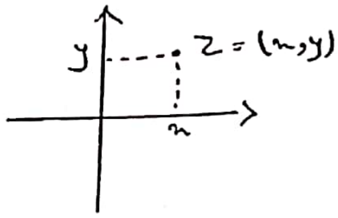
فصل اول: دستگاه اعداد مختلط

تعریف ۱: فرض کنید $\mathbb{R}$ دستگاه اعداد حقیقی باشد. دستگاه اعداد مختلط را با نماد $\mathbb{C}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{C}=\mathbb{R}^2=\{(x,y)\,;\,x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}$$



تذکر ۱: توجه دارید که هر $x\in\mathbb{R}$ را می‌توان به صورت زوج مرتب $(x,0)$ نمایش داد و چون $(x,0)\in\mathbb{C}$ پس $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$.

در ادامه اعمال جبری را در دستگاه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲ (اعمال جمع و ضرب): به ازای هر $z_1=(x_1,y_1)$ و $z_2=(x_2,y_2)$ در مجموعه $\mathbb{C}$، z_1+z_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

به علاوه $z_1.z_2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$z_1.z_2=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)$$

تعریف ۳: معکوس یک عدد مختلط غیر صفر $z=(x,y)$ در $\mathbb{C}$ را با z^{-1} (یا $\frac{1}{z}$) نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

توجه دارید که طبق تعریف ضرب دو عدد مختلط $z.z^{-1}$ به صورت زیر است:

$$z \cdot z^{-1} = (x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$
$$= \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$$
$$= (1, 0)$$
$$= 1$$

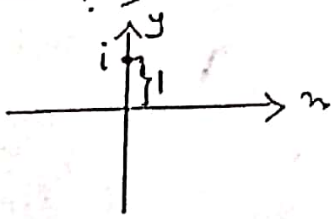
تعریف ۴: فرض کنید $z_1=(x_1,y_1)\in\mathbb{C}$ و $z_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{C}-\{0\}$؛ عدد z_1 بر z_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = (x_1, y_1) \cdot \left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}, \frac{-y_2}{x_2^2+y_2^2}\right).$$

تعریف ۵: قسمت حقیقی و موهومی عدد مختلط $z=(x,y)$ را به ترتیب با نماد $Re(z)$ و $Im(z)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Re(z) = x \quad , \quad Im(z) = y$$

تعریف ۶: عدد موهومی محض را در دستگاه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ با نماد i و به شکل $i=(0,1)$ تعریف می‌کنیم.



تذکر ۲: توجه کنید که اگر $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ آنگاه داریم:

$$x+iy = (x,0) + (0,1)\cdot(y,0)$$
$$= (x,0) + (0\times y - 1\times 0, 0\times 0 + 1\times y)$$
$$= (x,0) + (0,y) = (x,y)$$

لذا می‌توان) عدد مختلط $z=(x,y)$ را به صورت $z=x+iy$ نیز نمایش داد.

مثال ۱: نشان دهید که $i^2=-1$ و $i^3=-i$

حل: $i^2=(0,1).(0,1)=(0\times 0-1\times 1\,,\,0\times 1+1\times 0)=(-1,0)=-1$

$i^3=i^2.i=-i$

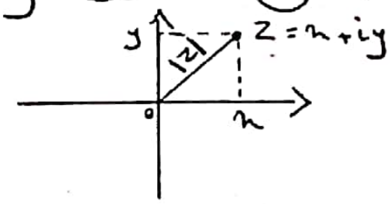
مثال ۲: عدد $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}+2i+3$ را به شکل $x+iy$ بنویسید.

حل: $\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+2i+i^2}{2}=\frac{2i}{2}=i$

$$z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}+2i+3=i^{100}+2i+3=(i^2)^{50}+2i+3$$
$$=(-1)^{50}+2i+3=2i+4$$

تعریف ۷: قدر مطلق عدد مختلط $z=x+iy$ را با نماد $|z|$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

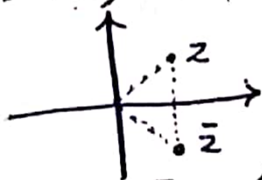
$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$



تذکر ۳: در واقع $|z|$ فاصله نقطه z تا مبدا مختصات می‌باشد و همواره $|z|\in\mathbb{R}$.

