دانشگاه صنعتی شاهرود

جلسه چهارم

موازنه لایه ای اندازه حرکت و شرایط مرزی جریان آرام، جریان
فیلم لرزان

موازنه مومنتم جریان آرام

درمورد جریان آرام فرض می‌کنیم سیال بصورت لایه‌های مجزاست و سیال بصورت لایه لایه حرکت می‌کند واین لایه‌ها باهم آمیخته نمی‌شوند.

سرعت انباشتگی مومنتوم = $\underbrace{\ldots}_{\text{سایر نیروها}}$ + سرعت مومنتوم خروجی − سرعت مومنتوم ورودی

(چون مومنتوم دارای بقاست)   کمیت با زمان تغییر نمی‌کند ← حالت پایدار

درشرایط steady state ، سرعت انباشتگی صفر است.

سرعت مومنتوم = سطح × $\dfrac{\text{مومنتوم}}{\text{زمان} \times \text{سطح}}$ = شار مومنتوم × سطح

نیرو = سطح × τ

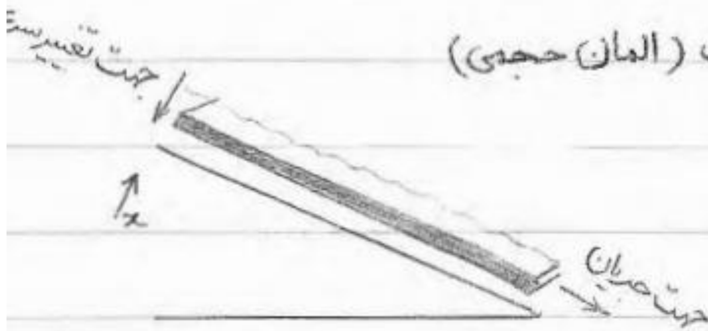
سرعت مومنتوم = نیرو ⇐

سایر نیروها = ثقل − فشار   فشار می‌تواند بعنوان ورودی و خروجی هم باشد.

* مراحل حل مسئله :

۱ـ مشخص کردن مؤلفه‌ی سرعت و جهت تغییر جریان که به درک فیزیکی مسئله مربوط می

2 ـ نوشتن موازنه‌ی مومنتوم برای پوسته‌ی نازک (المان حجمی)



مثال . این المان باید عمود بر جهت تغییر سرعت
باشد . می‌توان المان مکعبی هم در نظر گرفت .

3 ـ اعمال شرایط حدی ← بدست آوردن معادله‌ی دیفرانسیل شار مومنتوم

4ـ انتگرال گیری ← توزیع فشار مومنتوم

5 ـ نوشتن قانون ویسکوزیته‌ی نیوتن برای بدست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل سرعت جریان

6 ـ انتگرال گیری ← معادله سرعت

7 ـ اعمال شرایط مرزی برای بدست آوردن ثوابت انتگرال .

هدف :

معادلات سرعت ـ معادلات تنش برشی ـ معادلات تغییرات فشار ـ معادلات سرعت متوسط ، سرعت max وغیره .

شرایط مرزی

(الف) در فصل‌مشترک‌های جامد-مایع، سرعت سیال با سرعت حرکت سطح جامد برابر است؛ این نکته هم درمورد مؤلفه‌های مماسی و هم درمورد مؤلفه‌های قائم بردار سرعت، صادق است. برابری مؤلفه‌های مماسی را «شرط عدم‌لغزش» می‌نامند.

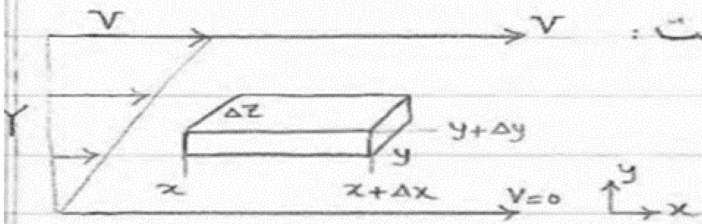
(ب) در صفحهٔ فصل‌مشترک مایع-مایع با x ثابت، مؤلفه‌های سرعت مماسی v_y و v_z در سراسر فصل‌مشترک پیوسته‌اند.

