دانشگاه صنعتی شاهرود

جلسه نهم
مشابهت الکتریکی در انتقال گرما در شرایط مختلف

مشابهت الکتریکی

محاسبات انتقال حرارت توسط هدایت و جابجـایی را می‌تـوان در تشـابه بـا قـانون اهـم در انتقـال الکتریسیته دانست که بر اساس آن مقاومت یک جریان الکتریکی یعنی R را می‌توان برابر با نسبت نیروی محرکه جریان (افت ولتاژ بر حسب ولت، ΔV) به مقدار جریان (I بر حسب آمپر) دانست.

$$\frac{\Delta V}{I} = R$$

یا

$$\text{مقاومت در مقابل جریان} = \frac{\text{نیرو محرکه}}{\text{شار جریان}}$$

$$\frac{T_1 - T_2}{q_x} = R_k$$

$$R_k = \frac{1}{k_m}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A_x}$$

به همین‌صورت‌مقاومت در مقابل‌انتقال حرارت‌بر روش‌جابجایی، R_h نیز بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{T_s - T_\infty}{q_x} = R_h$$

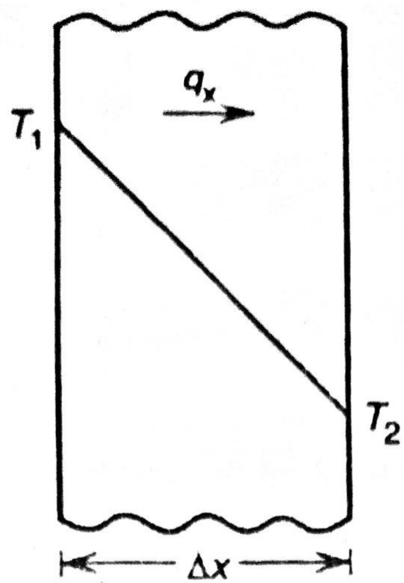
$$R_h = \frac{1}{Ah}$$

انتقال گرما در دیواره مسطح

$$\frac{T_1 - T_2}{q_x} = \frac{x_2 - x_1}{A\,k_m}$$

$$\frac{q_x}{A} = \frac{k_m(T_1 - T_2)}{x_2 - x}$$

$$q'_x = \frac{q_x}{A} = k_m \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1}$$



انتقال حرارت از طریق هدایت در یک دیواره مسطح

$$\frac{T_1 - T}{q_x} = \frac{1}{k_m} \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{A_x}$$

و چون برای انتقال حرارت در دیواره مسطح A_x مقداری ثابت است لذا

$$\frac{T_1 - T}{q_x} = \frac{x - x_1}{A\, k_m}$$

$$\frac{q_x}{A\, k_m} = \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1} = \frac{T_1 - T}{x - x_1}$$

دمای سطح داخلی و خارجی یک پنجره شیشه‌ای در یک اتاق به ترتیب برابر با ۲۵ و صفر درجه سانتیگراد است. ضخامت این شیشه ۵ میلی متر و متوسط ضریب هدایت حرارتی آن $\cdot/\text{۸۴}\ W/m.K$ است. اتلاف گرما توسط هدایت را در واحد سطح بیابید.

با استفاده از معادله قبل در شرایطی که $T_1 = 25$ و $T_2 = 0$ باشد آنگاه

$$q'_x = k_m \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2}$$

$$= 0/84 \times \frac{25}{0/005} = 4200\ W/m^2$$

در چه ضخامتی از شیشه اتلاف حرارتی برابر $2000\ W/m^2$ خواهد بود؟

$$x_1 - x_2 = k_m \frac{T_1 - T_2}{q'_x}$$

$$= 0/84 \times \frac{25}{2000} = 0/0105\ m = 10/5\ mm$$

انتقال گرما در دیواره استوانه توخالی

استوانه‌ای توخالی را با شعاع داخلی R_1 ، شعاع خارجی R_2 و طول L در نظر می‌گیریم. چنانچه سطح داخلی بصورت یکنواخت در دمای T_1 و سطح خارجی نیز بصورت یکنواخت در دمای T_2 قرار داشته باشد در اثر وجود شیب حرارتی، جریان گرما در دیواره بصورت شعاعی ظاهر خواهد شد. درشعاع r ، مساحتی که از آن گرما در حال عبور است برابر با $2\pi rL$ خواهد بود و لذا معادله (۶-۸) بصورت زیر در خواهد آمد.

$$\frac{T_1 - T_2}{q_r} = \frac{1}{k_m} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{2\pi rL} = \frac{1}{2\pi k_m L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$q_r = \frac{2\pi k_m L(T_1 - T_2)}{\ln(R_2 / R_1)}$$

در محدوده $T = T$ در $r = r$ و $T = T_1$ در $r = R_1$ از معادله ۶-۸ نتیجه زیر بدست می‌آید.

$$\frac{T_1 - T}{q_r} = \frac{1}{2\pi k_m L} \ln \frac{r}{R_1}$$

$$\frac{q_r}{2\pi k_m L} = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_2 / R_1)} = \frac{T_1 - T}{\ln(r / R_1)}$$

و بدین ترتیب

$$T = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{\ln(r / R_1)}{\ln(R_2 / R_1)}$$

این معادله نیمرخ تغییرات دمایی در دیواره استوانه است.

