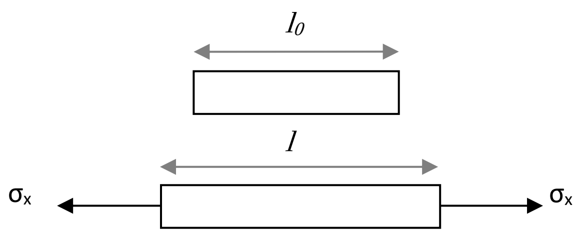
قسمت دوم:

کرنش (*strain*)

تعریف کرنش: تغییرشکل ماده تحت اعمال تنش

الف) کرنش خطی یا محوری (*linear (axial) strain*): نسبت تغییر طول ماده به طول اولیه آن



کرنش خطی میانگین $e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$

l_0= طول اولیه

l= طول نهایی

کرنش کمیتی بدون بعد است.

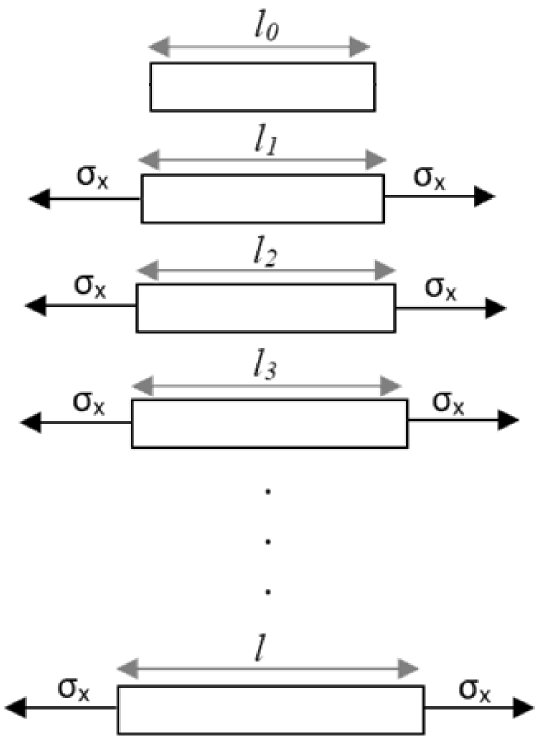
کرنش خطی در یک نقطه برابر است با نسبت تغییر طول به طول اولیه، هنگامی‌که طول اولیه به سمت صفر میل کند.

از طرفی کرنش خطی را می‌توان به دو صورت مهندسی و حقیقی محاسبه کرد:

- **کرنش مهندسی:** نسبت تغییر طول به طول اولیه ماده (همان‌طور که در بالا گفته شد)

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

- **کرنش حقیقی:** تغییرطول لحظه‌ای ماده تقسیم بر مقدار لحظه‌ای طول



$$\varepsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} + \frac{l_2 - l_1}{l_1} + \frac{l_3 - l_2}{l_2} + \cdots \Longrightarrow \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i - l_{i-1}}{l_{i-1}}$$

اگر مقدار $dl = l_i - l_{i-1}$ بسیار کوچک باشد، داریم:

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = ln\frac{l}{l_0} \Longrightarrow \varepsilon = ln\frac{l}{l_0}$$

ارتباط بین کرنش مهندسی و حقیقی (مهم و کاربردی):

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1 \Longrightarrow \frac{l}{l_0} = 1 + e$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \ln{(1 + e)}$$

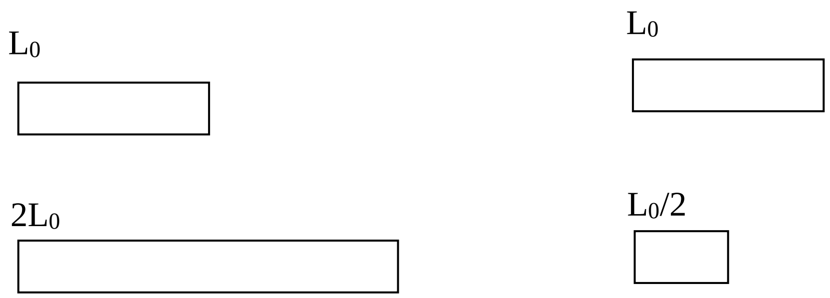
در مقادیر خیلی کوچک کرنش که معادلات کشسانی معتبر است، مقادیر کرنش مهندسی و حقیقی برابر هستند:

$$\varepsilon = \ln(1+e) = e - \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} - \frac{e^4}{4} + \cdots \Rightarrow \quad if \quad e \le 0.1 \Longrightarrow \varepsilon \approx e$$