تعریف ۵: مزدوج عدد مختلط $z=x+iy$ را با نماد $\bar{z}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\bar{z}=x-iy$



مثال ۳: با توجه به تعریف بدیهی است که $Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$ و $Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

مثال ۴: نشان دهید که:

1) $\bar{\bar{z}}=z$, $z\in\mathbb{C}$

۲) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ ، و $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

۳) $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$ ، و $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

۴) $z\bar{z}=|z|^2$ ، و $z \in \mathbb{C}$

۵) $z^{-1}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ ، و $z \in \mathbb{C}-\{0\}$

۶) $|z|=|\bar{z}|=|-z|=|-\bar{z}|$ ، و $z \in \mathbb{C}$

۷) $\overline{z_1 \cdot z_2}=\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ، و $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

۸) $\overline{z^{-1}}=\bar{z}^{-1}$ ، و $z \in \mathbb{C}-\{0\}$

۹) $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$ ، و $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

۱۰) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ، و $z_1 \in \mathbb{C}$ ، $z_2 \in \mathbb{C}-\{0\}$

۱۱) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ ، و $z_1 \in \mathbb{C}$ ، $z_2 \in \mathbb{C}-\{0\}$

۱۲) $|Re(z)| \leqslant |z|$ ، و $z \in \mathbb{C}$

۱۳) $|Im(z)| \leqslant |z|$ ، و $z \in \mathbb{C}$

۱۴) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$ ، و $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

حل: موارد ۴ و ۱۴ را به عنوان نمونه اثبات می‌کنیم:

اثبات ۴: $z=x+iy \Rightarrow \bar{z}=x-iy$ ، و $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-ixy+ixy-i^2y^2=x^2+y^2$$
$$=|z|^2$$

اثبات ۱۴:

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}$$

$$=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2$$

$$=|z_1|^2+z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}+|z_2|^2$$

$$=|z_1|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2$$

$$\leqslant |z_1|^2+2|z_1\bar{z}_2|+|z_2|^2$$

$$=|z_1|^2+2|z_1||\bar{z}_2|+|z_2|^2$$

$$=|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2$$

$$=(|z_1|+|z_2|)^2$$

$$\Rightarrow \quad |z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

تذکر ۴: توجه کنید که برخی از روابطی که در دستگاه اعداد حقیقی برقرارند در دستگاه اعداد مختلط برقرار نیستند. به عنوان مثال رابطهٔ $|z|^2=z^2$ برای هر $z\in\mathbb{R}$ برقرار است اما این رابطه در حالت کلی برای هر $z\in\mathbb{C}$ برقرار نیست. کافی است قرار دهیم $z=i$ در این صورت داریم:

$$z^2=i^2=-1 \quad \text{و} \quad |z|^2=1^2=1$$

ولذا $z^2\neq|z|^2$

مثال ۵: مکان هندسی نقاطی را بیابید که در $\mathbb{C}$ در رابطه $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}$ صدق می‌کنند.

حل:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}$$

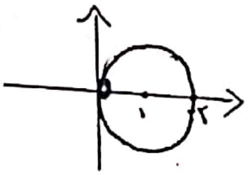
$$=\frac{1}{x+iy}\times\frac{x-iy}{x-iy}$$

$$=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\implies\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\implies x^2+y^2-2x=0$$

$$(x^2-2x+1)-1+y^2=0\implies(x-1)^2+(y-0)^2=1$$



نقاط روی دایره به مرکز $(1,0)$ و شعاع 1 هستند.

مثال ۶: مکان هندسی نقاطی را در $\mathbb{C}$ بیابید که در معادله $|z-1|=|z+i|$ صدق می‌کنند.

حل: $z=x+iy\in\mathbb{C}$

$$|z-1|=|z+i|\implies|x+iy-1|=|x+iy+i|$$

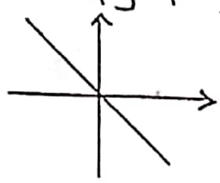
$$|(x-1)+iy|=|x+(y+1)i|$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$(x-1)^2+y^2=x^2+(y+1)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2+2y+1$$

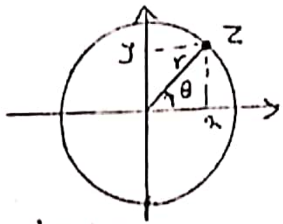
$$y=-x$$



تعریف ۹: عدد مختلط $z=x+iy$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $r=|z|$ و θ زاویه بین شعاع حامل نقط

با جهت مثبت x ها باشد. در این صورت با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



بنابراین داریم:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

این نمایش عدد مختلط z را نمایش قطبی آن می‌نامیم.

