نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۳/۹/۱**

وقت : **۹۰** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم درس **معادلات دیفرانسیل** (۱۱ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / دوم) سال تحصیلی ۱۴۰۴- ۱۴۰۳

توجه : از نوشتن با مداد خودداری نمائید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱ ـ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید : ۱۵ نمره

$$y = \frac{2x - y - 2}{x - y - 3}$$

سوال ۲ ـ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید : ۱۵ نمره

$$\cos y\, dy - (\sin y - e^{x})dx = 0$$

سوال ۳ ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را تعیین کنید. ۱۵ نمره

$$x^2 y'' = 2xy' + (y')^2$$

سوال ۴ ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش ضرایب نامعین بدست آورید : ۲۰ نمره

$$y'' + 4y' + 3y = -2e^{-x} - 2\sin x$$

سوال ۵ ـ مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های زیر را بیابید. ۱۵ نمره

$$y = \frac{x}{cx + 30}$$

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : روش اول :

معادله را به صورت $(2x-y-2)dx+(-x+y+3)dy=0$ می‌نویسیم.

این معادله یک معادله کامل است و داریم : $\int(2x-y-2)dx = x^2-xy-2y \;,\; \int(-x+y+3)dy=-xy+\frac{1}{2}y^2+3y$

بنابر این، جواب معادله عبارت است از : $\boxed{x^2+\frac{1}{2}y^2-xy-2x+3y=c}$

روش دوم :

ابتدا دستگاه معادله $\begin{cases}2x-y-2=0\\ x-y-3=0\end{cases}$ را حل می‌کنیم و به جواب $\begin{cases}x=-1\\ y=-4\end{cases}$ می‌رسیم.

اکنون از تغییر متغیر $\begin{cases}x=u-1\\ y=v-4\end{cases}$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{dv}{du}=\frac{2(u-1)-(v-4)-1}{(u-1)-(v-4)-3} \to \frac{dv}{du}=\frac{2u-v}{u-v}$$

به یک معادله همگن رسیده‌ایم. از تغییر متغیر $v=uw$ استفاده می‌کنیم. داریم : $w+u\frac{dw}{du}=\frac{2u-uw}{u-uw}=\frac{2-w}{1-w}$

$$\to u\frac{dw}{du}=\frac{2-w}{1-w}-w=\frac{2-2w+w^2}{1-w} \to \frac{1-w}{2-2w+w^2}dw=\frac{1}{u}du \to \int\frac{1-w}{2-2w+w^2}dw=\int\frac{1}{u}du$$

$$\to \frac{-1}{2}\ln(2-2w+w^2)=\ln(cu) \to (cu)^2(2-2w+w^2)=1 \to 2u^2-2v+v^2=c_0$$

$$\to 2(x+1)^2-2(x+1)(y+4)+(y+4)^2=c_0 \qquad \to \qquad \boxed{2x^2+y^2-2xy-4x+6y=c_1}$$

پاسخ سوال۲ : داریم $M=-\sin y+e^x \;,\; N=\cos y$ و در نتیجه $M_y=-\cos y \;,\; N_x=0$

چون $\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{-\cos y-0}{\cos y}=-1$ یک تابع مستقل از y است پس عامل انتگرالساز یک متغیره $\mu=e^{\int -dx}=e^{-x}$ وجود دارد و معادله $(1-e^{-x}\sin y)dx+e^{-x}\cos y dy=0$ یک معادله کامل است.

$$f(x,y)=\int(1-e^{-x}\sin y)dx+h(y) \to f(x,y)=x+e^{-x}\sin y+h(y)$$

باید داشته باشیم $f_y=N$ یعنی $e^{-x}\cos y+h'(y)=e^{-x}\cos y$ که نتیجه می دهد $h(y)=c$

یعنی $f(x,y)=x+e^{-x}\sin y+c$ و جواب معادله عبارت است از : $\boxed{x+e^{-x}\sin y+c=0}$

پاسخ سوال۳ : این معادله، یک معادله مرتبه دوم فاقد y است. با تغییر متغیر $y'=u$ داریم : $u'-\frac{2}{x}u=\frac{1}{x^2}u^2$

این معادله به دو روش قابل حل است.

