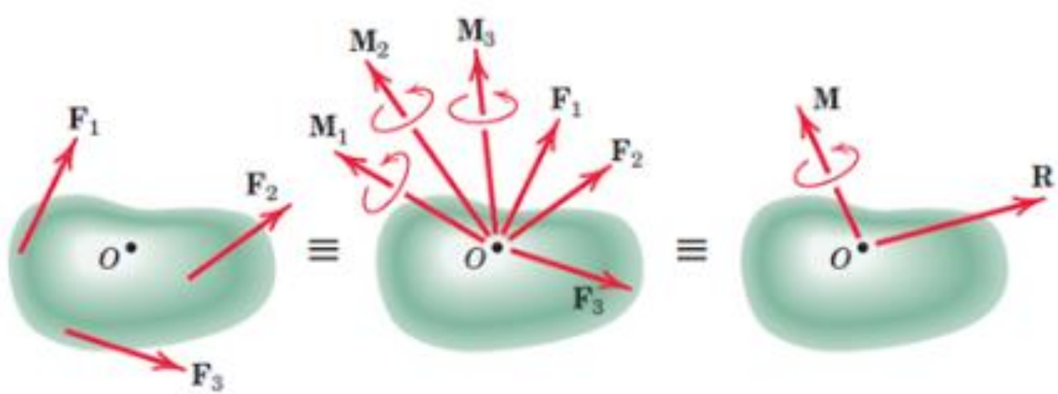
نمایش جابجایی خط اثر نیرو

بنابراین وقتی نیرو به راستایی غیر از راستای خط اثر خودش منتقل شود، در اثر این انتقال یک کوپل برای جبران تغییر گشتاور ایجاد می‌شود.

اغلب به سیستم‌ها نیروهای متفاوتی وارد می‌شود (ر · تصویر چپ) که برای بررسی راحت‌تر سیستم، همه نیروها را به روش گفته شده یک نقطه خاص انتقال می‌دهیم. این نقطه می‌تواند مرکز جرم جسم و یا هر نقطه دیگری که در صورت سوال ذکر شده است باشد. دو سیستم نیرو زمانی با هم معادلند که بتوان آن‌ها را به یکسیستم نیرو- کوپل یکسان در یک نقطه معین مثلO تبدیل کرد. در شکل زیر، به جسم سه نیرو وارد شده است که با انتقال آنها به نقطهO، سه کوپل تولید می‌شود (ا تصویر وسط). می‌توان برایند نیروها را با بردارR و برایند کوپل‌ها را با بردارM نمایش داد (ن -تصویر راست).

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots = \Sigma\mathbf{F}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \cdots = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

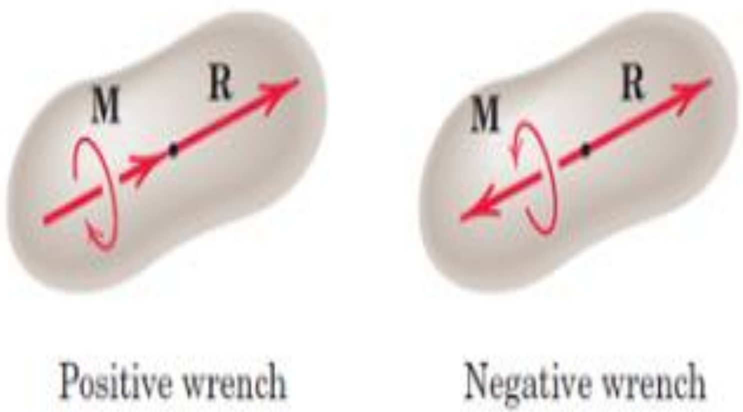


نمایش یک سیستم نیرو و سیستم نیرو- کوپل معادل آن در نقطهO

دقت شود مقدارR، یعنی نیروی برایند، مستقل از نقطه‌ای است که سیستم به آن انتقال داده می‌شود؛ اما مقدار و جهت کوپل برایندM به موقعیت این نقطه بستگی دارد.

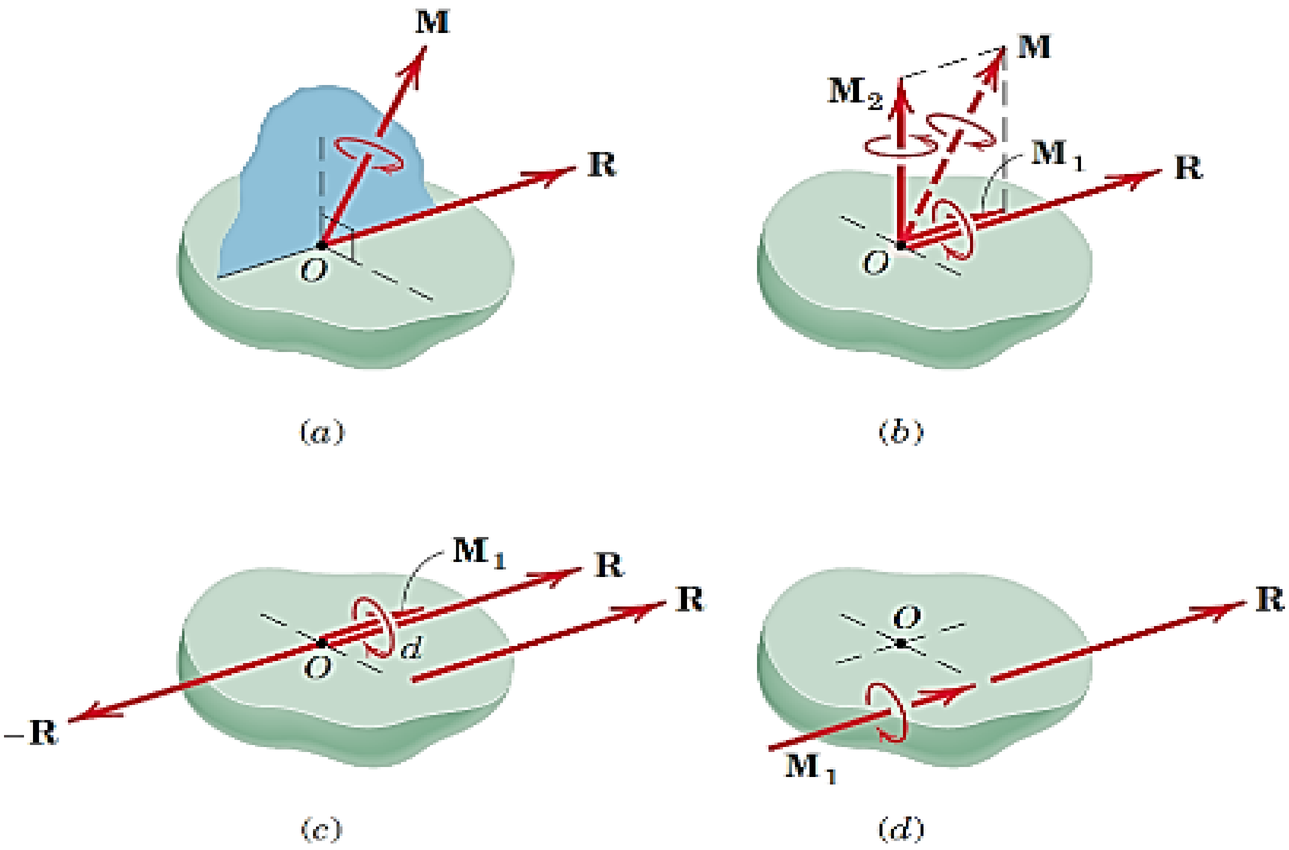
رنچ

وقتی بردار ممان برایندM موازی بردار نیروی برایندR باشد، به این برایند رنچ گفته می‌شود. وقتی جهت بردارهایR وM یکسان باشد، رنچ مثبت (شکل ۲۰- تصویر چپ) و در غیر اینصورت، رنچ منفی است (شکل تصویر راست).