تعریف ۱۰: در ادامه خواهیم دید که عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ چه خواص یک عبارت نمایی را دارد و بنابراین در ادامه آن را به شکل نمایی $e^{i\theta}$ نمایش می‌دهیم. لذا:

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

تذکر ۵: قرارداد می‌کنیم که اگر $z=0$ آنگاه $r=\theta=0$.

تعریف ۱۱: آرگومان اصلی عدد $z=x+iy$ را با نماد $Arg(z)$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$Arg(z) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & , x>0 \\ \pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & , x<0 \text{ و } y\geq 0 \\ -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & , x<0 \text{ و } y<0 \\ \frac{\pi}{2} & , x=0 \text{ و } y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & , x=0 \text{ و } y<0 \\ 0 & , x=y=0 \end{cases}$$

تذکر ۶: توجه کنید که همواره $-\pi < Arg(z) \leq \pi$ و بنابراین نمایش قطبی عدد $z=x+iy$ به شکل منحصر به فرد $z=re^{i\theta}$ خواهد بود.

تعریف ۱۲: آرگومان عدد z را با نماد $arg(z)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$arg(z) = \{Arg(z) + 2k\pi \ : k \in \mathbb{Z}\}$$

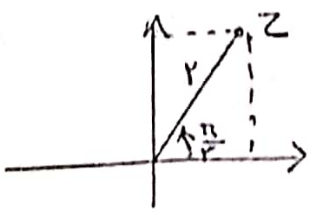
تذکر ۷: توجه داریم که $arg(z)$ مجموعه‌ای از زوایا و $Arg(z)$ یک زاویه است.

مثال ۷: عدد $z=1+i\sqrt{3}$ را به صورت قطبی بنویسید.

حل:

$$r = |z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$-\pi < \theta = Arg(z) \leq \pi \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$$



$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

مثال ۸: نشان دهید اگر $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ آنگاه $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

حل:

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = \big(r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\big)\big(r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\big)$$

$$= r_1 r_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + i r_1 r_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 + i r_1 r_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2$$

$$+ r_1 r_2 i^2 \sin\theta_1 \cos\theta_2$$

$$= r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cos\theta_2) + i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2)\right]$$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

تذکر ۸: با توجه به مثال قبل داریم:

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

اما این رابطه در حالت کلی برای آرگومان اصلی برقرار نیست. کافی است فرض کنیم $z_1 = -1$ و $z_2 = i$. در این صورت $Arg(z_1) = \theta_1 = \pi$ و $Arg(z_2) = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

ولذا:

$$Arg(z_1) + Arg(z_2) = \frac{3\pi}{2}$$

در حالی که $\theta = \frac{3\pi}{2}$ آرگومان اصلی نیست زیرا در بازه $(-\pi, \pi]$ قرار ندارد. توجه داریم که:

$$Arg(z_1 z_2) = Arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

قضیه ۱ (فرمول دموآور): فرض کنید $n \in \mathbb{Z}$ و $z = re^{i\theta}$. در این صورت:

$$z^n = r^n e^{i(n\theta)} = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

مثال ۹: حاصل $(1+i)^{100}$ را بیابید.

$$z = 1+i \Rightarrow |z| = \sqrt{2} \quad , \theta = Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$z = re^{i\theta} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z^{100} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{100} = 2^{50} e^{i(25\pi)}$$

$$\Rightarrow z^{100} = 2^{50}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi) = 2^{50}(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{50}$$

مثال ۱۰: با توجه به فرمول دموآور $\cos(3\theta)$ و $\sin(3\theta)$ را برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بنویسید.

حل:

$$(e^{i\theta})^3 = e^{i(3\theta)} \Longrightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta \quad (I)$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta(i^2\sin^2\theta) + i^3\sin^3\theta$$

$$= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + (3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)i \quad (II)$$

$$\xrightarrow{I \text{ و } II} \begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \end{cases}$$

با جایگذاری $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ و $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ در روابط فوق بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \end{cases}$$

قضیه ۲ (اساسی جبر): اگر $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ و $a_i \in \mathbb{C}$ (به ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots, n$) آنگاه f دارای دقیقاً n ریشه در $\mathbb{C}$ می‌باشد.