در لوله‌ای شیشه‌ای با شعاع داخلی ۳ سانتی‌متر و شعاع خارجی ۵ سانتی‌متر آب گرم جریان دارد. دمای سطح داخلی و خارجی لوله به ترتیب ۹۰ و $۸۵^\circ C$ است. چنانچه میانگین ضریب هدایت حرارتی شیشه برابر با $۰/۸۴\ W/m.K$ باشد سرعت تلفات حرارتی در واحد طول لوله، q_r'' را بیابید.

$$T_۱ = ۹۰^\circ C$$

$$T_۲ = ۸۵^\circ C$$

$$q_r'' = \frac{q_r}{L} = \frac{۲\pi k_m (T_۱ - T_۲)}{\ln(R_۲ / R_۱)}$$

$$= \frac{۲\pi \times ۰/۸۴ \times (۹۰ - ۸۵)}{\ln(\frac{۰/۰۵}{۰/۰۳})} = ۵۱/۷\ W/m$$

انتقال گرما در دیواره کره توخالی

کره‌ای توخالی با شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 را در نظر می‌گیریم. چنانچه سطح داخلی در دمای بالا و برابر با T_1 و سطح خارجی دردمای پایین‌تر و برابر با T_2 باشد جریان گرما از سطح داخلی به طرف بیرون برقرار خواهد شد. در شعاع r مساحت درگیر در انتقال حرارت برابر با $4\pi r^2$ خواهد بود

$$\frac{T_1 - T_2}{q_r} = \frac{1}{k_m} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi k_m}\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$$

و یا

$$q_r = \frac{4\pi k_m (T_1 - T_2) R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

در محدوده $T = T$ در $r = r$ و $T = T_1$ در $r = R_1$

$$\frac{q_r}{4\pi k_m} = \frac{(T_1 - T_2) R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{(T_1 - T) R_1 r}{r - R_1}$$

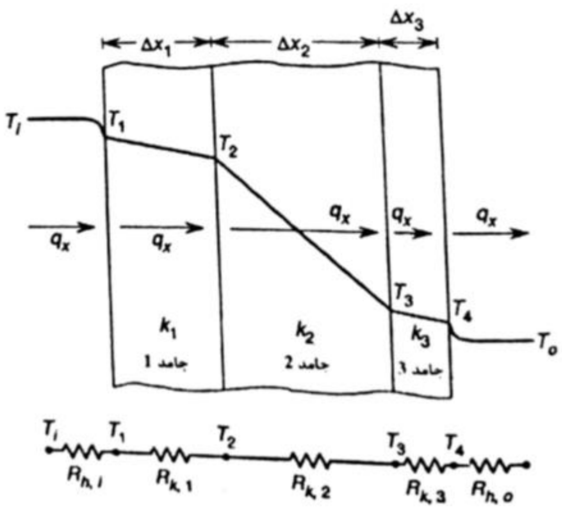
و یا

$$T = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)(r - R_1) R_2}{(R_2 - R_1) r}$$

انتقال گرما در دیواره چند لایه (مرکب)

شکل «زیر» نیمرخ تغییرات دمایی در سیستمی که در یک طرف آن سـیال گـرم در دمـای T_i و در طرف دیگر آن سیال سرد در دمـای T_o و دیـواره‌ای چنـد لایـه را نشـان می‌دهـد.[1] دیـواره شـامل لایه‌هایی از جنس‌های گوناگون با ضخامت $\Delta x_1, \Delta x_2$ و Δx_3 و ضریب هدایت حرارتـی k_1, k_2 و k_3 می‌باشد. گرما از طریق جابجایی از سیال گـرم بـه داخلی‌تریـن سـطح دیـواره وارد شـده و توسـط هدایت به لایه‌های گوناگون در داخل دیواره نفوذ و نهایتاً توسط جابجایی از سطح خـارجی دیـواره به سیال سردتر منتقل می‌شود. در سطح داخلی ضریب انتقال حرارت جابجایی برابر بـا h_i و بـرای سطح خارجی دیواره برابر با h_o می‌باشد. با مشابهت الکتریکی می‌توان چنین نوشت.

$$\frac{T_i - T_o}{q_x} = R$$



انتقال گرما توسط جابجایی و هدایت در سیستمی متشکل از دیواره مرکب

متوالی در قسمت جامدی و $R_{h,o}$ مربوطه به جابجایی حرارتی در سطح خارجی می‌باشد. بنا بر اینکه‌این مقاومت‌های حرارتی بصورت سری و پشت سر هم قرار گرفته‌اندبراساس‌مشابهت الکتریکی

$$\frac{T_i - T_o}{q_x} = R_{h,i} + R_{k,1} + R_{k,2} + R_{k,3} + R_{h,o}$$

و

$$R_{h,i} = \frac{1}{Ah_i}$$

$$R_{h,o} = \frac{1}{Ah_o}$$

$$R_{k,1} = \frac{\Delta x_1}{k_1 A}$$

$$R_{k,2} = \frac{\Delta x_2}{k_2 A}$$

$$R_{k,3} = \frac{\Delta x_3}{k_3 A}$$

$$\frac{T_i - T_o}{q_x} = \frac{1}{Ah_i} + \frac{\Delta x_1}{k_1 A} + \frac{\Delta x_2}{k_2 A} + \frac{\Delta x_3}{k_3 A} + \frac{1}{Ah_o}$$

و یا بر حسب شار حرارتی یعنی گرمای منتقل شده در واحد زمان از واحد سطح

$$\frac{T_i - T_o}{q'_x} = \frac{1}{h_i} + \frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2} + \frac{\Delta x_3}{k_3} + \frac{1}{h_o}$$