نمایش رنچ مثبت (تصویر چپ) و منفی (تصویر راست)

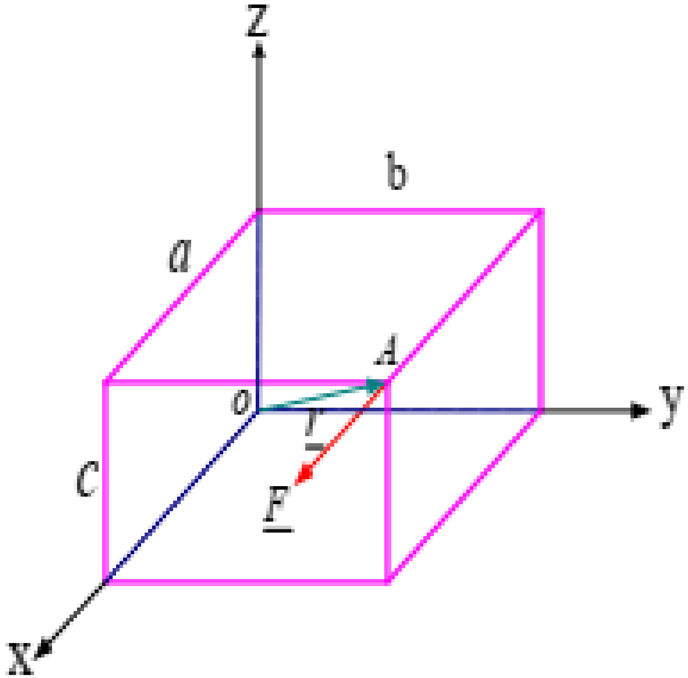
در شکل ۲۱-a، حالت عمومی سیستم کوپل- نیروی معادل یک سیستم نیرو را مشاهده می‌کنیم که R نیروی برایند و M کوپل برایند است. با توجه به اینکه M یک بردار آزاد است، برای راحتی در نمایش سیستم، آن را به گونه‌ای قرار دادیم که از نقطه O بگذرد. حال M را در دو راستا تجزیه می‌کنیم؛ راستای بردار R (M_1) و راستای عمود بر آن (M_2) (شکل ۲۱-b).می‌توان کوپل M_2 را با دو نیروی R و $-R$ با فاصله $d= M_2/R$ جایگزین کرد (شکل ۲۱-c). حال برایند نیروی R اولیه و نیروی $-R$ صفر می‌شود. در نتیجه آنچه باقی می‌ماند، نیروی R در یک راستای جدید و کوپل M_1 است که M_1 نیز یک بردار آزاد است. بنابراین سیستم نیروی اولیه به یک رنج مثبت تبدیل ش

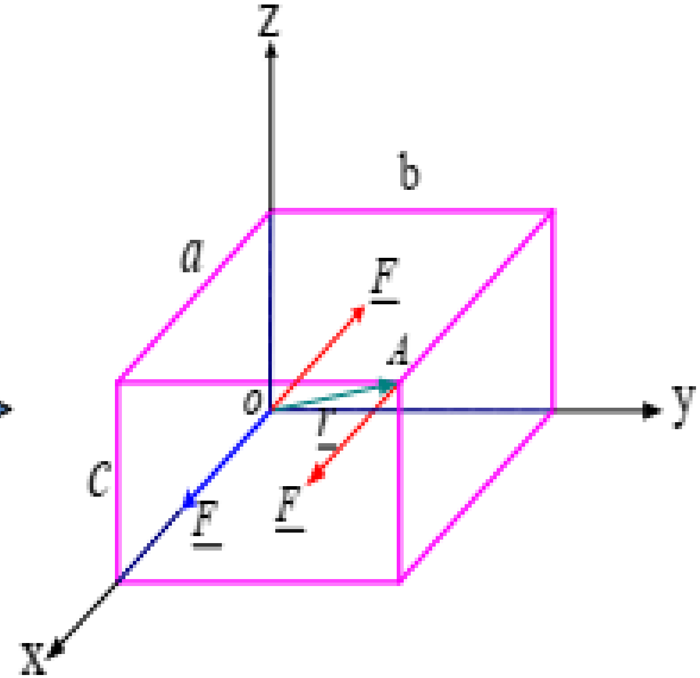


شکل تبدیل سیستم نیرو به یک رنج

تجزیه (تعویض) یک نیروی مفروض به یک نیرو و بردار کوپل در نقطه ای مثل O

اثر زوج نیرو ایجاد گشتاور است.

