



دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی

گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۳/۹/۱

وقت : ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

امتحان میان ترم درس معادلات دیفرانسیل (گروه بهانهک)
نیمسال (اول / دوم) سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳

توجه : از نوشتن با مداد خودداری نمائید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

نمره ۱۵

سوال ۱ - معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$y' = \frac{2x - y - 2}{x - y - 3}$$

نمره ۱۵

سوال ۲ - معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$\cos y dy - (\sin y - e^x) dx = 0$$

نمره ۱۵

سوال ۳ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را تعیین کنید.

$$x^2 y'' = 2xy' + (y')^2$$

سوال ۴ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش ضرایب نامعین بدست آورید : ۲۰ نمره

$$y'' + 4y' + 3y = -2e^{-x} - 2\sin x$$

نمره ۱۵

سوال ۵ - مسیرهای قائم بر دسته منحنی های زیر را بیابید.

$$y = \frac{x}{cx + 30}$$

موفق باشید

پاسخ سوال ۱: روش اول:

معادله را به صورت $(2x - y - 2)dx + (-x + y + 3)dy = 0$ می‌نویسیم.

این معادله یک معادله کامل است و داریم: $\int (2x - y - 2)dx = x^2 - xy - 2y$, $\int (-x + y + 3)dy = -xy + \frac{1}{2}y^2 + 3y$

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy - 2x + 3y = c$$

بنابر این، جواب معادله عبارت است از:

روش دوم:

ابتدا دستگاه معادله $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$ را حل می‌کنیم و به جواب $\begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$ می‌رسیم.

اکنون از تغییر متغیر $\begin{cases} x = u - 1 \\ y = v - 4 \end{cases}$ استفاده می‌کنیم.

به یک معادله همگن رسیده‌ایم. از تغییر متغیر $v = uw$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$w + u \frac{dw}{du} = \frac{2u - uw}{u - uw} = \frac{2 - w}{1 - w} \rightarrow u \frac{dw}{du} = \frac{2 - w}{1 - w} - w = \frac{2 - 2w + w^2}{1 - w} \rightarrow \frac{1 - w}{2 - 2w + w^2} dw = \frac{1}{u} du \rightarrow \int \frac{1 - w}{2 - 2w + w^2} dw = \int \frac{1}{u} du$$

$$\rightarrow \frac{-1}{2} \ln(2 - 2w + w^2) = \ln(cu) \rightarrow (cu)^2 (2 - 2w + w^2) = 1 \rightarrow 2u^2 - 2v + v^2 = c_0$$

$$\rightarrow 2(x+1)^2 - 2(x+1)(y+4) + (y+4)^2 = c_0 \rightarrow 2x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 6y = c_1$$

پاسخ سوال ۲: داریم $M = -\sin y + e^x$, $N = \cos y$ و در نتیجه $M_y = -\cos y$, $N_x = 0$

چون $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-\cos y - 0}{\cos y} = -1$ یک تابع مستقل از y است پس عامل انتگرال‌ساز یک متغیره $\mu = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$

وجود دارد و معادله $(1 - e^{-x} \sin y)dx + e^{-x} \cos y dy = 0$ یک معادله کامل است.

$$f(x, y) = \int (1 - e^{-x} \sin y)dx + h(y) \rightarrow f(x, y) = x + e^{-x} \sin y + h(y)$$

باید داشته باشیم $f_y = N$ یعنی $e^{-x} \cos y + h'(y) = e^{-x} \cos y$ که نتیجه می‌دهد $h(y) = c$

$$x + e^{-x} \sin y + c = 0$$

یعنی $f(x, y) = x + e^{-x} \sin y + c$ و جواب معادله عبارت است از:

پاسخ سوال ۳: این معادله، یک معادله مرتبه دوم فاقد y است. با تغییر متغیر $y' = u$ داریم:

$$u' - \frac{2}{x}u = \frac{1}{x^2}u^2$$

این معادله به دو روش قابل حل است.