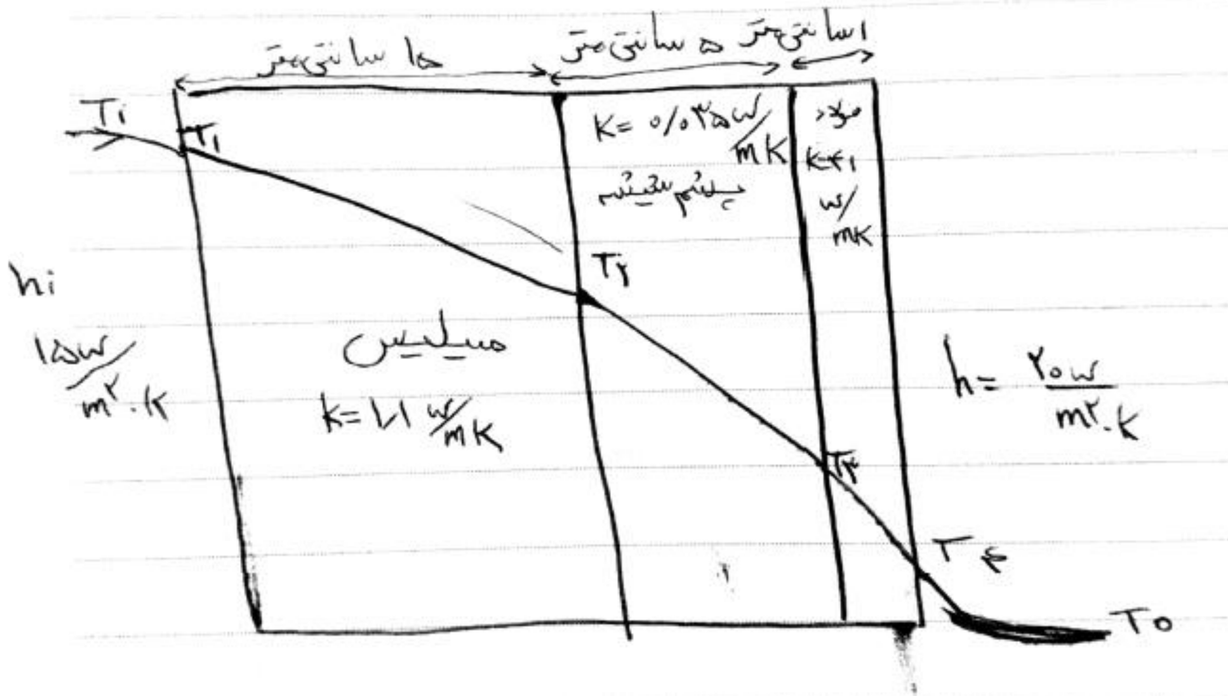
دیواره کوره‌ای را در نظر می‌گیریم که از سه لایه شامل آجر سیلیسی به ضخامت ۱۵ سانتی‌متر با $k = ۱/۱ \ W / m.K$ ، پشم شیشه به ضخامت ۵ سانتی‌متر با $k = ۰/۰۳۵ \ W / m.K$ و فولاد به ضخامت ۱ سانتی‌متر با $k = ۴۱ \ W / m.K$ تشکیل شده است. مقاومت کل و شار حرارتی از کوره و دمای هر یک از سطوح را بیابید.

$$T_i = ۵۰۰ ^\circ C \text{ و } h_i = ۱۵ \ W / m^۲ \cdot K, \ T_o = ۲۰ ^\circ C, h_o = ۲۰ W / m^۲ \cdot K$$

$$\frac{۵۰۰-۲۰}{q''_x} = \frac{۱}{۱۵} + \frac{۰/۱۵}{۱/۱} + \frac{۰/۰۵}{۰/۰۳۵} + \frac{۰/۰۱}{۴۱} + \frac{۱}{۲۰}$$

$$= (۶/۶۷ \times ۱۰^{-۲}) + (۰/۱۳۶) + (۱/۴۳) + (۲/۴۴ \times ۱۰^{-۴}) + (۰/۰۵)$$

$$= ۱/۶۸۲$$



۱۵ سانتی‌متر
۵ سانتی‌متر
۱ سانتی‌متر
Ti
T۱
T۲
T۳
T۴
To
hi
۱۵W/m۲.K
سیلیس
k=۱/۱ W/mK
K= ۰/۰۳۵W/mK
پشم شیشه
فولاد
K=۴۱ W/mK
h= ۲۰W/m۲.K

چنانچه سهم هر یک از مقاومت‌های حرارتی موجود محاسبه شود دیده خواهد شد که از کل مقاومت حرارتی موجود ۸۵ درصد مربوط به پشم شیشه، ۸ درصد مربوطه به‌آجرسیلیسی،۴ درصد مربوطه به انتقال حرارت جابجایی در سطح داخلی،۳ درصد مربوطه به انتقال حرارت جابجایی از سطح خارجی و تقریباً قسمت فولادی هیچ مقاومتی‌در مقابل انتقال حرارت ندارد. شار حرارتی در دیواره این کوره برابر است با

$$q'_x = \frac{۵۰۰-۲۰}{۱/۶۸۲} = ۲۸۵/۴ \ \mathrm{W/m^۲}$$

محاسبه دمای سطوح گوناگون بـا بکـارگیری مشـابهت الکـتریکی بـرای هـر مقـاومت صـورت می‌پذیرد. دمای سطح داخلی یعنی سطح مربوط به آجرنسوز سیلیســی کـه بـا $T_۱$ نشـان داده می‌شود با استفاده از $R_{h,i}$ و q'_x بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{T_i - T_۱}{q'_x} = \frac{۱}{h_i}$$

$$\frac{۵۰۰ - T_۱}{۲۸۵/۴} = \frac{۱}{۱۵}$$

$$T_۱ = ۴۸۱^\circ C$$

بهمین صورت دمای سطح مابین آجرسیلیسی و پشم شیشه یعنی $T_۲$ بصورت‌زیرتعیین می‌شود.