کار کردن با کرنش‌های حقیقی مخصوصاً در تغییر شکل پلاستیکی مطلوب‌تر است، زیرا:

۱- کرنش‌های حقیقی برای تغییرشکل معادل در فشار و کشش برابرند و تنها علامت آنها برعکس است.

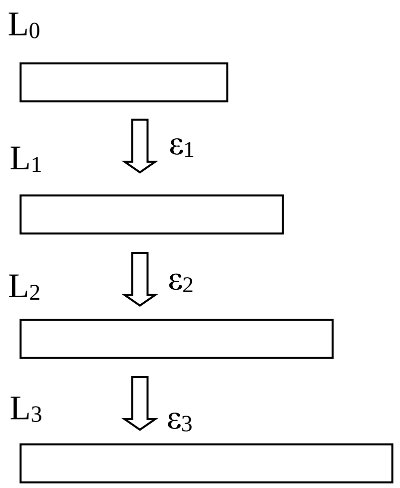
مثال:



$e = 1$ $\qquad$ $e = -\frac{1}{2}$

$\varepsilon = ln2$ $\qquad$ $\varepsilon = ln\frac{1}{2} = -ln2$

۲- کرنش‌های حقیقی جمع‌پذیرند. یعنی کرنش حقیقی کل محاسبه شده در یک فرایند چندمرحله‌ای با مجموع کرنش‌های حقیقی تک‌تک مراحل برابر است.



$$\varepsilon_1 = ln\frac{l_1}{l_0} \qquad \varepsilon_2 = ln\frac{l_2}{l_1} \qquad \varepsilon_3 = ln\frac{l_3}{l_2} \qquad \varepsilon_{tot} = ln\frac{l_3}{l_0}$$

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$e_1 = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \qquad e_2 = \frac{l_2 - l_1}{l_1} \qquad e_3 = \frac{l_3 - l_2}{l_2} \qquad e_{tot} = \frac{l_3 - l_0}{l_0}$$

$$e_{tot} \neq e_1 + e_2 + e_3$$

۳- در حالت حقیقی می‌توان کرنش حجمی را بر حسب کرنش‌های خطی بیان کرد، یعنی داریم:

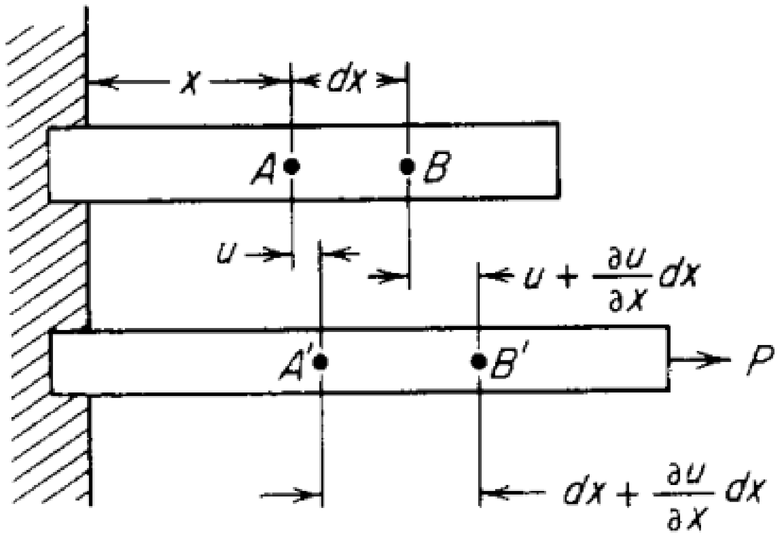
$$\varepsilon_v = \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \ln\left(\frac{lwt}{l_0 w_0 t_0}\right) = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) + \ln\left(\frac{w}{w_0}\right) + \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) = \varepsilon_l + \varepsilon_w + \varepsilon_t$$

در تغییرشکل پلاستیکی فلزات، تغییر حجم نداریم (کرنش‌های الاستیک کم را به حساب نمی‌آوریم) و $V = V_0$ و در نتیجه داریم:

رابطه مهم در تغییرشکل پلاستیکی فلزات $\quad \varepsilon_v = \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = 0 \quad \text{or} \quad \varepsilon_l + \varepsilon_w + \varepsilon_t = 0$

(در این رابطه، قسمت‌های پلاستیک کرنش‌های کل به حساب آمده‌اند.)