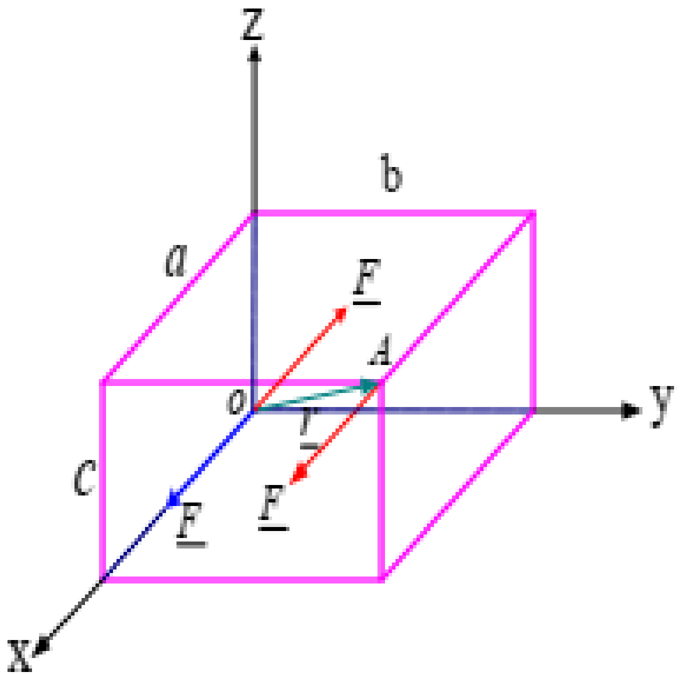


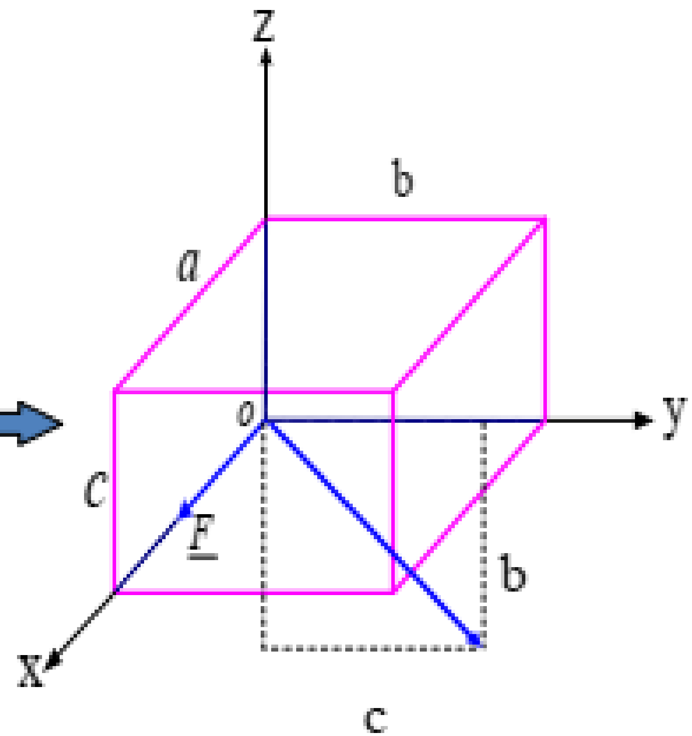


$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F})_A \qquad \underline{r} = a\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k} \qquad F)_A = F\underline{i}$$

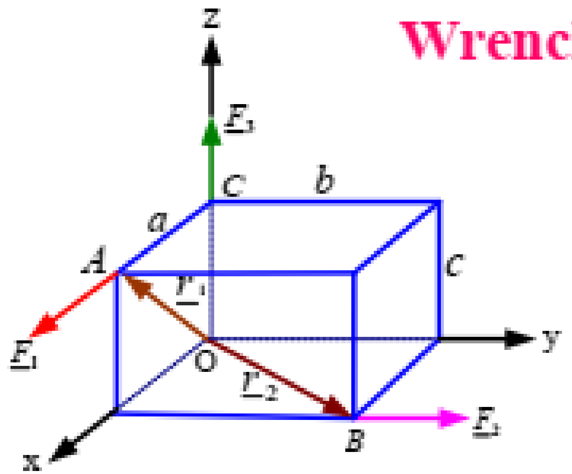
$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F})_A = (a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}) \times F\underline{i} = F(c\underline{j} - b\underline{k})$$

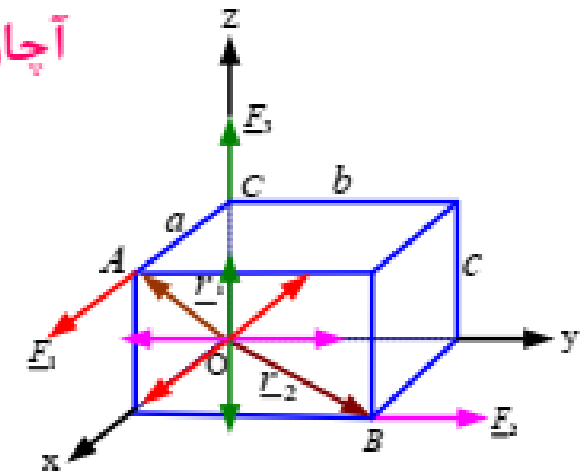
$$\underline{M}_O . \underline{F} = F(c\underline{j} - b\underline{k}).(F\underline{i}) = 0$$

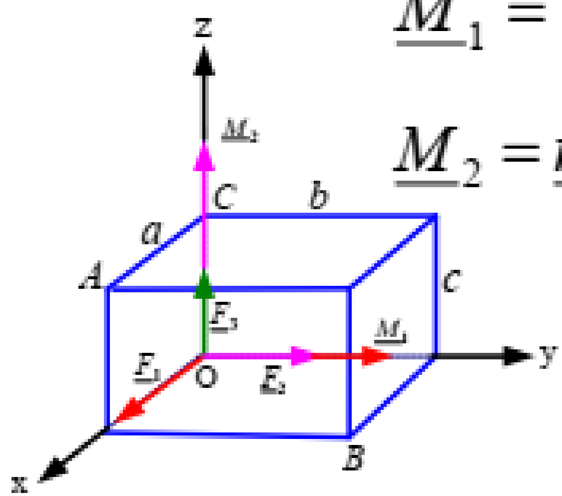




Wrench آچار







$$\underline{M}_1 = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 = (a\underline{i} + c\underline{k}) \times F_1\underline{i} = cF_1\underline{j}$$

$$\underline{M}_2 = \underline{r}_2 \times \underline{F}_2 = (a\underline{i} + b\underline{j}) \times F_2\underline{j} = aF_2\underline{k}$$

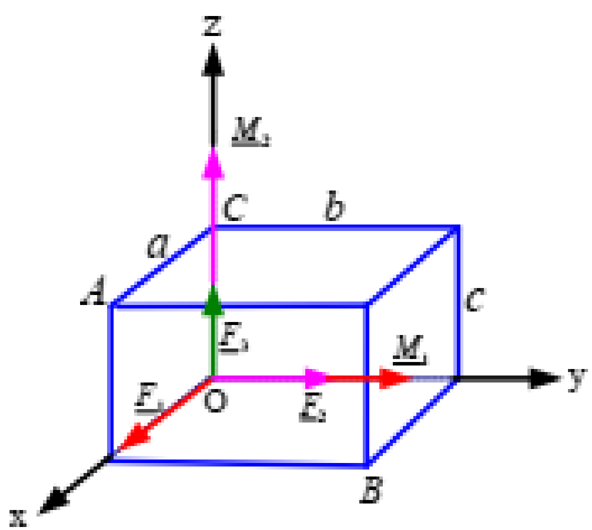
$$\underline{M}_3 = 0$$

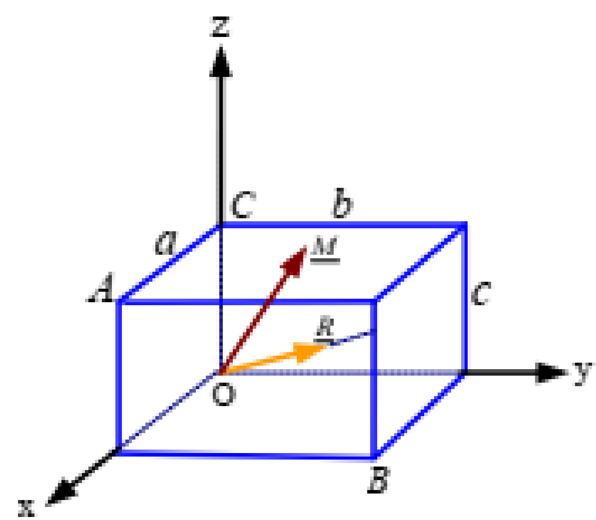
$$\underline{F}_1 = F_1 \underline{i} \qquad \underline{F}_2 = F_2 \underline{j} \qquad \underline{F}_3 = F_3 \underline{k}$$

