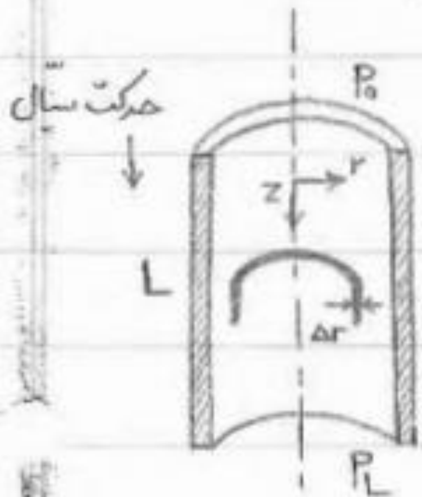
دانشگاه صنعتی شاهرود

جریان در لوله مدور – جریان در حلقه – جریان در دوسیال امتزاج ناپذیر

جریان در لوله مدور

فرض : پایدار - جریان لایه‌ای (تک جهتی) - تراکم ناپذیر - سیال نیوتنی .



در مختصات استوانه‌ای $\quad V_z = V_z(r) \quad V_\theta = V_r = 0$

عوامل موثر در حرکت سیال : اختلاف فشار - نیروی ثقل

بسته به صورت مسئله می توان فقط یکی از این عوامل را داشت. مثلاً اگر افقی باشد، فقط

اختلاف فشار وجود دارد.

$$(2\pi r\tau_{rz})\big|_r \cdot L - (2\pi r\tau_{rz})\big|_{r+\Delta r} \cdot L + 2\pi r\Delta r P_0 - 2\pi r\Delta r P_L$$

$$+\rho 2\pi r\Delta r L g = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2\pi L\Delta r} \lim_{\Delta r \to 0} \frac{(r\tau_{rz})|_{r+\Delta r} - (r\tau_{rz})|_r}{\Delta r} = \frac{r(P_0 - P_L)}{L} + r\rho g = r\left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)$$

$$\xrightarrow{\int} \tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)\frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}$$

$$\frac{dV_z}{dr} = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2L\mu} + \frac{\rho g}{2\mu}\right) r \xrightarrow{\int} V_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{4L\mu} + \frac{\rho g}{4\mu}\right) r^2 + C_2$$

$$\text{B.C.2} : \; r = R \;\rightarrow\; V_z = 0 \;\rightarrow\; C_2 = \left(\frac{P_0 - P_L}{4L\mu} + \frac{\rho g}{4\mu}\right) R^2$$

$$\rightarrow \; V_z = \overbrace{\left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)\left(\frac{R^2}{4\mu}\right)} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g = (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)\,\frac{1}{L}$$

فشار تغییر یافته
(modified pressure)

$$\bar{V}_z = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R v_z\, r\,dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta \to \pi R^2} = \frac{\overbrace{P_0 - P_L}^{\text{فشار تغییر یافته}}}{8\mu L} R^2 = \frac{1}{2} v_z\,(max)$$

سرعت حجمی => صورت

دبی جرمی $\dot{W} = \rho\, \bar{V}_z\, \pi R^2 = \frac{\pi (P_0 - P_L) R^4 \rho}{8\mu L}$ (هاگن پوزول)

مفهوم ریاضی جریان آرام در این مثال :

شرط آرام بودن : $Re = \frac{\overset{\text{قطر}}{D}\, \bar{V}_z\, \rho}{\mu} < 2100$

این نتیجهٔ نسبتاً مشهور را **معادلهٔ هِیگن-پوئازوی**[2] می‌نامند. این معادله، همراه‌با داده‌های تجربی برای آهنگ جریان و اختلاف فشار اصلاح‌شده، برای تعیین ویسکوزیتهٔ سیالات در «ویسکوزیته‌سنج مویین» به‌کار می‌رود

https://www.aparat.com/v/i8oSK

گلیسرین ($CH_2OH \cdot CHOH \cdot CH_2OH$) در دمای ۲۶٫۵°C در لوله‌ای افقی به‌طول ۱ ft و قطر داخلی ۰٫۱in. جریان دارد. به‌ازای افت فشار ۴۰psi، آهنگ جریان حجمی w/ρ برابر است با: ۰٫۰۰۳۹۸ft³/min. چگالی گلیسرین در ۲۶٫۵°C برابر است با: ۱٫۲۶۱g/cm³ مطلوب است تعیین ویسکوزیتهٔ گلیسرین برحسب سانتی‌پوئاز و Pa · s، با استفاده از داده‌های جریان.