کرنش طولی را می‌توان به صورت زیر نیز نشان داد:



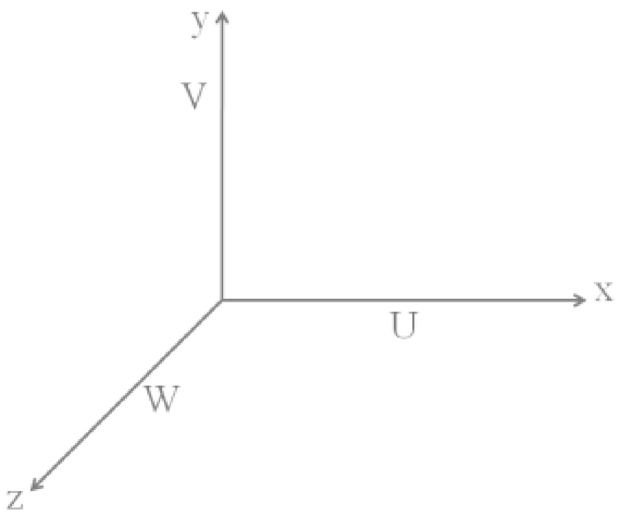
جابجایی B نسبت به A به اندازه $\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{dx}$ بیشتر بوده و داریم:

$$e_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{dx + \frac{\partial U}{\partial x}dx - dx}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$e_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

به همین ترتیب:

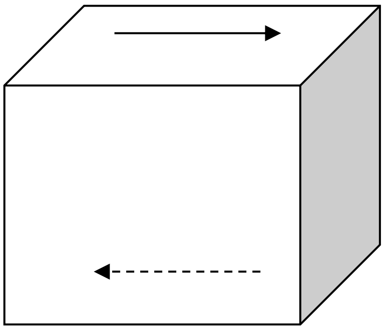
$$e_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad . \quad e_z = \frac{\partial W}{\partial z}$$

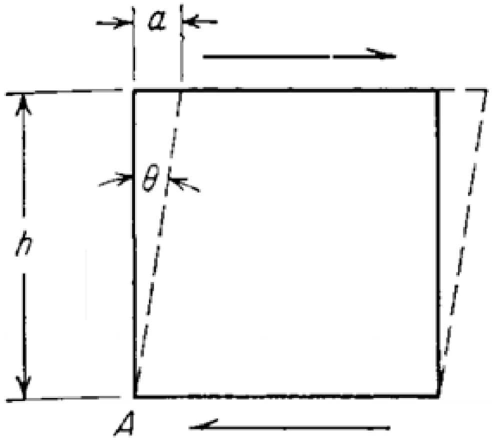


U، V و W جابجایی در راستای محورهای x، y و z هستند.

ب) کرنش برشی یا صفحه‌ای

برعکس کرنش محوری که در اثر اعمال تنش عمودی یا نرمال (σ) ایجاد می‌شود، کرنش برشی در اثر اعمال تنش برشی ایجاد می‌شود. در درس خواص مکانیکی، کرنش برشی را به عنوان تغییر زاویه اولیه بین دو خط از جسم در اثر اعمال تنش برشی تعریف کرده و به صورت زیر نشان دادیم:





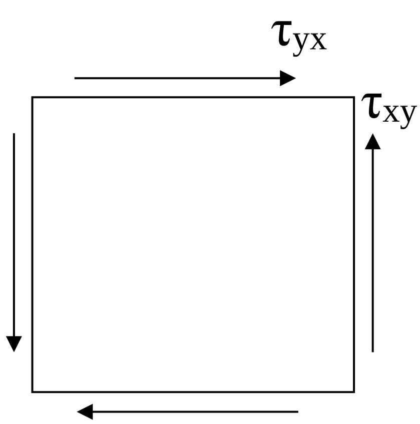
$$\gamma = \frac{a}{h} = \mathrm{tg}\theta \approx \theta$$