روش اول (معادله برنولی): آن را به صورت $\frac{u'}{u^2} + \frac{2}{x} \times \frac{-1}{u} = \frac{1}{x^2}$ می‌نویسیم. اکنون از تغییر متغیر $v = \frac{-1}{u}$ استفاده می‌کنیم و به معادله

مرتبه اول خطی $v' + \frac{2}{x}v = \frac{1}{x^2}$ می‌رسیم. داریم: $\mu = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = x^2$ و در نتیجه:

$$v = \frac{1}{x^2} (c + \int x^2 (\frac{1}{x^2}) dx) = \frac{1}{x^2} (c + \int dx) = \frac{1}{x^2} (c + x) \rightarrow v = \frac{c+x}{x^2} \rightarrow u = y' = \frac{-x^2}{c+x}$$

روش دوم (معادله همگن): آن را به صورت $u' = 2(\frac{u}{x}) + (\frac{u}{x})^2$ می‌نویسیم. اکنون از تغییر متغیر $u = xv$ استفاده می‌کنیم و به معادله

$$جدایی‌پذیر $v + x \frac{dv}{dx} = 2v + v^2 \rightarrow \frac{dv}{v(1+v)} = \frac{dx}{x}$ می‌رسیم. داریم:$$

$$\int \frac{dv}{v(1+v)} = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \ln \frac{v}{1+v} = \ln(Ax) \rightarrow \frac{v}{1+v} = Ax \rightarrow v = \frac{Ax}{1-Ax} = \frac{-x}{c+x} \rightarrow u = y' = \frac{-x^2}{c+x}$$

$$y = \int \frac{-x^2}{c+x} dx = \int (-x+c - \frac{c^2}{c+x}) dx \rightarrow y = -\frac{x^2}{2} + cx - c^2 \ln(c+x) + c_1 \quad \text{و در نهایت داریم:}$$

پاسخ سوال ۴: ابتدا معادله همگن نظیر این معادله را حل می‌کنیم. معادله مشخصه برابر است با $m^2 + 4m + 3 = 0$ که دو ریشه حقیقی

و متمایز $m_1 = -1$, $m_2 = -3$ دارد. پس جواب معادله همگن عبارت است از:

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

اکنون جواب خصوصی معادله همگن را به صورت $y_p = axe^{-x} + A \sin x + B \cos x$ حدس می‌زنیم.

$$y'_p = -axe^{-x} + ae^{-x} + A \cos x - B \sin x, \quad y''_p = axe^{-x} - 2ae^{-x} - A \sin x - B \cos x$$

بعد از جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$2axe^{-x} + (2A - 4B) \sin x + (4A + 2B) \cos x = -2e^{-x} - 2 \sin x$$

پس باید داشته باشیم $4A + 2B = 0$, $2A - 4B = -2$, $-2a = -2$ که نتیجه می‌دهد $a = -1$, $A = \frac{-1}{5}$, $B = \frac{2}{5}$

جواب خصوص برابر $y_p = -xe^{-x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x$ و جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$y_g = (c_1 - x)e^{-x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x$$

پاسخ سوال ۵: ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های داده را می‌نویسیم. داریم:

$$y' = \frac{30}{(cx+30)^2} \rightarrow y' = \frac{30}{x^2} \times \frac{x^2}{(cx+30)^2} = \frac{30}{x^2} \times y^2 \rightarrow y' = \frac{30y^2}{x^2}$$

بنابر این، معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های قائم بر دسته منحنی داده شده عبارت است از:

$$y' = -\frac{x^2}{30y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{30y^2} \rightarrow 30y^2 dy = -x^2 dx$$

این معادله، یک معادله دیفرانسیل جدایی‌پذیر است:

$$\rightarrow \int 30y^2 dy = -\int x^2 dx \rightarrow 10y^3 = -\frac{1}{3}x^3 + a \rightarrow 30y^3 + x^3 = 3a$$