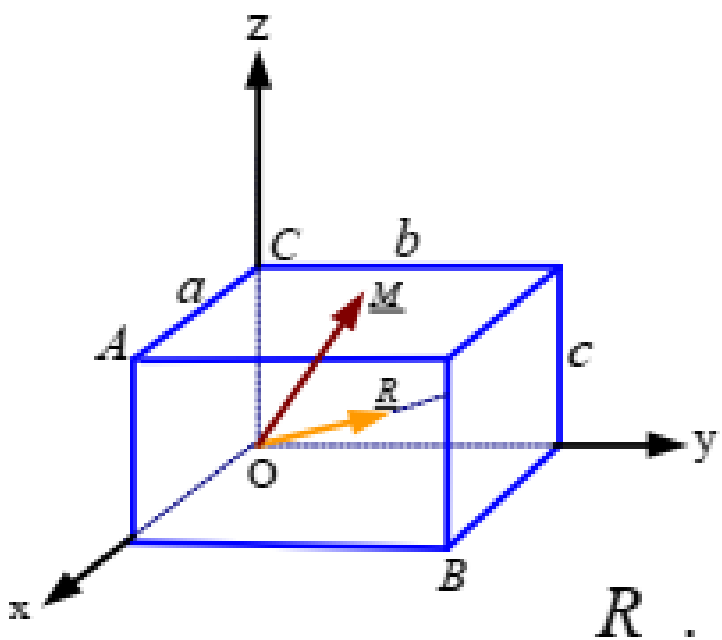
$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \left(F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k} \right)$$

$$\underline{M}_1 = cF_1 \underline{j} \qquad \underline{M}_2 = aF_2 \underline{k} \qquad \underline{M}_3 = 0$$

$$\underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 = \left(cF_1 \underline{j} + aF_2 \underline{k} \right)$$







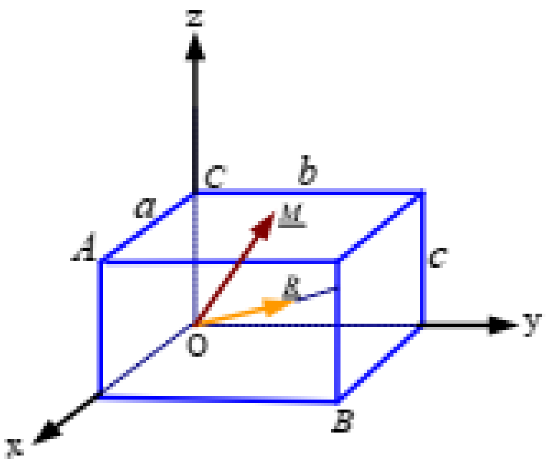
$$\underline{R} = F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k}$$

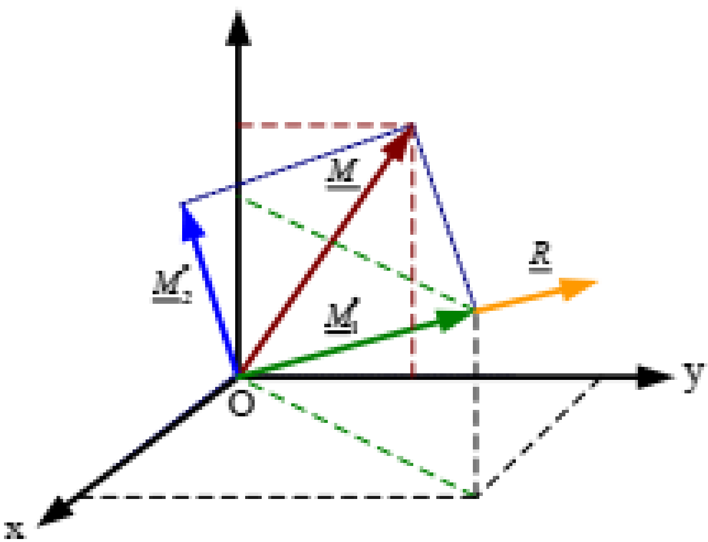
$$\underline{M} = \left(cF_1 \underline{j} + aF_2 \underline{k} \right)$$

$$\underline{R} \;.\; \underline{M} = F_2 \left(cF_1 + aF_3 \right) \neq 0$$

هر نیرو و بردار کوپل مربوط به خودش بر هم عمودند لیکن بردار های برآیند نیروها
و برآیند کوپل ها بر هم عمود نیستند

$$\underline{R} = F_1\,\underline{i} + F_2\,\underline{j} + F_3\,\underline{k} \qquad \underline{M} = \left(cF_1\,\underline{j} + aF_2\,\underline{k}\right)$$



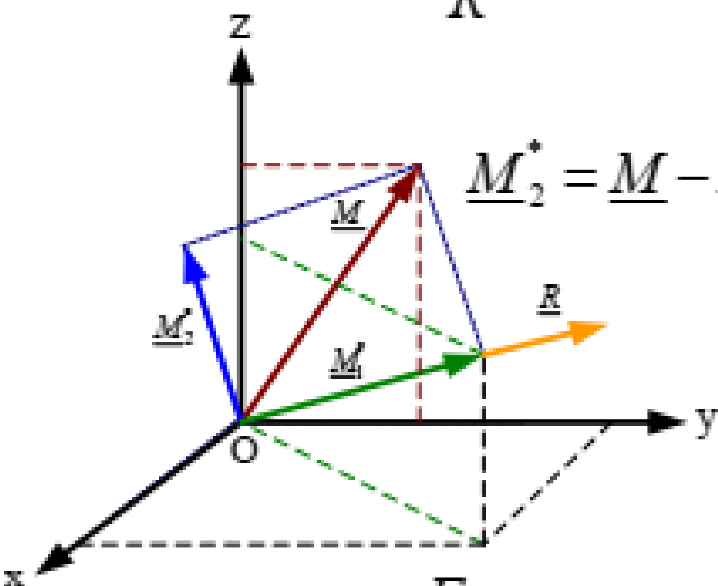


$$\underline{M} = \underline{M}_1^* + \underline{M}_2^* \qquad \underline{\lambda}_R = \frac{\underline{R}}{R} = \frac{F_1\,\underline{i} + F_2\,\underline{j} + F_3\,\underline{k}}{\sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + F_3^{\,2}}}$$

$$M_1^* = \underline{\lambda}_R \cdot \underline{M} = \frac{F_2}{R}\left(cF_1 + aF_3\right)$$

$$\underline{M}_1^* = M_1^*\,\underline{\lambda}_R = \frac{F_2}{R^2}\left(cF_1 + aF_3\right)\underline{R}$$