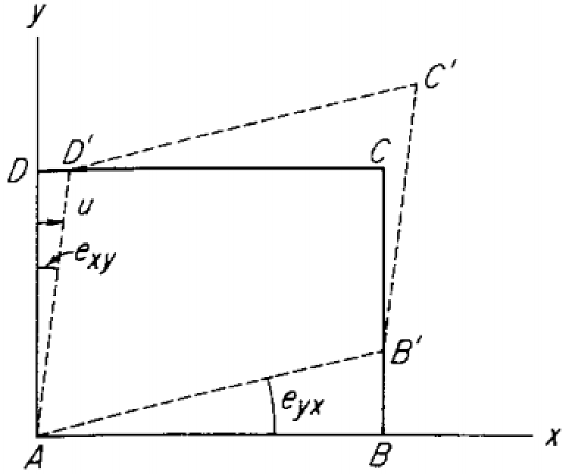
a: جابجایی صفحه بالایی و پایینی نسبت به هم

h: فاصله بین دو صفحه

وقتی زاویه کوچک باشد $\theta \approx \mathrm{tg}\theta \Leftarrow$ کرنش برشی را معمولاً با خود زاویه چرخش بیان می‌کنند.

اما در حالت کلی تنش به صورت زیر اعمال شده و کرنش مطابق روابط زیر به‌دست می‌آید:





یعنی در المان دو تغییر زاویه ایجاد می‌شود که آنها را با e_{xy} و e_{yx} نشان می‌دهیم. جابجایی نقاط در امتداد AD در جهت موازی با محور x اتفاق می‌افتد ولی این جابجایی متناسب با فاصله از مبدأ در امتداد محور y است. بنابراین تغییر زاویه e_{xy} برابر است با:

$$e_{xy} = \frac{DD'}{DA} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

به همین ترتیب:

$$e_{yx} = \frac{BB'}{AB} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

و داریم:

$$\gamma_{xy} = e_{xy} + e_{yx}$$

اما تغییر زاویه e_{xy} و e_{yx} هم کرنش برشی و هم چرخش جسم صلب ایجاد می‌کنند. اگر بخواهیم کرنش را به صورت تنسور نشان دهیم باید دو سهم کرنشی و چرخشی را از هم جدا کنیم، برای هر i و j:

$$e_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{2}\left(e_{\mathrm{ij}} + e_{\mathrm{ji}}\right) + \frac{1}{2}\left(e_{\mathrm{ij}} - e_{\mathrm{ji}}\right)$$

مثلاً:

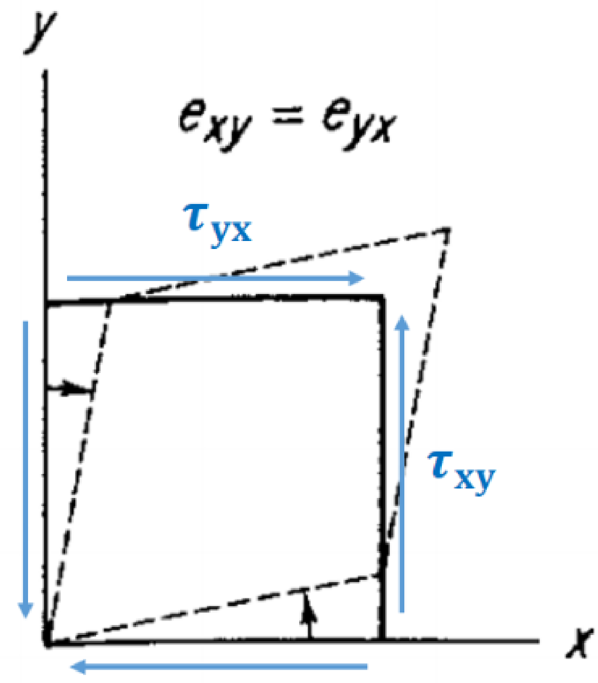
$$e_{\mathrm{xy}} = \frac{1}{2}\left(e_{\mathrm{xy}} + e_{\mathrm{yx}}\right) + \frac{1}{2}\left(e_{\mathrm{xy}} - e_{\mathrm{yx}}\right)$$

$$\Longrightarrow e_{xy} = \quad \varepsilon_{\mathrm{xy}} \quad + \quad \omega_{\mathrm{xy}}$$