روش اول (معادله برنولی) : آن را به صورت $\frac{u'}{u^2}+\frac{2}{x}\times\frac{-1}{u}=\frac{1}{x^2}$ می‌نویسیم. اکنون از تغییر متغیر $v=\frac{-1}{u}$ استفاده می‌کنیم و به معادله مرتبه اول خطی $v'+\frac{2}{x}v=\frac{1}{x^2}$ می رسیم. داریم : $\mu=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=x^2$ و در نتیجه :

$$v=\frac{1}{x^2}(c+\int x^2(\frac{1}{x^2})dx)=\frac{1}{x^2}(c+\int dx)=\frac{1}{x^2}(c+x) \quad\to\quad v=\frac{c+x}{x^2} \to \quad u=y'=\frac{-x^2}{c+x}$$

روش دوم (معادله همگن) : آن را به صورت $u'=2(\frac{u}{x})+(\frac{u}{x})^2$ می‌نویسیم. اکنون از تغییر متغیر $u=xv$ استفاده می‌کنیم و به معادله جدایی‌پذیر $v+x\frac{dv}{dx}=2v+v^2 \to \frac{dv}{v(1+v)}=\frac{dx}{x}$ می رسیم. داریم :

$$\int \frac{dv}{v(۱+v)} = \int \frac{dx}{x} \to \ln\frac{v}{۱+v} = \ln(Ax) \to \frac{v}{۱+v} = Ax \to v = \frac{Ax}{۱-Ax} = \frac{-x}{c+x} \to u = y' = \frac{-x^۲}{c+x}$$

و در نهایت داریم :

$$y = \int \frac{-x^۲}{c+x}dx = \int (-x+c-\frac{c^۲}{c+x})dx \to \boxed{y = -\frac{x^۲}{۲} + cx - c^۲\ln(c+x) + c_۱}$$

پاسخ سوال۴ : ابتدا معادله همگن نظیر این معادله را حل می‌کنیم. معادله مشخصه برابر است با $m^۲+۴m+۳=۰$ که دو ریشه حقیقی و متمایز $m_۱=-۱\,,\ m_۲=-۳$ دارد. پس جواب معادله همگن عبارت است از : $y_h = c_۱e^{-x} + c_۲e^{-۳x}$

اکنون جواب خصوصی معادله همگن را به صورت $y_p = axe^{-x} + A\sin x + B\cos x$ حدس می زنیم.

$$y'_p = -axe^{-x} + ae^{-x} + A\cos x - B\sin x \quad , \quad y''_p = axe^{-x} - ۲ae^{-x} - A\sin x - B\cos x$$

بعد از جایگذاری در معادله خواهیم داشت :

$$۲axe^{-x} + (۲A-۴B)\sin x + (۴A+۲B)\cos x = -۲e^{-x} - ۲\sin x$$

پس باید داشته باشیم $۴A+۲B=۰\ ,\ ۲A-۴B=-۲\ ,\ -۲a=-۲$ که نتیجه می دهد $a=-۱\ ,\ A=\frac{-۱}{۵}\ ,\ B=\frac{۲}{۵}$

جواب خصوص برابر $y_p = -xe^{-x} - \frac{۱}{۵}\sin x + \frac{۲}{۵}\cos x$ و جواب عمومی معادله عبارت است از :

$$\boxed{y_g = (c_۱ - x)e^{-x} + c_۲e^{-۳x} - \frac{۱}{۵}\sin x + \frac{۲}{۵}\cos x}$$

پاسخ سوال۵ : ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های داده را می‌نویسیم. داریم :

$$y' = \frac{۳۰}{(cx+۳۰)^۲} \to y' = \frac{۳۰}{x^۲} \times \frac{x^۲}{(cx+۳۰)^۲} = \frac{۳۰}{x^۲} \times y^۲ \to y' = \frac{۳۰y^۲}{x^۲}$$

بنابر این، معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های قائم بر دسته منحنی داده شده عبارت است از : $y' = -\frac{x^۲}{۳۰y^۲}$

این معادله، یک معادله دیفرانسیل جدایی‌پذیر است :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^۲}{۳۰y^۲} \to ۳۰y^۲dy = -x^۲dx$$

$$\to \int ۳۰y^۲dy = -\int x^۲dx \to ۱۰y^۳ = -\frac{۱}{۳}x^۳ + a \to \boxed{۳۰y^۳ + x^۳ = ۳a}$$