تذکر ۹: اگر z_0 ، ... و z_{n-1} ریشه‌های چندجمله‌ای درجه n ، f باشد آنگاه داریم:

$$f(z) = a_n (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})$$

مثال ۱۱: معادله $z^2 + 1 = 0$ دارای دقیقاً دو ریشه i و $-i$ در $\mathbb{C}$ می‌باشد.

- ریشه‌های n ام یک عدد مختلط:

فرض کنید $w = x + iy$. هدف یافتن مقادیر $w^{\frac{1}{n}}$ یا حل معادله $z^n = w$ در $\mathbb{C}$ می‌باشد. می‌توان w را به شکل قطبی $w = re^{i\theta}$ نوشت که در آن $r = |w|$ و $\theta = Arg(w)$.

لذا اگر $z_k = r_k e^{i\theta_k} = r_k (\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ و $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ ریشه معادله درجه n ام $z^n = w$ باشد آنگاه داریم:

$$z_k^n = w \Rightarrow$$

$$r_k^n (\cos\theta_k + i\sin\theta_k)^n = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$$

که در آن $k = 0, 1, \dots, n-1$. بنابراین داریم:

$$r_k^n (\cos(n\theta_k) + i\sin(n\theta_k)) = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_k^n = r & \Rightarrow r_k = r^{\frac{1}{n}} \\ n\theta_k = \theta + 2k\pi & \Rightarrow \theta_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

در نتیجه ریشه‌های معادله $z^n = w$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

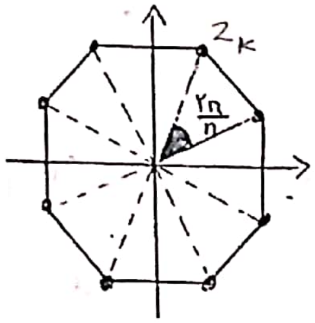
$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

تذکر ۱۰: توجه دارید که فاصله نقاط z_k ریشه‌های معادله $z^n = w$ تا مبدأ برابر $r^{\frac{1}{n}}$

است و بنابراین اختلاف آرگومان اصلی دو ریشه متوالی z_j و z_{j+1} برابر $\frac{2\pi}{n}$ می باشد زیرا

$$\frac{\theta+2(j+1)\pi}{n} - \frac{\theta+2j\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

بنابراین z_k ها رئوس یک n ضلعی منتظم در صفحه می باشند:



مثال ۱۲: معادله $z^4 = 1$ را در $\mathbb{C}$ حل کنید.

حل: $w=1 \Rightarrow r=1$, $\theta = Arg(w) = \tan^{-1}(0) = 0$

$n=4$, $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$, $k=0,1,2,\dots,n-1$

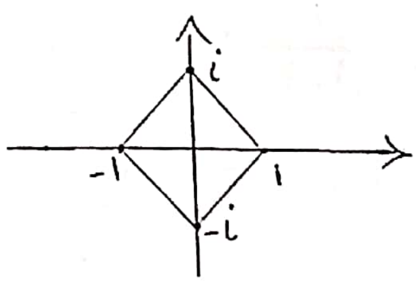
$z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{4})} = e^{i\frac{k\pi}{2}}$, $k=0,1,2,3$

$z_0 = e^{i(0)} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$

$z_1 = e^{i(\frac{\pi}{2})} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$

$z_2 = e^{i(\pi)} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$

$z_3 = e^{i(\frac{3\pi}{2})} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}) = -i$



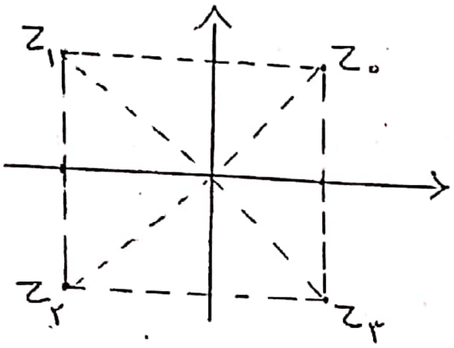
مثال ۱۳: معادله $z^4 = -1$ را در $\mathbb{C}$ حل کنید.

حل: $w=-1 \Rightarrow r=|w|=1$, $\theta = Arg(w) = \pi + \tan^{-1}(0) = \pi$

$n=4$, $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$, $k=0,1,2,\dots,n-1$

$$Z_k = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)} \quad , \quad k=0,1,2,3$$

$$Z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad , \quad Z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad , \quad Z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad , \quad Z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$



مثال ۱۴: معادله $z^3+z^2+z+1=0$ را در $\mathbb{C}$ حل کنید.