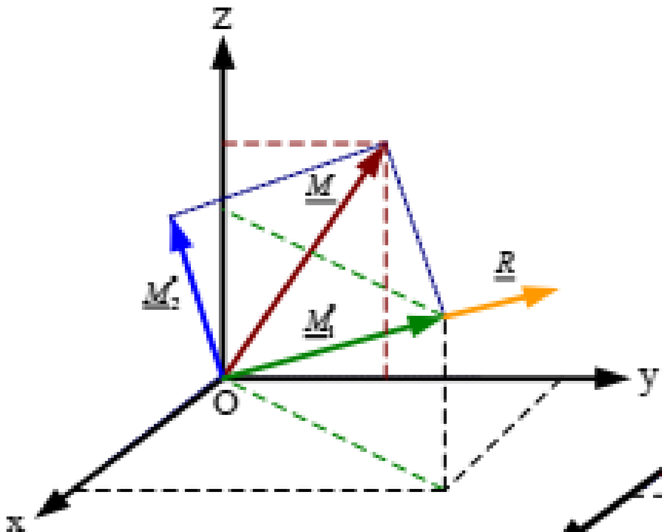
$$\underline{M}_1^* = M_1^* \underline{\lambda}_R = \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)\underline{R} \qquad \underline{M} = \left(cF_1 \underline{j} + aF_2 \underline{k}\right)$$

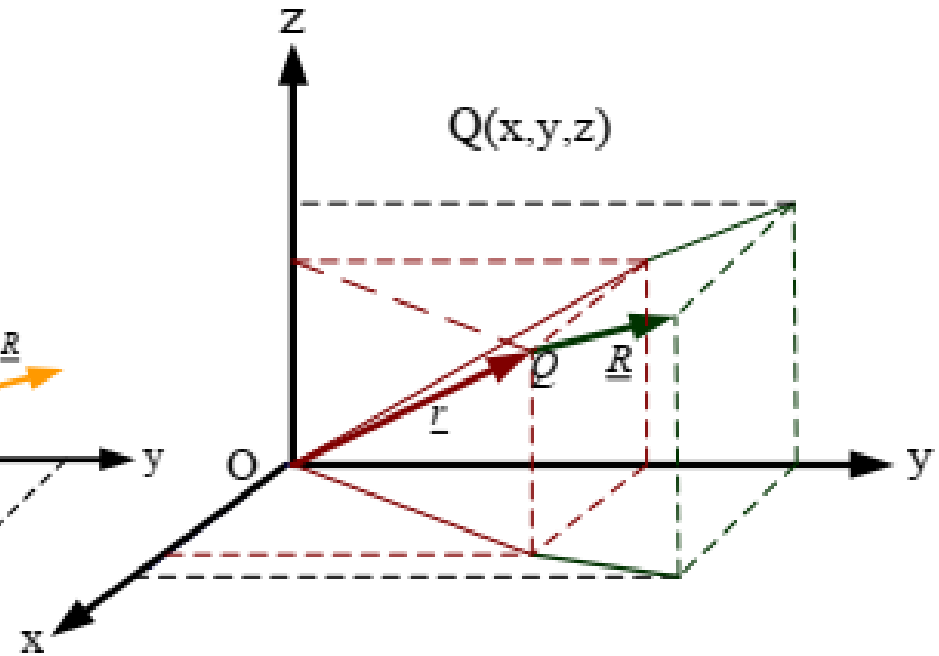


$$\underline{M}_2^* = \underline{M} - \underline{M}_1^* = cF_1 \underline{j} + aF_2 \underline{k} - \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)\underline{R}$$

$$\underline{M}_2^* = -\frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_1 \underline{i} + [cF_1 - \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_2]\underline{j}$$

$$+[aF_2 - \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_3]\underline{k}$$





$$\underline{R} = F_1\underline{i} + F_2\underline{j} + F_3\underline{k} \qquad \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$\underline{M}_2^* = \underline{r}\times\underline{R} = \left(x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}\right)\times\left(F_1\underline{i} + F_2\underline{j} + F_3\underline{k}\right)$$

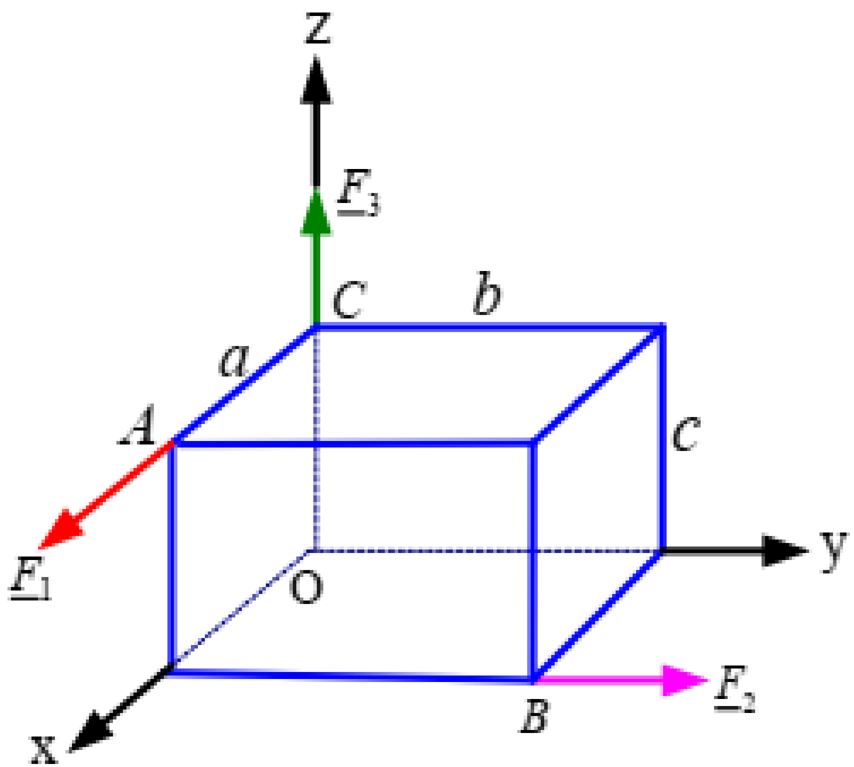
$$= (yF_3 - zF_2)\underline{i} + (zF_1 - xF_3)\underline{j} + (xF_2 - yF_1)\underline{k}$$

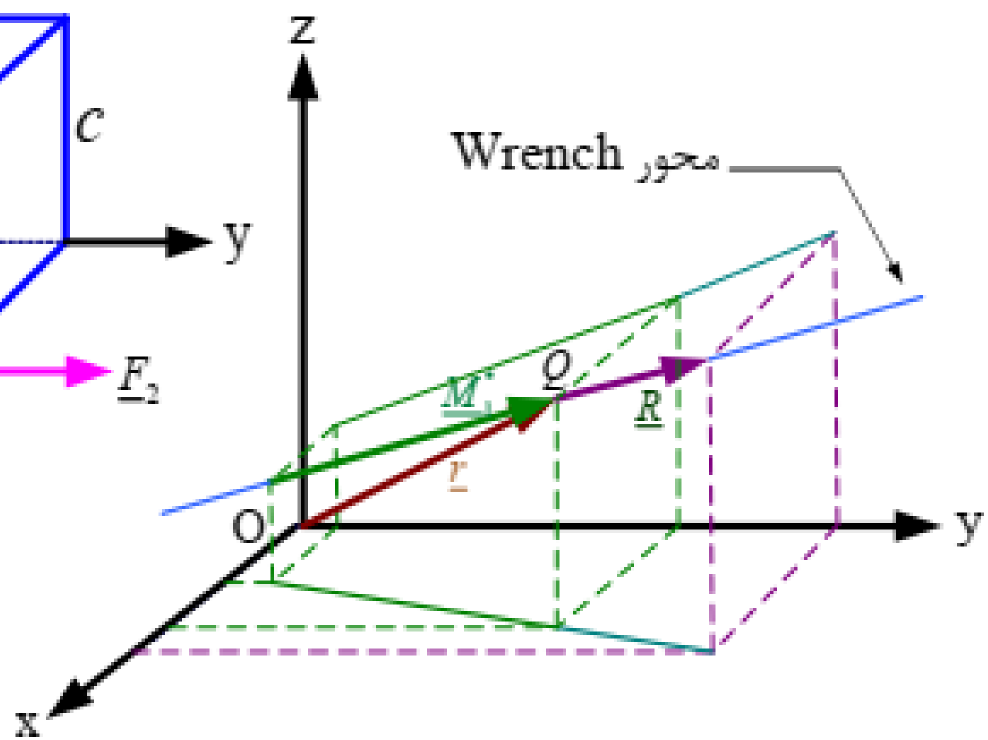
$$\underline{M}_2^* = (yF_3 - zF_2)\underline{i} + (zF_1 - xF_3)\underline{j} + (xF_2 - yF_1)\underline{k}$$