جدول و.۳ـ۲ ضریب‌های تبدیل برای کمیت‌هایی با ابعاد $F/L^{۲}$ یا $M/Lt^{۲}$ (فشار، شار اندازه‌حرکت).

کمیت برحسب این واحدها را درمقدارجدول ↓ / ضرب کنید تا به این واحدها تبدیل شود →	pa $(N/m^{۲})$ $(kg/m\cdot s^{۲})$	$dyne/cm^{۲}$ $(g/cm\cdot s^{۲})$	$poundals/ft^{۲}$ $(lb_m/ft\cdot s^{۲})$	$lb_f/ft^{۲}$	$lb_f/in^{۲}$ (psia)[الف]	atm	mm Hg	in. Hg
$pa = N/m^{۲} = kg/m\cdot s^{۲}$	۱	۱۰	$۶٫۷۱۹۷\times ۱۰^{-۱}$	$۲٫۰۸۸۶\times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۴۵۰۴\times ۱۰^{-۴}$	$۹٫۸۶۹۲\times ۱۰^{-۶}$	$۷٫۵۰۰۶\times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۹۵۳۰\times ۱۰^{-۴}$
$dyne/cm^{۲} = g/cm\cdot s^{۲}$	$۱۰^{-۱}$	۱	$۶٫۷۱۹۷\times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۰۸۸۶\times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۴۵۰۴\times ۱۰^{-۵}$	$۹٫۸۶۹۲\times ۱۰^{-۷}$	$۷٫۵۰۰۶\times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۹۵۳۰\times ۱۰^{-۵}$
$poundals/ft^{۲} = lb_m/ft^{۲}\cdot s^{۲}$	۱٫۴۸۸۲	$۱٫۴۸۸۲\times ۱۰^{۱}$	۱	$۳٫۱۰۸۱\times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۱۵۸۴\times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۴۶۸۷\times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۱۱۶۲\times ۱۰^{-۲}$	$۴٫۳۹۴۵\times ۱۰^{-۴}$
$lb_f/ft^{۲}$	$۴٫۷۸۸۰\times ۱۰^{۱}$	$۴٫۷۸۸۰\times ۱۰^{۲}$	۳۲٫۱۷۴۰	۱	$۶٫۹۴۴۴\times ۱۰^{-۳}$	$۴٫۷۲۵۴\times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۵۹۱۳\times ۱۰^{-۱}$	$۱٫۴۱۳۹\times ۱۰^{-۲}$
$lb_f/in.^{۲}$	$۶٫۸۹۴۷\times ۱۰^{۳}$	$۶٫۸۹۴۷\times ۱۰^{۴}$	$۴٫۶۳۳۰\times ۱۰^{۳}$	۱۴۴	۱	$۶٫۸۰۴۶\times ۱۰^{-۲}$	$۵٫۱۷۱۵\times ۱۰^{۱}$	۲٫۰۳۶۰
atm	$۱٫۰۱۳۳\times ۱۰^{۵}$	$۱٫۰۱۳۳\times ۱۰^{۶}$	$۶٫۸۰۸۷\times ۱۰^{۴}$	$۲٫۱۱۶۲\times ۱۰^{۳}$	۱۴٫۶۹۶	۱	۷۶۰	۲۹٫۹۲۱
mm Hg	$۱٫۳۳۳۲\times ۱۰^{۲}$	$۱٫۳۳۳۲\times ۱۰^{۳}$	$۸٫۹۵۸۸\times ۱۰^{۱}$	۲٫۷۸۴۵	$۱٫۹۳۳۷\times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۳۱۵۸\times ۱۰^{-۳}$	۱	$۳٫۹۳۷۰\times ۱۰^{-۲}$
in. Hg	$۳٫۳۸۶۴\times ۱۰^{۳}$	$۳٫۳۸۶۴\times ۱۰^{۴}$	$۲٫۲۷۵۶\times ۱۰^{۳}$	$۷٫۰۷۲۷\times ۱۰^{۱}$	$۴٫۹۱۱۶\times ۱۰^{-۱}$	$۳٫۳۴۲۱\times ۱۰^{-۲}$	۲۵٫۴۰۰	۱

الف) ترجیح این است که این واحد با صورت اختصاری «psia» (پوند بر اینچ مربع مطلق) یا «psig» (پوند بر اینچ مربع نسبی) نشان داده شود. فشار نسبی عبارت است از: فشار مطلق منهای فشار جو. گاهی فشار را برحسب «بار» ذکر می‌کنند؛ برای تبدیل از بار به پوندال، در $۱۰^{۵}$، و برای تبدیل از بار به اتمسفر در ۰٫۹۸۶۹۲ ضرب کنید.