حل: $z^4-1=(z-1)(z^3+z^2+z+1)$

$z^4-1=0 \Rightarrow z=1$ یا i یا -1 یا $-i$ $\qquad (\mathrm{I})$

$z-1=0 \Rightarrow z=1$ $\qquad (\mathrm{II})$

$\xrightarrow{(\mathrm{I}),(\mathrm{II})} z^3+z^2+z+1=0 \Rightarrow z=i$ یا -1 یا $-i$

مثال ۱۵: معادله $z^6=\frac{1}{1+i}$ را در $\mathbb{C}$ حل کنید.

حل: $w=\frac{1}{1+i}=\frac{1}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-i}{1^2+(-1)^2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

$r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \theta=Arg(w)=\tan^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{\pi}{4}$

توجه داریم که $w=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$ در ربع چهارم قرار دارد.

$$Z_K=r^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} \quad , \quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

$$Z_k=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{6}\right)} \quad , \quad k=0,1,2,3,4,5$$

— حل معادلات چندجمله‌ای درجه ۲ در $\mathbb{C}$:

معادله $az^2+bz+c=0$ در $\mathbb{C}$ دارای دو ریشه است که با همان فرمول Δ ...

آن را حل نمود. توجه داریم که اگر $(\Delta \in \mathbb{R}$, $\Delta < 0)$ یا $(\Delta \in \mathbb{C}-\mathbb{R})$ آنگاه:

$$az^2+bz+c=0 \Rightarrow az^2+bz=-c$$

$$4a^2z^2+4abz=-4ac$$

$$4a^2z^2+4abz+b^2=b^2-4ac$$

$$(2az+b)^2=\Delta$$

$$2az+b=\Delta^{\frac{1}{2}}$$

$$z=\frac{-b+\Delta^{\frac{1}{2}}}{2a}$$

توجه داریم که $\Delta^{\frac{1}{2}}$ یک عبارت دو مقداری است.

مثال ۱۶: معادلهٔ $z^2+1=0$ را در $\mathbb{C}$ حل کنید.

حل:

$$\Delta=-4<0 \quad \text{و} \quad z=\frac{0+(-4)^{\frac{1}{2}}}{2(1)}$$

از طرفی $(-4)^{\frac{1}{2}}$ دارای دو مقدار $2i$ یا $-2i$ است. بنابراین:

$$z=\frac{0+2i}{2}=i \quad \text{یا} \quad z=\frac{0-2i}{2}=-i$$

مثال ۱۷: معادلهٔ $z^4+z^2+1=0$ را در $\mathbb{C}$ حل کنید.

حل: فرض کنیم $P=z^2$ پس $P^2+P+1=0$. بنابراین:

$$\Delta=-3<0$$

$$P=\frac{-1+(-3)^{\frac{1}{2}}}{2} \Rightarrow P=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{یا} \quad P=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z^2=P \Rightarrow z^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{یا} \quad z^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{و} \quad r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1 \quad \text{و} \quad \theta=-\pi+\tan^{-1}(\sqrt{3})=-\frac{2\pi}{3}$$

توجه داریم که $w = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ در ربع چهارم قرار دارد.

$$z_k = e^{i\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)} \quad , k = 0, 1$$

$$z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad , \quad r = 1 \quad , \quad \theta = \pi + \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_k = e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)} \quad , k = 0, 1$$

بنابراین ریشه‌های $z^4 + z^2 + 1 = 0$ عبارتند از:

$$e^{(-\frac{\pi}{3})i} \quad , \quad e^{(\frac{2\pi}{3})i} \quad , \quad e^{(\frac{\pi}{3})i} \quad , \quad e^{(\frac{4\pi}{3})i}$$

مثال ۸: معادله‌ی $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$ را در $\mathbb{C}$ حل کنید.

حل: $\Delta = (2i - 3)^2 - 4(1)(5 - i) = 4i^2 - 12i + 9 - 20 + 4i = -15 - 8i$

$$= 1 - 16 - 8i = -1 + (4i)^2 - 8i = (1 - 4i)^2$$

ریشه‌های دوم عدد $\Delta = (1 - 4i)^2$ اعداد $(1 - 4i)$ و $-(1 - 4i)$ می‌باشند.

بنابراین:

$$z = \frac{-(2i - 3) - (1 - 4i)}{2} = i + 1$$

یا

$$z = \frac{-(2i - 3) + (1 - 4i)}{2} = -3i + 2$$