مولفه کرنش $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)$ 　　　 مولفه چرخش $\omega_{\mathrm{xy}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)$

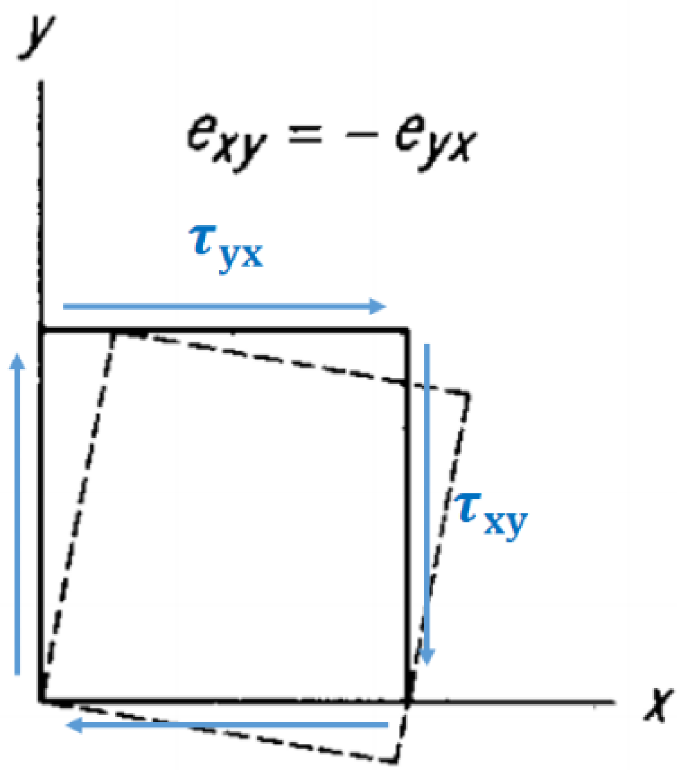
برای درک بهتر موضوع، چند حالت خاص را می‌توان در نظر گرفت:

۱- $e_{xy} = e_{yx}$



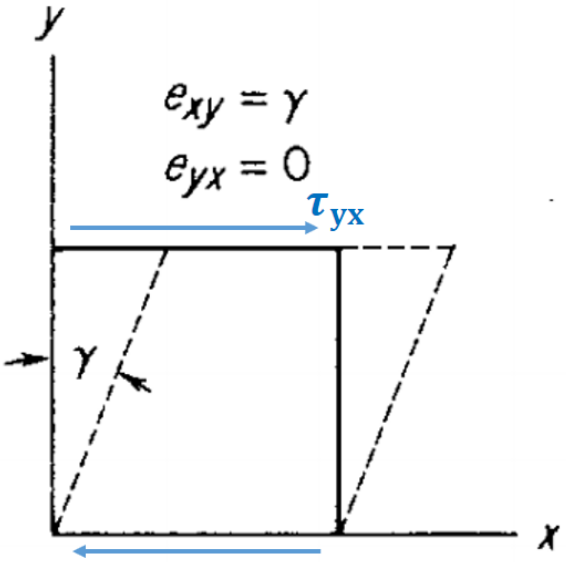
در این حالت: $e_{xy} = \frac{1}{2}(e_{xy} + e_{yx}) = e_{xy}$ و $\omega_{xy} = \frac{1}{2}(e_{xy} - e_{yx}) = 0$

۲- $e_{xy} = -e_{yx}$



در این حالت: $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(e_{xy} + e_{yx}) = 0$ و $\omega_{xy} = \frac{1}{2}(e_{xy} - e_{yx}) = e_{xy}$

۳- $e_{xy} = \gamma_{xy}\ .\ e_{yx} = 0$



در این حالت: $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} e_{xy}$ و $\omega_{xy} = \frac{1}{2} e_{xy}$

مؤلفه‌های تنسور کرنش و چرخش:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}) & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}) & \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} \omega_{xx} & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & \omega_{yy} & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & \omega_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}) & 0 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \Leftarrow$ تنسور کرنش متقارن است.