$$\frac{T_۱ - T_۲}{q'_x} = \frac{\Delta x_۱}{k_۱}$$

$$\frac{۴۸۱ - T_۲}{۲۸۵/۴} = \frac{۰/۱۵}{۱/۱}$$

$$T_۲ = ۴۴۲^\circ C$$

دمای سطح مابین پشم شیشه و فولاد یعنی $T_۳$ نیز بصورت زیر تعیین می‌شود.

$$\frac{T_۲ - T_۳}{q'_x} = \frac{\Delta x_۲}{k_۲}$$

$$\frac{۴۴۲ - T_۳}{۲۸۵/۴} = \frac{۰/۰۵}{۰/۰۳۵}$$

$$T_۳ = ۳۴^\circ C$$

بهمین روش دمای سطح خارجی فولاد تقریباً برابر با ۳۴°C بدست می‌آید.

دمای فصل مشترک آجر سیلیسی و پشم شیشه ۴۴۲°C محاسبه گردید. چنانچه بخواهیم دمای این فصل مشترک مقدار پایین‌تر مثلاً ۴۰۰°C را داشته باشد می‌بایست لایه آجر سیلیسی ضخیم‌تری بکار بریم و لذا مقدار q'_x دیگری خواهیم داشت. برای ضخامت x از آجرنسوز سیلسی و $T_۲ = ۴۰۰$ می‌توان نوشت

$$\frac{۵۰۰ - ۴۰۰}{q_x} = \frac{۱}{۱۵} + \frac{x}{۱/۱} \qquad \text{(i)}$$

و برای انتقال حرارت از داخل به خارج کوره

$$\frac{۵۰۰ - ۲۰}{q_x} = \frac{۱}{۱۵} + \frac{x}{۱/۱} + \frac{۰/۰۵}{۰/۰۳۵} + \frac{۰/۰۱}{۴۱} + \frac{۱}{۲۰} \qquad \text{(ii)}$$

این دو معادله و دو مجهول است و با حل همزمان آنها

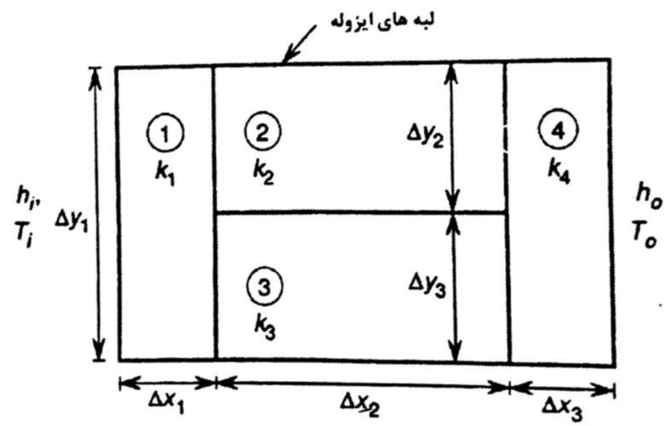
$$x = ۰/۳۵۵ \text{ m}$$

و

$$q'_x = ۲۵۷ \text{ W/m}^۲$$

بنابراین افزایش ضخامت آجر سیلسی از ۰/۱۵ به ۰/۳۵۵ متر باعث کاهش دمای فصل مشترک آجر سیلسی و پشم شیشه از۴۴۲ بــه ۴۰۰°C و کـاهش تلفـات حرارتـی کـوره از ۲۸۵/۴ بـه ۲۵۷ W/m² می‌گردد.

مشابهت الکتریکی را می‌توان در سیستم دیواره مرکب موازی نیز بکار برد. دیواره مرکب رسم شده در شکل زیر را در نظر می‌گیریم. این شکل از ۴ دیواره جامدی تشکیل شده است که مقاومت‌های حرارتی دیواره‌های ۲ و ۳ بصورت موازی هستند. مقاومت حرارتی ناشی از جریان گرمایی از سیال گرم‌تر در دمای T_i به سیال سردتر در دمای T_o به قرار زیر است.



انتقال حرارت توسط هدایت در دیواره مرکب که مقاومت‌های حرارتی ۲ و ۳ بصورت موازی قرار گرفته‌اند

$$R = R_{h,i} + R_{k,۱} + R_{k,۲-۳} + R_{k,۴} + R_{h,o}$$

به طوری که مقاومت $R_{k,۲-۳}$ بصورت زیر تعیین خواهد شد.

$$\frac{۱}{R_{k,۲-۳}} = \frac{۱}{R_{k,۲}} + \frac{۱}{R_{k,۳}}$$

و یا

$$R_{k,۲-۳} = \frac{R_{k,۲} \times R_{k,۳}}{R_{k,۲} + R_{k,۳}}$$

بنابراین

$$R = R_{h,i} + R_{k,۱} + \frac{R_{k,۲} \times R_{k,۳}}{R_{k,۲} + R_{k,۳}} + R_{k,۴} + R_{h,o}$$