(ج) در صفحهٔ فصل‌مشترک مایع-گاز با x ثابت، مؤلفه‌های تانسور تنش τ_{xy} و τ_{xz} را صفر می‌گیریم، به‌شرط آن‌که گرادیان سرعت درسمت گاز خیلی بزرگ نباشد. این فرض منطقی است، زیرا ویسکوزیتهٔ گازها بسیار کم‌تر از ویسکوزیتهٔ مایعات است.

جریان کوئت

- در مباحث دینامیک سیالات، جریان کوئت جریان آرامی از سیالی لزج بین فضای دو صفحه موازی بسیار بزرگ است که یکی از صفحات نسبت به دیگری حرکت می‌کند. جریان بر اثر نیروی دراگ اعمال شده بر سیال، موازی صفحات حرکت می‌کند. این نوع از جریان به پاس قدردانی از موریس ماری آلفرد کوئت، استاد رشته فیزیک دانشگاه فرانسوی آنژه در اواخر قرن نوزدهم، به این نام خوانده می‌شود.

شکل مسئله مانند اثبات قانون ویسکوزیته‌ی نیوتن است :



یک المان حجمی درنظرمی گیریم .

درجهت انتقال سرعت ، در المان Δ درنظرمی گیریم .

در این جا حتماً Δy داریم .

سرعت مومنتوم خروجی   سرعت مومنتوم ورودی .

$$\Delta Z \cdot \Delta x \cdot \tau_{yx}\Big|_{y+\Delta y} - \Delta Z \cdot \Delta x \cdot \tau_{yx}\Big|_{y}$$

فرض های اولیه‌ی مسئله : $V_y = V_z = 0$ V_x داریم

V_x تابعی است از y : $V_x = V_x(y)$

چرا تابعی از x نیست . (برهان خلف) اگر تابعی از x باشد ناپیوستگی در سیال ایجاد می‌شود

سرعت مومنتوم ورودی   سرعت مومنتوم خروجی

مومنتوم جابه جائی صفر است : $\rho v_x^2\big|_x \Delta y \Delta z - \rho v_x^2\big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z = 0$

نیروی ثقل تأثیری در جریان ندارد . ⟵ نمی نویسیم

$$\xrightarrow{x\Delta y\Delta z} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y}{\Delta y} = 0 \rightarrow \frac{d\tau_{yx}}{dy} = 0 \rightarrow \tau_{yx} = C_1$$

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} = C_1$$

$$\rightarrow \frac{dv_x}{dy} = -\frac{C_1}{\mu} \qquad \rightarrow v_x = -\frac{C_1}{\mu} y + C_2$$

شرایط مرزی BC1 : $y = 0 \rightarrow v_x = 0$

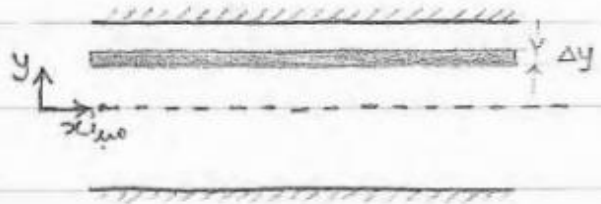
$y = Y \rightarrow v_x = V$

حل برای C_1 و C_2 : $v_x = \frac{V}{Y} y$ $\tau_{yx} = -\mu \frac{V}{Y}$

جریان بین دوسطح موازی

کانال با سطح مقطع مستطیل با دو صفحهٔ ساکن داریم. نیروی ثقل نقشی در جریان ندارد. در نتیجه

فقط اختلاف فشار موجب حرکت می‌شود. W: عمق



فرض: لایه‌ای - پایدار - نیوتنی - تراکم‌ناپذیر

..کاملاً شکل‌یافته (fully developed flow) $\qquad V_x = V_x(y) \qquad V_z = V_y = 0$

$$L.W.\,\tau_{yx}\Big|_{y} - L.W.\,\tau_{yx}\Big|_{y+\Delta y}$$

$$+\, W\Delta y\, P\Big|_{x=0} - W\Delta y\, P\Big|_{x=L} = 0$$

$$\xrightarrow[\Delta y \to 0]{\div L W \Delta y} \quad \frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{P_0 - P_L}{L} \quad \rightarrow \tau_{yx} = \frac{P_0 - P_L}{L}\, y + C_1$$