$$\mu = \frac{\pi(p_\circ - p_L)R^۴}{۸(w/\rho)L} = \frac{\pi\left(۴۰\,\frac{\text{lb}_f}{\text{in.}^۲}\right)\left(۶{,}۸۹۴۷ \times ۱۰^۴\,\frac{\text{dyn/cm}^۲}{\text{lb}_f/\text{in.}^۲}\right)\left(۰{,}۰۵\ \text{in.} \times \frac{۱}{۱۲}\frac{\text{ft}}{\text{in.}}\right)^۴}{۸\left(۰{,}۰۰۳۹۸\,\frac{\text{ft}^۳}{\text{min}} \times \frac{۱}{۶۰}\frac{\text{min}}{\text{s}}\right)(۱\ \text{ft})}$$

$$= ۴{,}۹۲\ \text{g/cm}\cdot\text{s} = ۴۹۲\ \text{cp} = ۰{,}۴۹۲\ \text{Pa}\cdot\text{s}$$

تعیین شعاع مویینی ازطریق اندازه‌گیری جریان. یکی از روش‌های تعیین شعاع لولهٔ مویین، ازطریق اندازه‌گیری جریان مایع نیوتونی در لوله است. مطلوب است تعیین شعاع مویینی با استفاده از داده‌های زیر:

طول لولهٔ مویین $۵۰{,}۰۲\ \text{cm}$

ویسکوزیتهٔ سینماتیکی مایع $۴{,}۰۳ \times ۱۰^{-۵}\ \text{m}^۲/\text{s}$

چگالی مایع $۰{,}۹۵۵۲ \times ۱۰^۳\ \text{kg/m}^۳$

افت فشار در لولهٔ افقی $۴{,}۸۲۹ \times ۱۰^۵\ \text{Pa}$

آهنگ جریان جرمی در لوله $۲{,}۹۹۷ \times ۱۰^{-۳}\ \text{kg/s}$

$$w = \frac{\pi(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^4\rho}{8\mu L}$$

$$R = \sqrt[4]{\frac{8\mu L w}{\pi\rho\Delta\mathcal{P}}} = \sqrt[4]{\frac{8\nu L w}{\pi\Delta\mathcal{P}}}$$

$$R = \sqrt[4]{\frac{8(4.03 \times 10^{-5})(0.5002)(2.997 \times 10^{-3})}{(3.1416)(4.829 \times 10^{5})}}$$

$$= \sqrt[4]{3.186 \times 10^{-13}}$$

$$= 7.51 \times 10^{-4}\ \mathrm{m} = 7.51 \times 10^{-2}\ \mathrm{cm}$$

جریان در حلقه

حال مسئلهٔ دیگری درمورد جریان ویسکوز را در مختصات استوانه‌ای حل می‌کنیم که مسئلهٔ جریان محوری حالت‌پایای مایعی تراکم‌ناپذیر در ناحیهٔ حلقوی بین دو استوانهٔ هم‌محور به شعاع‌های κR و R، مطابق شکل ۲.۴ـ۱ است. این

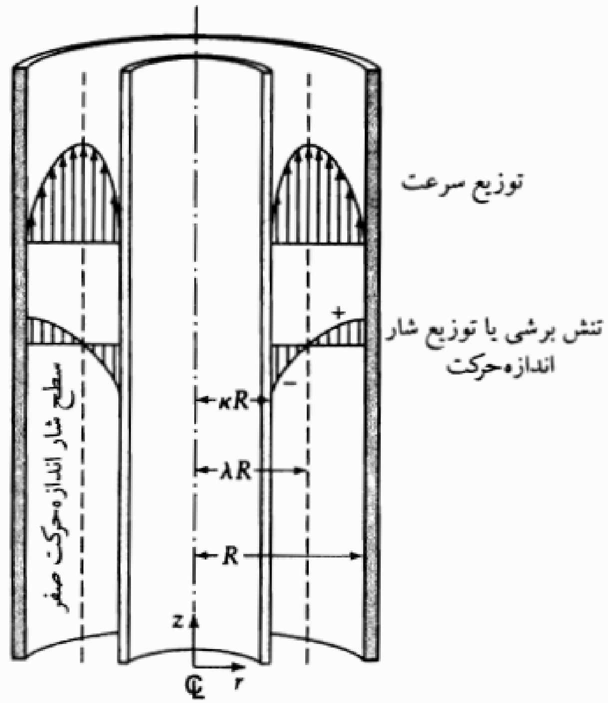
سیال در لوله به‌سمت بالا ـیعنی درجهتی مخالف با جهت نیروی گرانش‌ـ جریان دارد. همان فرض‌هایی را اختیار می‌کنیم که در بخش ۲.۳ اختیار کردیم: $v_z = v_z(r)$، $v_\theta = 0$، $v_r = 0$، و $p = p(z)$. حال وقتی موازنهٔ اندازه‌حرکت را روی لایهٔ استوانه‌ای نازکی از مایع می‌نویسیم، به معادلهٔ دیفرانسیل زیر می‌رسیم:

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left(\frac{(p_0 + \rho g 0) - (p_L + \rho g L)}{L}\right) r \equiv \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L}\right) r \qquad (۲.۴\text{ـ}۱)$$

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L}\right) r + \frac{C_1}{r} \qquad (۲.۴\text{ـ}۲)$$

ثابت C_1 را نمی‌توان بلافاصله تعیین کرد، زیرا درمورد شار اندازه‌حرکت در سطوح ثابت $r = \kappa R$ و $r = R$ هیچ اطلاعی نداریم. کل معلومات ما این است که در منحنی سرعت نقطهٔ ماکزیممی در یک صفحهٔ $r = \lambda R$ (که هنوز نامعلوم است) وجود دارد که به‌ازای آن شار اندازه‌حرکت صفر خواهد بود؛ یعنی:

$$0 = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L}\right)\lambda R + \frac{C_1}{\lambda R} \qquad (۳\_۴.۲)$$



شکل ۲.۴_۱ توزیع شار اندازه‌حرکت و توزیع سرعت برای جریان روبه بالا در حلقهٔ استوانه‌ای. توجه کنید که شار اندازه‌حرکت به‌ازای مقداری از r تغییر علامت می‌دهد که سرعت در آن مقدار ماکزیممی دارد.

وقتی این معادله را برای یافتن C_1 حل می‌کنیم و آن را در معادلهٔ (۲.۴_۲) قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\tau_{rz} = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R}{2L}\left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2\left(\frac{R}{r}\right)\right] \qquad (۴\_۴.۲)$$

اکنون قانون ویسکوزیتهٔ نیوتون، $\tau_{rz} = -\mu(dv_z/dr)$ را در معادلهٔ (۲.۴ـ۴) جایگزین می‌کنیم تا معادلهٔ دیفرانسیلی برای v_z به‌دست بیاوریم:

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R}{2\mu L}\left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2\left(\frac{R}{r}\right)\right] \qquad (۲.۴ـ۵)$$

با انتگرال‌گیری از این معادلهٔ دیفرانسیل تفکیک‌پذیر مرتبهٔ اول نتیجه می‌شود:

$$v_z = -\frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\lambda^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) + C_2\right] \qquad (۲.۴ـ۶)$$

حال دو ثابت انتگرال‌گیری، یعنی λ و C_2 را، با استفاده از شرط عدم‌لغزش روی هر مرز جامد، تعیین می‌کنیم:

(۲.۴ـ۷) شرط مرزی ۱: در $r = \kappa R$، داریم $v_z = 0$.

(۲.۴ـ۸) شرط مرزی ۲: در $r = R$ داریم $v_z = 0$.

با قرار دادن این شرایط مرزی در معادلهٔ (۲.۴ـ۶) یک دستگاه دومعادله‌ای نتیجه می‌شود:

$$0 = \kappa^2 - 2\lambda^2 \ln\kappa + C_2 \qquad 0 = 1 + C_2 \qquad (۲.۴ـ۹، ۱۰)$$

ثابت‌های λ و C_2 با حل این دستگاه به‌دست می‌آیند و داریم:

$$C_2 = -1 \qquad 2\lambda^2 = \frac{1-\kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \qquad (۲.۴ـ۱۱، ۱۲)$$

این عبارت‌ها را می‌توان در معادله‌های (۲.۴ـ۴) و (۲.۴ـ۶) قرار داد تا توزیع شار اندازه‌حرکت و توزیع سرعت[۱] به‌شرح زیر حاصل شود:

$$\boxed{\tau_{rz} = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R}{2L}\left[\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{1-\kappa^2}{2\ln(1/\kappa)}\left(\frac{R}{r}\right)\right]} \qquad (۲.۴ـ۱۳)$$

$$\boxed{v_z = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1-\kappa^2}{\ln(1/\kappa)}\ln\left(\frac{R}{r}\right)\right]} \qquad (۲.۴ـ۱۴)$$