$\omega_{ij} \neq \omega_{ji} \Leftarrow$تنسور چرخش نامتقارن است.

اگر $\omega_{ij} = 0 \Leftarrow$ چرخش نداریم و تغییرشکل غیرچرخشی است.

پس به طور کلی، کرنش برشی کل (کرنش برشی مهندسی، γ) به صورت تغییرشکل زاویه‌ای کل نسبت به زاویه قائم تعریف می‌شود و داریم:

$$\gamma_{xy} = e_{xy} + e_{yx} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = 2\varepsilon_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad ,\gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}$$

روابط تبدیل و دایره مور برای کرنش

تمام روابط تبدیل و دایره مور که برای تنش در قسمت قبل به دست آمد را می‌توان برای تنسور کرنش (ε_{ij}) نیز استفاده کرد.

مثلاً:

- در حالت دو بعدی روابط تبدیل کرنش مطابق روابط تبدیل تنش داریم:

$$\varepsilon_{\acute{x}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} cos2\theta + \varepsilon_{xy} sin2\theta$$
$$\varepsilon_{\acute{y}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} cos2\theta - \varepsilon_{xy} sin2\theta$$
$$\varepsilon_{\acute{x}\acute{y}} = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2} sin2\theta + \varepsilon_{xy} cos2\theta$$

- محورهای کرنش اصلی داریم (در امتداد آنها کرنش برشی نداریم) و در یک جسم همسان‌گرد جهت تنش‌ها و کرنش‌های اصلی بر هم منطبق‌اند. مقادیر کرنش‌های اصلی از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0$$

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$ همان کرنش حجمی

$$I_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2$$

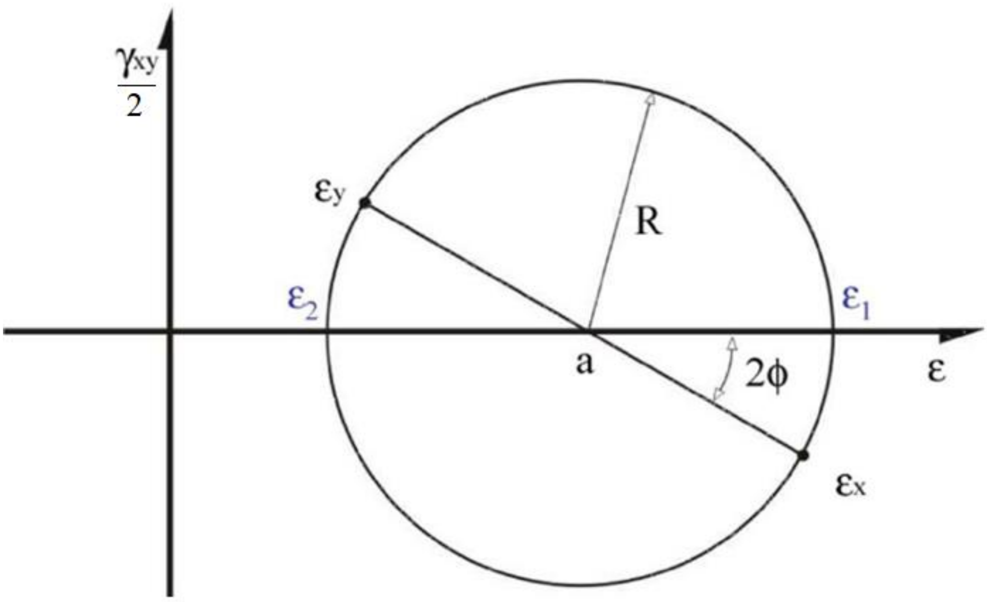
$$I_3 = |\varepsilon_{ij}|$$

- رابطه جهات کرنش‌های اصلی مشابه با رابطه جهات تنش‌های اصلی است.

- رابطه کرنش‌های برشی اصلی (حداکثر) همانند تنش‌های برشی اصلی

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \qquad \gamma_{\max} = \gamma_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \qquad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

- مانند تنش، برای کرنش نیز دایره مور داریم:



- مانند تنش، کرنش‌های هیدرواستاتیک و دویاتوریک با روابط مشابه با حالت تنش داریم.