$$\underline{M}_2^* = cF_1\underline{j} + aF_2\underline{k} - \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)\underline{R}$$

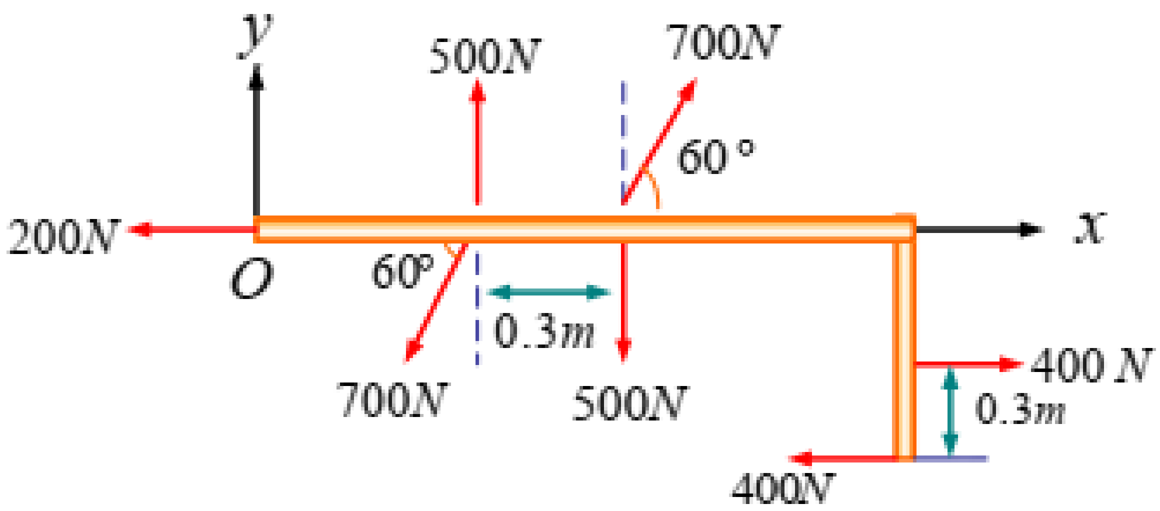
$$\underline{M}_2^* = -\frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_1\underline{i} + [cF_1 - \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_2]\underline{j} + [aF_2 - \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_3]\underline{k}$$

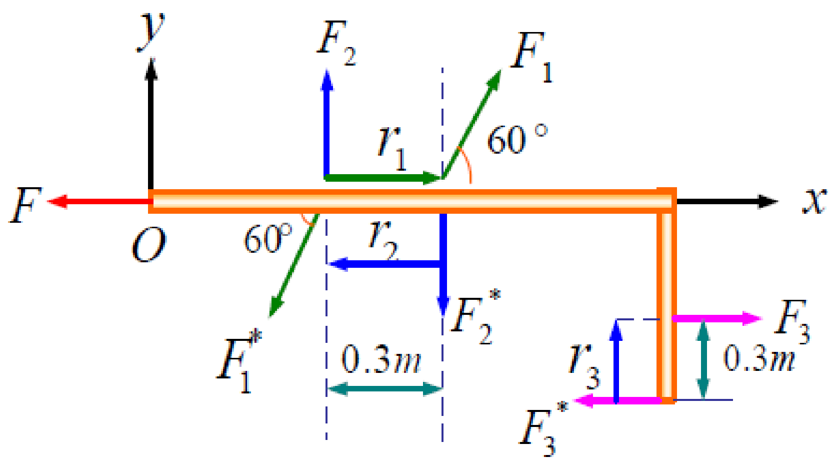
$$\begin{cases} -\dfrac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_1 = yF_3 - zF_2 \\ cF_1 - \dfrac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_2 = zF_1 - xF_3 \\ aF_2 - \dfrac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_3 = xF_2 - yF_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{F_2}{R^2 F_3}(cF_1 + aF_3)F_2 - c\dfrac{F_1}{F_3} \\ y = -\dfrac{F_1 F_2}{R^2 F_3}(cF_1 + aF_3) \\ z = 0 \end{cases}$$


z
F3
C
b
a
A
c
F1
O
y
x
F2
B


z
Wrench محور
Q
M1
R
r
O
y
x

مثال: سیستم نشان داده شده در شکل را با یک نیرو و بردار کوپل در نقطه O تعویض کنید.



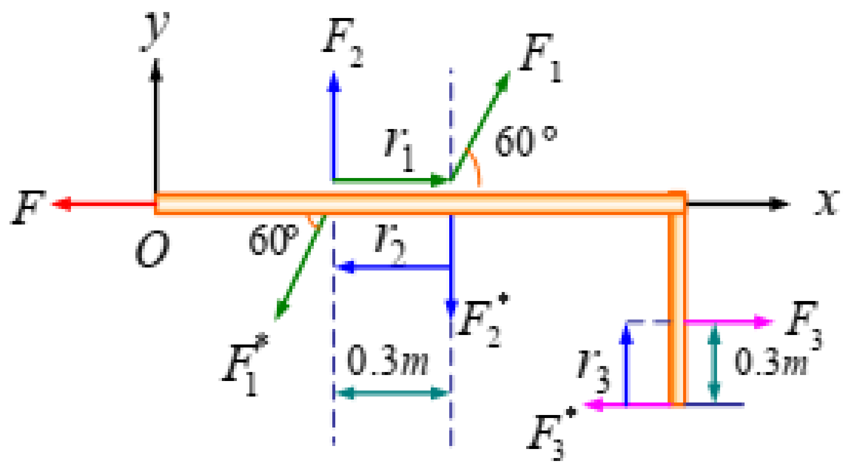


$F = 200N \qquad F_1 = F_1^* = 700N \qquad F_2 = F_2^* = 500N \qquad F_3 = F_3^* = 400N$

$\underline{F} = -200\,\underline{i} \qquad \underline{F}_1 = 700(\cos 60\underline{i} + \sin 60\,\underline{j}) \qquad \underline{F}_2 = 500\,\underline{j}$