با دانستن توزیع شار اندازه‌حرکت و توزیع سرعت، به‌دست آوردن سایر نتایج موردنظر کار ساده‌ای است:

۱. **سرعت ماکزیمم** برابر است با:

$$v_{z,\max} = v_z\Big|_{r=\lambda R} = \frac{(\mathcal{P}_۰ - \mathcal{P}_L)R^۲}{۴\mu L}[۱ - \lambda^۲(۱ - \ln \lambda^۲)] \qquad (۱۵\text{-}۴.۲)$$

که در آن $\lambda^۲$ از معادلهٔ (۲.۴-۱۲) به‌دست می‌آید.

۲. **سرعت متوسط** از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_۰^{۲\pi}\int_{\kappa R}^{R} v_z r dr d\theta}{\int_۰^{۲\pi}\int_{\kappa R}^{R} r dr d\theta} = \frac{(\mathcal{P}_۰ - \mathcal{P}_L)R^۲}{۸\mu L}\left[\frac{۱-\kappa^۴}{۱-\kappa^۲} - \frac{۱-\kappa^۲}{\ln(۱/\kappa)}\right] \qquad (۱۶\text{-}۴.۲)$$

۳. **آهنگ جریان جرمی** برابر است با: $w = \pi R^۲(۱-\kappa^۲)\rho\langle v_z \rangle$، یا:

$$w = \frac{\pi(\mathcal{P}_۰ - \mathcal{P}_L)R^۴\rho}{۸\mu L}\left[(۱-\kappa^۴) - \frac{(۱-\kappa^۲)^۲}{\ln(۱/\kappa)}\right] \qquad (۱۷\text{-}۴.۲)$$

آهنگ جریان حجمی در حلقه. حلقه‌ای افقی، به‌طول ۲۷ ft، شعاع داخلی ۰٫۴۹۵ in. و شعاع خارجی ۱٫۱ in. مفروض است. می‌خواهیم محلول آبی ۶۰٪ ساکاروز ($C_{12}H_{22}O_{11}$) با دمای ۲۰°C را با پمپ از این حلقه عبور دهیم. در این دما، چگالی محلول ۸۰٫۳ lb_m/ft^3 و ویسکوزیتهٔ آن ۱۳۶٫۸ $lb_m/ft \cdot hr$ است. وقتی اختلاف فشار به ۵٫۳۹ psi می‌رسد، آهنگ جریان حجمی محلول چه‌قدر است؟ ft^3/s

$$w = \frac{\pi(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^4\rho}{8\mu L}\left[(1-\kappa^4) - \frac{(1-\kappa^2)^2}{\ln(1/\kappa)}\right]$$

$$\kappa = 0.495/1.1 = 0.45$$

$$\mu = 136.8\ (\mathrm{lb}_m/\mathrm{ft{\cdot}hr})(1\ \mathrm{hr}/3600\mathrm{s}) = 3.80 \times 10^{-2}\ \mathrm{lb}_m/\mathrm{ft{\cdot}s}$$

جدول و.۳ـ۲ ضریب‌های تبدیل برای کمیت‌هایی با ابعاد $F/L^۲$ یا $M/Lt^۲$ (فشار، شار اندازه‌حرکت).