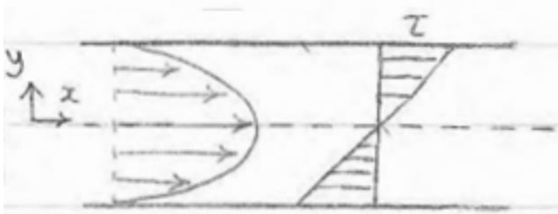
بنا به تقارن، سرعت در وسط max است پس تنش برشی صفر است .

$$y=0 \rightarrow \tau_{yx}=0 \rightarrow c_1=0$$

این شرط مرزی در مراحل بعدی هم بدست می آید .

$$\Rightarrow V_x = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\, y^2 + c_2 \qquad y=\delta \rightarrow V_x=0$$

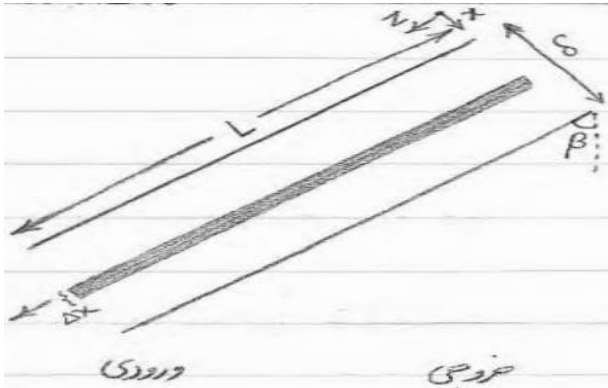
$$\Rightarrow c_2 = \frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\,\delta^2 \qquad \Rightarrow V_x = \frac{1}{2\mu}\,(\delta^2 - y^2)\,\frac{P_0 - P_L}{L}$$



تنش برشی مثبت یا منفی است .

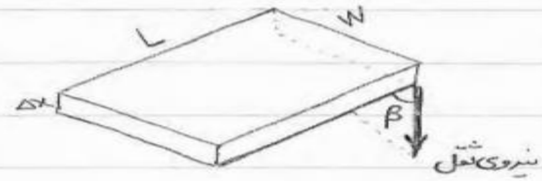
جریان مایع بصورت آرام روی یک سطح شیبدار

دراینجا نیروی وزن موجب حرکت سیال می‌شود. چون جریان آرام است، بنابراین سیال لایه‌لایه است
و هر لایه درراستای شیب سطح حرکت می‌کند. همچنین سیال نیوتنی است و تراکم‌ناپذیر و پایدار.
یعنی شتاب صفراست. بنابراین نیروی ویسکوز باید آنقدر بزرگ باشد که بر نیروی ثقل غلبه کند.



$$V_x = V_y = 0$$

$$V_z = V_z(x)$$



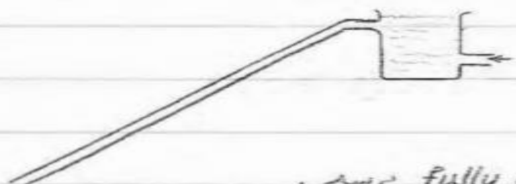
$$Lw\,\tau_{xz}\big|_{x} - Lw\,\tau_{xz}\big|_{x+\Delta x}$$

$$W\Delta x\,\rho V_z^2\big|_{z=0} - W\Delta x\,\rho V_z^2\big|_{z=\ell}$$

$$mg\cos\beta$$

مؤلفه‌ی $mg\sin\beta$ تأثیری در جریان ندارد.

در اینجا در نقاط ابتدا و انتها تغییرات فشار نداریم و در هر دو نقطه‌ی فوق، فشار مساوی فشار جو است



در ابتدای مسیر چون سرعت صفر است پس تا

مسافتی کم شتاب وجود دارد تا به شرایط fully developed flow برسد.

$$\xrightarrow[\Delta x \to 0]{\div L.w.\Delta x} \quad \frac{\tau_{xz}|_x - \tau_{xz}|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho g\cos\beta = 0$$

$$\Rightarrow \; -\frac{d\tau_{xz}}{dx} + \rho g\cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \; \tau_{xz} = \rho g\cos\beta\; x + C_1$$