$\underline{F}_3 = 400\,\underline{i} \qquad \underline{R} = \underline{F} = -200\,\underline{i}$

$\underline{r}_1 = 0.3\underline{i} \qquad \underline{M}_1 = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 = 210\,\underline{i} \times (\cos 60\underline{i} + \sin 60\,\underline{j}) = 105\sqrt{3}\,\underline{k}$



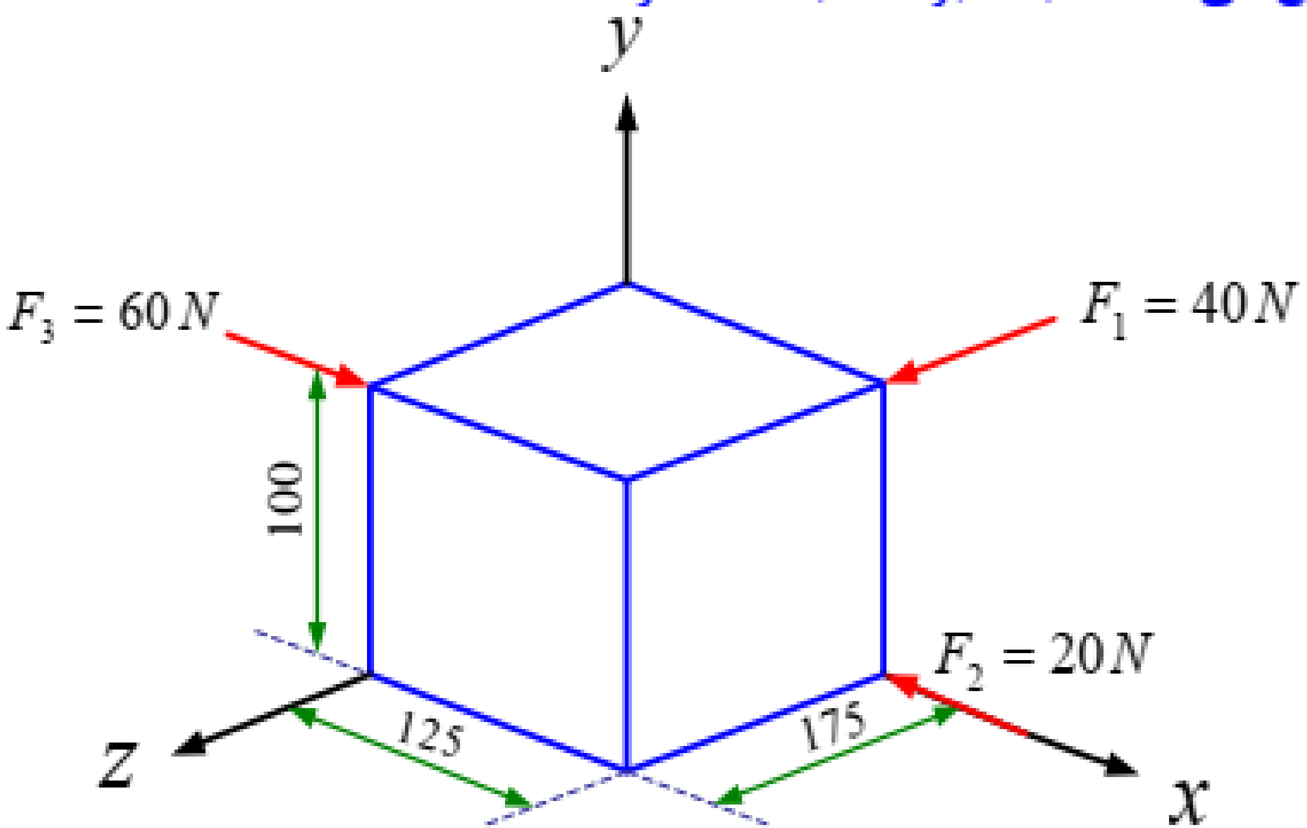
$$\underline{F}_2 = 500\,\underline{j} \qquad \underline{F}_3 = 400\,\underline{i}$$

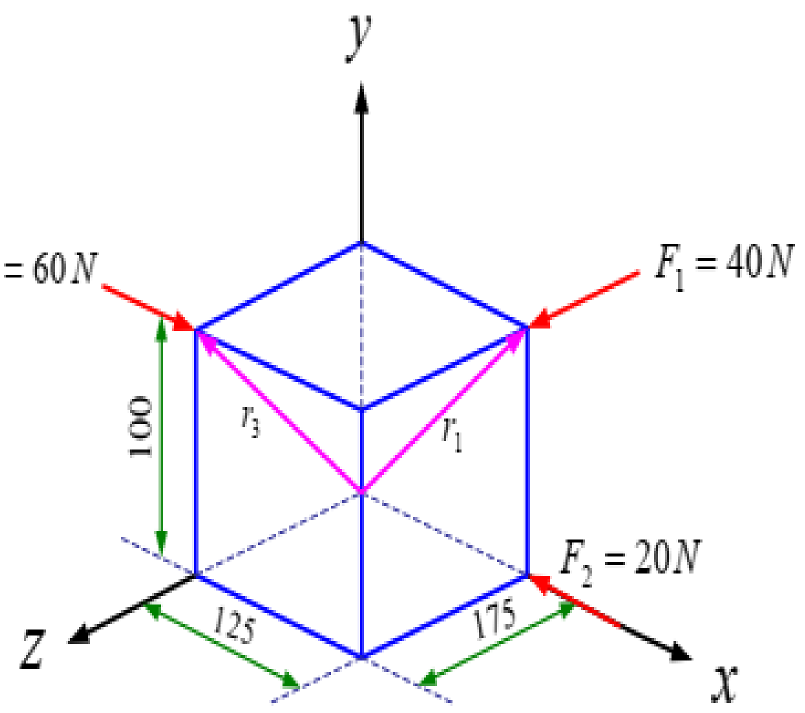
$$\underline{r}_2 = -0.3\underline{i} \qquad \underline{M}_2 = \underline{r}_2 \times \underline{F}_2 = -0.3\underline{i} \times 500\,\underline{j} = -150\underline{k}$$

$$\underline{r}_3 = 0.3\,\underline{j} \qquad \underline{M}_3 = 0.3\,\underline{j} \times 400\underline{i} = -120\underline{k}$$

$$\underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 = \left(-270 + 105\sqrt{3}\right)\underline{k} = -88.14\underline{k}$$

مثال: سه نیرو در امتداد یال های یک جسم مکعب مستطیل شکل اعمال میشوند. مطلوب است: 1- تعویض این نیروها با یک رنچ معادل 2-بزرگی و جهت برآیندR 3-نقطه ای که محور رنچ صفحه yz را قطع می کند. (ابعاد بر حسب میلیمتر هستند)