برای واحد عرض دیواره یعنی $\Delta z = ۱$ می‌توان چنین نوشت

$$R = \frac{۱}{\Delta y_۱ h_i} + \frac{\Delta x_۱}{\Delta y_۱ k_۱} + \frac{(\Delta x_۲ / \Delta y_۲ k_۲)(\Delta x_۲ / \Delta y_۳ k_۳)}{(\Delta x_۲ / \Delta y_۲ k_۲) + (\Delta x_۲ / \Delta y_۳ k_۳)} + \frac{\Delta x_۳}{\Delta y_۱ k_۴} + \frac{۱}{\Delta y_۱ h_o}$$

برای شرایط زیر

$$\Delta x_۱ = \Delta x_۳ = ۰/۰۵ \quad , \quad \Delta x_۲ = ۰/۱ \mathrm{m}$$

$$\Delta y_۱ = ۲ \quad , \quad \Delta y_۲ = \Delta y_۳ = ۱ \mathrm{m}$$

$$k_۱ = ۲۰ \, , \, k_۲ = ۵ \quad , \, k_۳ = ۴ \, , \, k_۴ = ۱۰ \quad \mathrm{W/m.K}$$

$$\mathrm{h_i} = ۲۰ \, , \, \mathrm{h_o} = ۱۰ \, \mathrm{W/m^۲.K}$$

$$T_i = ۵۰ \quad , \, T_o = ۲۰ \, ^\circ\mathrm{C}$$

مقدار R چنین خواهد بود

$$R=\frac{۱}{۲\times ۲۰}+\frac{۰/۰۵}{۲\times ۲۰}+\frac{\frac{۰/۱}{۱\times ۵}\times\frac{۰/۱}{۱\times ۴}}{\frac{۰/۱}{۱\times ۵}+\frac{۰/۱}{۱\times ۴}}+\frac{۰/۰۵}{۲\times ۱۰}+\frac{۱}{۲\times ۱۰}$$

$$=۲/۵\times ۱۰^{-۲}+۱/۲۵\times ۱۰^{-۳}+۱/۱۱\times ۱۰^{-۲}+۲/۵\times ۱۰^{-۳}+۰/۰۵$$

$$=۸/۹۹\times ۱۰^{-۲}$$

بنابراین

(در واحد عمق دیواره) $q_x=\frac{T_i-T_o}{R}=\frac{۳۰}{۸/۹۹\times ۱۰^{-۲}}=۳۳۴\ W$

$T_۱$ را می‌توان از رابطه زیر یافت.

$$\frac{T_i-T_۱}{q_x}=R_{h,i}+R_{k,۱}$$

و بدین ترتیب

$$T_۱ = ۵۰ - ۳۳۴ \times (۲/۵ \times ۱۰^{-۲} + ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۳}) = ۴۱/۲\ ^{\circ}C$$

و $T_۲$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\frac{T_۲ - T_o}{q_x} = R_{k,۴} + R_{h,o}$$

بنابراین

$$T_۲ = ۲۰ + ۳۳۴ \times (۲/۵ \times ۱۰^{-۳} + ۰/۰۵) = ۳۷/۵\ ^{\circ}C$$

شار حرارت در واحد عرض دیواره ۲ عبارتست از

$$q_x = \frac{k_۲ A(T_۱ - T_۲)}{\Delta x_۲} = \frac{۵ \times ۱ \times (۴/۱۲ - ۳۷/۵)}{۰/۱} = ۱۸۵\ W$$

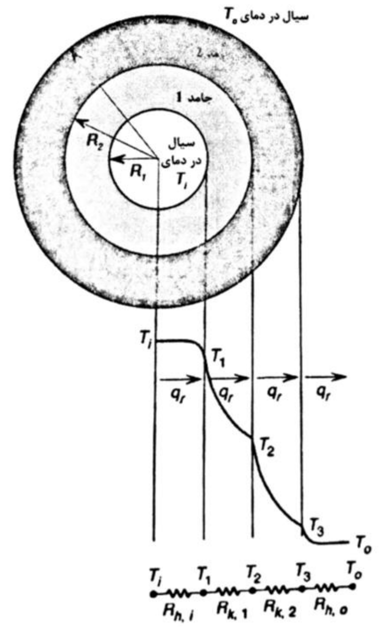
و شار حرارت در واحد عرض دیواره ۳ عبارتست از

$$q_x = \frac{k_۳ A(T_۱ - T_۲)}{\Delta x_۲} = \frac{۴ \times ۱ \times (۴/۱۲ - ۳۷/۵)}{۰/۱} = ۱۴۸\ W$$

مجموع این دو شار حرارتی برابر با مقدار کل آن یعنی W ۳۳۴ و نسبت آنها یعنی $۱۸۵/۱۴۸ = ۵/۴$ برابر با نسبت $k_۲ / k_۳$ خواهد بود.