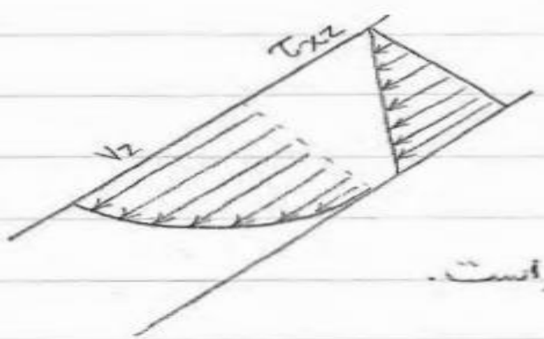
سطح بالائی جریان سیال، با گاز در ارتباط است ← تنش برشی ناچیز است.

$$x=0 \rightarrow \tau_{xz}=0 \rightarrow C_1=0$$

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} = \rho g \cos\beta \, x$$

$$\rightarrow V_z = \frac{\rho g \cos\beta}{-2\mu} x^2 + C_2 \qquad x=\delta \rightarrow V_z=0$$

$$\rightarrow C_2 = \frac{\rho g \cos\beta}{2\mu} \delta^2 \qquad \rightarrow V_z = \frac{\rho g \cos\beta \, \delta^2}{2\mu} \left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]$$



درنتیجه معادله بصورت سهمی است.

نتیجه، جائی که تنش صفر است، سرعت max بوده و جائی که تنش max است، سرعت صفر است.

$$V_z(max) = \frac{\rho g \cos\beta \, \delta^2}{2\mu}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\int_0^W \int_0^\delta v_z \, dx\, dy}{\int_0^W \int_0^\delta dx\, dy} = \frac{\rho g \cos\beta \, \delta^2}{3\mu} = \frac{2}{3} v_z\,(max)$$

سرعت حجمی (دبی حجمی):

عبارتست از سطح مقطع در سرعت سطح. چون سرعت در داخل سطح تغییر می‌کند

بصورت انتگرالی نوشته می‌شود: $\boxed{v_z}$ x y

$$\int_0^W \int_0^\delta v_z \, dx\, dy$$

سرعت جرمی (دبی جرمی):

$$\dot{w} = \rho \int_0^W \int_0^\delta v_z \, dx\, dy$$

$$= \frac{\rho^2 g W \delta^3 \cos\beta}{3\mu}$$

ضخامت فیلم δ را می‌توان برحسب سرعت متوسط یا آهنگ جریان جرمی، به‌صورت زیر ارائه داد:

$$\delta = \sqrt{\frac{3\mu\langle v_z\rangle}{\rho g \cos\beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu w}{\rho^2 g W \cos\beta}}$$

عدد رینولد در جریان آرام یک سطح شیبدار

عدد رینولدز:

$$Re = \frac{4\delta \bar{V}_z \rho}{\mu} < 20$$

این عدد نشان دهنده آرام بودن و اغتشاش سیال است. هرچه این عدد بزرگتر باشد، سیال تمایل به اغتشاش دارد. اگر کوچکتر از 20 باشد، سیال جریان آرام دارد.

D: بعد مشخصه = 4 برابر ضخامت در مورد سطح شیبدار

رابطهٔ کلی $Re = \frac{D V \rho}{\mu}$

در حالت کلی وابسته به هندسه مسئله است.

ویسکوزیتهٔ سینماتیکی نوعی روغن برابر است با: $2\times10^{-4}\,m^2/s$ و چگالی آن $0.8\times10^{3}\,kg/m^3$ است. می‌خواهیم فیلم ریزانی به‌ضخامت $2.5\,mm$ روی جدار عمودی داشته‌باشیم، آهنگ جریان جرمی مایع چه‌قدر باید باشد؟

$$\mathrm{Re} = \frac{۴\delta\langle v_z\rangle\rho}{\mu} = \frac{۴w/W}{\nu\rho} = \frac{۴(۰/۲۰۴)}{(۲\times ۱۰^{-۴})(۰/۸\times ۱۰^{۳})} = ۵/۱$$

این عددرینولد کمتر از ۲۰ است پس جریان آرام داریم

$$w = \frac{\rho g\delta^{۳}W}{۳\nu} = \frac{(۰/۸\times ۱۰^{۳})(۹/۸۰)(۲/۵\times ۱۰^{-۳})^{۳}W}{۳(۲\times ۱۰^{-۴})} = ۰/۲۰۴W$$