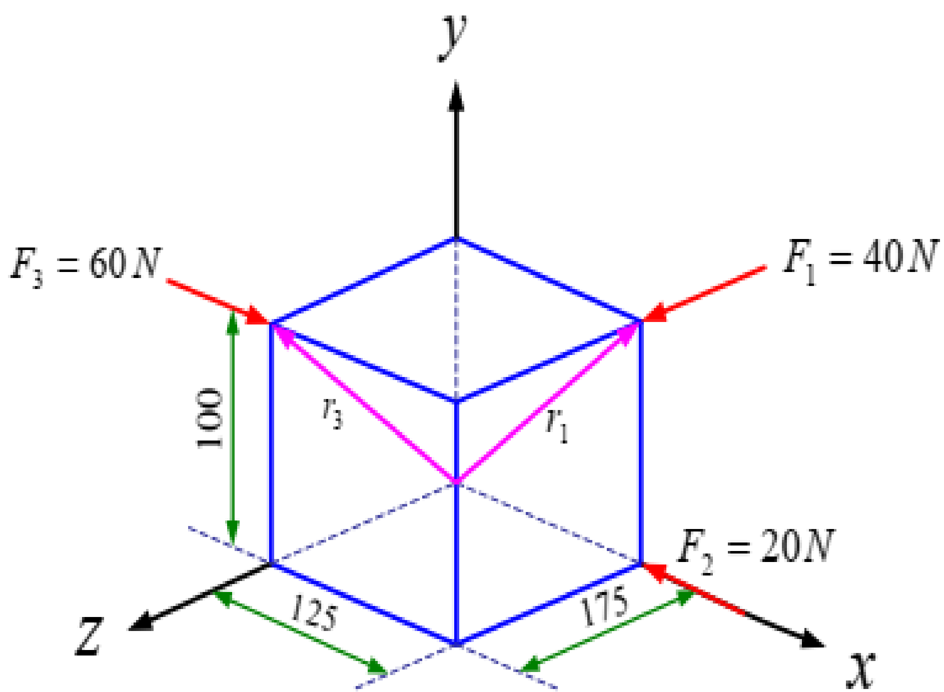


$$\underline{F}_1 = 40\ \underline{k} \quad \underline{F}_2 = -20\ \underline{i} \quad \underline{F}_3 = 60\,\underline{i}$$

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = 40\left(\underline{i} + \underline{k}\right)$$

$$\underline{r}_1 = 0.125\,\underline{i} + 0.1\,\underline{j}$$

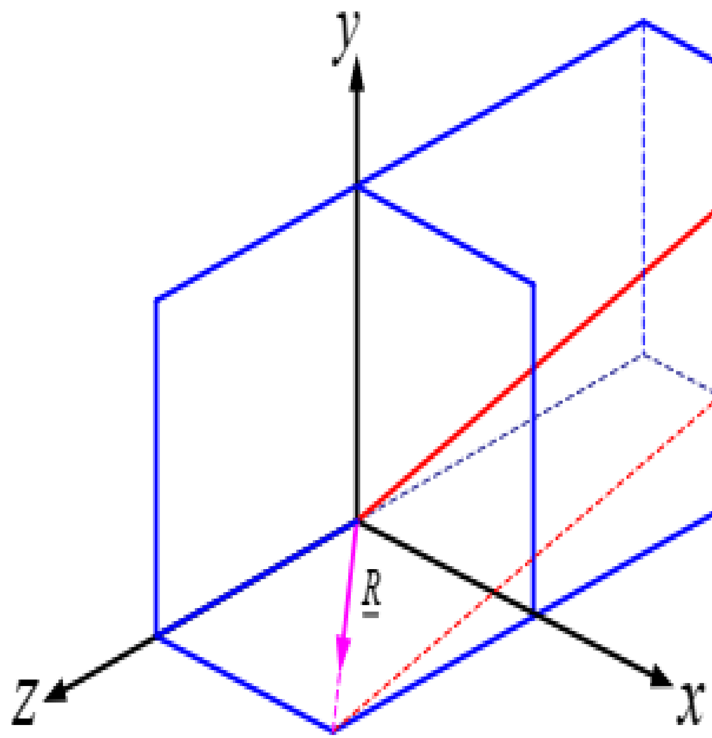
$$\underline{M}_1 = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 = \left(0.125\underline{i} + 0.1\,\underline{j}\right)\times(40)\ \underline{k} = -5\,\underline{j} + 4\underline{i}$$



$$\underline{M}_2 = 0 \qquad \underline{F}_3 = 60\,\underline{i} \qquad \underline{r}_3 = 0.1\,\underline{j} + 0.175\,\underline{k}$$

$$\underline{M}_3 = \underline{r}_3 \times \underline{F}_3 = \left(0.1\underline{j} + 0.175\underline{k}\right) \times 60\underline{i} = -6\underline{k} + 10.5\underline{j}$$

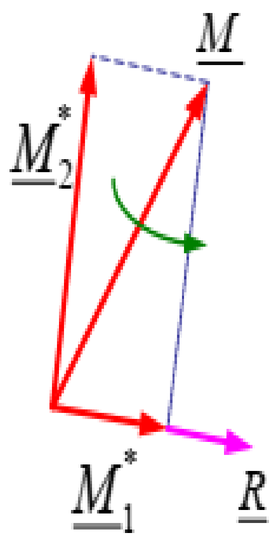
$$\underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 = 4\underline{i} + 5.5\underline{j} - 6\underline{k}$$



$$\underline{M} = 4\underline{i} + 5.5\underline{j} - 6\underline{k}$$

$$\underline{R} = 40\left(\underline{i} + \underline{k}\right)$$

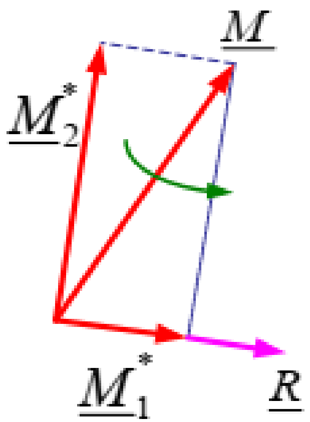
$$\underline{M} = \underline{M}_1^* + \underline{M}_2^*$$



$$\underline{\lambda} = \frac{\underline{R}}{\left|\underline{R}\right|} = \frac{40\left(\underline{i} + \underline{k}\right)}{40\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\underline{i} + \underline{k}\right)$$

$$M_1^* = \underline{M}\,\underline{\lambda} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$\underline{M}_1^* = M_1^*\,\underline{\lambda} = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\underline{i} + \underline{k}\right)\right) = -\left(\underline{i} + \underline{k}\right)$$



$$\underline{R} = 40(\underline{i} + \underline{k})$$

$$\underline{M}_1^* = -(\underline{i} + \underline{k}) \qquad \underline{M} = 4\underline{i} + 5.5\underline{j} - 6\underline{k}$$

$$\underline{M}_2^* = \underline{M} - \underline{M}_1^* = 5\underline{i} + 5.5\underline{j} - 5\underline{k}$$

$$\underline{M}_2^* = \underline{r} \times \underline{R} = 40(x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}) \times (\underline{i} + \underline{k})$$

$$= 40y\underline{i} - 40(x - z)\underline{j} - 40y\underline{k}$$

$$\begin{cases} 40y = 5 \\ 40(x - z) = -5.5 \end{cases} \quad x = 0 \Rightarrow \quad y = 1/8\ m \ , \quad z = 11/88\ m$$