انتقال گرما در دیواره استوانه ای مرکب

شکل زیر نیمرخ تغییرات دما در فرآیند انتقال حرارت از سیال داخلی در دمای T_i به دیواره استوانه‌ای مرکب و در نهایت به سیال بیرونی در دمای T_o را نشان می‌دهد.
مقاومت‌های حرارتی جابجایی مربوط به سطح داخلی، $R_{h,i}$ ، مربوط به سطح خارجی، $R_{h,o}$، هدایتی ماده شماره ۱، $R_{k,1}$ و هدایتی ماده شماره ۲، $R_{k,2}$ مطرح هستند. با استفاده از مشابهت الکتریکی



انتقال حرارت هدایتی در دیواره استوانه‌ای مرکب

$$\frac{T_i - T_o}{q_r} = R_{h,i} + R_{k,۱} + R_{k,۲} + R_{h,o} \qquad \text{(i)}$$

برای استوانه‌ای بطول L

$$R_{h,i} = \frac{۱}{Ah_i} = \frac{۱}{۲\pi R_۱ L h_i}$$

$$R_{h,o} = \frac{۱}{Ah_o} = \frac{۱}{۲\pi R_۳ L h_o}$$

و بر اساس معادله استوانه تو خالی

$$R_{k,۱} = \frac{\ln(R_۲ / R_۱)}{۲\pi k_۱ L}$$

$$R_{k,۲} = \frac{\ln(R_۳ / R_۲)}{۲\pi k_۲ L}$$

بنابراین شار حرارتی بر واحد طول استوانه عبارتست از

$$\frac{T_i - T_o}{q_r''} = \frac{۱}{۲\pi R_۱ h_i} + \frac{\ln(R_۲ / R_۱)}{۲\pi k_۱} + \frac{\ln(R_۳ / R_۲)}{۲\pi k_۲} + \frac{۱}{۲\pi R_۳ h_o} \qquad \text{(ii)}$$

لوله‌ای فولادی با قطر داخلی ۳ سانتی‌متر و قطر خارجی ۳/۵ سانتی‌متر که توسط مـاده‌ای ایزوله به ضخامت ۱/۲۵ سانتی‌متر و $k = ۰/۰۳۵ \ \mathrm{W/m.K}$ پوشـیده شـده اسـت را در نظـر می‌گیریم. بخار در داخل لوله و در دمای $۱۲۰ ^\circ C$ حرکت می‌نماید و دمـای هـوای اطـراف لوله، $T_o = ۱۵^\circ C$ است. ضریـب هدایـت حرارتـی لولـه فـولادی $۴۱ \mathrm{W/m.K}$ و مقـدار h_i و h_o به ترتیب برابر با ۱۵۰ و ۳۰ $\mathrm{W/m^۲.K}$ می‌باشد. با استفاده از معادله (iii)

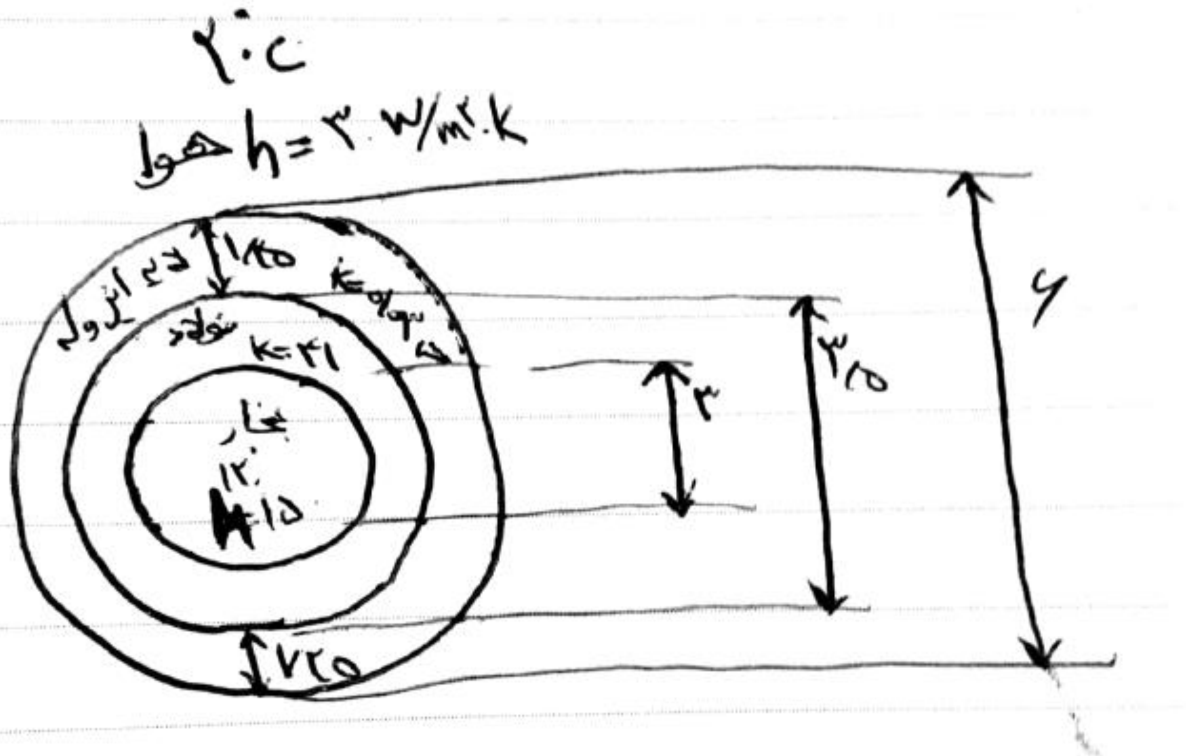
$$\frac{۱۲۰-۱۵}{q_r''} = \frac{۱}{۲\pi \times ۰/۰۱۵ \times ۱۵۰} + \frac{\ln(\frac{۳/۵}{۳})}{۲\pi \times ۴۱} + \frac{\ln(\frac{۳}{۱/۷۵})}{۲\pi \times ۰/۰۳۵} + \frac{۱}{۲\pi \times ۰/۰۳ \times ۳۰}$$

$$= (۰/۰۷۰۷) + (۵/۹۸ \times ۱۰^{-۴}) + (۲/۴۵۰) + (۰/۱۷۶۸)$$

$$= ۲/۶۹۸$$

بنابراین اتلاف حرارتی در واحد طول لوله بدست خواهد آمد.