ضرب کنید تا کمیت برحسب این واحدها را در مقدار جدول ↓ به این واحدها تبدیل شود →	pa ($N/m^۲$) ($kg/m \cdot s^۲$)	$dyne/cm^۲$ ($g/cm \cdot s^۲$)	$poundals/ft^۲$ ($lb_m/ft \cdot s^۲$)	$lb_f/ft^۲$	$lb_f/in^۲$ (psia)[الف]	atm	mm Hg	in. Hg
$pa = N/m^۲ = kg/m \cdot s^۲$	۱	۱۰	$۶٫۷۱۹۷ \times ۱۰^{-۱}$	$۲٫۰۸۸۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۴۵۰۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۹٫۸۶۹۲ \times ۱۰^{-۶}$	$۷٫۵۰۰۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۹۵۳۰ \times ۱۰^{-۴}$
$dyne/cm^۲ = g/cm \cdot s^۲$	$۱۰^{-۱}$	۱	$۶٫۷۱۹۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۰۸۸۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۴۵۰۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۹٫۸۶۹۲ \times ۱۰^{-۷}$	$۷٫۵۰۰۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۹۵۳۰ \times ۱۰^{-۵}$
$poundals/ft^۲ = lb_m/ft^۲ \cdot s^۲$	۱٫۴۸۸۲	$۱٫۴۸۸۲ \times ۱۰^{۱}$	۱	$۳٫۱۰۸۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۱۵۸۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۴۶۸۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۱۱۶۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۴٫۳۹۴۵ \times ۱۰^{-۴}$
$lb_f/ft^۲$	$۴٫۷۸۸۰ \times ۱۰^{۱}$	$۴٫۷۸۸۰ \times ۱۰^{۲}$	۳۲٫۱۷۴۰	۱	$۶٫۹۴۴۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۴٫۷۲۵۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۵۹۱۳ \times ۱۰^{-۱}$	$۱٫۴۱۳۹ \times ۱۰^{-۲}$
$lb_f/in.^۲$	$۶٫۸۹۴۷ \times ۱۰^{۳}$	$۶٫۸۹۴۷ \times ۱۰^{۴}$	$۴٫۶۳۳۰ \times ۱۰^{۳}$	۱۴۴	۱	$۶٫۸۰۴۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۵٫۱۷۱۵ \times ۱۰^{۱}$	۲٫۰۳۶۰
atm	$۱٫۰۱۳۳ \times ۱۰^{۵}$	$۱٫۰۱۳۳ \times ۱۰^{۶}$	$۶٫۸۰۸۷ \times ۱۰^{۴}$	$۲٫۱۱۶۲ \times ۱۰^{۳}$	۱۴٫۶۹۶	۱	۷۶۰	۲۹٫۹۲۱
mm Hg	$۱٫۳۳۳۲ \times ۱۰^{۲}$	$۱٫۳۳۳۲ \times ۱۰^{۳}$	$۸٫۹۵۸۸ \times ۱۰^{۱}$	۲٫۷۸۴۵	$۱٫۹۳۳۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۳۱۵۸ \times ۱۰^{-۳}$	۱	$۳٫۹۳۷۰ \times ۱۰^{-۲}$
in. Hg	$۳٫۳۸۶۴ \times ۱۰^{۳}$	$۳٫۳۸۶۴ \times ۱۰^{۴}$	$۲٫۲۷۵۶ \times ۱۰^{۳}$	$۷٫۰۷۲۷ \times ۱۰^{۱}$	$۴٫۹۱۱۶ \times ۱۰^{-۱}$	$۳٫۳۴۲۱ \times ۱۰^{-۲}$	۲۵٫۴۰۰	۱

الف) ترجیح این است که این واحد با صورت اختصاری «psia» (پوند بر اینچ مربع مطلق) یا «psig» (پوند بر اینچ مربع نسبی) نشان داده شود. فشار نسبی عبارت است از: فشار مطلق منهای فشار جو. گاهی فشار را برحسب «بار» ذکر می‌کنند؛ برای تبدیل از بار به پوندال، در $۱۰^۵$، و برای تبدیل از بار به اتمسفر در ۰٫۹۸۶۹۲ ضرب کنید.

$$(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) = (5.39 \text{ psi})(4.6330 \times 10^3 \text{ poundals/ft}^2\text{/psi}) = 2.497 \times 10^4 \text{ lb}_m\text{/ft}\cdot\cdot\cdot\text{s}^2$$

$$R = 1.1 \text{ in.} = 1.1/12 \text{ ft}$$

$$\frac{w}{\rho} = \frac{(\pi)(2.497 \times 10^4)(1.1/12)^4}{(8)(3.80 \times 10^{-2})(27)} \left[(1 - (0.45)^4) - \frac{(1 - (0.45)^2)^2}{\ln(1/0.45)}\right]$$