ضخامت فیلم ریزان. آب با دمای $20^\circ\mathrm{C}$ روی جداری عمودی با $\mathrm{Re} = 10$ به‌طرف پایین جریان دارد. مطلوب است محاسبهٔ (الف) آهنگ جریان، برحسب گالن در ساعت بر هر فوت عرض دیوار، و (ب) ضخامت فیلم برحسب اینچ.

$$\frac{w}{\rho W} = \frac{\nu \mathrm{Re}}{4} = \frac{(1.0037 \times 10^{-2})(10)}{4} = 2.509 \times 10^{-2}\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$$

1 ft=12×2.54 cm, 1 hr =3600 s, and 1 gal=231.00 in^3×(2.54cm/in)^3=3785.4 cm^3

$$\frac{w}{\rho W} = 0.02509\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s} \times \frac{1}{3785.4}\ \mathrm{gal}/\mathrm{cm}^3 \times 30.48\ \mathrm{cm}/\mathrm{ft} \times 3600\ \mathrm{s}/\mathrm{hr}$$
$$= 0.727\ \text{U.S. gal/hr}\cdot\text{ft}$$

$$\delta = \left(\frac{3\nu}{g\cos\beta}\frac{w}{\rho W}\right)^{1/3}$$
$$= \left(\frac{3\nu}{g\cos\beta}\frac{\nu \mathrm{Re}}{4}\right)^{1/3}$$
$$= \left(\frac{3 \times 1.0037 \times 10^{-2}}{(980.665)(1.0)}(2.509 \times 10^{-2})\right)^{1/3} = 0.009167\ \mathrm{cm}$$
$$= 0.00361\ \text{in.}$$

جریان سطح شیبدار با ویسکوزیته متغیر

مسئلهٔ فیلم ریزان را درحالت وابسته بودن ویسکوزیته به مکان، یعنی $\mu = \mu_\circ e^{-\alpha x/\delta}$ دوباره حل کنید؛ این حالت هنگامی پدید می‌آید که فیلم غیرهم‌دما باشد، مانند چگالش بخار روی جدار. در این‌جا $\mu_\circ$ ویسکوزیتهٔ سطح فیلم و α ثابتی است که سرعت کاهش μ با افزایش x را نشان می‌دهد.

$$-\mu_\circ e^{-\alpha x/\delta} \frac{dv_z}{dx} = \rho g x \cos\beta$$

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{\mu_\circ}\left[e^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) - e^{\alpha x/\delta}\left(\frac{x}{\alpha\delta} - \frac{1}{\alpha^2}\right)\right]$$

به‌عنوان وارسی، توزیع سرعت را برای مسئلهٔ ویسکوزیتهٔ ثابت (یعنی وقتی α صفر است) به‌دست می‌آوریم. اما وقتی $\alpha = ۰$، برای دو عبارت داخل پرانتز داریم $\infty - \infty$. با بسط دادن دو عبارت نمایی سری تیلر بر این مشکل غلبه کنیم؛

$$
\begin{aligned}
(v_z)_{\alpha=۰} &= \frac{\rho g \delta^{۲} \cos\beta}{\mu_{۰}} \lim_{\alpha \to ۰} \left[\left(۱ + \alpha + \frac{\alpha^{۲}}{۲!} + \frac{\alpha^{۳}}{۳!} + \dots \right) \left(\frac{۱}{\alpha} - \frac{۱}{\alpha^{۲}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(۱ + \frac{\alpha x}{\delta} + \frac{\alpha^{۲} x^{۲}}{۲! \delta^{۲}} + \frac{\alpha^{۳} x^{۳}}{۳! \delta^{۳}} + \dots \right) \left(\frac{x}{\alpha \delta} - \frac{۱}{\alpha^{۲}} \right) \right] \\
&= \frac{\rho g \delta^{۲} \cos\beta}{\mu_{۰}} \lim_{\alpha \to ۰} \left[\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}\alpha + \dots \right) - \left(\frac{۱}{۲} \frac{x^{۲}}{\delta^{۲}} - \frac{۱}{۳} \frac{x^{۳}}{\delta^{۳}} \alpha + \dots \right) \right] \\
&= \frac{\rho g \delta^{۲} \cos\beta}{۲\mu_{۰}} \left[۱ - \left(\frac{x}{\delta} \right)^{۲} \right]
\end{aligned}
$$