$$q_r'' = \frac{۱۲۰-۱۵}{۲/۶۹۸} = ۳۸/۹ \ \mathrm{W/m}$$


۲۰c
هوا h=۳۰ W/m².k
۱۸۵
k=۴۱
بخار
۱۲۰
۷۲۵
۶
۳

میزان $\frac{۲/۴۵۰}{۲/۶۹۸}$ یا ۹۱ درصد از کل مقاومت حرارتی توسط لایه ایزوله ایجاد شده است.

دمای سطوح گوناگون بصورت زیر تعیین می‌شوند.

$$\frac{۱۲۰-T_۱}{۳۸/۹}=\frac{۱}{۲\pi R_۱ h_i}=۰/۰۷۰۷$$

و بنابراین

$$T_۱=۱۱۷\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$\frac{۱۲۰-T_۲}{۳۸/۹}=\frac{۱}{۲\pi R_۱ h_i}+\frac{\ln(R_۲/R_۱)}{۲\pi k_۱}=۰/۰۷۰۷+۵/۰۹\times ۱۰^{-۴}$$

و بنابراین

$$T_۲\approx ۱۱۷\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$\frac{۱۲۰-T_۳}{۳۸/۹}=۰/۰۷۰۷+۵/۹۸\times ۱۰^{-۴}+۲/۴۵۰$$

و بنابراین

$$T_۳=۲۱/۹\ ^\circ\mathrm{C}$$

هدایت حرارتی توام با تولید گرما در دیواره مسطح در شرایط متقارن

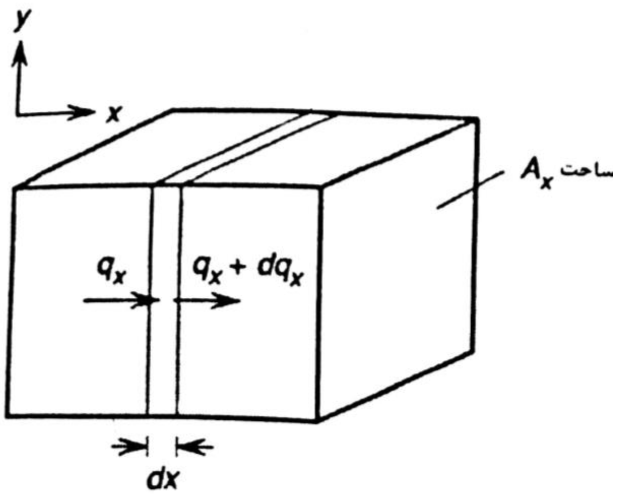
تولید گرما در یک محیط تأثیر بسزایی بر نیمرخ تغییرات دمـایی در شـرایط پایـا می‌گـذارد. گرمـا می‌تواند در مواد جامد بصورت گرم شدن ناشی از مقـاومت الکـتریکی و یـا واکنش‌هـای شـیمیایی تولید شود. سیستم انتقال حرارت یک بعدی در جهت x را برای نمونه‌ای جامدی بـا سـرعت تولیـد گرما برابر با $\dot{q}\ (W/m^3)$ در نظر می‌گیریم (شکل زیر) . موازنــه انـرژی گرمـایی بـر روی حجـم معیاری برابر با $A_x\,dx$ می‌تواند نوشته شود. اختلاف شار حرارتی ورودی و خروجی برابـر بـا گرمـای تولید شده خواهد بود

$$d\,q_x = \dot{q} A_x\,dx$$

که بر اساس قانون فوریه و ضریب هدایت حرارتی متوسط

$$-d\left(k_m A_x \frac{dT}{dx}\right) = \dot{q} A_x dx$$

$$\frac{\dot{q}}{k_m} = -\frac{1}{A_x}\frac{d}{dx}\left(A_x \frac{dT}{dx}\right)$$



هدایت حرارتی توام با تولید گرما در دیواره مسطح در شرایط متقارن

در این شرایط A_x مستقل از x بوده و معادله قبل را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{k_m}$$

با یکبار انتگرال‌گیری از این معادله

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}x}{k_m} + C_1$$

و با انتگرال‌گیری دوم

$$T = -\frac{\dot{q}x^2}{2k_m} + C_1x + C_2 \qquad \text{(i)}$$

در دیواره مسطح متعارف است که مبدأ را در مرکز دیواره در نظر گیریم و سطوح دیواره در $x = L$ و $x = -L$ واقع شوند. چنانچه هر دو سطح دیواره در دمای یکسان و برابر با T_s باشند بر اساس معادله (i)

$$T_s = -\frac{\dot{q}L^2}{2k_m} + C_1L + C_2 \qquad \text{در } x = L$$

$$T_s = -\frac{\dot{q}L^2}{2k_m} - C_1L + C_2 \qquad \text{در } x = -L$$

با حل همزمان این دو معادله

$$C_1 = 0$$

و

$$C_2 = T_s + \frac{\dot{q}L^2}{2k_m}$$

بنابراین رابطه نیمرخ تغییرات دمایی در دیواره بر اساس معادله (i) بدست خواهد آمد.