$$= (0.49242)\left[(1 - 0.04101) - \frac{(1 - 0.2025)^2}{\ln(1/0.495)}\right]$$

$$= (0.6748)[0.1625] = 0.110 \text{ ft}^3\text{/s}$$

جریان دو سیال امتزاج ناپذیر مجاور هم

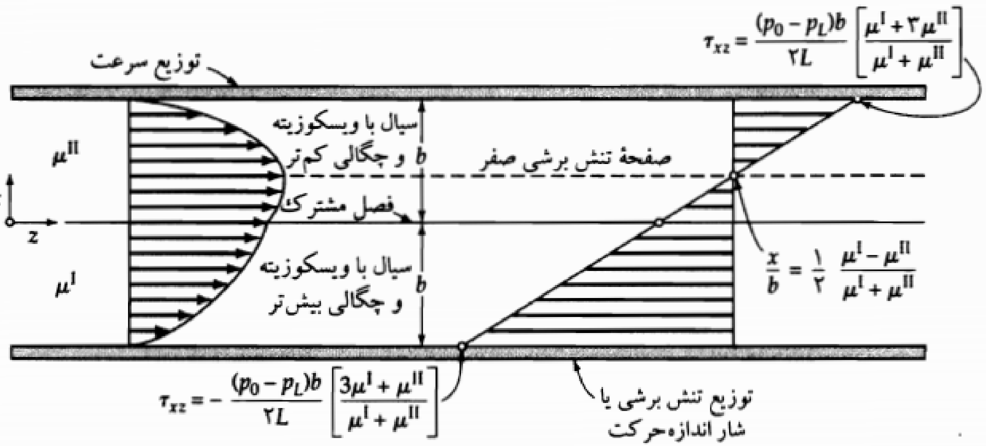
تأثیر دو مایع تراکم‌ناپذیر و امتزاج‌ناپذیر درامتداد z در یک شکاف افقی نازک به‌طول L و عرض W، تحت تأثیر گرادیان فشار افقی $(p_0 - p_L)/L$ جریان دارند. آهنگ جریان سیال طوری تنظیم می‌شود که نیمی از شکاف با سیال ۱ (که فاز چگال‌تر است) و نیم دیگر آن با سیال ۲ (که فاز کم‌چگال‌تر است) پر شود. جریان این سیال‌ها به‌اندازه‌ای آهسته است که هیچ ناپایداری رخ نخواهد داد؛ یعنی فصل‌مشترک دقیقاً صفحه‌ای می‌ماند. می‌خواهیم توزیع شار اندازه‌حرکت و توزیع سرعت را به‌دست آوریم.

موازنهٔ اندازه‌حرکت دیفرانسیلی به معادلهٔ دیفرانسیل زیر برای شار اندازه‌حرکت منتهی می‌شود:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{p_0 - p_L}{L} \qquad (۱\_۵.۲)$$

این معادله برای هردو فاز ۱ و ۲ به‌دست می‌آید. با انتگرال‌گیری برای دو ناحیه نتیجه می‌شود:

$$\tau_{xz}^{\mathrm{I}} = \left(\frac{p_\circ - p_L}{L}\right) x + C_1^{\mathrm{I}} \qquad \tau_{xz}^{\mathrm{II}} = \left(\frac{p_\circ - p_L}{L}\right) x + C_1^{\mathrm{II}} \qquad (۳،۲ـ۵.۲)$$



شکل ۲.۵ـ۱ جریان دو سیال امتزاج‌ناپذیر بین یک جفت صفحهٔ افقی تحت تأثیر گرادیان فشار.

بلافاصله می‌توان از یکی از شرایط مرزی، مثلاً پیوستگی شار اندازه‌حرکت τ_{xz} در سراسر فصل‌مشترک سیال‌ـسیال، استفاده کرد:

(۲.۵ـ۴) شرط مرزی ۱: در $x = 0$، داریم $\tau_{xz}^{\mathrm{I}} = \tau_{xz}^{\mathrm{II}}$.

این عبارت به ما می‌گوید که $C_1^{\mathrm{I}} = C_1^{\mathrm{II}}$؛ بنابراین اندیس بالا را حذف می‌کنیم و هردو ثابت انتگرال‌گیری را C_1 می‌نامیم.

وقتی قانون ویسکوزیتهٔ نیوتون را در معادله‌های (۲.۵ـ۲) و (۲.۵ـ۳) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$-\mu^{\mathrm{I}}\frac{dv_z^{\mathrm{I}}}{dx} = \left(\frac{p_\circ - p_L}{L}\right) x + C_1 \qquad -\mu^{\mathrm{II}}\frac{dv_z^{\mathrm{II}}}{dx} = \left(\frac{p_\circ - p_L}{L}\right) x + C_1 \qquad (۶،۵ـ۵.۲)$$

از این دو معادله انتگرال می‌گیریم؛ درنتیجه:

$$v_z^{\mathrm{I}} = -\left(\frac{p_\circ - p_L}{2\mu^{\mathrm{I}}L}\right) x^2 - \frac{C_1}{\mu^{\mathrm{I}}}x + C_2^{\mathrm{I}} \qquad v_z^{\mathrm{II}} = -\left(\frac{p_\circ - p_L}{2\mu^{\mathrm{II}}L}\right) x^2 - \frac{C_1}{\mu^{\mathrm{II}}}x + C_2^{\mathrm{II}} \qquad (۸،۷ـ۵.۲)$$

سه ثابت انتگرال‌گیری را می‌توان با استفاده از شرط‌های مرزی عدم‌لغزش زیر تعیین کرد:

(۲.۵ـ۹) شرط مرزی ۲: در $x = 0$، داریم $v_z^{\mathrm{I}} = v_z^{\mathrm{II}}$.