$$T = T_s + \frac{\dot{q}}{2k_m}(L^2 - x^2)$$

این معادله نشان می‌دهد که در این شرایط دما تابعی درجه ۲ از x است. اختلاف حداکثر دما واقع در مرکز دیواره در $x = 0$ و T_s بصورت زیر خواهد بود.

$$T_{\max} - T_s = \frac{\dot{q}L^2}{2k_m}$$

دیواره‌ای به ضخامت $2L = 0/1\ m$ را در نظر می‌گیریم. در این دیواره گرما با سرعت $250000\ W/m^3$ تولید می‌شود. هر دو سطح در تماس با هوا در دمای $T_\infty = 15\ °C$ قرار دارند. ضریب انتقال حرارت در سطوح دیواره برابر با $60\ W/m^2$ و ضریب هدایت حرارتی $25\ W/m.K$ است. نیمرخ تغییرات دمایی در دیواره را بیابید.

بنابر اینکه شرایط انتقال حرارت در دو طرف دیواره یکسان است می‌توان گفت که سرعت انتقال حرارت در واحد سطح دیواره، q'_x برابر با سرعت تولید گرما در نصف حجم یعنی(مساحت) × (نصف ضخامت) خواهد بود

$$q'_x = \dot{q}L$$

با مشابهت الکتریکی در مورد انتقال گرما توسط جابجایی از سطح دیواره به هوای اطراف

$$\frac{T_s - T_\infty}{q'_x} = \frac{1}{h}$$

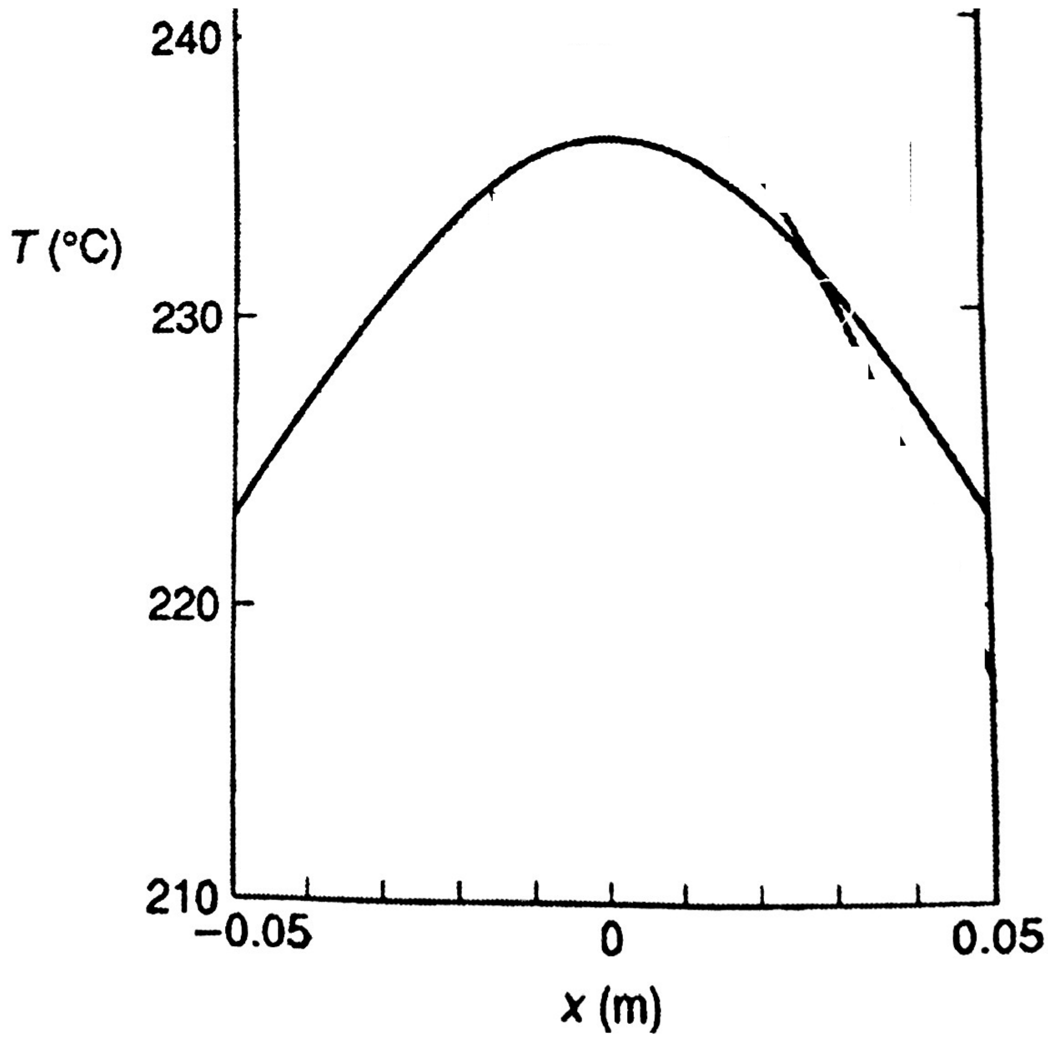
در نتیجه

$$T_s = T_\infty + \frac{q'_x}{h}$$

$$= 15 + \frac{250000 \times 0/05}{60}$$

$$= 223/3\ °C$$

$$T_2 = 223 + \frac{250000}{2 \times 28}(0/05^2 - x^2)$$


240
230
220
210
T (°C)
−0.05
0
0.05
x (m)