(۲.۵ـ۱۰) شرط مرزی ۳: در $x = -b$، داریم $v_z^{\mathrm{I}} = 0$.

(۲.۵ـ۱۱) شرط مرزی ۴: در $x = +b$، داریم $v_z^{\mathrm{II}} = 0$.

وقتی این سه شرط مرزی اعمال شود، یک دستگاه سه‌معادله‌ای برای ثابت‌های انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید:

(۲.۵ـ۱۲) از شرط مرزی ۲: $C_2^{\mathrm{I}} = C_2^{\mathrm{II}}$

(۱۳ـ۵.۲) از شرط مرزی ۳:
$$0 = -\left(\frac{p_0 - p_L}{2\mu^{\mathrm{I}} L}\right) b^2 + \frac{C_1}{\mu^{\mathrm{I}}} b + C_2^{\mathrm{I}}$$

(۱۴ـ۵.۲) از شرط مرزی ۴:
$$0 = -\left(\frac{p_0 - p_L}{2\mu^{\mathrm{II}} L}\right) b^2 + \frac{C_1}{\mu^{\mathrm{II}}} b + C_2^{\mathrm{II}}$$

از این سه معادله نتیجه می‌شود:

(۱۵ـ۵.۲، ۱۶)
$$C_1 = -\frac{(p_0 - p_L) b}{2L}\left(\frac{\mu^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right) \qquad C_2^{\mathrm{I}} = +\frac{(p_0 - p_L) b^2}{2\mu^{\mathrm{I}} L}\left(\frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right) = C_2^{\mathrm{II}}$$

توزیع‌های سرعت و شار اندازه‌حرکت حاصل عبارت‌اند از:

(۱۷ـ۵.۲)
$$\boxed{\tau_{xz} = \frac{(p_0 - p_L) b}{L}\left[\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right)\right]}$$

(۱۸ـ۵.۲)
$$\boxed{v_z^{\mathrm{I}} = \frac{(p_0 - p_L) b^2}{2\mu^{\mathrm{I}} L}\left[\left(\frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right) + \left(\frac{\mu^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right)\left(\frac{x}{b}\right) - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right]}$$

(۱۹ـ۵.۲)
$$\boxed{v_z^{\mathrm{II}} = \frac{(p_0 - p_L) b^2}{2\mu^{\mathrm{II}} L}\left[\left(\frac{2\mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right) + \left(\frac{\mu^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right)\left(\frac{x}{b}\right) - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right]}$$

سرعت متوسط در هر لایه را می‌توان به‌دست آورد و نتایج عبارت‌اند از:

$$\langle v_z^{\mathrm{I}} \rangle = \frac{۱}{b} \int_{-b}^{۰} v_z^{\mathrm{I}} dx = \frac{(p_۰ - p_L) b^۲}{۱۲ \mu^{\mathrm{I}} L} \left(\frac{۷\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}} \right) \qquad (۲۰\_۵.۲)$$

$$\langle v_z^{\mathrm{II}} \rangle = \frac{۱}{b} \int_{۰}^{b} v_z^{\mathrm{II}} dx = \frac{(p_۰ - p_L) b^۲}{۱۲ \mu^{\mathrm{II}} L} \left(\frac{\mu^{\mathrm{I}} + ۷\mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}} \right) \qquad (۲۱\_۵.۲)$$

یک کانال افقی بطول 1/5m و ارتفاع ۳۰ سانتی متر
نصفش از مایعی با ویسکوزیته ۰/۷P و نصف دیگر
از مایعی با ویسکوزیته ۰/۶P پر شده است. این کانال افقی
تحت تأثیر اختلاف فشار افقی ۰/۸Pa جریان در آن ایجاد شده است
سرعت جریان مایع‌ها از انتهای کانال در ارتفاع 5cm
و 25cm چقدر است؟